GELE2511 Chapitre 5 : Signaux et systèmes discrets

Gabriel Cormier, Ph.D., ing.

Université de Moncton

Hiver 2013

Contenu

Contenu

- Signaux discrets
- Décimation et interpolation
- Signaux discrets communs
- Systèmes discrets
- Réponse impulsionnelle
- Échantillonnage

Signaux discrets

- Un phénomène physique, qui est continu, lorqu'on l'enregistre sur ordinateur, devient une séquence discrète.
- Un signal discret ou échantillonné est une séquence ordonnée de valeurs correspondant à un entier n qui représente l'histoire en fonction du temps d'un signal.
- Le signal discret ne donne aucune information quant à l'intervalle t_s entre les échantillons.
- Le temps t_s représente l'intervalle de temps entre chaque échantillon. La fréquence d'échantillonnage est $S = f_s = 1/t_s$.

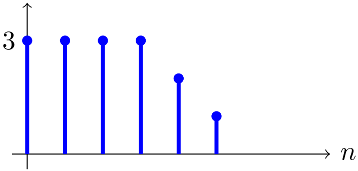
Signaux discrets

- Un signal discret est représenté en fonction du numéro de l'échantillon n, et non en fonction du temps.
- On utilise $x[n]$ au lieu de $x(t)$ pour représenter un signal discret.
- Pour représenter l'origine, l'échantillon qui correspond à $n = 0$, on utilise une flèche :

$$x[n] = \{1, 2, \underset{\uparrow}{4}, 8, \ldots\}$$

Signaux discrets

Exemple :



La séquence pour ce signal est :

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{3}, 3, 3, 3, 2, 1\}$$

Si l'origine est le premier point, il n'est pas nécessaire d'utiliser la flèche.

Signal discret périodique

- Tout comme les signaux continus, les signaux discrets peuvent être périodiques.
- Un signal discret périodique se répète à tous les N échantillons, de sorte que :

$$x[n] = x[n \pm kN] \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- La période N est le plus petit nombre d'échantillons qui se répètent. La période est toujours un entier.

UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Puissance et énergie

- La valeur moyenne d'un signal discret est :

$$x_{av} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

- La puissance d'un signal discret est :

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

- L'énergie d'un signal discret est :

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Exemple

Calculer la valeur moyenne et la puissance d'un signal périodique $x[n] = 6\cos(2\pi n/4)$, de période $N = 4$.

Une période de ce signal est $n = 0, 1, 2, 3$:

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{6}, 0, -6, 0\}$$

La valeur moyenne est :

$$x_{av} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{4}(6 + 0 - 6 + 0) = 0$$

La puissance est :

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{4}(36 + 0 + 36 + 0) = 18 \text{ W}$$

Déphasage

- Le déphasage veut dire déplacer la séquence vers la droite ou vers la gauche.
- $x[n-k]$ veut dire que la séquence est déplacée de k échantillons vers la droite.

Repliement

- Le repliement est l'image miroir d'un signal autour de l'ordonnée.
- $x[-n]$ veut dire que la séquence est une image miroir de $x[n]$ autour de $n = 0$.

Opérations

- La méthode générale pour effectuer des opérations sur un signal continu (Chapitre 1) s'applique aussi aux signaux discrets.
- Dans ce cas-ci, on remplace l'axe original n par un axe m.

Symétrie

- Un signal est pair si :

$$x[n] = x[-n]$$

où on utilise souvent $x_e[n]$ pour indiquer un signal pair.

- Un signal est impair si :

$$x[n] = -x[-n]$$

où on utilise souvent $x_o[n]$ pour indiquer un signal impair.

Symétrie

- N'importe quel signal $x[n]$ peut être décomposé en une somme d'un signal pair et un signal impair :

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

- Les signaux pairs et impairs sont calculés selon :

$$x_e[n] = 0.5(x[n] + x[-n])$$
$$x_o[n] = 0.5(x[n] - x[-n])$$

Décimation et interpolation

- La décimation et l'interpolation sont deux opérations qui affectent l'échelle n d'un signal discret.
- Dans le cas d'un signal discret, il s'agit d'augmenter ou réduire le nombre d'échantillons d'un signal.

Décimation

- La décimation est la compression d'un signal.
- Correspond à accélérer un signal, ou réduire son taux d'échantillonnage.
- Exemple : soit un signal $x[n]$
  - $y[n] = x[2n]$ est une version compressée de $x[n]$.
  - Correspond à échantillonner $x(2t)$ au temps t_s, ou échantillonner $x(t)$ au temps $2t_s$.
- On peut perdre de l'information avec la décimation.

Interpolation

- L'interpolation est l'étirement d'un signal.
- Correspond à ralentir un signal, ou à augmenter l'échantillonnage.
- Exemple : soit un signal $x[n]$
  - $y[n] = x[n/2]$ est une version allongée de $x[n]$.
  - Correspond à échantillonner $x(t)$ au temps $t_s/2$.
- Le signal aura plus d'échantillons.

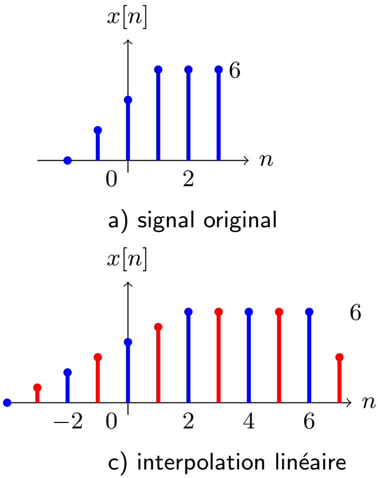
Interpolation

Comment calculer les nouveaux échantillons ?

- **Interpolation zéro** : chaque nouvel échantillon est nul.
- **Interpolation échelon** : chaque nouvel échantillon a la même valeur que l'échantillon précédent.
- **Interpolation linéaire** : chaque nouvel échantillon est la moyenne des échantillons adjacents.

UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Interpolation



Interpolation et décimation

- La décimation est l'inverse de l'interpolation, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.
- Lorsqu'il y a décimation, il y a perte d'information ; on n'est pas capable de reproduire correctement le signal original.

Exemple

Soit la séquence $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 6, 4, 8\}$. Effectuer l'interpolation et la décimation.

On effectue l'interpolation en premier :

Interpolation échelon :

$$x_i[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2, 2, 6, 6, 4, 4, 8, 8\}$$

Décimation :

$$x_d[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 6, 4, 8\}$$

On obtient le signal original.

Exemple (2)

Avec la décimation en premier :

Décimation :

$$x_d[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 6, 8\}$$

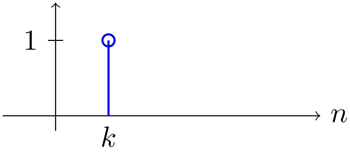
puis interpolation échelon :

$$x_d[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 6, 6, 8, 8\}$$

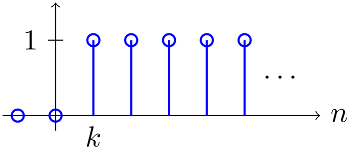
On n'obtient pas le signal original.

Signaux discrets communs

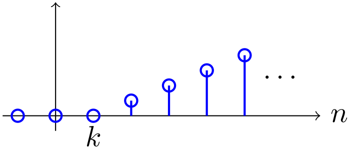
Impulsion $\delta[n-k] = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}$



Échelon $u[n-k] = \begin{cases} 0, & n < k \\ 1, & n \geq k \end{cases}$

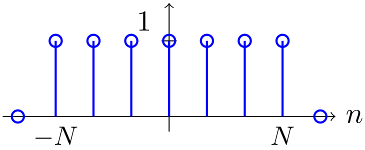


Rampe $r[n-k] = \begin{cases} 0, & n < k \\ n-k, & n \geq k \end{cases}$

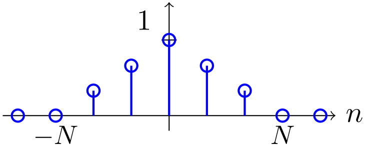


Signaux discrets communs

Rectangulaire $\text{rect}\left[\frac{n}{2N}\right] = \begin{cases} 1, & |n| < N \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$



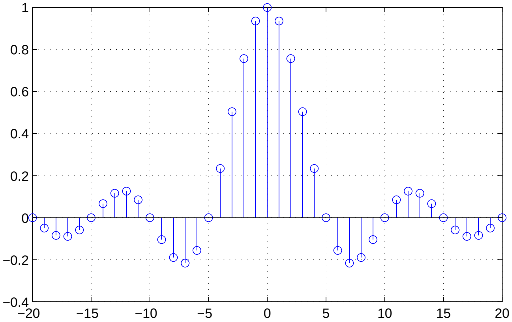
Triangulaire $\text{tri}\left[\frac{n}{N}\right] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, & |n| < N \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$



Signaux discrets communs

$$\mathrm{sinc}[n/N] = \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi/N}$$

Exemple : $N = 5$



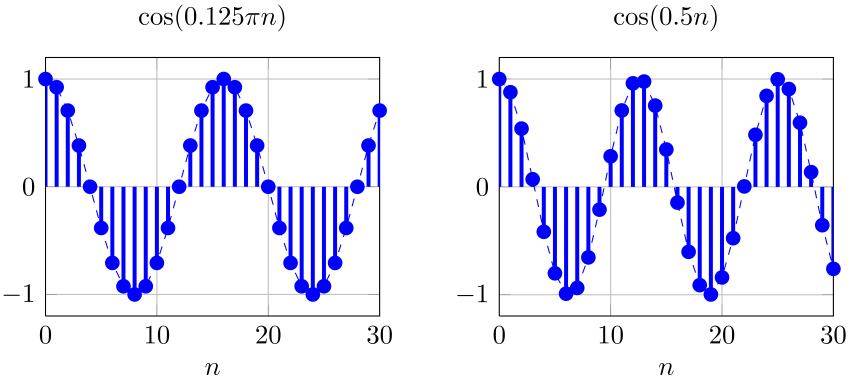
Sinusoïdes discrètes

- Si on échantillonne une sinusoïde continue $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ à un intervalle t_s, on obtient la sinusoïde échantillonnée suivante :

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi f_0 n t_s + \theta) = \cos\left(2\pi n \frac{f_0}{f_s} + \theta\right) \\ &= \cos(2\pi n F + \theta) \end{aligned}$$

  où F est la *fréquence numérique*.
- La fréquence numérique radiale est $\Omega = 2\pi F$
- NOTE : une sinusoïde discrete n'est pas nécessairement périodique.

Sinusoïdes discrètes



Périodique, $N_0 = 16$

Non périodique

Périodique si $N_0 F =$ entier.

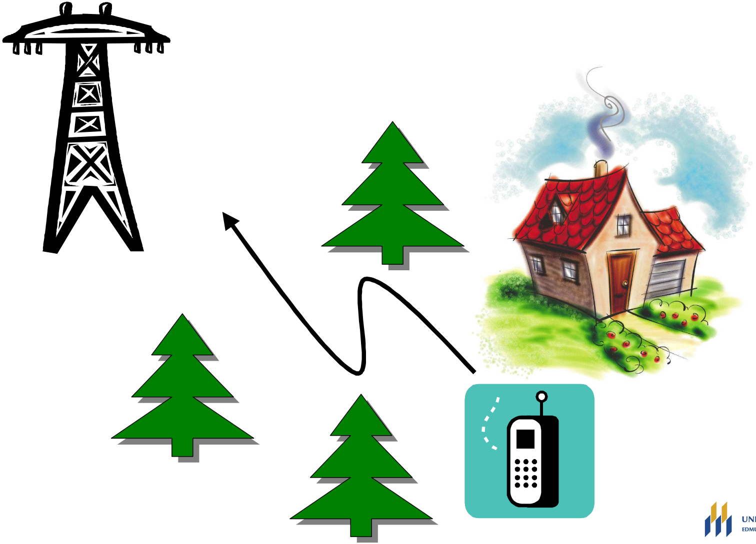
Systèmes discrets

- Un système discret est un système où l'entrée et la sortie sont discrets.
- On s'intéresse aux systèmes linéaires.
- Les systèmes linéaires permettent d'étudier beaucoup de systèmes différents sans avoir besoin d'aller en détail.

Systèmes discrets

- Les systèmes discrets possèdent les mêmes caractéristiques que les systèmes continus.
  - Homogénéité
  - Additivité
  - Invariance dans le temps
  - Fidélité sinusoïdale
- Les systèmes discrets sont aussi caractérisés par leur réponse impulsionnelle.

Systèmes discrets



Échantillonnage

- L'échantillonnage est une composante très importante d'un système discret.
- Il permet de convertir un signal continu à un signal discret.
- On s'intéresse ici à *quand* on prend les échantillons (temps), et non comment (l'électronique).

Échantillons

- L'échantillonnage, c'est aller lire la valeur d'un signal continu à des intervalles fixes.
- Pour un signal continu $x(t)$, qu'on échantillonne à toutes les t_s secondes, on obtient un signal discret $x[n]$:

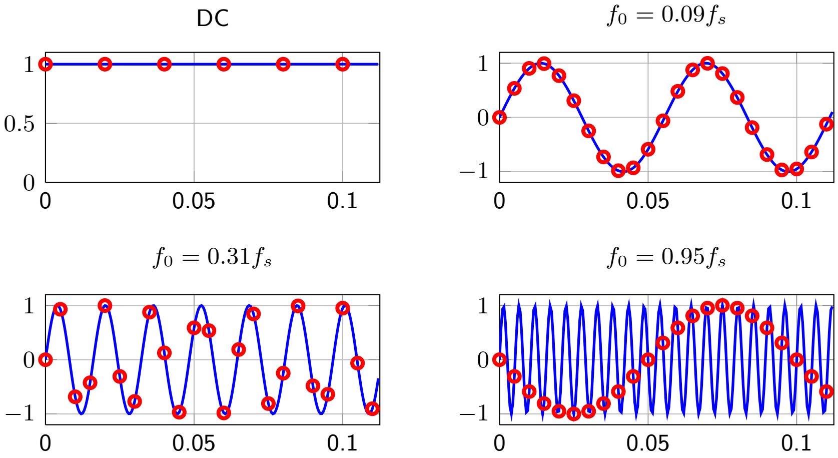
$$x[n] = x(nt_s)$$

où $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Échantillons

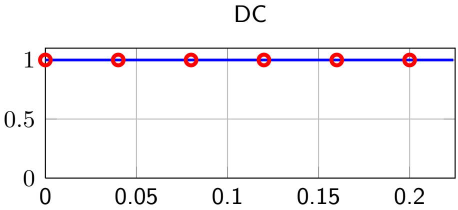
- Pour bien effectuer la reconstruction d'un signal, il faut prendre un nombre suffisant d'échantillons.
- Si on ne prend pas assez d'échantillons par rapport à la période d'un signal, on ne pourra pas reconstruire correctement le signal.

Échantillons



UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

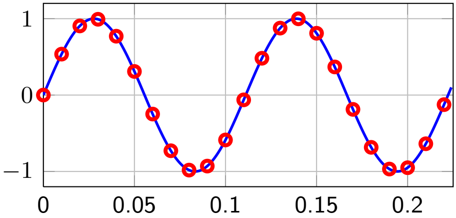
Échantillons



Pour un signal DC, l'échantillonnage permet de reconstruire exactement le signal original.

Échantillons

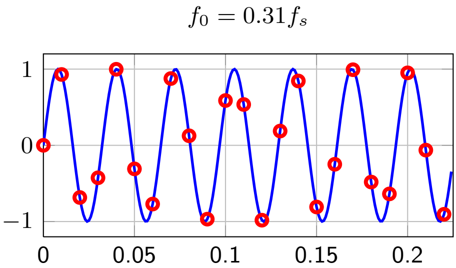
$$f_0 = 0.09 f_s$$



La fréquence du signal continu est environ 10 fois plus faible que le taux d'échantillonnage.

Ex : Un signal de 90Hz qu'on échantillonne à 1kHz.

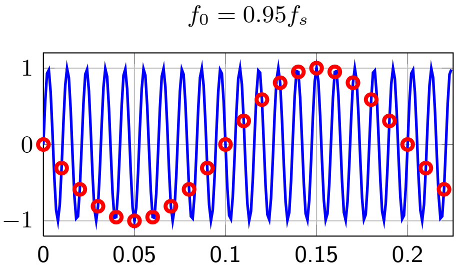
Échantillons



La fréquence du signal continu est environ 3 fois plus faible que le taux d'échantillonnage. On peut quand même reconstruire le signal.

Ex : Un signal de 310Hz qu'on échantillonne à 1kHz.

Échantillons



La fréquence du signal continu est presque la même que le taux d'échantillonnage.

Ex : Un signal de 950Hz qu'on échantillonne à 1kHz.

Les points en rouge forment une sinusoïde d'une fréquence différente de celle du signal continu : il y a *repliement* (aliasing).

Échantillons

- À quel point ne pourra-t'on plus reconstruire le signal ?
- Le théorème de l'échantillonnage, aussi appelé le théorème de Nyquist ou de Shannon, dit qu'on peut reconstruire exactement un signal si la fréquence d'échantillonnage est plus de 2 fois la fréquence maximale contenue dans le signal.

Théorème de l'échantillonnage

Théorème de Nyquist

Pour un signal continu de fréquence maximale f_{max}, le taux d'échantillonnage S (ou f_s) doit être plus grand que $2f_{max}$.

Théorème de l'échantillonnage

- Le théorème de l'échantillonnage implique qu'il faut bien connaître toutes les fréquences d'un signal avant de l'échantillonner.
- Il est très difficile de faire ceci ; généralement, l'équipement électronique échantillonne à un taux spécifique.
- Il faut donc utiliser un filtre qui coupe les fréquences plus élevées que $0.5S$: c'est un filtre anti-repliement (*anti-aliasing filter*).

Théorème de l'échantillonnage

Il y a plusieurs exemples du théorème de l'échantillonnage dans la vie courante.

- Le plus commun est peut-être le CD : le taux d'échantillonnage est 44.1kHz, ce qui est un peu plus que 2 fois la fréquence maximale perçue par l'oreille (20kHz).
- Les oscilloscopes numériques ont aussi une fréquence maximale d'opération. Ex : un oscilloscope ayant un taux d'échantillonnage de 1GS/s aura une fréquence maximale à l'entrée de 500MHz.

Repliement

Qu'arrive-t'il si la fréquence d'échantillonnage n'est pas assez élevée ?

- Il y a repliement : les fréquences plus élevées que $0.5f_s$ apparaissent alors comme des fréquences plus faibles.
- Pour éviter le repliement, il faut que les fréquences d'un signal soient contenues dans l'intervalle :

$$-0.5f_s < f < 0.5f_s$$

- Les fréquences plus élevées apparaîtront comme des signaux de fréquence :

$$f_a = f_0 - Mf_s$$

où M est un entier choisit pour que $-0.5f_s < f_a < 0.5f_s$.

Exemple

Soit un système qui échantillonne à 200Hz. Pour des entrées à 180Hz et 220Hz, y aura-t'il du repliement ? Si oui, quelle est la fréquence apparente ?

Dans les 2 cas, $f > 0.5 f_s$. Pour 180Hz :

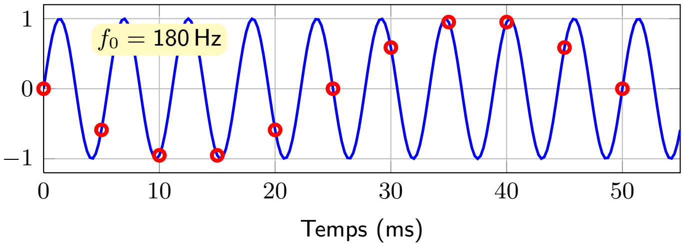
$$f_a = 180 - M(200) < 0.5(200) \Rightarrow M = 1 \Rightarrow f_a = -20 \text{ Hz}$$

C'est 20Hz, déphasé de 180˚.

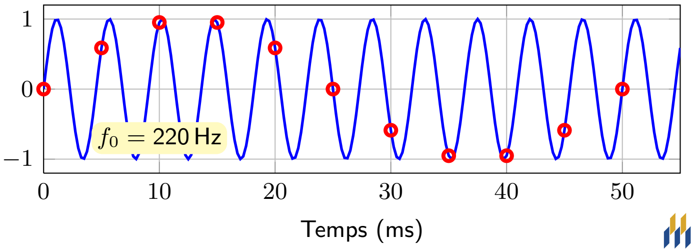
Pour 220Hz :

$$f_a = 220 - M(200) < 0.5(200) \Rightarrow M = 1 \Rightarrow f_a = 20 \text{ Hz}$$

Exemple (2)



$f_0 = 180$ Hz
1
0
−1
0
10
20
30
40
50
Temps (ms)



$f_0 = 220$ Hz
1
0
−1
0
10
20
30
40
50
Temps (ms)

Repliement

- Lors de l'échantillonnage, *toutes* les fréquences au-dessus de $0.5f_s$ seront repliées à quelque chose entre 0 et $0.5f_s$.
- S'il y a déjà une sinusoïde à la fréquence repliée, le signal replié s'ajoutera à celui-ci, causant une perte d'information.

Repliement

- Supposons qu'un signal échantillonné contient une fréquence à $0.2f_s$.
  - S'il n'y a pas eu de repliement, alors le signal continu fut bien échantillonné.
  - S'il y a eu du repliement, on ne sait si c'est parce qu'il y avait une fréquence à $0.8f_s$, $1.2f_s$, $1.8f_s$, etc.
- La seule façon d'éviter le problème de repliement est de bien filtrer l'entrée selon le taux d'échantillonnage.

Repliement

- Tout comme le repliement change la fréquence, il peut aussi changer le déphasage.
- Seulement 2 déphasages sont possibles : 0° ou 180°.
  - 0° :

$$
\begin{gathered}
1.0 f_s < f < 1.5 f_s \\
2.0 f_s < f < 2.5 f_s \\
\ldots
\end{gathered}
$$

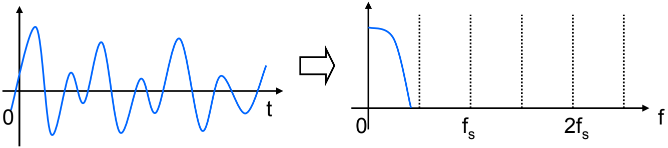
  - 180° :

$$
\begin{gathered}
0.5 f_s < f < 1.0 f_s \\
1.5 f_s < f < 2.0 f_s \\
\ldots
\end{gathered}
$$

Université de Moncton
Edmundston Moncton Shippagan

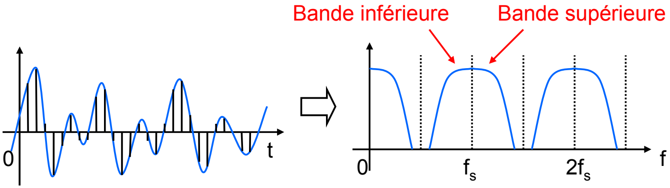
Repliement : analyse

Soit un signal continu et son spectre. On suppose que le signal ne contient que des fréquences plus faibles que $0.5f_S$.



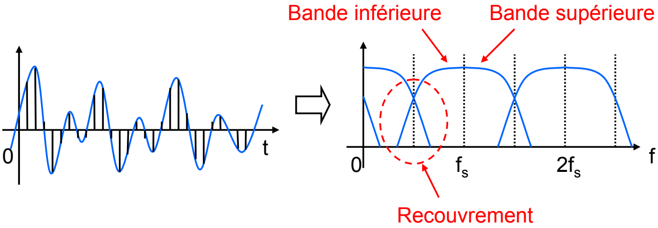
Repliement : analyse

On échantillonne : c'est l'équivalent de multiplier le signal par une série d'impulsions. Le spectre est répété.



Repliement : analyse

Si les fréquences sont plus élevées que $0.5f_s$, il y a recouvrement, et donc perte d'information.



Reconstruction des signaux

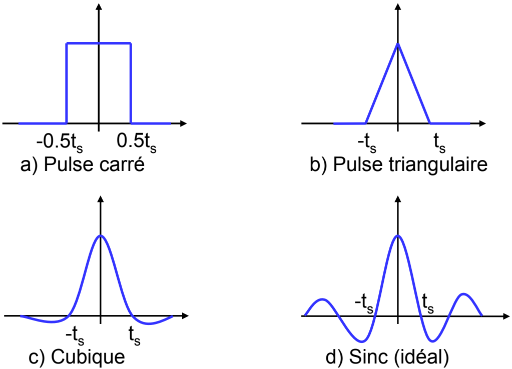
- La reconstruction d'un signal est l'opération de passer d'un signal discret à un signal continu.
- Une équation générale qui permet de représenter ceci est :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]p(t - nT_s)$$

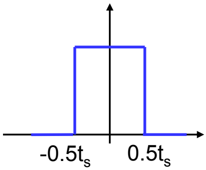
où $p(t)$ est un pulse d'une forme quelconque.

Reconstruction des signaux

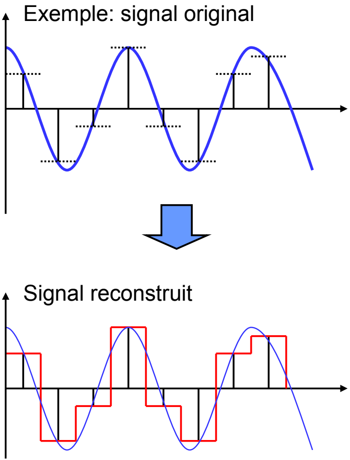
Quelques possibilités de pulses :



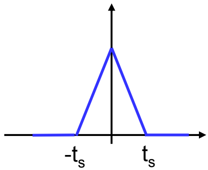
Reconstruction : pulse carré



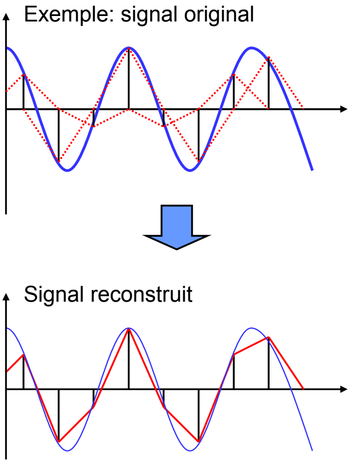
$$p(t) = \begin{cases} 1, & -0.5t_s < t < 0.5t_s \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$



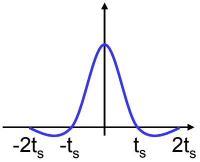
Reconstruction : pulse triangulaire

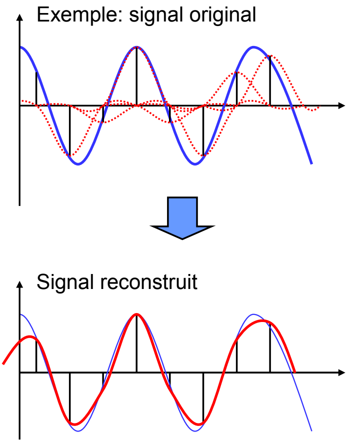


$$p(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{t_s}, & -0.5t_s < t < 0.5t_s \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

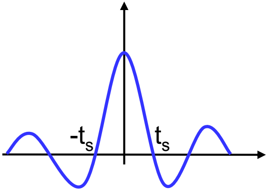


Reconstruction : pulse cubique





Reconstruction : pulse sinc



$$p(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{t_s}t\right)$$

Le pulse sinc est le pulse qui reconstruit idéalement un signal.

Cependant, le pulse sinc a une longueur infinie, et il faut donc le tronquer à une certaine valeur.

Reconstruction

- Une méthode pour reconstruire des pulses plus fidèlement avec les trois pulses non idéaux est de prendre plus d'échantillons que nécessaire.
- Plus le nombre d'échantillons par période augmente, plus la reconstruction est fidèle.
- Il est souvent plus facile de prendre plus d'échantillons et de reconstruire avec un pulse triangulaire que d'essayer de faire la reconstruction avec un sinc.

Conclusion

Les points clés de ce chapitre sont :

- Propriétés des signaux discrets.
- Théorème de l'échantillonnage.
- Effets de l'échantillonnage sur un signal.