



Département de Science Pour l'Ingénieur, tronc commun
Mentions E3A, Mécanique et Automatique/Robotique

Traitement Numérique du Signal - Cahier de TD

S. Argentieri, R. Marchiano

O. Adam, O. Bethoux, H. Boutin, N. Obin, F. Ossart et J.-L. Zarader

Thème 1

« Échantillonnage et analyse en fréquence »

La chaîne de traitement permettant d'enregistrer un morceau de musique peut se schématiser de la façon suivante : le son produit par les musiciens est tout d'abord capté par un microphone, ce qui transforme le son en signal analogique (mécanique puis électrique), et l'acquisition du son sur support numérique (ordinateur, CD) est alors réalisée au moyen d'un convertisseur analogique/numérique pour convertir le signal analogique en signal numérique (typiquement, un signal échantillonné à 44.1 kHz et encodé sur 16 bits). L'analyse du contenu fréquentiel de ce morceau peut alors être effectuée sur ordinateur.

L'objectif des exercices suivants est d'étudier les conditions permettant d'effectuer l'analyse en fréquence d'un signal analogique sur ordinateur. Les seules données manipulables sur ordinateur étant des données numériques en nombre fini, la première étape est donc la numérisation du signal, incluant un échantillonnage, une quantification et un codage, et l'extraction d'un nombre fini de points –en général via une opération de fenêtrage–. De même l'affichage du contenu fréquentiel du signal ne pourra se faire que sur un nombre fini de points et nécessite donc l'utilisation de la TFD. Ce thème 1 aborde donc l'ensemble de ces éléments, sous la forme de 5 séquences successive :

- **préparation** : un premier exercice, à préparer avant la première séance de TD,
- **présentiel** : le TD1, portant sur l'échantillonnage et l'analyse en fréquence des signaux,
- **préparation** : un second exercice, à préparer avant la seconde séance de TD,
- **présentiel** : le TD2, traitant de l'effet du fenêtrage sur l'analyse en fréquence,
- **présentiel** : le TP1, au cours duquel vous mettrez concrètement en œuvre ces différents points (cf. cahier de TP).

TD1 : discréétisation et analyse en fréquence

Préparation : contenu fréquentiel d'un signal analogique

Cette première partie est à préparer **en autonomie**. Un corrigé vidéo sera disponible sur Moodle pendant quelques jours. *Il est indispensable d'avoir travaillé cette partie avant de venir à la séance de TD.*

Il est fondamental de déterminer le contenu fréquentiel du signal analogique à traiter avant d'envisager tout traitement numérique. Le but de cette première étape est de déterminer ce contenu fréquentiel pour le signal usuel suivant :

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer l'allure du signal $x(t)$.
2. Calculer l'énergie et la puissance du signal $x(t)$.
3. Déterminer l'expression de la transformée de Fourier des signaux continus (TFSC) $X(f)$ du signal $x(t)$.
4. Calculer l'énergie du signal $x(t)$ dans le domaine fréquentiel à l'aide de la relation de Parseval (On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx = \pi$).
5. Représenter l'allure de $|X(f)|$. Calculer les fréquences pour lesquelles $|X(f)| = 0$.
6. Proposer, en le justifiant, un ordre de grandeur de la bande passante du signal $x(t)$.
7. En déduire la fréquence d'échantillonnage f_e adaptées au signal $x(t)$.
8. Strictement parlant, l'acquisition du signal à la fréquence f_e s'effectue-t-elle sans perte d'information ? Si non, quel élément *indispensable* doit être ajouté préalablement à l'échantillonnage ?

Échantillonnage et TFSD

Il s'agit maintenant de discréteriser le signal $x(t)$ précédent à la fréquence f_e déterminée précédemment. Cet échantillonnage peut être vu de 2 façons différentes : soit sous la forme du signal échantillonné à temps continu $x_e(t) = x(t) \lll_{T_e}(t)$, soit sous la forme du signal à temps discret $x[n] = x_e(nT_e)$.

9. Calculer l'expression de la transformée de Fourier $X_e(f)$.
10. Représenter graphiquement l'allure de $|X_e(f)|$. Que remarquez-vous ?
11. Donner l'expression du signal discret $x[n]$. Le représenter graphiquement.

On suppose maintenant qu'on a $T_e = T/L$, avec L un entier positif.

12. Calculer la transformée de Fourier des signaux discrets (TFSD) $X(e^{j2\pi fT_e})$ du signal $x[n]$.
13. Tracer l'allure de $|X(e^{j2\pi fT_e})|$ pour $L = 10$. Déterminer les fréquences pour lesquelles $|X(e^{j2\pi fT_e})| = 0$.
14. Comparer les allures de $|X(f)|$, $|X_e(f)|$ et $|X(e^{j2\pi fT_e})|$. Commenter.

Analyse de Fourier discrète (TFD)

Soit le signal discret x ayant L points non nuls : $x[n] = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq n < L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

15. Calculer la TFD sur N points $X_N[k]$ du signal $x[n]$. On suppose $N \geq L$.
16. Rappeler sur quel domaine fréquentiel est défini la TFD ainsi que le pas en fréquence Δf .
17. Que vaut $X_N[k]$ lorsque $N = L$? Tracer l'allure de $|X_L[k]|$. Que remarquez-vous ?
18. Représenter l'allure du signal $x_p[n]$, résultat de la TFDI de $X_L[k]$. Ce résultat était-il attendu ?
19. Représenter maintenant l'allure de $|X_{N=3L}[k]|$. Commenter.
20. De la même façon, représenter l'allure du signal $x_p[n]$, résultat de la TFDI de $X_{3L}[k]$. Retrouve-t-on exactement le signal $x[n]$?
21. Dans le cas du signal $x[n]$ considéré (à support temporel borné), quel lien existe-t-il entre la TFSD et la TFD ?

TD2 : fenêtrage (préparation au TP1)

Préparation

Cette première partie est à préparer **en autonomie**. Un corrigé vidéo sera disponible sur Moodle pendant quelques jours. *Il est indispensable d'avoir travaillé cette partie avant de venir à la séance 2 de TD.*

On considère le signal à temps continu suivant :

$$x(t) = 0.1 \cos(2\pi 0.1t) + \cos(2\pi 0.12t) + 0.2 \cos(2\pi 0.14t).$$

1. Quelle est la fréquence maximale contenue dans ce signal ?
2. Calculer la transformée de Fourier à temps continu $X(f)$ de $x(t)$.
3. Ce signal est échantillonné à la fréquence $f_e = 1\text{Hz}$. Commenter ce choix, et donner l'expression du signal discret $x[n]$ obtenu.
4. Tracer l'allure de la transformée de Fourier à temps discret $X(e^{j2\pi fT_e})$ de $x[n]$ dans l'intervalle $f \in [0; f_e]$

L'opération de fenêtrage consiste à multiplier le signal d'intérêt $x[n]$ (dont le nombre d'échantillons est infini) par une fonction fenêtre $w_\alpha[n]$ pour ne garder qu'un nombre restreint N d'échantillons non nuls de façon à obtenir le *signal fenêtré* $y[n]$ donné par

$$y[n] = x[n] w_\alpha[n].$$

5. Calculer la transformée de Fourier à temps discret $Y(e^{j2\pi fT_e})$ du signal fenêtré $y[n]$.
6. Expliquer en quoi l'opération de fenêtrage a un impact sur le spectre du signal observé.

Étude la fenêtre rectangulaire

On considère la fenêtre rectangulaire :

$$w_R[n] = \text{rect}_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } -N/2 \leq n \leq N/2 - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

7. Tracer cette fenêtre pour $N = 8$.
8. Calculer la transformée de Fourier des signaux discrets $W_R(e^{j2\pi fT_e})$ de la fenêtre $w_R[n]$.
9. Préciser la valeur de $W_R(e^{j2\pi fT_e})$ en $f = 0$.
10. Donner la position en fréquence des zéros de $|W_R(e^{j2\pi fT_e})|$.
11. En déduire la largeur du lobe principal L_R en fonction de N .
12. Donner la position en fréquence f_{\max_1} du maximum du premier lobe secondaire de $|W_R(e^{j2\pi fT_e})|$.
13. Lorsque N devient très grand ($N \gg 1$), quel est l'écart en dB entre le lobe principal et le lobe secondaire : $R_R = 20 \log \left(\left| \frac{W_R(f_{\max_1})}{W_R(f=0)} \right| \right)$?
14. Tracer, sur la même figure que celle utilisée pour représenter $X(e^{j2\pi fT_e})$, l'allure de $|W_R(e^{j2\pi fT_e})|$ pour $N = 8$. On précisera les grandeurs trouvées précédemment.

Étude la fenêtre triangulaire

On considère maintenant la fenêtre triangle suivante

$$w_T[n] = \begin{cases} 1 + \frac{2n}{N} & \text{si } -N/2 \leq n < 0, \\ 1 - \frac{2n}{N} & \text{si } 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

15. Tracer cette fenêtre pour $N = 8$, sur la même figure que celle utilisée pour le tracé de $w_R[n]$.

16. La fonction triangle peut s'obtenir par le produit de convolution de deux fonctions rectangle de largeur $N/2$:

$$w_T[n] = \frac{2}{N} rect_{N/2}[n] * rect_{N/2}[n].$$

- En déduire l'expression de la transformée de Fourier à temps discret $W_T(e^{j2\pi fT_e})$ de $w_T[n]$.
17. Préciser la valeur de $W_T(e^{j2\pi fT_e})$ en $f = 0$.
18. Donner la position en fréquence des zéros de $|W_T(e^{j2\pi fT_e})|$.
19. Donner la position en fréquence f_{\max_2} du maximum du premier lobe secondaire de $|W_T(e^{j2\pi fT_e})|$.
20. Lorsque N devient très grand ($N \gg 1$), quel est l'écart en dB entre le lobe principal et le lobe secondaire : $R_T = 20 \log \left(\left| \frac{W_T(f_{\max_2})}{W_T(f=0)} \right| \right)$?
21. Tracer, sur la même figure que celle utilisée pour représenter $X(e^{j2\pi fT_e})$ et $|W_R(e^{j2\pi fT_e})|$, l'allure de $|W_T(e^{j2\pi fT_e})|$ pour $N = 8$. On précisera les grandeurs trouvées précédemment.

Conclusion

22. Compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs trouvées précédemment.
23. Comparer les différents types de fenêtres et expliquer leur effet respectif. En déduire comment choisir le type de fenêtre selon les propriétés du signal $x[n]$.

Fenêtre	Largeur lobe principal	Niveau lobe secondaire
Rectangulaire		
Triangulaire		
Hann	4/N	-32 dB
Hamming	4/N	-43 dB
Blackmann	6/N	-58 dB

TABLE 1 – Propriétés de différentes fenêtres d'observation.

Thème 2

Étude des systèmes discrets

TD3 : outils mathématiques et systèmes discrets

Préparation : outils mathématiques pour le TNS

Cette première partie est à préparer **en autonomie**. Un corrigé vidéo sera disponible sur Moodle pendant quelques jours. *Il est indispensable d'avoir travaillé cette partie avant de venir à la séance 3 de TD.*

Transformée en Z

1. Déterminer la Transformée en Z (TZ) de l'échelon $u[n]$.
2. Déterminer la TZ de $y[n] = \alpha^n x[n]$ en fonction de celle de $x[n]$.
3. Déterminer la TZ de $h_1[n] = u[n] - u[n - 3]$.
4. En déduire celle de $h_2[n] = \alpha^n(u[n] - u[n - 3])$.
5. Calculer la TZ de $h_3[n] = \alpha^n u[n] - \alpha^{n-3} u[n - 3]$.
6. Calculer la Transformée en Z de la fonction porte $x[n] = \Pi_{N/2}[n - N/2]$
 - (a) En appliquant directement la définition de la TZ.
 - (b) En utilisant le signal échelon $u[n]$.
7. Calculer la transformée en Z inverse de :
 - (a) $X_1(z) = \frac{1}{z^3 - 0.5z^2}$
 - (b) $X_2(z) = \frac{3z^2 - 6z + 2}{(z - 1)^2(z - 2)}$
8. Calculer la réponse indicelle du système de fonction de transfert : $H(z) = \frac{3 - 6z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$

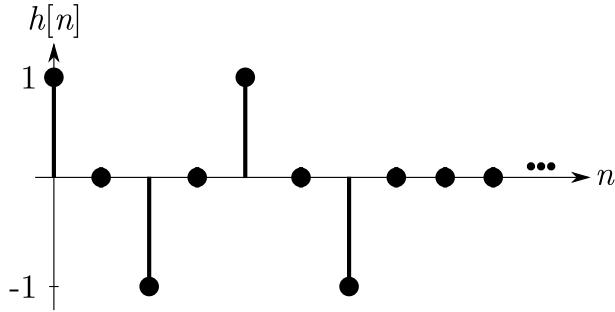
Étude d'un système discret

Soit le système discret causal de fonction de transfert : $H(z) = \frac{K}{1 - 1,4z^{-1} + 0,98z^{-2}}$

9. Calculer les pôles de la fonction de transfert. Le système est-il stable ?
10. Sans calcul, représenter l'allure de la réponse en fréquence. De quel type de filtre s'agit-il ?
11. Comment choisir K pour que le gain statique soit unitaire ?
12. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre et représenter son allure en fonction du temps.

Analyse d'un filtre à partir de sa réponse impulsionale

Un filtre numérique possède la réponse impulsionale $h[n]$ suivante :



13. Est-il de type RIF ou RII ? Calculer les valeurs de la réponse indicelle $y_{\text{ind}}[n]$ de ce filtre.
14. Donner la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre ainsi que son équation de récurrence.
15. Déterminer la réponse du filtre à l'entrée $x[n] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]$.
16. Montrer que la réponse en fréquence du filtre peut s'écrire :

$$H(e^{j2\pi fT_e}) = 2j (\sin(6\pi fT_e) - \sin(2\pi fT_e)) e^{-j6\pi fT_e}.$$

17. Vérifier que $|H(e^{j2\pi fT_e})|$ présente, sur l'intervalle $[0, f_e/2]$, un maximum en $f_e/4$. Quelle est la nature de ce filtre ?
18. Déterminer la valeur de la fréquence d'échantillonnage f_e afin d'obtenir un filtre "centré" en $f_0 = 100$ Hz.

Analyse d'un filtre à partir de sa fonction de transfert en Z

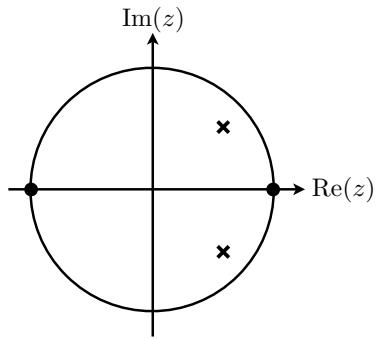
Un filtre numérique a pour fonction de transfert $H(z) = \frac{1 - z^{-12}}{1 + z^{-2}}$.

19. Déterminer son équation de récurrence.
20. Donner sa réponse fréquentielle $H(e^{j2\pi fT_e})$ et représenter l'allure de $|H(e^{j2\pi fT_e})|$. Conclure sur la nature du filtre.
21. Montrer qu'il est possible d'écrire ce filtre sous une forme non récursive. En déduire une nouvelle équation de récurrence.
22. Déterminer et représenter les réponses impulsionales et indicielles.

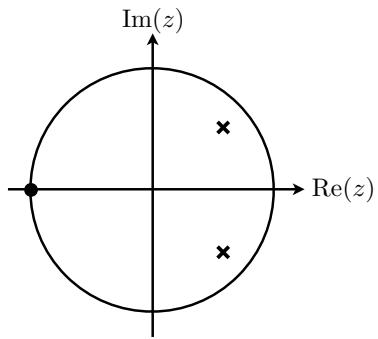
Analyse d'un filtre à partir des pôles et des zéros

On considère le filtre du second ordre défini par $H(z) = K \frac{z^2 + b_1 z^1 + b_2}{z^2 + a_1 z^1 + a_2}$, avec $f_e = 1$ kHz.

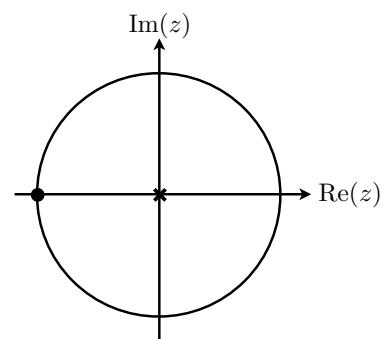
On considère les 3 configurations suivantes des pôles p_i (représentés par des croix) et des zéros z_i (représentés par des points) :



$$\begin{aligned} \text{Cas 1 : } H_1(z) \\ \left\{ \begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_2 = -1 \\ p_1 = 2/3 + j2/3 \\ p_2 = 2/3 - j2/3 \end{array} \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Cas 2 : } H_2(z) \\ \left\{ \begin{array}{l} z_1 = -1 \\ z_2 = -1 \\ p_1 = 2/3 + j2/3 \\ p_2 = 2/3 - j2/3 \end{array} \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Cas 3 : } H_3(z) \\ \left\{ \begin{array}{l} z_1 = -1 \\ z_2 = -1 \\ p_1 = 0 \\ p_2 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

23. Sans aucun calcul, représenter l'allure des modules des réponses en fréquence des 3 filtres.
24. Pour chacun des cas, quelle valeur doit-on donner à K afin d'obtenir un gain statique unitaire ?

Thème 3

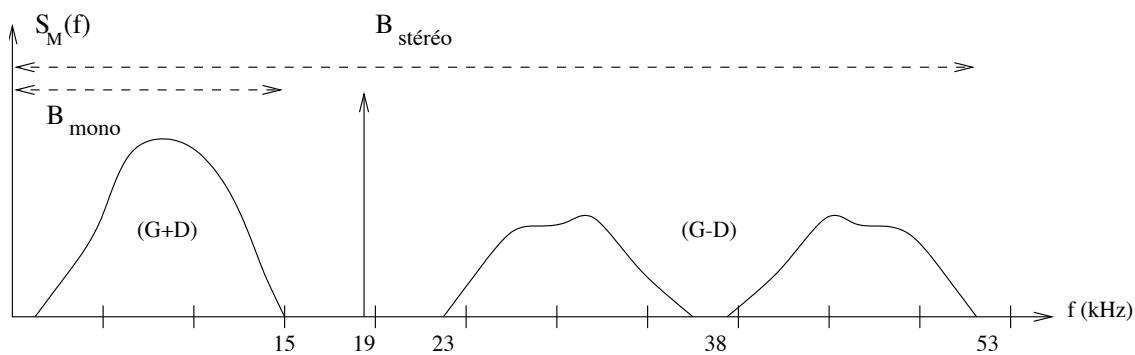
Applications en traitement numérique du signal

Les questions indiquées avec une barre noire dans la marge sont à préparer **avant** les séances 4 et 5 de TD.

TD4 : filtrage numérique (préparation au TP2)

Aujourd’hui, l’ensemble des données sonores rendues disponibles par la radio ou par la télévision est de nature stéréophonique. Néanmoins, historiquement, cela n’a pas toujours été le cas. A l’origine, les transmissions étaient en effet *monophoniques*, simplement restituées à partir d’un seul haut-parleur. Ainsi, lors du passage à la stéréo, il a fallu veiller à ce que l’information audio stéréophonique soit représentée de sorte que les anciens équipements monophoniques restent compatibles. De plus, de nombreux postes radio basiques (radio-réveils, etc.) sont aujourd’hui toujours en vente, et diffusent un son uniquement monophonique.

Ainsi, l’allure du contenu fréquentiel d’un signal stéréophonique (analogique) est représentée sur la figure suivante :



On peut y voir :

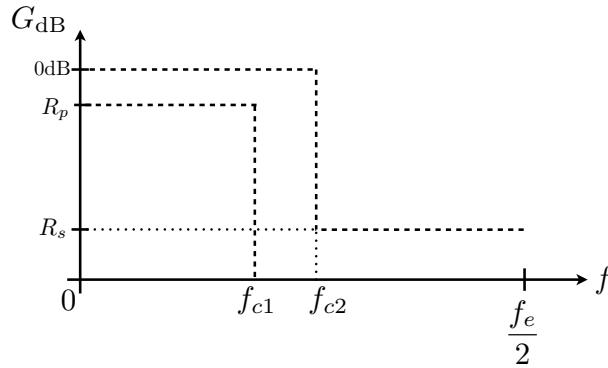
- dans la bande 0 – 15kHz : la somme des signaux gauche et droit d’origine, notés respectivement $g(t)$ et $d(t)$;
- un sinus pur à la fréquence $f_0 = 19\text{kHz}$, utile pour la suite ;
- dans la bande 23 – 53kHz : la différence des signaux gauche et droit, décalée autour de la fréquence $2f_0 = 38\text{kHz}$.

Les informations RDS numériques sont quant à elles codées numériquement et transmises autour de la fréquence 57kHz.

Le but de ce thème est de construire et d’étudier un système permettant d’isoler le signal monophonique constitué de $g(t) + d(t)$ des autres composantes fréquentielles afin de le restituer sur un seul haut-parleur.

Caractérisation du filtrage nécessaire à l’obtention du signal monophonique

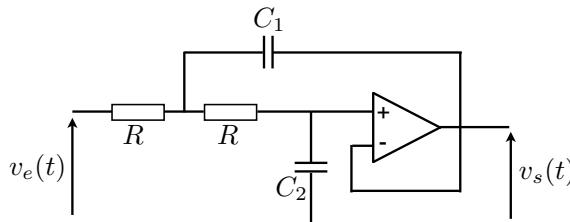
Les caractéristiques des filtres sont traditionnellement représentées au sein d’un *gabarit*, représentant le gain souhaité (exprimé en dB) en fonction de la fréquence. Sur ce gabarit figurent en général les spécifications idéales désirées pour l’application en terme de fréquence et de gain.



- De quel type de filtre s'agit-il ? Donner les valeurs des fréquences f_{c1} et f_{c2} . Quelle est la bande passante du filtre ?
- On souhaite obtenir un gain dans la bande coupée $R_s = -20 \text{ dB}$. De combien la tension d'entrée du filtre est-elle atténuee ?

Etude du système analogique d'origine

Le système analogique représenté sur la figure ci-dessous est classiquement utilisé dans les postes monophoniques à faible coût. On souhaite aujourd'hui réaliser un équivalent numérique du traitement effectué par ce système.



Les lois de l'électronique permettent d'établir la fonction de transfert $H(p)$ du système :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2RC_2p + R^2C_1C_2p^2},$$

- Dans le cas où $C = C_1 = C_2$, calculer la valeur numérique de l'amortissement ζ de ce système du 2^{nd} ordre. En déduire la nature de son régime de fonctionnement. En notant $\tau = RC$, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{\tau^2} te^{-t/\tau} u(t), \\ y_{\text{ind}}(t) &= \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] u(t), \end{aligned}$$

où $h(t)$ et $y_{\text{ind}}(t)$ représentent respectivement la réponse impulsionnelle et indicielle du système analogique. Représenter l'allure de ces 2 réponses temporelles.

Réalisation numérique : équivalence à la réponse impulsionnelle

- En considérant que $T_e = RC/2$, procéder à la synthèse d'un filtre numérique de réponse impulsionnelle $h_1[n]$ telle que $h_1[n] = h(nT_e)$. Représenter l'allure de $h_1[n]$.
- Calculer la fonction de transfert $H_1(z)$ du filtre numérique correspondant¹.
- Déterminer le gain statique de ce filtre. Le comparer au gain statique du système analogique d'origine. Que constatez-vous ?
- Donner l'équation de récurrence du filtre.

Réalisation numérique : équivalence à la réponse indicielle

On souhaite maintenant obtenir un filtre numérique qui possède une réponse indicielle $y_{\text{ind}2}[n] = y_{\text{ind}}(nT_e)$.

1. RAPPEL : TZ[nx[n]] = $-z \frac{\text{d}X(z)}{\text{d}z}$

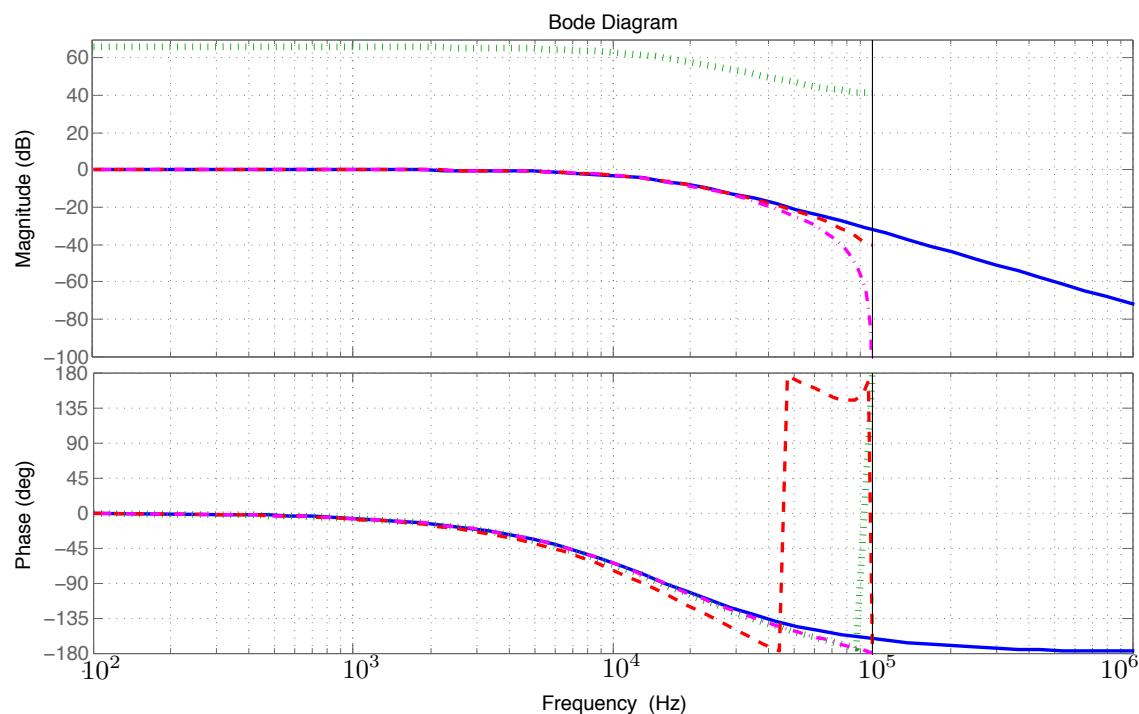
8. Donner la fonction de transfert $H_2(z)$ du filtre correspondant.
9. Comparer les gains statiques de $H(p)$, $H_1(z)$ et $H_2(z)$. Tracer l'allure de la réponse indicielle obtenue.

Transformation de p en z

10. On souhaite maintenant synthétiser ce filtre par transformation bilinéaire. Donner la fonction de transfert du filtre correspondant.
11. Calculer le gain statique du filtre obtenu.
12. Déterminer la valeur de la réponse en fréquence de ce troisième filtre synthétisée pour $f = f_e/2$.

Comparaison des filtres synthétisés

13. Indiquer sur la figure suivante, en le justifiant, quel tracé correspond à quel filtre.
14. Les filtres proposés vérifient-il le gabarit nécessaire à l'obtention du signal monophonique ?



TD5 : Détection d'exoplanètes (examen 2020-2021)

Pour rappel, les questions indiquées avec une barre noire dans la marge sont à préparer **avant** la séance 5 de TD.

Kepler est un télescope développé par la NASA utilisé pour détecter des exoplanètes. Il a été conçu pour que la sensibilité de son détecteur lui permette d'identifier des planètes semblables à la nôtre gravitant autour d'étoiles similaires au Soleil. Kepler utilise *la méthode des transits* qui détecte la présence d'une planète en mesurant la variation de luminosité de l'étoile hôte lorsque la planète s'interpose entre celle-ci et la Terre. Le relevé de la chute de luminosité, ainsi que la périodicité de l'apparition de ce phénomène, permettent de confirmer la présence d'une exoplanète et d'estimer sa période de rotation autour de l'étoile observée. À l'achèvement de sa mission en octobre 2018, le télescope Kepler a détecté 2 662 planètes (confirmées par d'autres observations), soit plus de la moitié des exoplanètes découvertes à cette date.

Nous allons travailler sur le relevé *KIC 10666592* de ce télescope, dont le relevé temporel est représenté ci-dessous. La NASA rend disponible les données brutes du télescope, sous la forme d'un flux lumineux $q[n]$ mesuré **une fois par minute** par le télescope sur une durée de **9 jours et 20h**.

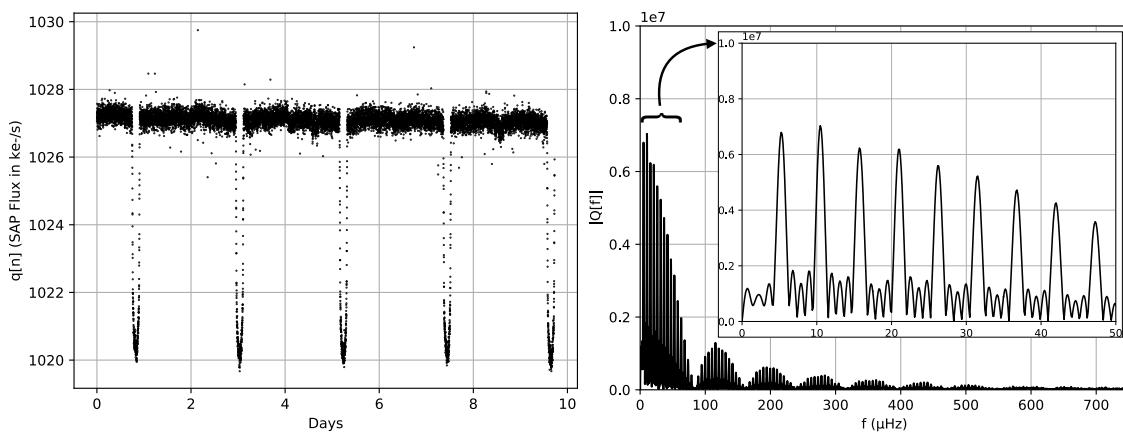


FIGURE 1 – (gauche) Flux lumineux $q[n]$ issu du capteur de Kepler en fonction du temps ; (droite) TFD $\bar{Q}[k]$ du flux lumineux **centré**, (encadré à droite) agrandissement sur le début du spectre.

Notations utilisées :

- $q[n]$ désigne le signal numérique de flux lumineux,
- $\bar{q}[n]$ désigne le signal numérique de flux lumineux centré (c'est à dire le signal à moyenne nulle : $\bar{q}[n] = q[n] - \text{moyenne}(q[n])$),
- $Q[k]$ désigne la transformée de Fourier discrète de $q[n]$,
- $\bar{Q}[k]$ désigne la transformée de Fourier discrète de $\bar{q}[n]$.

Partie 1 : analyse du signal de flux lumineux

1. Quelle est la fréquence d'échantillonnage F_e du signal $q[n]$, exprimée en Hz, puis en μHz (réponse attendue à $\pm 2000\mu\text{Hz}$?).
2. De combien de points N est constitué le signal $q[n]$?
3. D'après le relevé temporel de la figure 1, avec quelle période T_0 tourne l'exoplanète autour de son étoile ? On donnera T_0 en jours, puis en secondes. (On fera l'approximation $3600 * 24 \approx 90000$ - réponse attendue à $\pm 22500\text{s}$)
4. Rappeler la relation entre $q[n]$ et $Q[k]$. En déduire la moyenne du signal $q[n]$ en fonction de Q .

5. La valeur de la Transformée de Fourier Discrète du signal $q[n]$ à la fréquence $f = 0\text{Hz}$ est d'environ $14.54\text{e}9$ (USI). Quelle est la valeur moyenne \bar{q} du signal (réponse attendue à $\pm 10\text{ke} - / \text{s}$) ?
6. La Transformée de Fourier Discrète $\bar{Q}[k]$ du signal $q[n]$ **centré** est représentée sur la figure 1. Quel est l'intérêt de centrer le signal préalablement au calcul et à la représentation de son contenu fréquentiel ?
7. A partir du spectre de la figure 1, donner une estimation à $\pm 1\mu\text{Hz}$ près de la fréquence fondamentale. Est ce cohérent avec la période apparente sur le signal temporel ?
8. A partir du spectre de la figure 1, donner une estimation à $\pm 100\mu\text{Hz}$ près de la fréquence maximale contenue dans le signal. Est-ce que le théorème de Shannon est respecté ?

Partie 2 : suppression du bruit

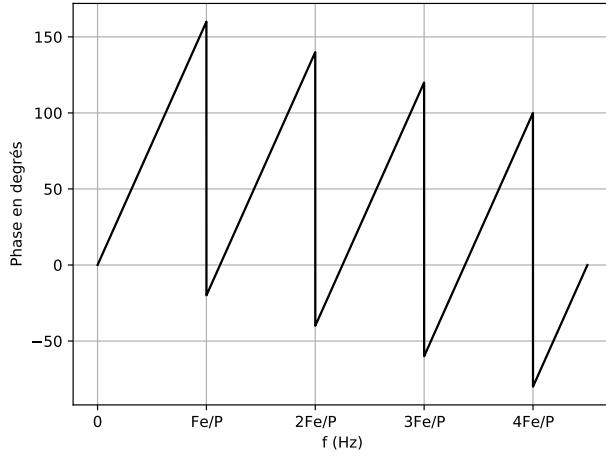
Comme le laisse supposer l'allure du signal $q[n]$, le signal issu du télescope est fortement bruité dans les phases où le transit de l'exoplanète devant l'étoile observée n'a pas lieu. Afin de réduire le bruit présent dans les données, nous allons appliquer un filtre numérique sur celles-ci. Nous proposons d'utiliser ici un premier filtre d'entrée $x[n]$ et de sortie $y[n]$ caractérisé par l'équation de récurrence :

$$y[n] = y[n - 1] + \frac{x[n + P - 1] - x[n - 1]}{P}.$$

9. Rappeler les définitions des filtres RIF et RII. Peut-on déjà déterminer la nature du filtre ci-dessus ? Justifier.
10. Déterminer et représenter graphiquement la réponse impulsionnelle $h_1[n]$ de ce filtre lorsque $P = 5$. On se limitera au calcul et à la représentation des 11 échantillons $-5 \leq n \leq 5$.
11. Expliquer pourquoi ce filtre est non causal.
12. Calculer la fonction de transfert $H_1(z)$ du filtre en fonction de P .
13. Montrer qu'il est possible d'écrire ce filtre sous une forme non récursive. En déduire la nouvelle équation de récurrence :

$$y[n] = \frac{1}{P}(x[n] + x[n + 1] + \dots + x[n + P - 1]).$$

14. Sans plus de calcul, mais en le justifiant, expliquer si ce filtre est stable ou non.
15. Quelle opération mathématique élémentaire est réalisée par ce filtre ? Justifier.
16. Déterminer les expressions du module $|H(e^{j2\pi fT_e})|$ et de la phase $\varphi(f)$ de la réponse en fréquence $H(e^{j2\pi fT_e})$ de ce filtre en fonction de P .
17. Tracer l'allure de $|H(e^{j2\pi fT_e})|$ lorsque $P = 5$. Le filtre 1 est-il passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande ? Justifier.
18. L'évolution de la phase du filtre 1 est partiellement représentée sur la figure ci-dessous pour un ordre P inconnu.



- (a) Expliquer l'allure de ce tracé, en particulier l'allure "en dents de scie".
- (b) Déterminer la valeur de P utilisée pour obtenir ce tracé.
19. Comme indiqué précédemment, le filtre proposé n'est pas causal. Comment peut-on le rendre causal ? Quel effet cela aura-t-il sur le module de la réponse en fréquence préalablement calculée ? Justifier.

Partie 3 : synthèse fréquentielle

Le filtre précédent nécessite un ordre élevé pour pouvoir être utilisé. Cela pose des soucis lors de la mise en œuvre pratique du filtre. La NASA préconise d'utiliser un filtre synthétisé directement dans le domaine fréquentiel. Pour cela, on propose d'utiliser le filtre 2 dont le module de la réponse en fréquence $H_2(e^{j2\pi fT_e})$ est représentée à la figure 2.

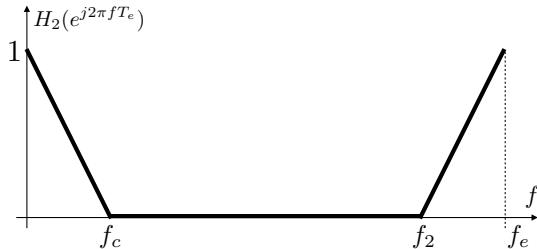


FIGURE 2 – Gabarit en fréquence du second filtre à synthétiser.

20. Donner l'expression de la fréquence f_2 en fonction de f_c et f_e .
21. Compléter le tracé du module de la réponse en fréquence $H_2(e^{j2\pi fT_e})$ de ce 2nd filtre pour les fréquences $-f_e < f < 0$.
22. Donner les expressions de $H_2(e^{j2\pi fT_e})$ pour $-f_c \leq f \leq 0$ et $0 \leq f \leq f_c$.

La Transformée de Fourier des Signaux Discrets inverse de $H_2(e^{j2\pi fT_e})$ est donnée par :

$$h_2[n] = \frac{f_c}{f_e} \left(\frac{\sin(\pi f_c n T_e)}{\pi f_c n T_e} \right)^2.$$

23. Que représente $h_2[n]$?
24. Le filtre 2 est-il de type RIF ou RII ? Causal ou non causal ? Justifier.
25. En pratique, c'est le filtre 3 de réponse impulsionale $h_3[n] = h_2[n]w[n]$ qui est utilisé, avec $w[n]$ une fenêtre d'observation de taille P, et de forme quelconque.
- (a) Exprimer la réponse en fréquence $H_3(e^{j2\pi fT_e})$ de ce troisième filtre, en fonction de $H_2(e^{j2\pi fT_e})$ et de $W(e^{j2\pi fT_e})$.
- (b) Le filtre 3 est-il de type RIF ou RII ? Justifier.

- (c) La figure 3 représentent les modules de trois réponses en fréquence pour : une fenêtre rectangulaire $W_R(e^{j2\pi f T_e})$, une fenêtre triangulaire $W_T(e^{j2\pi f T_e})$ et une fenêtre dite de Blackman $W_B(e^{j2\pi f T_e})$ (pour un nombre de points P identiques). Justifier précisément quelle courbe est associée à quelle fonction de pondération, **en le justifiant**.

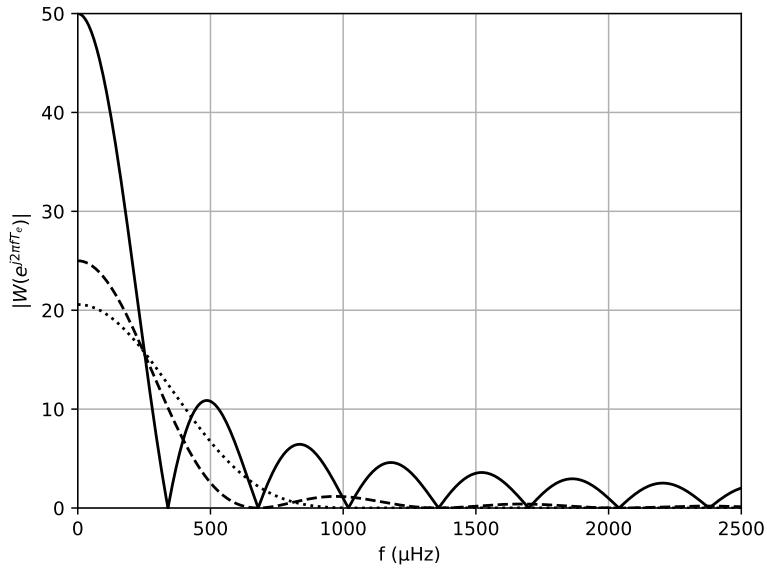


FIGURE 3 – Réponses en fréquences de 3 fenêtres d’observation différentes, mais de même taille P.

Exercices supplémentaires

Exercices supplémentaires du thème 1

Exercice 1

Soient les signaux $y(t)$ et $z(t)$ suivants :

$$\begin{aligned}y(t) &= A \cos(2\pi f_0 t) \text{ avec } f_0 = 1/T_0 \text{ et } T_0 = 2T, \\z(t) &= x(t) * \mathbb{U}_{T_0}(t).\end{aligned}$$

Reprendre les questions 1 à 3, puis 5 à 14 de l'exercice précédent pour les 2 signaux $y(t)$ et $z(t)$ ².

Exercice 2 : fenêtrage et précision/résolution fréquentielle

Les signaux audio sont des signaux dont les caractéristiques évoluent au cours du temps. La transformée de Fourier discrète à court-terme (TFCT) du signal permet de représenter l'évolution des caractéristiques d'un signal en fonction du temps et de la fréquence. En pratique, la TFCT consiste à découper le signal en trames successives dans le temps, et à calculer la TFD sur chacune de ces trames. Une trame est définie par un extrait de L échantillons successifs du signal temporel, multipliée par une fenêtre de pondération. L'objectif de l'exercice est d'étudier l'effet du fenêtrage sur les propriétés temps-fréquence du signal.

On se propose d'étudier le signal discret $y[n]$ échantillonné à la fréquence f_e , et une trame $y_t[n]$ de ce signal constituée de L points pris à partir de l'instant $n = 0$ et obtenue en multipliant $y[n]$ par la fenêtre rectangulaire $x[n]$:

$$y[n] = A \cos(2\pi f_0 / f_e n), \text{ où } f_0 < f_e/2 \quad \text{et} \quad y_t[n] = y[n]x[n]$$

On dit aussi que pour obtenir $y_t[n]$, on a tronqué le signal $y[n]$ entre 0 et $L - 1$.

"Tronquer un signal étale son spectre"

1. Tracer l'allure de $y[n]$. Rappeler et tracer l'allure de la TFSD $Y(e^{j2\pi f/f_e})$ de $y[n]$.
2. Tracer l'allure de $y_t[n]$. Calculer et tracer l'allure de la TFSD $Y_t(e^{j2\pi f/f_e})$ de $y_t[n]$. Comparer avec la TFSD de $y[n]$.
3. Application : la Figure 4 présente la TFCT d'un son de diapason et d'un son de piano. Discuter et comparer le contenu fréquentiel de ces sons.

"La taille de la fenêtre d'analyse contrôle la résolution fréquentielle"

4. Donner la définition de la résolution fréquentielle.
5. Déterminer la largeur de bande du lobe principal de la TFSD de la fenêtre $x[n]$, en fonction de L . Commenter.
6. Quelle est la taille de fenêtre L minimale nécessaire pour observer la fréquence f_0 du signal $y_t[n]$?
7. Application : La Figure 5 présente les spectrogrammes (analyse temps-fréquence du son, calculée par TFCT) du son de piano (la 440Hz) avec différentes tailles de fenêtre temporelle. Quelles sont les avantages et les inconvénients de l'analyse dans le cas $L = 32$, $L = 88200$ et $L = 1024$?

"Le bourrage de zéros améliore la précision fréquentielle"

Le bourrage de zéro consiste à ajouter M zéros à une trame de signal $y_t[n]$:

$$y'_t[n] = \begin{cases} y_t[n], & n \in [0, L - 1] \\ 0, & n \in [L, L + M - 1] \end{cases}$$

On suppose : $N = L$, et $N' = L + M$, avec $N' > N$.

2. Rappel 1 : $\text{TF}[\mathbb{U}_T(t)] = F \mathbb{U}_F(f)$ avec $F = 1/T$. Rappel 2 : $\sum_n e^{j2\pi nx} = \mathbb{U}(x)$.

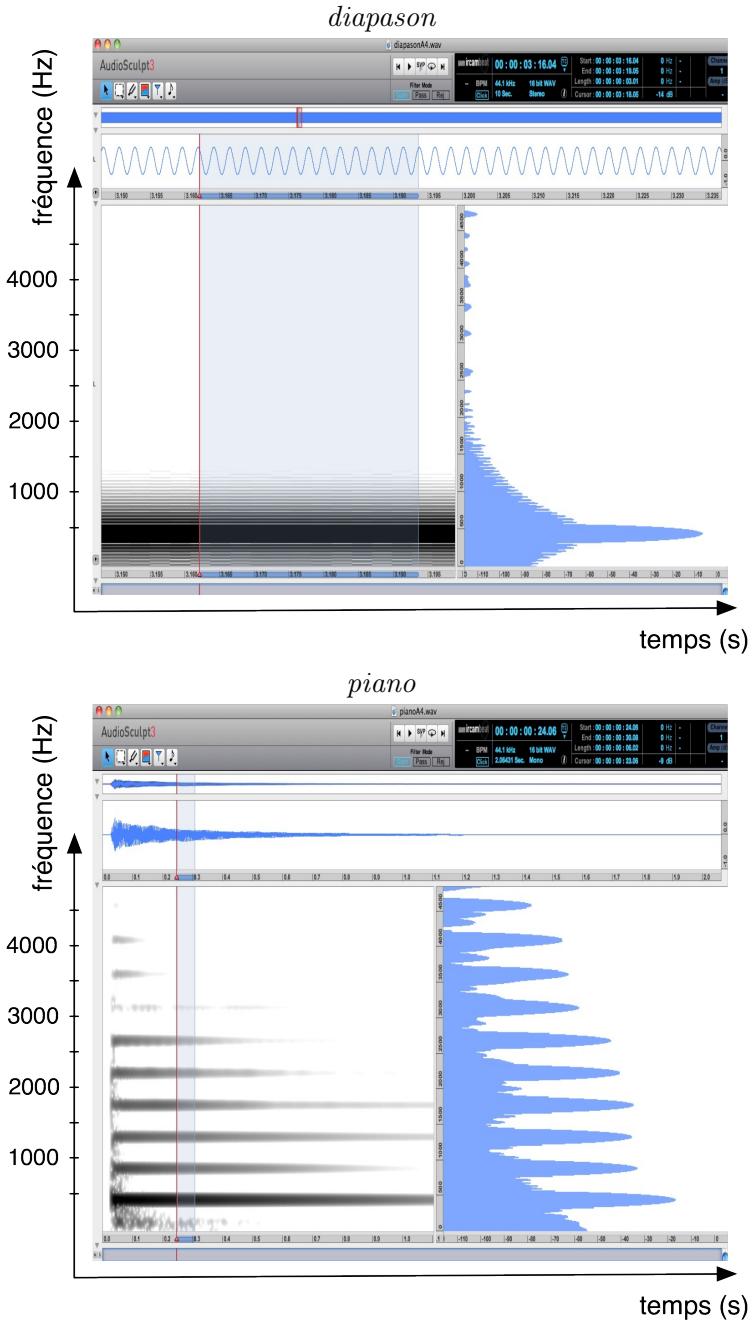


FIGURE 4 – Analyse temps-fréquence d'un son de diapason (la 440 Hz.) et d'un son de piano (la 440 Hz.).

8. Donner la définition de la précision fréquentielle.
9. Calculer la TFD de $y_t[n]$ et $y'_t[n]$, respectivement calculée sur N et N' points fréquentiels. Interpréter.
10. Tracer la TFD de $y_t[n]$ et $y'_t[n]$, pour $N' = 2N$ superposée sur la TFSD de $y[n]$. Commenter.
11. Quelle est la précision fréquentielle de $y_t[n]$ et $y'_t[n]$? Comparer.
12. Quelle est la résolution fréquentielle de $y_t[n]$ et $y'_t[n]$? Comparer.

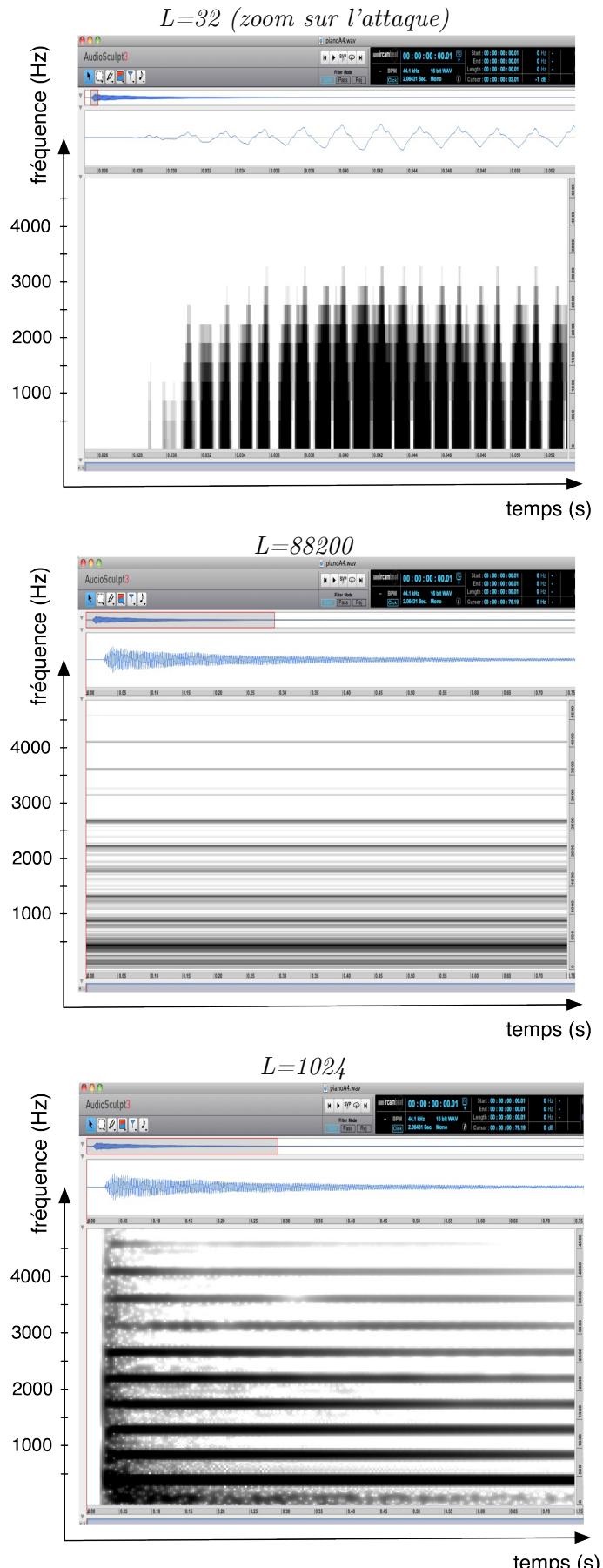


FIGURE 5 – Spectrogrammes d'une note de piano (la 440 Hz) obtenus pour différentes tailles de fenêtre L .

Exercices supplémentaires du thème 2

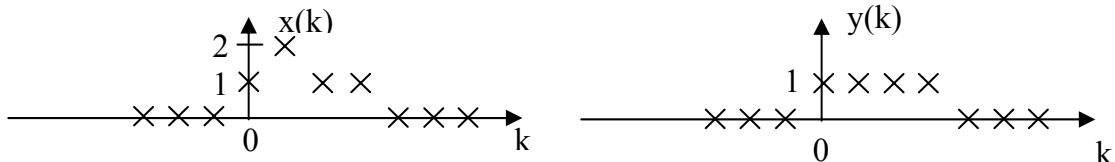
Transformée de Fourier Discrète (1/2)

Soit $x[n]$ un signal échantillonné à la fréquence $f_e = 50\text{kHz}$ et comportant 2048 points.

1. Dans quel domaine de fréquence sera définie la TFD ? Quel est le pas fréquentiel ? Combien de points sont nécessaires pour définir la TFD :
 - d'un signal quelconque ?
 - d'un signal réel ?
2. A partir de la TFD, on réalise une TFD inverse. Retrouve-t-on exactement le même signal $x[n]$?
3. Au signal $x[n]$ de départ, on concatène le signal $y[k]$ composé de 2048 zéros. Comment sera la TFD du signal $z[n]$ ainsi obtenue ?

Transformée de Fourier Discrète (2/2)

On considère deux signaux réels $x[k]$ et $y[k]$:



1. Déterminer la Transformée de Fourier Discrète de $x[k]$ sur 4 points.
2. Calculer $z[k] = x[k] * y[k]$.

Étude de la stabilité d'un filtre

On suppose maintenant qu'on a $H(z) = \frac{1}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}$.

On cherche à déterminer les conditions que les coefficients a_i ($a_i \in \mathbb{R}$) doivent vérifier afin d'assurer la stabilité du filtre de fonction de transfert $H(z)$.

1. Exprimer les coefficients a_1 et a_2 en fonction des 2 pôles de $H(z)$ notés p_1 et p_2 .
2. En supposant que $p_1 = p_2^*$, montrer que a_2 vérifie nécessairement $|a_2| < 1$ pour que le filtre soit stable.
3. Supposons maintenant que les 2 pôles soient réels. Donner alors les expressions de p_1 et p_2 en fonction de a_1 et a_2 .
4. Sous quelles conditions sur p_1 et p_2 la fonction de transfert $H(z)$ est-elle stable ? En déduire que :

$$\begin{cases} a_2 > -1 + a_1 \\ a_2 > -1 - a_1. \end{cases}$$

5. Représenter graphiquement dans le plan (a_1, a_2) l'ensemble des valeurs de a_1 et a_2 garantissant la stabilité de la fonction de transfert $H(z)$.

Exercices supplémentaires du thème 3

Construction d'un filtre permettant de sur-échantillonner

On souhaite construire un système permettant de changer la fréquence d'échantillonnage d'un signal numérique : on veut multiplier par un facteur L (avec $L \in \mathbf{N}$) la fréquence d'échantillonnage - c'est ce qu'on appelle sur-échantillonner un signal.

Question préliminaire

- La figure 6 présente à gauche les signaux $x(t)$ (trait plein) et $x[n]$ (ronds) et à droite le spectre de $x(t)$. Tracer le spectre du signal échantillonné $x[n]$.

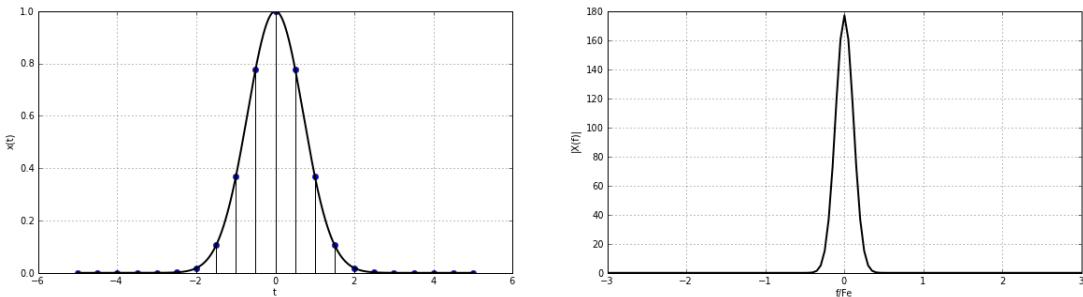


FIGURE 6 – (à gauche) - signal analogique $x(t)$ et signal échantillonné $x[n]$, (à droite) spectre du signal $x(t)$ (l'axe des fréquences est normalisé par la fréquence d'échantillonnage utilisée pour obtenir $x[n]$).

Filtre pour le sur-échantillonnage

L'opération de sur-échantillonnage consiste à passer d'un signal numérique possédant N points à un signal numérique comportant $(N-1)L+1$ points. Le coefficient L ($L \in \mathbf{N}$) est le coefficient de sur-échantillonnage. Une possibilité pour sur-échantillonner un signal consiste à insérer $L-1$ zéros entre deux échantillons successifs. Nous allons voir que l'ajout de ces zéros dans le signal combiné à un filtre fréquentiel permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage et d'obtenir le signal final, noté $x_E[p]$ ($p \in \mathbf{Z}$), ayant le même spectre que $x[n]$ dans la bande de fréquences communes. L'indice E fait ici référence au terme anglais *Expander*.

On définit la fonction $y_E[p]$ obtenue par ajout de zéros dans la fonction $x[n]$:

$$y_E[p] = \begin{cases} x[p/L] & \text{si } p = Ln, \\ 0 & \text{si } p \neq Ln \end{cases}$$

On suppose (sauf mention contraire) que le facteur de sur-échantillonnage est égal à 3 ($L = 3$).

- Quelle est la fréquence d'échantillonnage du signal $y_E[p]$ (en fonction de F_E , on suppose que le signal discret $x[n]$ contient beaucoup de points ($N \gg 1$)) ? En déduire la plage de fréquences communes entre le signal d'origine $x[n]$ et le signal final $x_E[p]$?
- Tracer la fonction $y_E[p]$.
- Que vaut $X_z(z^3)$?
- Montrer que $Y_{Ez}(z)$, la transformée en z de $y_E[n]$, est égale à : $Y_{Ez}(z) = X_z(z^3)$.
- Déduire du résultat précédent que les gains en fréquences de $x[n]$ et $y_E[p]$ sont reliés par :
$$Y_E(e^{\frac{2i\pi f}{F_E}}) = X(e^{\frac{6i\pi f}{F_E}}).$$
- Tracer qualitativement le module du spectre $|Y_E(e^{\frac{2i\pi f}{F_E}})|$.
- Comment faire pour retrouver la forme du spectre initial (celui de $x[n]$) ?
- Quels changements faut-il faire pour construire un filtre qui sur-échantillonne à une valeur L (*a priori* différente de 3) ?

Filtre pour le sous-échantillonnage

L'opération de sous-échantillonnage consiste à passer d'un signal numérique possédant N points à un signal numérique comportant $((N - 1)/M) + 1$ points (on suppose que $(N - 1)$ est multiple de M). Le coefficient M ($M \in \mathbf{N}$) est le coefficient de sous-échantillonnage. Une possibilité pour sous échantillonner consiste à ne prélever qu'un échantillon sur M du signal original. Nous allons voir qu'en réalité il faut d'abord filtrer le signal $x[n]$ pour que le signal final, noté $x_C[q]$ ($q \in \mathbf{Z}$), ait le même spectre que le signal original dans la bande de fréquences communes. L'indice C fait ici référence au terme anglais *Compressor*. On définit la fonction $y_C[q]$ qui est la fonction issue de la sélection d'un échantillon tous les M échantillons :

$$y_C[q] = x[M.n]$$

On suppose (sauf mention contraire) que le facteur de sous-échantillonnage est égal à 4 ($M = 4$).

10. Quelle est la fréquence d'échantillonnage du signal $x_C[p]$ (en fonction de F_E) ? En déduire la plage de fréquences communes entre le signal d'origine $x[n]$ et le signal final $x_C[p]$.
11. Tracer la fonction $y_C[p]$.
12. Montrer que : $Y_{Cz}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[4n]z^{-n}$.
13. Montrer que :

$$Y_{Cz}(z) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \sum_{q=-\infty}^{+\infty} x[q] \left(e^{-\frac{2i\pi k}{4}} z^{1/4} \right)^{-q}.$$

Pour cela, il faut utiliser :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi kn}{N}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ modulo } N, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

14. En déduire l'égalité suivante sur les transformées en z :

$$Y_{Cz}(z) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X_z \left(e^{-\frac{2i\pi k}{4}} z^{1/4} \right)$$

15. Montrer alors qu'il est possible de déterminer le spectre de la fonction $y_C[p]$, à partir de $X(e^{\frac{2i\pi f}{F_e}})$.
16. Tracer la fonction ainsi obtenue. Quel problème apparaît ?
17. Justifier qu'une solution est d'appliquer un filtre à $X(e^{\frac{2i\pi f}{F_e}})$ **avant** de faire l'opération de sous-échantillonnage. Quelle est la forme de ce filtre ? On notera $\tilde{X}(e^{\frac{2i\pi f}{F_e}}) = H_C(e^{\frac{2i\pi f}{F_e}}) \cdot X(e^{\frac{2i\pi f}{F_e}})$.
18. Quels changements faut-il faire pour construire un filtre qui sous-échantillonne à une valeur M (*a priori* différente de 4) ?

Filtre pour passer à une fréquence d'échantillonnage quelconque

Comment peut on faire pour passer d'une fréquence F_E à une autre fréquence \tilde{F}_E qui ne serait pas directement multiple de F_E mais qui pourrait s'écrire : $\tilde{F}_E = \frac{p}{q} F_E$?