

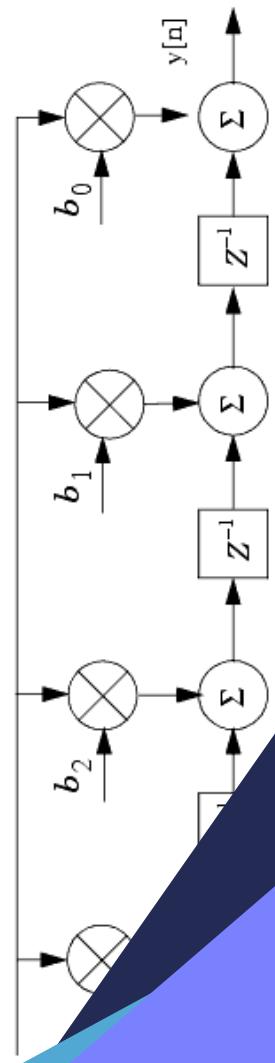
MU4MEN01 : TRAITEMENT DU SIGNAL NUMÉRIQUE

Cours 5 : les systèmes discrets

26 octobre 2021

Sylvain Argentieri

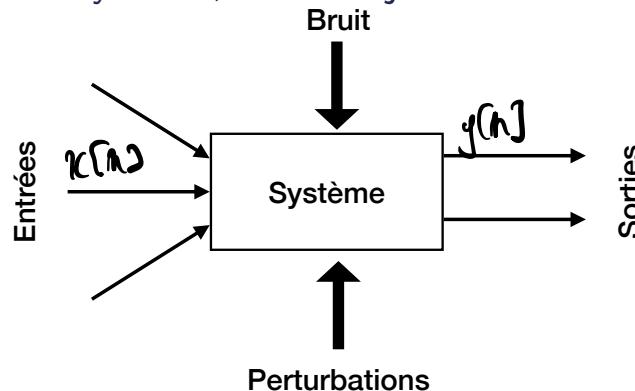
$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + b_3x[n-3]$$



Introduction et rappels

Systèmes : rappels

Un système, c'est toujours :



Relation fondamentale entrée/sortie :

$$y[n] = H[x[n]] .$$

Hypothèses :

■ Linéarité :

$$\begin{aligned} H[x_1[n] + \lambda x_2[n]] &= H[x_1[n]] + \lambda H[x_2[n]] \\ &= y_1[n] + \lambda y_2[n] \end{aligned}$$

■ Invariance

$$H[x[n - n_0]] = y[n - n_0]$$

■ + Stabilité :

stable si: $|x[n]| < A$ alors $y[n] < B$

■ + Causalité :

si $x[n] = 0$ pour $n < n_0$, alors $y[n] = 0 \quad \forall n < n_0$.

Systèmes numériques : éléments de base

Un filtre numérique, c'est simplement une opération (linéaire, invariante) effectuée sur les échantillons d'entrée pour produire les échantillons de sortie. En pratique, cette opération est toujours réalisée par 3 opérateurs de base :

- l'additionneur :



$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

- le multiplicateur par une constante :



$$y[n] = A x[n]$$

- la cellule retard (ou mémoire) :



$$y[n] = x[n-1]$$

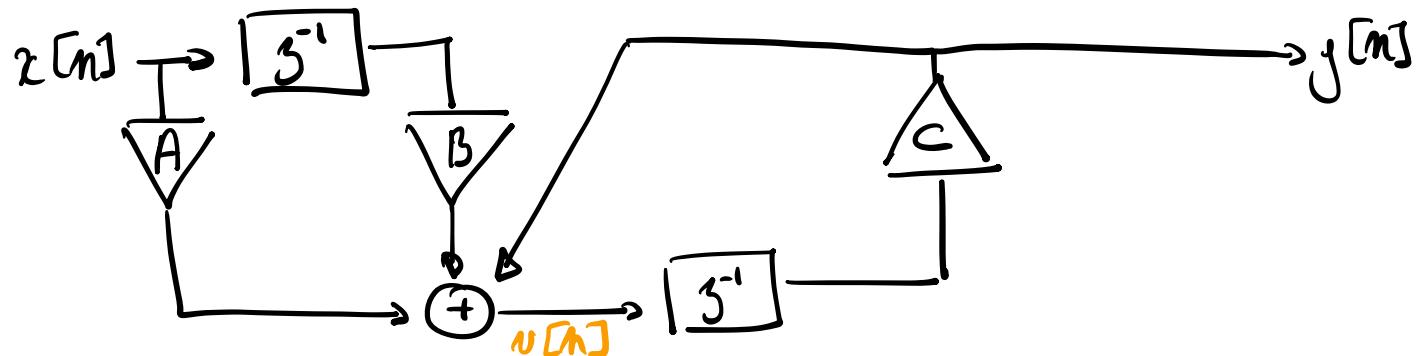
Avec ces 3 éléments, il est possible de réaliser TOUS les systèmes numériques linéaires invariants !

... et fabriquer un système discret (un filtre !) consiste juste à trouver de combien d'additionneur, de quels coefficients multiplicateur et de combien de cellules mémoires nous avons besoin.

Caractérisation temporelle des systèmes discrets

Représentation temporelle : équation de récurrence (1/2)

Soit le système numérique suivant, réalisé uniquement à partir des 3 briques de base précédentes :



On peut facilement écrire la relation qui relie la sortie $y[n]$ à l'entrée $x[n]$:

$$\begin{cases} n[n] = Ax[n] + Bx[n-1] + y[n] & (1) \\ y[n] = Cn[n-1] \end{cases}$$

equation de récurrence

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = ACx[n-1] + BCx[n-2] + Cy[n-1]}$$

Représentation temporelle : équation de récurrence (2/2)

Dans le cas général, les systèmes discrets linéaires et invariants vérifient :

Équation de récurrence

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

On distingue alors 2 cas :

- $y[n]$ dépend que de $x[n-k]$: l'équation de récurrence est alors non récursive ;
- $y[n]$ dépend aussi de $y[n-k]$: l'équation de récurrence est alors récursive, et il est nécessaire de **garder en mémoire les valeurs passées de la sortie** pour utiliser le filtre.

Nous verrons que selon le type de filtre utilisé, leur équation de récurrence est différente ... et leurs propriétés également !

Représentation temporelle : équation de récurrence, exemple

Soit un système d'équation de récurrence : $y[n] = x[n] + \alpha y[n - 3]$.

Déterminer $y[n]$ pour $x[n] = [0, 1, 1, 1, 0, 0, \dots]$

$$y[0] = x[0] + \alpha \cancel{y[-3]} = 0$$

$$y[1] = x[1] + \alpha \cancel{y[-2]} = 1$$

$$y[2] = x[2] = 1$$

$$y[3] = x[3] + \alpha y[0] = 1 + \alpha \cdot 0 = 1$$

$$y[4] = x[4] + \alpha y[1] = \alpha \quad \begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}$$

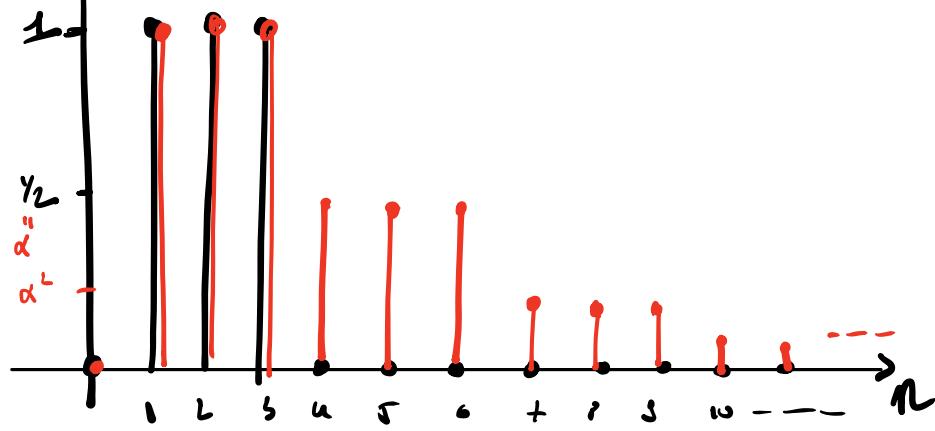
$$y[5] = x[5] + \alpha y[2] = \alpha$$

$$y[6] = \alpha y[3] = \alpha^2$$

$$y[7] = \alpha y[4] = \alpha^3$$

$$y[8] = \alpha^4$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$



Représentation temporelle : réponse impulsionnelle

Comme pour les systèmes analogiques, un système numérique est totalement caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h[n]$, i.e. par la façon dont il répond à une impulsion discrète unité (le Dirac numérique) placé en entrée.



Entrée $x[n]$	Sortie $y[n]$
$\delta[n]$	$h[n]$
$\delta[n-i]$	$h[n-i]$: invariance.
$x[i] \delta[n-i]$	$x[i] h[n-i]$: linéarité.
$\sum_i x[i] \delta[n-i]$	$\sum x[i] h[n-i]$: linéarité

Diagram illustrating the convolution sum $\sum_i x[i] \delta[n-i]$. A red circle highlights this expression. A red arrow points from the input signal $x[n]$ to the first term $x[0] \delta[n]$. Another red arrow points from the input signal $x[n]$ to the circled expression $\sum_i x[i] \delta[n-i]$.

Représentation temporelle : convolution

On montre donc que l'entrée $x[n]$ et la sortie $y[n]$ sont reliées par un produit convolution discret, défini selon :

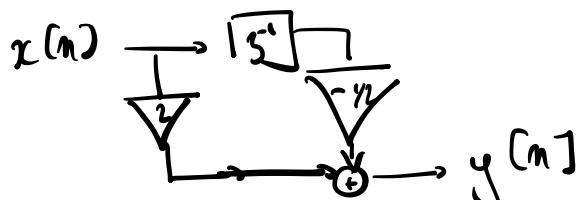
Produit de convolution

$$y[n] = \sum_{i=0}^{+\infty} h[i]x[n-i] = \sum_{i=0}^{+\infty} x[i]h[n-i] = h[n] * x[n] = x[n] * h[n]$$

Les propriétés du produit de convolution discret sont identiques à celles en analogique.

Représentation temporelle : réponse impulsionnelle finie/infinie (1/3)

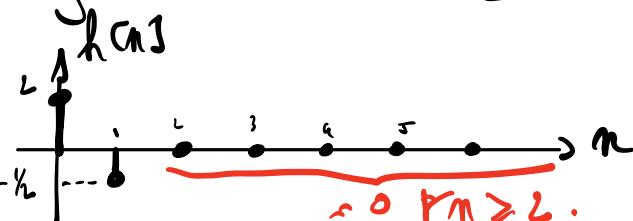
Prenons 2 exemples :



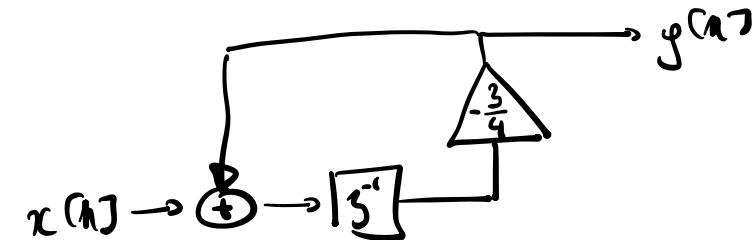
$$\text{On a : } y[n] = 2x[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$\text{Si } x[n] = \delta[n]$$

$$\Rightarrow y[n] = h[n] = 2\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$



\hookrightarrow Rép. Imp. FINIE (RIF)



$$\text{On a : } y[n] = -\frac{3}{4}x[n-1] - \frac{3}{4}y[n-1]$$

$$\text{Si } x[n] = \delta[n]$$

$$\Rightarrow y[n] = h[n]$$

$$y[0] = 0$$

$$y[1] = -\frac{3}{4}$$

$$y[2] = \left(-\frac{3}{4}\right)^2$$

$$y[3] = \left(-\frac{3}{4}\right)^3$$



\hookrightarrow Rép. Imp. INFINIE (RII)

Représentation temporelle : réponse impulsionnelle finie/infinie (2/3)

On constate donc 2 types de réponses impulsionnelles :

- Les systèmes à **réponse impulsionnelle finie** (RIF), ou *Finite Impulse Response (FIR)* : au bout d'un certain temps, $h[n]$ vaut 0 et reste à 0 ;

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i] x[n-i] = \sum_{i=0}^M h[i] x[n-i]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{l=1}^N a_l y[n-l]$$

= 0

Pour les filtres RIF, les échantillons de la réponse impulsionnelle sont exactement les coefficients de l'équation de récurrence.

Représentation temporelle : réponse impulsionnelle finie/infinie (3/3)

On constate donc 2 types de réponses impulsionnelles :

- Les systèmes à **réponse impulsionnelle infinie (RII)**, ou *Infinite Impulse Response (IIR)* : $h[n]$ tend vers 0 mais ne s'annule jamais.

$$\left\{ \begin{array}{l} y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i] x[n-i] \\ y[n] = \sum_{k=0}^n b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^n a_k y[n-k] \end{array} \right.$$

... et c'est tout ...



Caractérisation fréquentielle des systèmes discrets

Représentation fréquentielle : fonction de transfert (1/3)

On rappelle qu'on a : $y[n] = h[n] * x[n]$. Appliquons une transformée en Z à cette équation. Il vient immédiatement que : $Y(z) = H(z)X(z)$ (cf. propriétés de la TZ).

On a :

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (a_0 = 1)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

H(z) : fonction de transfert.

Représentation fréquentielle : fonction de transfert (2/3)

On constate donc que :

Fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

ordre du filtre

$H(z)$ est la transformée en Z de la réponse impulsionnelle du système discret, et est appelé **fonction de transfert**. Celle-ci prend donc la forme, pour les systèmes (discrets) linéaires et invariants, d'une **fraction rationnelle**. Par définition :

- les valeurs de z annulant le numérateur de $H(z)$ sont appelées **les zéros** du système ;
- les valeurs de z annulant le dénominateur de $H(z)$ sont appelées **les pôles** du système.

Représentation fréquentielle : fonction de transfert (3/3)

- Pour les systèmes de type RIF, on rappelle qu'on a :

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$$

La fonction de transfert prend donc la forme "simplifiée" suivante :

$$H(\zeta) = \sum_{k=0}^M b_k \zeta^k = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \zeta^{M-k}}{\zeta^M}$$

On constate donc que pour les systèmes RIF, l'ensemble des pôles sont égaux à 0 !

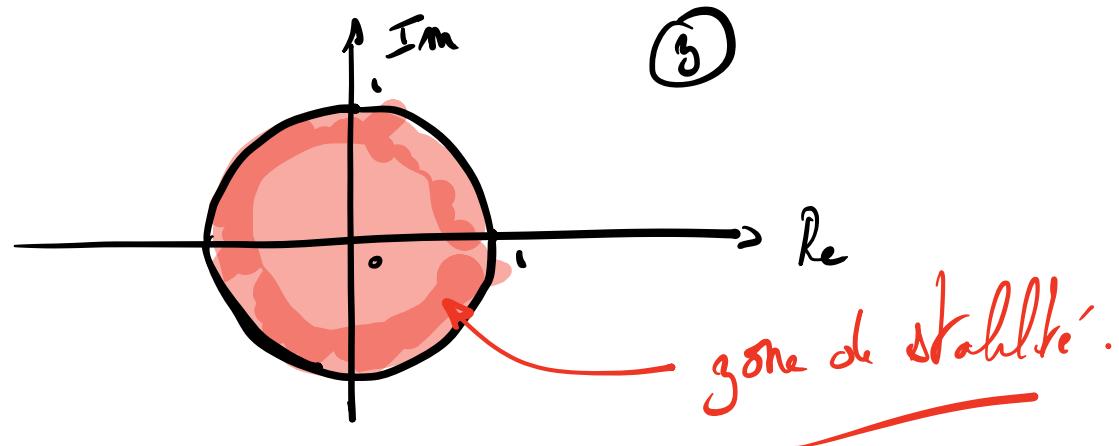
- Pour les systèmes de type RII ... pas de simplification dans le cas général.

Attention ! La forme de la fonction de transfert ne permet pas à coup sûr de déterminer la nature RIF ou RII du système !

Condition de stabilité

Pour les systèmes discrets linéaires et invariants, on peut montrer qu'un système est **stable** (au sens entrée bornées, sortie bornée) si et seulement si ses **pôles** p_i sont "à l'intérieur du cercle unité" dans le plan complexe, i.e.

$$|p_i| < 1, \forall i \in [1, N].$$



Stabilité des systèmes RIF

On en déduit immédiatement que les **systèmes RIF**, dont les pôles sont tous en 0, sont **toujours stables**.

Représentation fréquentielle : réponse en fréquence (1/3)

Nous avons vu à l'occasion de l'étude de la transformée en Z le lien entre celle-ci et la TFSD. On en déduit alors directement que $H(e^{j2\pi fT_e})$, la TFSD de la réponse impulsionnelle, s'écrit :

Réponse en fréquence

$$H(e^{j2\pi fT_e}) = H(z)|_{z=e^{j2\pi fT_e}}.$$

$H(e^{j2\pi fT_e})$ est appelé la **réponse en fréquence** du système.

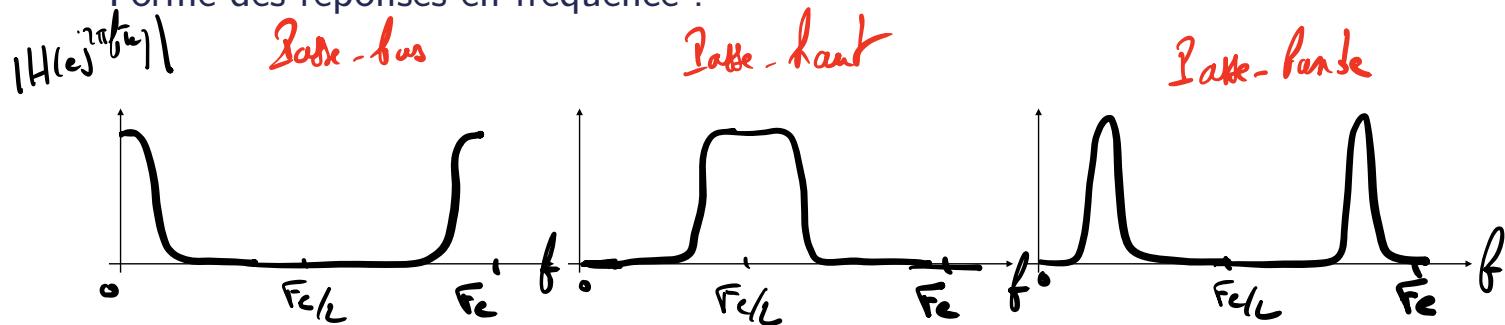
On rappelle aussi que $Y(e^{j2\pi fT_e}) = H(e^{j2\pi fT_e})X(e^{j2\pi fT_e})$. Ainsi :

- $|H(e^{j2\pi fT_e})|$ représente donc les fréquences qui seront amplifiées ou atténuées en amplitude par le filtre,
- $\underline{H(e^{j2\pi fT_e})}$ caractérise la phase apportée par le filtre pour chacune des fréquences.

→ Un système (linéaire, invariant) peut donc être considéré comme **un filtre**.

Représentation fréquentielle : réponse en fréquence (2/3)

Forme des réponses en fréquence :



Exemple de calcul : soit le filtre d'équation de récurrence :

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n-1] + x[n] + x[n+1])$$

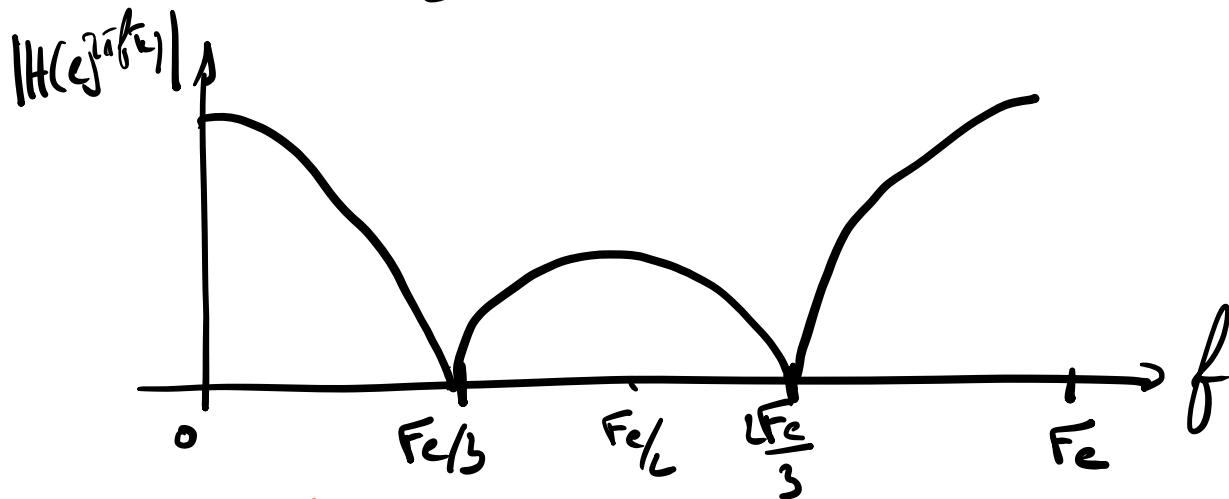
$$\downarrow T_c$$

$$Y(z) = \frac{1}{3} (z^{-1}X(z) + X(z) + z \cdot X(z)) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{3} (z^{-1} + 1 + z)$$

$$\text{D'où } H(e^{j2\pi f T_c}) = \frac{1}{3} \left(e^{-j2\pi f T_c} + 1 + e^{+j2\pi f T_c} \right)$$

Représentation fréquentielle : réponse en fréquence (3/3)

$$H(e^{j\pi f t_0}) = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos(2\pi f t_0))$$



↳ filtre PASSÉ-BAS

Propriétés de la réponse en fréquence

- $H(e^{j2\pi fT_e})$ est périodique, de période $F_e \dots$ comme toutes les grandeurs en fréquence dans le monde numérique ;
- On définit le gain statique du filtre $G_s = H(e^{j2\pi fT_e})|_{f=0} = H(z)|_{z=1}$;
- Dans le cas où $H(e^{j2\pi fT_e}) = |H(e^{j2\pi fT_e})|e^{j\varphi(f)}$, on introduit le **temps de propagation de groupe** $\tau(f)$:

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df}.$$

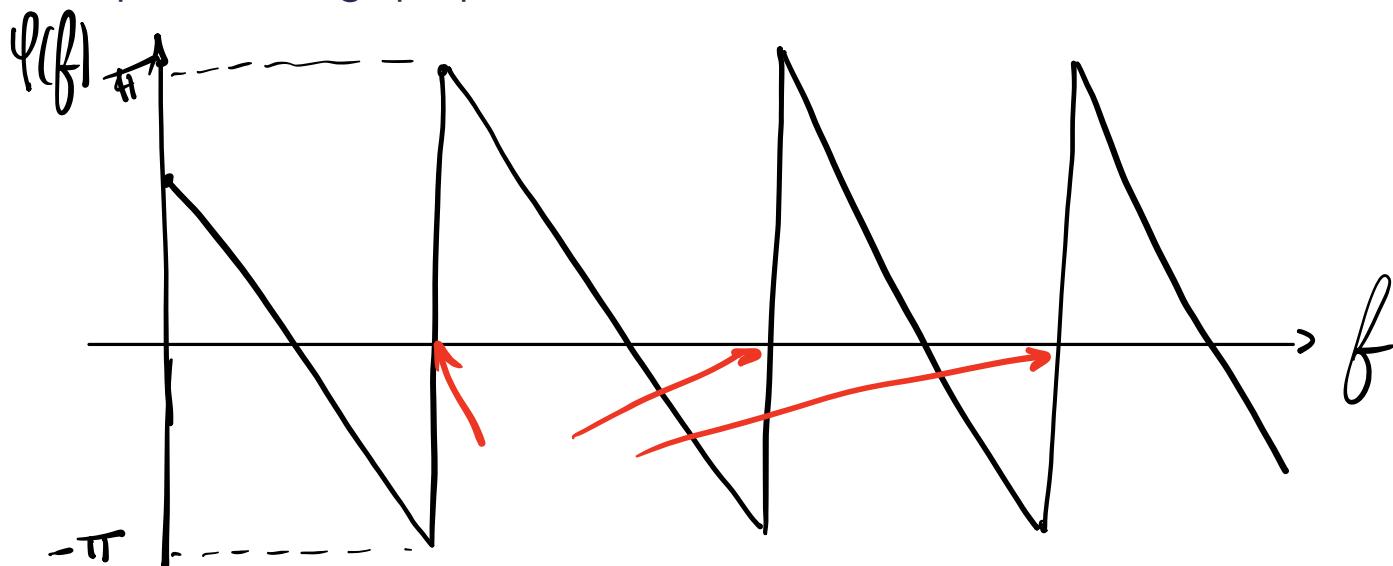
$\tau(f)$ caractérise “le retard subis par une fréquence f ” au passage du filtre. Ainsi, si $\tau(f)$ est constant (le filtre introduit donc un retard pur τ !), alors :

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \tau = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df} \\ \Leftrightarrow \varphi(f) &= -\cancel{2\pi\tau} f + \text{cste} \end{aligned}$$

La phase de la réponse en fréquence varie alors **linéairement** selon f !

Propriété de phase linéaire

Représentation graphique :



On peut montrer que seuls les filtres RIF peuvent avoir une phase linéaire. Si son ordre est égal à M , alors :

- si M est pair ($M = 2P$), alors $\tau = PT_e$;
- si M est impair ($M = 2P + 1$), alors $\tau = (P + 1/2)T_e$.

Tracé de la réponse en fréquence selon la position des pôles et zéros (1/2)

Il est possible d'obtenir l'allure de la réponse en fréquence d'un filtre numérique sans aucun calcul, à partir de la position des **pôles** et **zéros** du filtre dans le plan complexe. En effet, toutes les fonctions de transfert des systèmes DLI s'écrivent

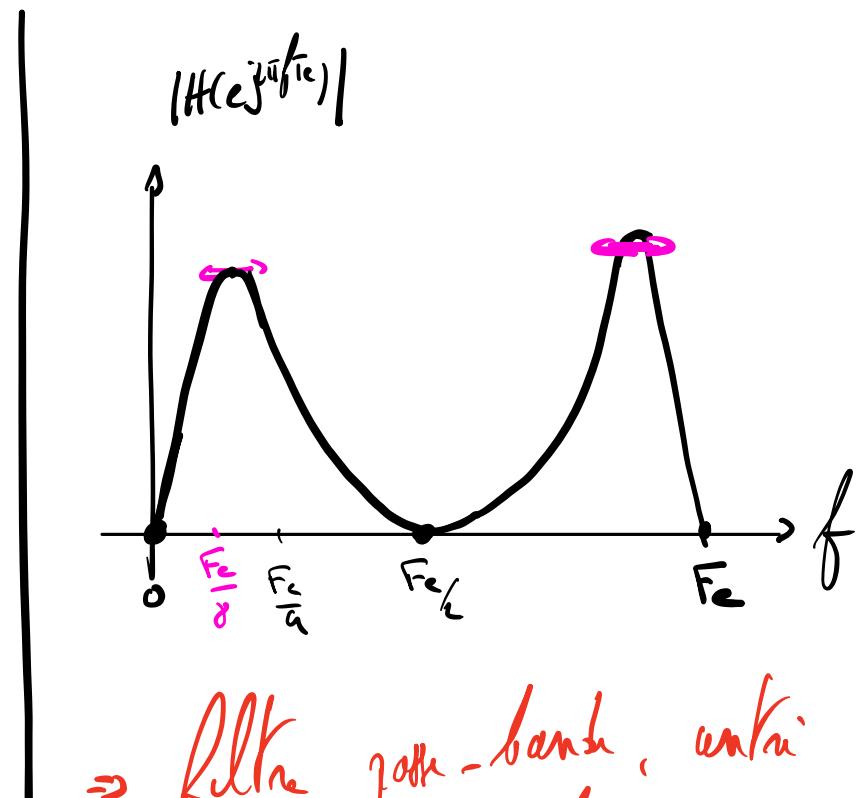
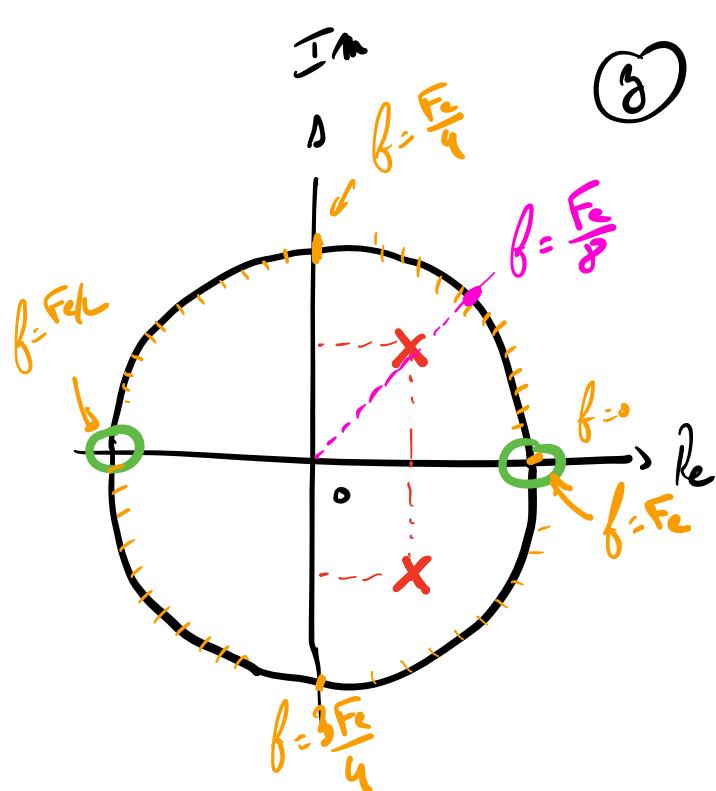
$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_m)}.$$

Alors, pour des z de module 1 (cercle unité), $|z - z_k|$ s'apparente à la mesure de la distance séparant le point z_k dans le plan complexe de z sur le cercle unité. 2 cas se présentent alors :

- $|(z - z_k)|$ est petit (z proche de z_k) :
 - si z_k est un pôle, alors $|H(z)|_{z=e^{j2\pi fT_e}} = |H(e^{j2\pi fT_e})|$ est grand ;
 - si z_k est un zéro, alors $|H(e^{j2\pi fT_e})|$ est petit ;
- $|(z - z_k)|$ est grand (z loin de z_k) :
 - si z_k est un pôle, alors $|H(z)|_{z=e^{j2\pi fT_e}} = |H(e^{j2\pi fT_e})|$ est petit ;
 - si z_k est un zéro, alors $|H(e^{j2\pi fT_e})|$ est grand ;

Tracé de la réponse en fréquence selon la position des pôles et zéros (2/2)

Exemple : $H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-p_1)(z-p_2)}$, avec $p_1 = 0.5 + 0.5j$ et $p_2 = p_1^*$.



⇒ filtre passe-bande, anti-aliasing en $f = Fe/\sqrt{2}$

Exemple d'étude d'un filtre

Exemple : le filtre moyenneur (1/3)

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[n-i] \longrightarrow \text{filtre RIF!}$$

↓ T_E

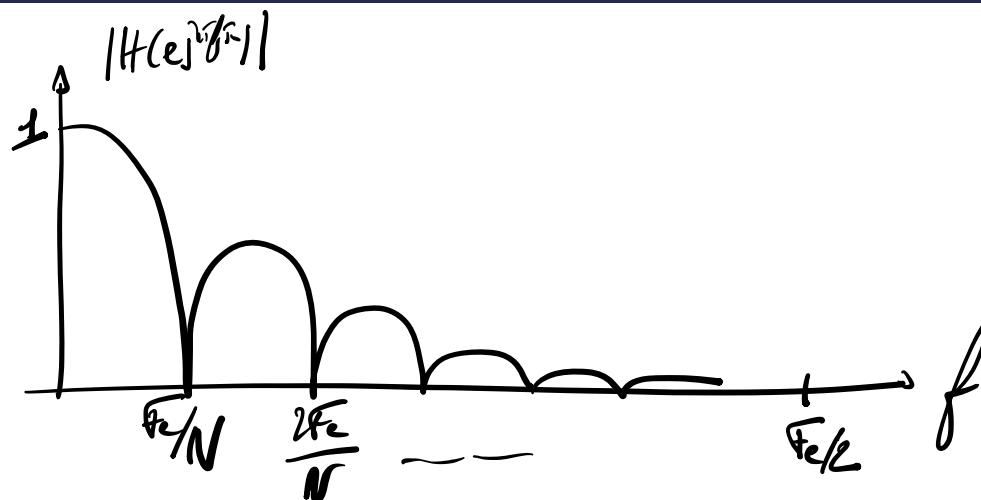
$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

forme récursive
du filtre RIF!

$$H(e^{j\omega f T_E}) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\pi f N T_E}}{1 - e^{-j\pi f T_E}} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi f N T_E)}{\sin(\pi f T_E)} e^{-j\pi f (N-1) T_E}$$

Exemple : le filtre moyenneur (2/3)

- Modulus



- Phase:

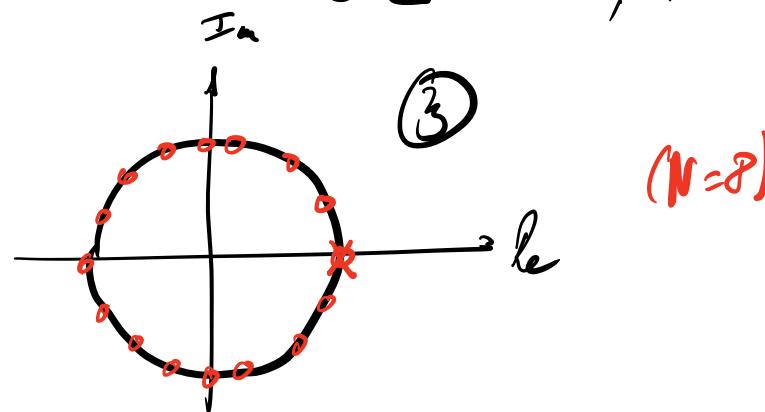
$$\varphi(f) = -\pi f(N-1)T_c \Rightarrow \tilde{G}(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d|\tilde{G}(f)|}{df} = \frac{N-1}{2} \cdot T_c = \text{dc}$$

↳ phase linéaire \Rightarrow ↳ n°tant dc

Exemple : le filtre moyenneur (3/3)

Pôles : tous en 0 !

Zéros : $1 - \zeta^{-N} = 0 \Leftrightarrow \zeta^N = 1 \rightarrow$ racines $N^{\text{ème}}$ de l'unité.
 $\hookrightarrow e^{j\frac{2\pi k}{N}}$, $k = 0 \dots N-1$



Conclusion

A retenir



Les systèmes discrets ...

- ... sont caractérisés en temps par leur équation de récurrence (réursive ou non) et leur réponse impulsionnelle ;
 - ... sont caractérisés en fréquence par leur fonction de transfert et leur réponse en fréquence ;
 - Il existe deux grandes familles de systèmes :
 - les systèmes à réponse impulsionnelle finie (RIF),
 - et les systèmes à réponse impulsionnelle infinie (RII),
- dont les propriétés diffèrent.

■ Propriétés RIF/RII :

	RIF	RII
Rép. impulsionnelle	Durée finie	Durée infinie (mais converge vers 0)
Equ. de récurrence	Non récursive ou récursive	Forcément non récursive
Rép. en fréquence	Phase possiblement linéaire	Phase non linéaire
Stabilité	Toujours stable	Peut être instable

■ Lien entre les caractéristiques temporelles/fréquentielles :

