第八周作业

2020年4月16日　　16:53

习题四：

6、7、10、11、16、17、18、19

6. 设二元随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{-2x}, & 0<x<+\infty, 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求: (1) $E(X)$; (2) $E(3X-1)$; (3) $E(XY)$ 的值.

6. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}dx\int_0^x \frac{2e^{-2x}}{x}dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$

$= -e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

$E(3X-1) = 3E(X)-1 = 2$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}dx\int_0^x xy\cdot\frac{e^{-2x}}{x}dy = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2}e^{-2x}dx$

$=\frac{1}{16}\int_0^{+\infty}(2x)^2e^{-2x}d(2x) = \frac{1}{16}\Gamma(3) = \frac{1}{8}$

即 $E(XY)=\frac{1}{8}$

7. 已知一根长度为 1 的棍子上有个标志点 Q, 现随机地将此棍子截成两段.

(1) 求包含 Q 点的那一段棍子的平均长度 (若截点刚好在 Q 点, 则认为 Q 包含在较短的一截内);

(2) 当 Q 位于棍子何处时, 包含 Q 点的棍子平均长度达到最大?

7. 设棍子在 $[0,1]$ 之间, Q点位于 x_0处. 而截断点位于 x处

可见 $x \sim U(0,1)$, 且 $x_0\in[0,1]$

则包含Q点的棍子长度 $L=\begin{cases}1-x, & 0\le x<x_0\\ x, & x_0<x<1\\ \min\{x,1-x\}, & x=x_0\end{cases}$

(1) 故 $E(L)=\int_0^{x_0}(1-x)dx+\int_{x_0}^1 x\,dx = x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{x_0}^1$

$= x_0-\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{x_0^2}{2} = -x_0^2+x_0+\frac{1}{2}$

(2) 可当 $x_0=\frac{1}{2}$时 $E(L)_{max}=\frac{3}{4}$

10. 某设备无故障运行的时间 T (以小时计) 服从数学期望为 $\dfrac{1}{\lambda}(\lambda>0)$ 的指数分布. 若设备在一天 8 个小时的工作时间内发生故障就自动停止运行待次日检修, 否则就运行 8 小时后停止. 求该设备每天运行的平均时间.

10. $T\sim Exp(\lambda)$

故 $f_T(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$, 而运行时间 $X=\min\{T,8\}$

故 $E(X)=\int_0^8 t\cdot\lambda e^{-\lambda t}dt+\int_8^{+\infty}8\cdot\lambda e^{-\lambda t}dt$

$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{-8\lambda} x\,e^x\,dx \quad 8\int_{-8\lambda}^{-\infty} e^x\,dx$

$=\frac{1}{\lambda}\cdot\left(xe^x\Big|_0^{-8\lambda}-e^x\Big|_0^{-8\lambda}\right) -8e^x\Big|_{-8\lambda}^{-\infty}$

$=\frac{1}{\lambda}\left(-8\lambda e^{-8\lambda}-e^{-8\lambda}+1\right)+8e^{-8\lambda}$

$=\frac{1-e^{-8\lambda}}{\lambda}$

11. 某电子监视器的圆形屏幕半径为 $r(r>0)$, 若目标出现的位置点 A 服从均匀分布. 设 A 的平面直角坐标为 (X,Y).

(1) 求 $E(X)$ 与 $E(Y)$; (2) 求点 A 与屏幕中心位置 $(0,0)$ 的平均距离.

11. 由对称性易知 $E(X)=E(Y)$

由于 A 服从均匀分布. 则 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2\\ 0, & x^2+y^2>r^2\end{cases}$

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dx\,dy=\int_{-r}^{r}dx\int_{-r}^{r}\frac{x}{\pi r^2}dy=\int_{-r}^{r}\frac{2x}{\pi r}dx=0$

因而 $E(X)=E(Y)=0$

可见 $d\sim U(0,r)$ 故 $E(d)=\frac{r}{2}$

16. 随机变量 X 服从 Γ 分布, 密度函数为

$$f(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x},\quad x>0,$$

其中, $\alpha>0$ 称为 “形状参数”, $\lambda>0$ 称为 “尺度参数”. 求 $E(X^k)(k\geqslant 1)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

16. $E(X^k)=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\cdot x^k\cdot dx.$

$=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^{k+\alpha-1}e^{-\lambda x}dx$

$=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^{k+\alpha-1}e^{-\lambda x}d(\lambda x)\cdot\lambda^{-(k+\alpha)}$

$=\frac{\lambda^{-k}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^{k+\alpha-1}e^{-t}dt$

$=\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\lambda^k}$

$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$=\frac{\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2}-\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2$

$=\frac{(\alpha+1)\alpha-\alpha^2}{\lambda^2}$

$=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

17. 设随机变量 X 服从拉普拉斯分布, 密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty,$$

计算 X 与 $|X|$ 的方差.

17. $E(X)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} x e^{x} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx$

$= -\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} -t e^{-t} d(-t) + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx$

$= 0$

$E(|X|) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} -x e^{x} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx$

$= \int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx = \Gamma(2) = 1$

$E(X^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{x} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$

$= \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2$

$\therefore D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2$

$D(|X|) = E(X^2) - [E(|X|)]^2 = 1$

18. 机器处于不同状态时制造产品的质量有所差异. 如果机器运作正常, 则产品的正品率为 98%; 如果机器老化, 则产品的正品率为 90%; 如果机器处于需要维修的状态, 则产品的正品率为 74%. 机器正常运作的概率为 0.7, 老化的概率为 0.2, 需要维修的概率为 0.1. 现随机抽取了 100 件产品 (假设生产这些产品的机器的状态相互独立).

(1) 求产品中非正品数的数学期望与方差;

(2) 在已知这些产品都是正常机器制造出来的条件下, 求正品数的数学期望和方差.

18.(1) $E(X) = 100\times(0.7\times 2\% + 0.2\times 10\% + 0.1\times 26\%)$

$= 100\times(0.014 + 0.02 + 0.026)$

$= 6$

$D(X) = (6-2)^2\times 0.7 + (6-10)^2\times 0.2 + (6-26)^2\times 0.1$

$= 54.4$

(2) 若都是正常机器所制作

则 $E(Y) = 100\times 98\% = 98$

$D(Y) = 100\times 98\%\times 2\% = 1.96$

19. 随机变量 X 与 Y 独立同分布, 都服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的 $0-1$ 分布.

(1) 求 $P\{X+Y\geqslant 1\}$; (2) 计算 $E(X\cdot(-1)^Y)$ 及 $\mathrm{Var}(X\cdot(-1)^Y)$.

19.(1) $P\{X+Y\geq 1\} = 1-P\{X+Y<1\} = 1-P\{X=0, Y=0\} = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(2) $E(X\cdot(-1)^Y) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1$

$= 0$

$\mathrm{Var}(X\cdot(-1)^Y) = E(X^2) - [E(X\cdot(-1)^Y)]^2$

$= E(X^2) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{Var}(X(-1)^Y) = \frac{1}{2}$