■ 思考题五

1. 依概率收敛与高等数学中的收敛含义有何区别?
2. 马尔可夫不等式与切比雪夫不等式分别适用于哪些随机变量?
3. 说明大数定律与中心极限定理的联系与区别.
4. 对于例 5.2.5 而言, 为什么利用中心极限定理与切比雪夫不等式得到的结论有所差异?

▶ 习题五

1. 某种类的昆虫每周产卵数为随机变量 X(以个计), 若已知其平均周产卵数为 36 个.

   (1) 求一周内该昆虫产卵数不少于 50 个的概率至多有多少?

   (2) 若又已知该昆虫每周产卵数的标准差为 2 个, 那么一周内产卵数在范围 (32, 40) 内的概率至少有多大?

2. 一种遗传病的隔代发病率为 10%, 在得病家庭中选取 500 户进行研究, 试用切比雪夫不等式估计这 500 户中隔代发病的比例与发病率之差的绝对值小于 5% 的概率下界.

3. 抛掷一枚均匀的硬币, 直至硬币的两面均出现为止, 记 ξ 为抛掷的次数. 利用切比雪夫不等式找一个区间 (a,b), 使得 $P\{a<\xi<b\}\geqslant 75\%$ 成立.

4. 设随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 独立同分布, 都服从 $U(0,a)$, 其中 $a>0$. 令 $X_{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$, 证明: $X_{(n)}\xrightarrow{P} a, n\to+\infty$.

5. 设随机变量序列 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 独立同分布, 数学期望与方差均存在. 证明:

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\cdot X_i \xrightarrow{P} E(X_1), \quad n\to+\infty.$$

6. $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为独立同分布的正态随机变量序列, 若 $X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 $\sigma>0$. 问以下的随机变量序列当 $n\to+\infty$ 时依概率收敛吗? 若收敛, 请给出收敛的极限值, 否则请说明理由:

   (1) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$;

   (2) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$;

   (3) $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$;

   (4) $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}}$.

7. 设随机变量序列 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 独立同分布, 都服从期望为 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布, 其中 $\lambda>0$.

   (1) 若对任意的 $\varepsilon>0$, 均有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}=1$ 成立, 求 a 的值;

(2) 给出 $\dfrac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ 的近似分布;

(3) 求 $P\left\{\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100} X_i^2 \leqslant \dfrac{2}{\lambda^2}\right\}$ 的近似值.

8. 抛掷一枚硬币 10 000 次, 出现了 5 325 次 “正面”, 是否可以断言此硬币是不均匀的呢?

9. 设随机变量 X 服从辛普森分布 (亦称三角分布), 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x<1, \\ 2-x, & 1 \leqslant x<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 对 X 进行 100 次独立观察, 事件 $\{0.95<X<1.05\}$ 出现的次数记为 Y, 试用三种方法 (Y 的精确分布, 用泊松分布来作为 Y 的近似分布, 中心极限定理) 分别求出 $P\{Y>2\}$;

(2) 要保证至少有 95% 的把握使得事件 $\left\{\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{3}{2}\right\}$ 出现的次数不少于 80 次, 问至少需要进行多少次观察?

10. 某企业庆祝百年华诞, 邀请了一些社会名流及企业的相关人士来参加庆典. 被邀请者独自一人或携伴 (一位同伴) 出席, 也有可能因故缺席, 这三种情况的可能性分别为 0.3, 0.5, 0.2. 若此次庆典事先发出了 800 份邀请函, 若每位被邀请人参加庆典的行为相互独立, 问有超过千人出席该庆典的可能性大概有多大?

11. 某次 “知识竞赛” 规则如下: 参赛者最多可抽取 3 个独立的问题一一回答, 若答错就被淘汰, 进而失去回答下一题的资格. 每答对一题得 1 分, 若 3 题都对则再加 1 分 (即共得 4 分). 现有 100 名参赛选手参赛, 每人独立答题.

(1) 若每人至少答对一题的概率为 0.7, 用中心极限定理计算 “最多有 35 人得 0 分” 的概率近似值;

(2) 若题目的难易程度类似, 每人答对每题的概率均为 0.8, 求这 100 名参赛选手的总分超过 220 分的概率近似值.