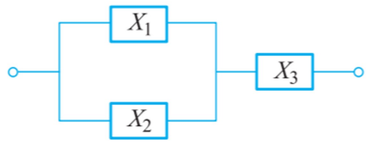
第七周作业

2020年4月9日 14:58

习题三：24、25(2)、27、30(1)(2)、33、35
习题四：1、2

24. 设一系统由 3 个独立的、正常工作时间分别为 X_1, X_2, X_3 的子系统组成 (如图 1). 且设 $X_i, i=1,2,3$ 均服从参数为 λ 的指数分布. 求该系统正常工作时间 T 的分布函数 $F_T(t)$ 及密度函数 $f_T(t)$.



■ 图 1

24. $X_i \sim E(\lambda)$

∴ $f(x_i)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x_i}, & x_i>0\\ 0, & x_i\le 0\end{cases}$ $F(x_i)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x_i}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $i=1,2,3$

$T=\min\{\max\{T_1,T_2\},T_3\}$

∴ $F_T(t)=1-[1-F_3(t)]\cdot[1-F_1(t)F_2(t)]$

$=1-e^{-\lambda t}\cdot[-e^{-2\lambda t}+2e^{-\lambda t}]$

3. $=1-e^{-2\lambda t}(2-e^{-\lambda t})$, $t>0$, 其它为 0.

即 $F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-2\lambda t}(2-e^{-\lambda t}), & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$

故 $f_T(t)=\frac{dF_T(t)}{dt}=\begin{cases}4\lambda e^{-2\lambda t}-3\lambda e^{-3\lambda t}\\ 0, & t\le 0\end{cases}$

(2) 设 $X\sim B(m,p), Y\sim B(n,p)$, X 与 Y 相互独立. 记 $W=X+Y$, 求 W 的概率分布律.

25. $P(X=x_i)=C_m^i p^i(1-p)^{m-i}$, $P(Y=y_j)=C_n^j p^j(1-p)^{n-j}$

∴ $P(Z=z_k)=\sum_{i=0}^{m} P\{X=x_i\}\cdot P(Y=z_k-x_i)$

$=\sum_{i=0}^{m} C_m^i p^i(1-p)^{m-i}\cdot C_n^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-k+i}$

$=\sum_{i=0}^{m} C_m^i p^k\cdot C_n^{k-i}(1-p)^k$

$=\sum_{i=0}^{m} C_m^i C_n^{k-i} p^k(1-p)^k$

$=C_{m+n}^k p^k(1-p)^k$

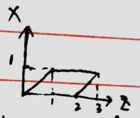
可见 $Z\sim B(m+n,p)$

27. 设二元随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3-x-y}{3}, & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若 $Z=X+Y$, 求 Z 的密度函数.

27. $\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<z-x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ z-2<x<z \end{cases}$



故 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx = \begin{cases} \int_0^z \frac{z-x-(z-x)}{3}dx = \frac{3z-z^2}{3}, & 0<z<1 \\ \int_0^1 \frac{z-x-(z-x)}{3}dx = \frac{3-z}{3} & 1\le z<2 \\ \int_{z-2}^1 \frac{3-x-(z-x)}{3}dx = \frac{(3-z)^2}{3}, & 2<z\le 3 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

30. 设一本书一页的错误个数 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且各页错误数相互独立. 现随机选 10 页, 其错误数分别记为 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$.

(1) 求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i \geqslant 2\right\}$; (2) 求 $P\{\max_{1\leqslant i\leqslant 10} X_i \geqslant 2\}$;

30. (1) $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i \ge 2\} = 1-P\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 0, 1\}$.

而由于每页结果相互独立 故 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i=0\} = \prod_{i=1}^{10} P(X_i=0)$

由于 $X_i \sim P(\lambda)$ 故 $P(X_i=0)=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$

$\cancel{\therefore P\{\sum_{i=1}^{10} X_i \ge 2\} = 1-\prod_{i=1}^{10} P(X_i=0) = 1-e^{-10\lambda}}$

而 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i=1\} = C_{10}^1 \cdot P\{X=1\} \cdot [P\{X=0\}]^9$

$P\{X=1\}=\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$, $P(X=0)=e^{-\lambda}$

$\therefore P\{\sum_{i=1}^{10} X_i=1\} = 10\lambda e^{-10\lambda}$

故 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i \ge 2\} = 1-(10\lambda+1)e^{-10\lambda}$

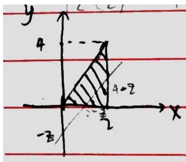
(2) $P\{\max_{1\le i\le 10} X_i \ge 2\} = 1-P\{X_i<2, i=1,2,\cdots,10\} \overset{独立}{=} 1-P^{10}(X<2)$

$=1-[P(X=0)+P\{X=1\}]^{10} = 1-(1+\lambda)e^{-10\lambda}$

33. 设二元随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{4} & 0<x<2, 0<y<2x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

记 $Z=2X-Y$, 求 Z 的密度函数.



由线性规划知 $2x-y\le z$ 转化为 $y\ge 2x-z$

$\therefore$ 当 $-z\le -4 \Leftrightarrow z\ge 4$ 时 $F_Z(z)=1$

当 $-z>0 \Leftrightarrow z<0$ 时 $F_Z(z)=0$

当 $0\le z<4$ 时 $F_Z(z)=\frac{4-\frac{1}{2}(2-\frac{z}{2})(4-z)}{4} = -\frac{z^2}{16}+\frac{z}{2}$, $0\le z<4$

故 $f(z)=\frac{dF(z)}{dz} = \begin{cases} -\frac{z}{8}+\frac{1}{2}, & 0\le z<4 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

35. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$, Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} 2y, & 0<y<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

X, Y 相互独立, 记 $M=\max(X,Y)$, $N=\min(X,Y)$, 分别求 M, N 的密度函数.

35. $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$\therefore F_M(t)=F_X(t)\cdot F_Y(t)$, $F_N(t)=1-[1-F_X(t)][1-F_Y(t)]$

$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx=\begin{cases}0, & t\le 0\\ t, & 0<t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$, $F_Y(t)=\int_{-\infty}^{t} f_Y(y)\,dy=\begin{cases}0, & t\le 0\\ t^2, & 0<t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$

故 $F_M(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ t^3, & 0<t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$　$F_N(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ -t^3+t^2+t, & 0<t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$

$f_M(t)=\frac{dF_M(t)}{dt}=\begin{cases}3t^2, & 0<t<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$, $f_N(t)=\frac{dF_N(t)}{dt}=\begin{cases}-3t^2+2t+1, & 0<t<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

1. 某批产品共有 M 件, 其中正品 N 件 $(0 \leqslant N \leqslant M)$. 从整批产品中随机地进行放回抽样, 每次抽取一件, 记录产品是正品还是次品后放回, 抽取了 n 次 $(n \geqslant 1)$. 试求这 n 次中抽到正品的平均次数.

设抽到正品次数为X，可见X~B(n,N/M)

则由公式的E(x)=$\frac{nN}{M}$

2. 一位即将毕业的大学生有意向与某企业签订就业合同. 该企业给他两个年薪方案供选择. 方案一: 年薪 3 万; 方案二: 底薪 1.2 万, 如果业绩达到公司要求, 则再可获得业绩津贴 3 万元, 如果达不到, 则没有业绩津贴, 一般约有 80% 的可能性可以达到公司的业绩要求. 问: 他应当采用哪种方案? 并说明理由.

第一种方案利润X=3，故E(X)=3

第二种方案，E(X)=1.2+0.8*3=3.6>3

所以从数学期望的角度来看，应该选择第二种方案。