# 3 Chapter

# 第 3 章 多元随机变量及其分布

在第 2 章中, 我们研究了单个随机变量的概率分布问题, 但许多随机现象需用多个变量来描述, 例如要预报明天的天气状况, 就要观察与预测多个随机变量 (如温度、湿度、风力, 等等) 的变化情况, 又比如要描述某地区居民的生活水平, 需关心居民的收入、支出、住房面积、空气质量等随机变量以及这些量之间的关系. 所以研究多元随机变量是必需的. 本教材将较深入地研究二元随机变量, 需要时可以将这些方法用于研究多元随机变量.

设一随机试验 $E$, 其样本空间为 $S=\{e\}$, 定义随机变量 $X=X(e), Y=Y(e)$, 称向量 $(X,Y)$ 为**二元随机向量**或**二元随机变量 (bivariate random variable)**.

# §3.1　二元离散型随机变量

**定义 3.1.1**　若二元随机变量 $(X,Y)$ 的取值有限或可列, 则称 $(X,Y)$ 为**二元离散型随机变量 (bivariate discrete random variable)**.

## (一) 二元离散型随机变量的联合分布

设二元离散型随机变量 $(X,Y)$ 的可能取值为 $(x_i,y_j), i,j=1,2,\cdots$, 与一元离散型随机变量相似, 称

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots \tag{3.1.1}$$

为 $(X,Y)$ 的**联合概率分布律 (joint mass function)**, 简称**联合分布律**. 上式亦可用列表的方式表示.

| | | $Y$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ |
| $X$ | $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\cdots$ | $p_{1j}$ | $\cdots$ |
| | $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| | $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{i2}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |

联合分布律满足: (1) $p_{ij} \geqslant 0, i,j=1,2,\cdots$; (2) $\sum_i \sum_j p_{ij}=1$.

由概率的性质知 (1) 成立, 又 $\{X=x_i, Y=y_j\}, i,j=1,2,\cdots$ 两两不相容, 且其全体构成一样本空间, 故 (2) 亦成立.

**例 3.1.1** 一袋中有 7 个球, 其中 4 个白球,1 个红球和 2 个黑球. 每次摸 1 球, 不放回抽样 3 次. 设 3 次中有 $X$ 次摸到白球, $Y$ 次摸到红球, 求 $(X,Y)$ 的联合分布律.

**解** 由题意知, $X$ 的可能取值为 $0,1,2,3$, $Y$ 的可能取值为 $0,1$. 记 $p(i,j)=P\{X=i,Y=j\}$, 则 (下式中 $\binom{n}{a}$ 即为组合数 $\mathrm{C}_n^a$)

$$
\begin{aligned}
&p(0,0)=0, && p(0,1)=\frac{\binom{1}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{35},\\
&p(1,0)=\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{35}, && p(1,1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{8}{35},\\
&p(2,0)=\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}, && p(2,1)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{6}{35},\\
&p(3,0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{35}, && p(3,1)=0.
\end{aligned}
$$

## (二) 二元离散型随机变量的边际分布

设二元离散型随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$, 因为 $\{X=x_i\}=\bigcup_{j=1}^{+\infty}\{X=x_i,Y=y_j\}$, 故有

$$
P\{X=x_i\}=P\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty}\{X=x_i,Y=y_j\}\right)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\triangleq p_{i\cdot},\quad i=1,2,\cdots. \tag{3.1.2}
$$

(**注** 符号 "≜" 表示 "记为".) 同样可得

$$
P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}\triangleq p_{\cdot j},\quad j=1,2,\cdots. \tag{3.1.3}
$$

显然有, $p_{i\cdot} \geqslant 0, p_{\cdot j} \geqslant 0, \sum_i p_{i\cdot} = 1, \sum_j p_{\cdot j} = 1$, 即 (3.1.2) 及 (3.1.3) 满足概率分布律的性质, 它们分别是随机变量 $X$ 与 $Y$ 的概率分布律, 分别称为关于 $X$ 及关于 $Y$ 的**边际分布律 (marginal mass function)** 或**边缘分布律**. 用列表的方法来表示联合分布及边际分布更能理解其字面的意义.

| | | $Y$ | | | | | $P\{X=x_i\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ | |
| $X$ | $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\cdots$ | $p_{1j}$ | $\cdots$ | $p_{1\cdot}$ |
| | $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ | $p_{2\cdot}$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ |
| | $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{i2}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ | $p_{i\cdot}$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ |
| $P\{Y=y_j\}$ | | $p_{\cdot 1}$ | $p_{\cdot 2}$ | $\cdots$ | $p_{\cdot j}$ | $\cdots$ | 1 |

上表内第 $i$ 行 (或第 $j$ 列) 累计后记作 $p_{i\cdot}$ (或 $p_{\cdot j}$), 上表列在联合分布律表的边上的这一列 (或一行) 恰是 $X$ (或 $Y$) 的概率分布律, 故称其为边际分布律.

**例 3.1.2** 设一群体 80% 人不吸烟, 有 15% 的人少量吸烟, 5% 的人吸烟较多, 且已知近期他们患呼吸道疾病 (以下简称患病) 的概率分别为 5%, 25%, 70%. 记

$$X = \begin{cases} 0, & \text{不吸烟}, \\ 1, & \text{少量吸烟}, \\ 2, & \text{吸烟较多}. \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{患病}, \\ 0, & \text{不患病}. \end{cases}$$

求: (1) $(X, Y)$ 的联合分布律与边际分布律; (2) 求患病人中吸烟的概率.

**解** (1) 记 $p(i,j) = P\{X=i, Y=j\}, i=0,1,2, j=0,1$. 由题意知, $X$ 的边际分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.80 | 0.15 | 0.05 |

且已知

$$P\{Y=1 \big| X=0\} = 0.05, \quad P\{Y=1 \big| X=1\} = 0.25, \quad P\{Y=1 \big| X=2\} = 0.70,$$

故 $p(0,1) = P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\} \cdot P\{Y=1 \big| X=0\} = 0.80 \times 0.05 = 0.04$.

同理可知

$$p(1,1) = 0.15 \times 0.25 = 0.037\,5, \quad p(2,1) = 0.05 \times 0.70 = 0.035,$$

因此,

$$p(0,0) = P\{X=0\} - p(0,1) = 0.80 - 0.04 = 0.76.$$

同理可知

$$p(1,0)=P\{X=1\}-p(1,1)=0.112\ 5,\quad p(2,0)=0.015.$$

于是可得以下的联合分布律及边际分布律:

| | | $Y$ | | $P\{X=i\}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | |
| $X$ | 0 | 0.76 | 0.04 | 0.80 |
| | 1 | 0.112 5 | 0.037 5 | 0.15 |
| | 2 | 0.015 | 0.035 | 0.05 |
| $P\{Y=j\}$ | | 0.887 5 | 0.112 5 | 1 |

(2) 要求的概率为

$$P\{(\{X=1\}\cup\{X=2\})\big|Y=1\}=\frac{p(1,1)+p(2,1)}{P\{Y=1\}}=\frac{0.072\ 5}{0.112\ 5}\approx 0.644\ 4,$$

即患病的人中有约 64% 的人吸烟.

## (三) 二元离散型随机变量的条件分布

从上面的例 3.1.2(2) 可以看到, 研究二元离散型随机变量的条件概率是有趣和必要的. 下面我们就来研究一下二元离散型随机变量的条件分布问题.

设二元离散型随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$, 则当 $P\{Y=y_j\}\neq 0$ 时,

$$P\{X=x_i\big|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots. \tag{3.1.4}$$

同理可得, 当 $P\{X=x_i\}\neq 0$ 时,

$$P\{Y=y_j\big|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots. \tag{3.1.5}$$

称 (3.1.4)(或 (3.1.5)) 式为给定 $\{Y=y_j\}$ (或 $\{X=x_i\}$) 的条件下 $X$ (或 $Y$) 的**条件分布律 (conditional mass function)**.

(3.1.4) 式中显然有 $\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\geqslant 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=1$. 同样 (3.1.5) 式中有 $\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\geqslant 0$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}=1$. 亦即 (3.1.4) 及 (3.1.5) 式满足概率分布律的性质.

**例 3.1.3** 设二元离散型随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| | | $Y$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $X$ | $1$ | $a$ | $0$ | $0.2$ |
| | $2$ | $0.1$ | $0.1$ | $b$ |

且已知 $P\{Y \leqslant 0 \mid X < 2\} = 0.5$. 求:

(1) $a, b$ 的值;

(2) $\{X = 2\}$ 的条件下 $Y$ 的条件分布律;

(3) $\{X + Y = 2\}$ 的条件下 $X$ 的条件分布律.

**解** (1) $0.5 = P\{Y \leqslant 0 \mid X < 2\} = \dfrac{P\{X < 2, Y \leqslant 0\}}{P\{X < 2\}} = \dfrac{a}{a + 0.2}$, 得 $a = 0.2$. 由联合分布律的性质知, $a + b + 0.4 = 1$, 得 $b = 0.4$.

(2) $P\{X = 2\} = 0.1 + 0.1 + b = 0.6$. 那么 $\{X = 2\}$ 的条件下 $Y$ 的条件分布律为

$$P\{Y = j \mid X = 2\} = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & j = -1, \\ \dfrac{1}{6}, & j = 0, \\ \dfrac{2}{3}, & j = 1. \end{cases}$$

也可以写为

| $Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P\{Y = j \mid X = 2\}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{3}$ |

(3) $P\{X + Y = 2\} = P\{X = 2, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 1\} = 0.3$, 那么

$$P\{X = i \mid X + Y = 2\} = \frac{P\{X = i, Y = 2 - i\}}{P\{X + Y = 2\}} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & i = 1, \\ \dfrac{1}{3}, & i = 2. \end{cases}$$

**例 3.1.4** 设一单位送客车上车人数 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布, 每个人行动独立, 每个上车人在中途下车 (没有坐到终点站) 的概率为 $p, 0 < p < 1$, 设中途只下不上, 并记中途下车的人数为 $Y$. 求:

(1) $(X, Y)$ 的联合分布律;

(2) $Y$ 的边际分布律;

(3) 在 $Y = 5$ 的条件下, $X$ 的条件分布律.

**解** 已知 $P\{X = m\} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!}, m = 0, 1, 2, \cdots$. 且由题意知, 当 $m = 0, 1, 2, \cdots$ 时,

$$P\{Y = n \mid X = m\} = \mathrm{C}_m^n p^n (1 - p)^{m-n}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, m.$$

$$(1)\ P\{X=m,Y=n\}=P\{X=m\}\cdot P\{Y=n|X=m\}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!}\mathrm{C}_m^n p^n(1-p)^{m-n},\quad m=0,1,2,\cdots,n=0,1,\cdots,m.$$

$$(2)\ P\{Y=n\}=\sum_{m=0}^{+\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=n}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!}\cdot\frac{m!}{n!(m-n)!}p^n(1-p)^{m-n}$$
$$=\frac{(\lambda p)^n\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!}=\frac{(\lambda p)^n\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}\cdot\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^n}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots,$$

即 $Y\sim P(\lambda p)$.

$$(3)\ P\{X=m|Y=5\}=\frac{P\{X=m,Y=5\}}{P\{Y=5\}}$$
$$=\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!}\mathrm{C}_m^5p^5(1-p)^{m-5}}{\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^5}{5!}}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}[\lambda(1-p)]^{m-5}}{(m-5)!},\quad m=5,6,\cdots.$$

**例 3.1.5** 一种叫“排列 3”的彩票: 每次从 $0\sim9$ 这 10 个数中随机取一个数, 共取 3 次, 得 3 个数的一个排列作为一期彩票的大奖号码. 王先生每一期去买 10 个不同排列的号码. 设 $X$ 为他首次中大奖时已买的彩票期数, $Y$ 表示第 2 次中大奖已买彩票的期数.

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合分布律;

(2) 已知他买 100 期时第 2 次中大奖, 求 $X$ 的条件分布律.

**解** (1) 由题意知, 每一个号码中大奖的概率为 $\dfrac{1}{10^3}$. 买 10 个不同号码, 中大奖的概率为 $\dfrac{1}{100}$. 记 $p=\dfrac{1}{100}$.

设 $A_i=\{$王先生买了第 $i$ 期彩票中大奖$\},i=1,2,\cdots$, 则

$$P\{X=m,Y=n\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{m-1}A_m\overline{A}_{m+1}\overline{A}_{m+2}\cdots\overline{A}_{n-1}A_n)$$
$$=p^2(1-p)^{n-2}=\left(\frac{1}{100}\right)^2\left(\frac{99}{100}\right)^{n-2},\quad m=1,2,\cdots,n-1,n=2,3,\cdots.$$

$$(2)\ P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2},\quad n=2,3,\cdots,$$

$$P\{X=m|Y=100\}=\frac{P\{X=m,Y=100\}}{P\{Y=100\}}$$
$$=\frac{p^2(1-p)^{98}}{99p^2(1-p)^{98}}$$
$$=\frac{1}{99},\quad m=1,2,\cdots,99,$$

即当已知王先生在买了 100 期彩票时第 2 次中大奖, 则第 1 次中大奖在前 99 期中是等可能的.

# §3.2 二元随机变量的分布函数

在 §3.1 中我们研究了二元离散型随机变量的联合分布律、边际分布律与条件分布律. 对二元随机变量的分布函数, 我们同样要研究这三方面的内容.

## (一) 二元随机变量的联合分布函数

**定义 3.2.1** 设二元随机变量 $(X,Y)$, 对于任意的实数 $x,y$, 称函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\} \tag{3.2.1}$$

为 $(X,Y)$ 的**联合概率分布函数**, 简称**联合分布函数 (joint distribution function)**.

若将 $(X,Y)$ 看作随机点的坐标, 则分布函数 $F(x,y)$ 即为 $(X,Y)$ 落在图 3.2.1 阴影部分区域的概率.

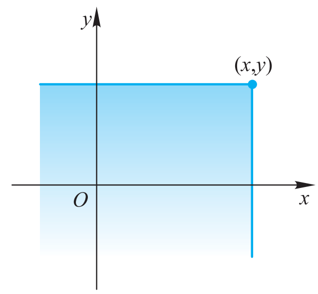



图 3.2.1

与一元随机变量的分布函数一样, 相应地, $F(x,y)$ 具有以下性质:

(1) 当给定 $x=x_0$ 时, $F(x_0,y)$ 关于 $y$ 单调不减; 当给定 $y=y_0$ 时, $F(x,y_0)$ 关于 $x$ 单调不减. 见图 3.2.2.

(2) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$, 且 $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$.

(3) $F(x,y)=F(x+0,y); F(x,y)=F(x,y+0)$, 即 $F(x,y)$ 关于 $x$ 右连续, 关于 $y$ 右连续 (证略).

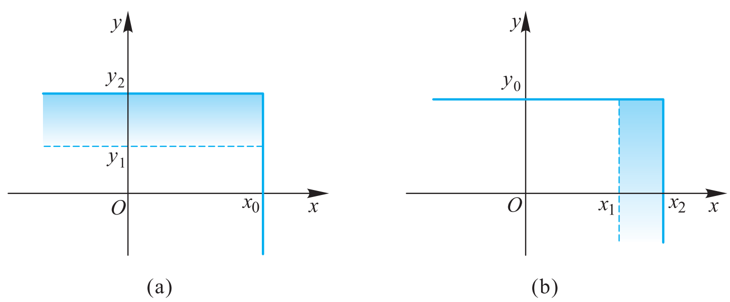



图 3.2.2

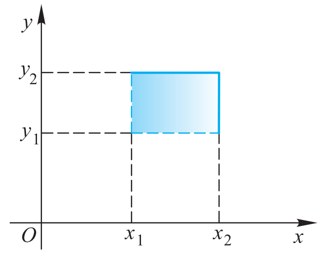
(4) 当实数 $x_2>x_1,y_2>y_1$ 时,

$$\begin{aligned}&F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\\&=P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}\geqslant 0,\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

见图 3.2.3.

性质 (1), (2) 可参照一元随机变量的分布函数相应性质的证明方法进行证明.

为了证明性质 (4), 设 $A=\{X\leqslant x_2,Y\leqslant y_2\},B=\{X\leqslant x_2,Y\leqslant y_1\}\cup\{X\leqslant x_1,Y\leqslant y_2\}$. 易知 $A\supset B,P(A)=F(x_2,y_2),P(B)=F(x_2,y_1)+F(x_1,y_2)-F(x_1,y_1)$. 从而




■ 图 3.2.3

$$
\begin{aligned}
&P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}\\
=&P(A-B)=P(A)-P(B)\\
=&F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1).
\end{aligned}
$$

由概率的非负性可得 $P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}\geqslant 0$.

## （二） 二元随机变量的边际分布函数

在 §3.1 中我们称单个变量的概率分布律为边际分布律, 在此我们同样称单个随机变量的分布函数为**边际概率分布函数**或**边缘概率分布函数**, 简称**边际分布函数 (marginal distribution function)** 或**边缘分布函数**.

记二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布函数为 $F(x,y),X,Y$ 的边际分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$, 则

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y<+\infty\}=F(x,+\infty).$$

同理, $F_Y(y)=F(+\infty,y)$. 即, 二元随机变量的边际分布函数是联合分布函数当另一个变量趋向于 $+\infty$ 时的极限函数.

以后我们不一一说明地常用 $F_X(x),F_Y(y)$ 表示 $X,Y$ 的边际分布函数, 用 $F(x,y)$ 表示 $(X,Y)$ 的联合分布函数.

## （三） 条件分布函数

设 $(X,Y)$ 为二元离散型随机变量, 当 $P\{X=x_i\}\neq 0$ 时, 称函数

$$F_{Y|X}(y|x_i)=P\{Y\leqslant y|X=x_i\}$$

为 **$\{X=x_i\}$ 条件下 $Y$ 的条件概率分布函数**, 简称**条件分布函数 (conditional distribution function)**.

设 $(X,Y)$ 为二元连续型随机变量 (下一节介绍), 当任意固定 $\delta>0, P\{x<X\leqslant x+\delta\}>0$ 时, 称函数

$$F_{Y|X}(y|x)=\lim_{\delta\to0^+}P\{Y\leqslant y\big|x<X\leqslant x+\delta\}$$

为 $\{X=x\}$ **条件下 $Y$ 的条件分布函数**.

条件分布函数具有分布函数的所有性质.

**例 3.2.1** 一袋中有 $n$ 个球, 其中 $a$ 个白球, $b$ 个红球 $(a,b\geqslant1)$. 每次从袋中任取一球, 作不放回抽样, 设

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次取到白球},\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次取到红球},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$$

(1) 试写出 $X_i$ 与 $X_j(i\neq j)$ 的联合分布律, 并求 $F(0,0)$;

(2) 求 $X_i$ 的边际分布函数 $F_i(x), i=1,2,\cdots,n$;

(3) 写出当 $\{X_i=1\}$ 时, $X_j$ 的条件分布函数 $(j\neq i)$.

**解** 记 $p_i(k)=P\{X_i=k\}, k=0,1; i=1,2,\cdots,n$, 且记 $p(k_1,k_2)=P\{X_i=k_1,X_j=k_2\}$,$k_1,k_2=0,1,i,j=1,2,\cdots,n$. 由第 1 章的例 1.3.2, 可知 $p_i(0)=\dfrac{b}{n}, p_i(1)=\dfrac{a}{n}, i=1,2,\cdots,n$.

当 $i\neq j$ 时, $P\{X_j=1\big|X_i=1\}=\dfrac{a-1}{n-1}$, 因此

$$\begin{aligned}p(1,1)&=P\{X_i=1\}\cdot P\{X_j=1\big|X_i=1\}=\frac{a}{n}\cdot\frac{a-1}{n-1},\\ p(1,0)&=p_i(1)-p(1,1)=\frac{ab}{n(n-1)},\\ p(0,0)&=p_j(0)-p(1,0)=\frac{b(b-1)}{n(n-1)},\\ p(0,1)&=p_j(1)-p(1,1)=\frac{ab}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

(1) 可得 $(X_i,X_j)(i\neq j)$ 的联合分布律如下:

| | | $X_j$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | |
| $X_i$ | 0 | $\frac{b(b-1)}{n(n-1)}$ | $\frac{ab}{n(n-1)}$ | $\frac{b}{n}$ |
| | 1 | $\frac{ab}{n(n-1)}$ | $\frac{a(a-1)}{n(n-1)}$ | $\frac{a}{n}$ |
| | | $\frac{b}{n}$ | $\frac{a}{n}$ | 1 |

$$F(0,0)=P\{X_i\leqslant0,X_j\leqslant0\}=\frac{b(b-1)}{n(n-1)}.$$

(2) 由第 (1) 小题知 $X_i$ 的概率分布律为

| $X_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{b}{n}$ | $\frac{a}{n}$ |

所以, $X_i$ 的边际分布函数

$$F_i(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{b}{n}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$$

(3) 由 $(X_i,X_j)$ 的联合分布律可知, 在 $\{X_i=1\}$ 的条件下, $X_j(j\neq i)$ 的条件分布律为

| $X_j$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P\{X_j=k\big\vert X_i=1\}$ | $\frac{b}{n-1}$ | $\frac{a-1}{n-1}$ |

所以所要求的条件分布函数为

$$F_{X_j|X_i}(y\big|1)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{b}{n-1}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,i\neq j.$$

# §3.3 二元连续型随机变量

## (一) 二元连续型随机变量的联合分布

**定义 3.3.1** 设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布函数为 $F(x,y)$, 若存在二元函数 $f(x,y)\geqslant 0$, 对任意的实数 $x,y$ 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\tag{3.3.1}$$

则称 $(X,Y)$ 为**二元连续型随机变量 (bivariate continuous random variable)**, 称 $f(x,y)$ 为 $(X,Y)$ 的**联合概率密度函数 (joint probability density function)**, 简称**联合密度函数**.

$f(x,y)$ 具有以下性质 (其中 $F(x,y)$ 为 $(X,Y)$ 的联合分布函数):

(1) $f(x,y)\geqslant 0$;

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=F(+\infty,+\infty)=1$;

(3) 在 $f(x,y)$ 的连续点上有

$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y);$$

(4) $(X,Y)$ 落入 $xOy$ 平面任一区域 $D$ 的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由性质 (4) 可知, 二元连续型随机变量 $(X,Y)$ 落在一面积测度为零的区域上的概率为零. 特别地, 落在一条曲线上的概率为零.

由 $f(x,y)$ 的性质 (3) 知, 在 $f(x,y)$ 的连续点处有

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}\\
&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y}\\
&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{P\{x<X\leqslant x+\Delta x,y<Y\leqslant y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}.
\end{aligned}$$

这表明 $(X,Y)$ 的联合密度函数为 $(X,Y)$ 落入矩形区域 $D=\{(a,b):x<a\leqslant x+\Delta x,y<b\leqslant y+\Delta y\}$ (其中 $\Delta x>0,\Delta y>0$) 的概率与该区域面积之比当 $\Delta x,\Delta y\to 0^+$ 时的极限值, 这与物理量质量面密度是相通的. 且当 $\Delta x,\Delta y$ 充分小时, 可得

$$P\{x<X\leqslant x+\Delta x,y<Y\leqslant y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y,$$

即 $(X,Y)$ 落在矩形区域 $D$ 上的概率近似等于 $f(x,y)\Delta x\Delta y$, 这也表明 $f(x,y)$ 是描述二元变量 $(X,Y)$ 落在点 $(x,y)$ 附近的概率大小的一个量.

**例 3.3.1** 设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为 (如图 3.3.1(a))

$$f(x,y)=\begin{cases}cy, & x^2<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 $c$; (2) 求 $P\{X\leqslant Y\}$ 的值.

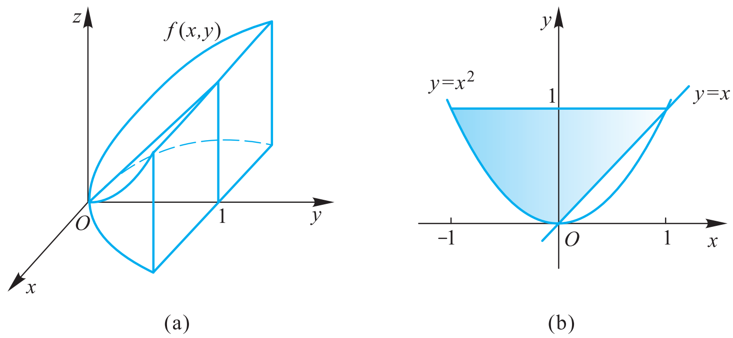
**解** (1) 由联合密度函数的性质 (2) 可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 cy\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=\frac{4c}{5},$$

得 $c=\dfrac{5}{4}$.

(2) 如图 3.3.1(b) 所示, 得

$$P\{X\leqslant Y\}=\int_0^1\frac{5}{4}y\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{y}\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\int_0^1(y^2+y^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}y=\frac{11}{12}.$$




■ 图 3.3.1

## （二）二元连续型随机变量的边际分布

设 $(X,Y)$ 为二元连续型随机变量, $F(x,y), f(x,y)$ 分别为 $(X,Y)$ 的联合分布函数及联合密度函数, 称单个随机变量 $X$ (或 $Y$) 的密度函数为 $X$ (或 $Y$) 的**边际概率密度函数 (marginal probability density function)**, 简称**边际密度函数**, 且常分别用 $f_X(x), f_Y(y)$ 表示. 由于

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x, Y \in (-\infty, +\infty)\} = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

那么由连续型随机变量的定义知, $X$ 为连续型随机变量, 且 $X$ 的边际密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{3.3.2}$$

同理可得

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{3.3.3}$$

即边际密度函数为联合密度函数关于另一个变量在 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分.

**例 3.3.2** 设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 3x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 $X,Y$ 的边际密度函数; (2) 求 $P\{Y \leqslant 2\}$ 的值.

**解** (1) 当 $0 < x < 1$ 时, 由 (3.3.2) 式可知

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{3x} x\mathrm{d}y = 3x^2.$$

而当 $x$ 取其他值时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\mathrm{d}y = 0.$$

故得

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

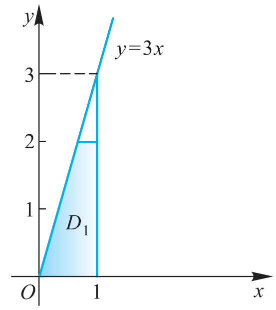
同理可得,

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{y}{3}}^{1} x\mathrm{d}x=\frac{9-y^2}{18}, & 0<y<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 有两种方法可用于求 $P\{Y\leqslant 2\}$ 的值.

**解法 1** $P\{Y\leqslant 2\}=\displaystyle\int_0^2 f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{23}{27}$.

**解法 2** 由图 3.3.2, 得

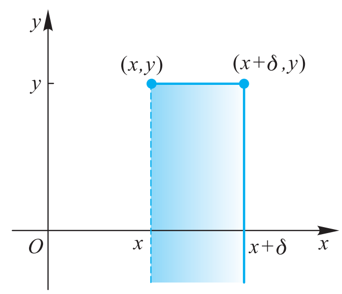


■ 图 3.3.2

$$P\{Y\leqslant 2\}=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{3}}^{1}x\mathrm{d}x=\frac{23}{27}.$$

## (三) 二元连续型随机变量的条件分布

设 $(X,Y)$ 为二元连续型随机变量, 由条件分布函数的定义和图 3.3.3 知



■ 图 3.3.3

$$\begin{aligned}F_{Y|X}(y|x)&=\lim_{\delta\to 0^+}P\{Y\leqslant y|x<X\leqslant x+\delta\}\\&=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{P\{x<X\leqslant x+\delta,Y\leqslant y\}}{P\{x<X\leqslant x+\delta\}}\\&=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{F(x+\delta,y)-F(x,y)}{F_X(x+\delta)-F_X(x)}\\&=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{(F(x+\delta,y)-F(x,y))/\delta}{(F_X(x+\delta)-F_X(x))/\delta}.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{F_X(x+\delta)-F_X(x)}{\delta}=f_X(x),$$

且

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{F(x+\delta,y)-F(x,y)}{\delta}=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{y}f(x,v)\mathrm{d}v,$$

即此时有

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}\mathrm{d}v.$$

因此有下面的定义:

**定义 3.3.2** 设 $(X,Y)$ 为二元连续型随机变量, $f(x,y)$ 为 $(X,Y)$ 的联合密度函数, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 为 $X,Y$ 的边际密度函数. 给定 $\{X=x\}$ 的条件下, $Y$ 的**条件概率密度函数 (conditional probability density function)**, 简称**条件密度函数**, 为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad f_X(x)\neq 0. \tag{3.3.4}$$

同样给定 $\{Y=y\}$ 的条件下, $X$ 的**条件密度函数**为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y)\neq 0. \tag{3.3.5}$$

条件密度函数具有以下性质 (以 $f_{Y|X}(y|x)$ 为例):

(1) $f_{Y|X}(y|x)\geqslant 0$;

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y}{f_X(x)}=1$;

(3) 给定 $x$, 当 $f_{Y|X}(y|x)$ 在 $y$ 处连续时,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_{Y|X}(y|x)=f_{Y|X}(y|x);$$

(4) 对于任意区域 $D$,

$$P\{Y\in D|X=x\}=\int_D f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y.$$

在下文中, 一般用 $f(x,y)$ 表示 $(X,Y)$ 的联合密度函数, 用 $f_X(x),f_Y(y)$ 分别表示 $X,Y$ 的边际密度函数.

**例 3.3.3** 有一件事需甲、乙两人先后接力完成, 完成时间要求不能超过 30 分钟. 先由甲工作, 再由乙接着干, 设甲干了 $X$ 分钟, 甲、乙两人共干了 $Y$ 分钟. 又设 $X$ 服从 $(0,30)$ 的均匀分布, 且 $\{X=x\}$ 时, $Y$ 服从 $(x,30)$ 的均匀分布.

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合密度函数;

(2) 求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$;

(3) 当已知花了 25 分钟完成此事, 求甲干的时间不超过 10 分钟的概率.

**解** 由题意知, $X\sim U(0,30)$, 即

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & x\in(0,30),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当甲干了 $x$ 分钟结束时, $Y$ 服从 $(x,30)$ 的均匀分布, 故当 $0<x<30$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30-x}, & x<y<30,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

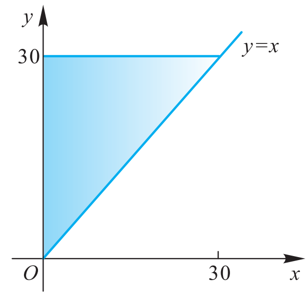
(1) 由 (3.3.4) 知

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30(30-x)}, & 0<x<30, x<y<30,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 由于 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$, 所以当 $0<y<30$ 时 (如图 3.3.4),

$$f_Y(y)=\int_0^y\frac{1}{30(30-x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{30}\ln\frac{30}{30-y}.$$

当 $y$ 取其他值时, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}x=0$.




■ 图 3.3.4

因此, 当 $0<y<30$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(30-x)\ln\dfrac{30}{30-y}}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) 由题意知, 所要求的是 $P\{X\leqslant 10|Y=25\}$. 当 $y=25$ 时,

$$f_{X|Y}(x|25)=\frac{f(x,25)}{f_Y(25)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln 6}\cdot\dfrac{1}{30-x}, & 0<x<25,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

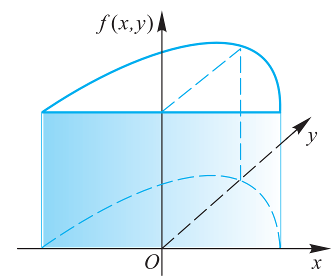
$$\begin{aligned}P\{X\leqslant 10|Y=25\}&=\int_{-\infty}^{10}f_{X|Y}(x|25)\mathrm{d}x=\int_0^{10}\frac{1}{\ln 6}\cdot\frac{1}{30-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln 30-\ln 20}{\ln 6}\approx 0.226\ 3.\end{aligned}$$

下面介绍两个重要的连续型随机变量的分布.

**定义 3.3.3** 设二元随机变量 $(X,Y)$ 在二维有界区域 $D$ 上取值, 且具有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{ 的面积}}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{3.3.6}$$

则称 $(X,Y)$ 服从 $D$ 上的**均匀分布**.




■ 图 3.3.5 均匀分布的联合密度函数

图 3.3.5 给出了上半单位圆内均匀分布的联合密度函数示意图.

若 $D_1$ 是 $D$ 的一个子集, 则可得到 $P\{(X,Y)\in D_1\}=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 即

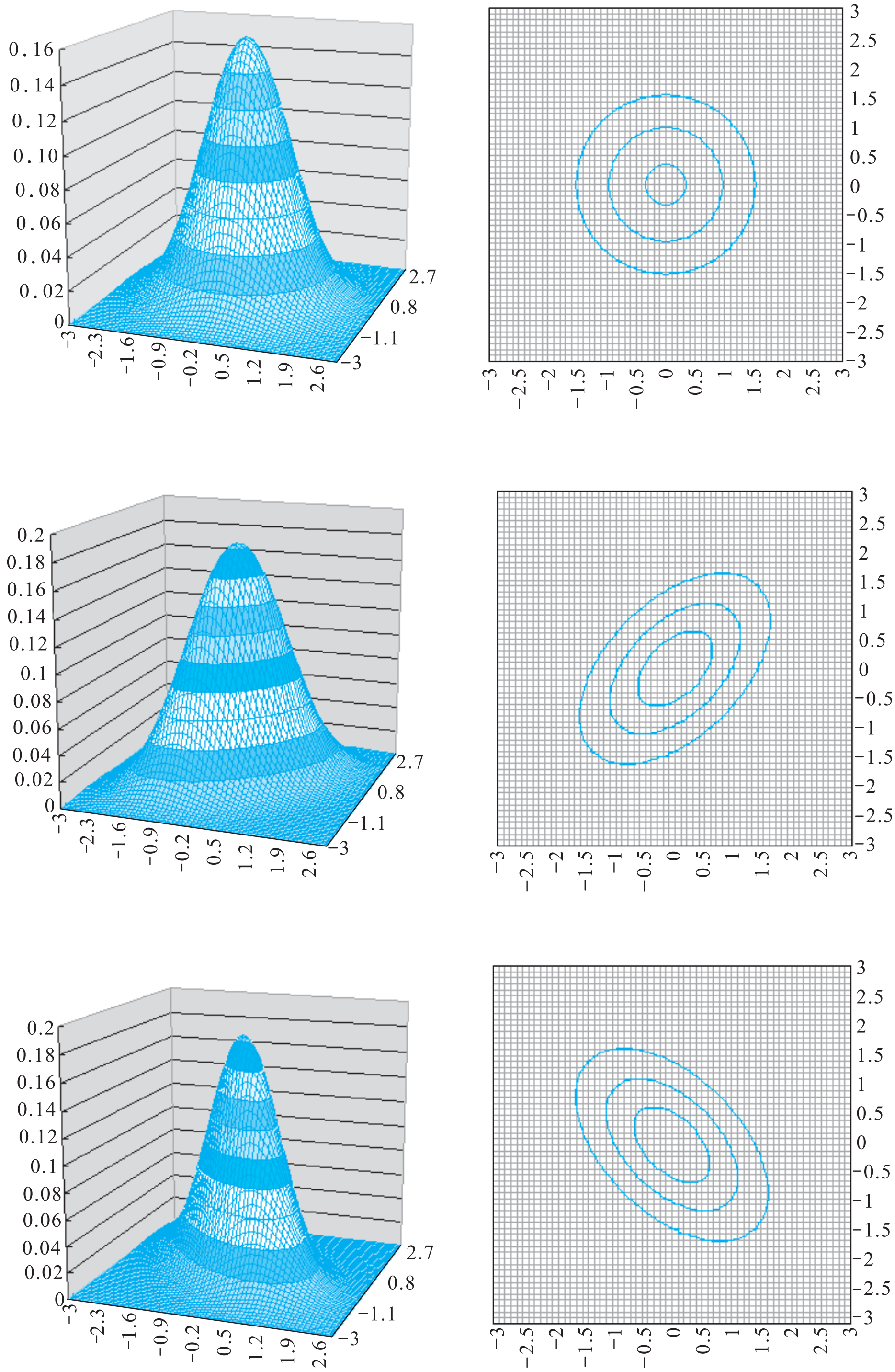
$$P\{(X,Y)\in D_1\}=\frac{D_1\text{ 的面积}}{D\text{ 的面积}}.$$

**定义 3.3.4** 设二元随机变量 $(X,Y)$ 具有联合密度函数

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},\tag{3.3.7}$$

其中 $|\mu_1|<+\infty, |\mu_2|<+\infty, \sigma_1>0, \sigma_2>0, |\rho|<1$, 则称 $(X,Y)$ 服从**参数为** $(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ **的二元正态分布 (bivariate normal distribution)**, 记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

图 3.3.6 列出了 $N(0,0,1,1,\rho)$ 当 $\rho=0, 0.5, -0.5$ 时的联合密度函数图及鸟瞰图.




■ **图 3.3.6　二元正态分布**

**例 3.3.4** 设二元随机变量 $(X,Y)$ 服从 $D=\{(x,y):x^2+y^2<1,y>0\}$ 上均匀分布.

(1) 求关于 $X,Y$ 的边际密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$;

(2) 求给定 $X=x$ $(|x|<1)$ 的条件下 $Y$ 的条件密度函数;

(3) 求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$ 的值.

**解** (1) 因为 $(X,Y)$ 服从上半单位圆 $D$ 上均匀分布, 故 $(X,Y)$ 具有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又 $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$, 那么显然, 当 $|x|\geqslant 1$ 时, $f_X(x)=0$; 而当 $|x|<1$ 时,

$$f_X(x)=\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}.$$

即

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理, 当 $0<y<1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{4\sqrt{1-y^2}}{\pi}.$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 当 $|x|<1$ 时,

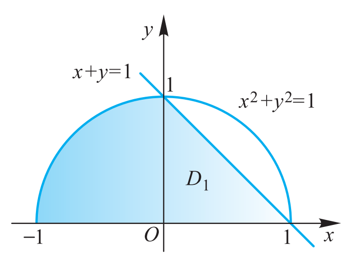
$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<y<\sqrt{1-x^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) 由图 3.3.7 知

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{D_1\text{ 的面积}}{D\text{ 的面积}},$$

其中 $D_1=\{(x,y):x^2+y^2<1,x+y\leqslant 1,y>0\}$. $D_1$ 的面积 $=\dfrac{2+\pi}{4}$, $D$ 的面积 $=\dfrac{\pi}{2}$, 故

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{2+\pi}{2\pi}.$$



■ 图 3.3.7

**例 3.3.5** 设二元随机变量 $(X,Y)$ 服从 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 分布.

(1) 求关于 $X,Y$ 的边际密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$;

(2) 求条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ 及 $f_{X|Y}(x|y)$.

**解** (1) 记 $C=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$. 则

$$
\begin{aligned}
f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\\
&=C\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\mathrm{d}y\\
&=C\cdot\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right]\cdot\\
&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}\mathrm{d}y\\
&=C\cdot\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right]\cdot\\
&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2+\frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2\cdot2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}y\\
&=C\cdot\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

作积分变量变换, 令 $t=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$, 则

$$
\begin{aligned}
f_X(x)&=C\cdot\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]\cdot\sigma_2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}\right]\mathrm{d}t\\
&=C\cdot\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]\cdot\sigma_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left[-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}\right]\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right],
\end{aligned}
$$

即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$. 同理可得 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

(2) 根据条件密度函数的定义, 知

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x)&=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
f_{X|Y}(x|y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left[x-\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right]^2\right\}.
$$

即当 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 时, $X,Y$ 的边际分布也是正态分布, $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. 当给定 $\{X=x\}$ 的条件下, $Y$ 的条件分布亦为正态分布, 此时 $Y$ 服从 $N\left(\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),(\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2)^2\right)$. 当给定 $\{Y=y\}$ 时, $X$ 的条件分布为 $N\left(\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),(\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1)^2\right)$.

## §3.4 随机变量的独立性

先回忆一下, 在第 1 章中, 两随机事件 $A, B$ 相互独立的定义: 当 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ 时, 称 $A, B$ 相互独立. 对于两个随机变量 $X, Y$, 有下面定义:

**定义 3.4.1** 对于任意两个实数集合 $D_1, D_2$, 有

$$P\{X \in D_1, Y \in D_2\} = P\{X \in D_1\} \cdot P\{Y \in D_2\}, \tag{3.4.1}$$

则称随机变量 $X, Y$ **相互独立**, 简称 $X, Y$ **独立**.

利用概率的三条公理可知, 当且仅当对任意实数 $x, y$, 有

$$P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = P\{X \leqslant x\} \cdot P\{Y \leqslant y\}, \tag{3.4.2}$$

即 $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ 时 $X, Y$ 相互独立.

也就是说 "对于任意的实数 $(x,y)$, $(X,Y)$ 的联合分布函数 $F(x,y)$ 都等于 $X$ 与 $Y$ 的边际分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$ 的乘积" 可以作为变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立的等价定义.

特别地, 当 $(X,Y)$ 为二元离散型随机变量时, 设 $X, Y$ 的可能取值为 $x_i, y_j, i, j = 1, 2, \cdots, X$ 与 $Y$ 相互独立的定义等价于: 对于任意的实数 $x_i, y_j$, 都有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

即

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots. \tag{3.4.3}$$

当 $(X,Y)$ 为二元连续型随机变量时, 由 (3.4.2) 式得, 对于任意的实数 $x, y$, 有

$$\int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\mathrm{d}u \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{y} f_X(u) \cdot f_Y(v)\mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u.$$

由微积分知识知, 两边积分处处相等, 被积函数不一定要处处相等, 即可以在面积为零的区域不相等. 也就是说, 被积函数除了面积为零的区域外处处相等, 这种相等, 我们称为几乎处处相等, 即

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \tag{3.4.4}$$

几乎处处成立为连续型随机变量 $X, Y$ 相互独立的等价定义.

当 $(X,Y)$ 为二元离散型随机变量时, 由 (3.4.3) 式知, 若存在 $i_0, j_0$ 使得 $P\{X = x_{i_0}, Y = y_{j_0}\} \neq P\{X = x_{i_0}\} \cdot P\{Y = y_{j_0}\}$, 则 $X$ 与 $Y$ 不独立; 当 $(X,Y)$ 为二元连续型随机变量时, 若存在一个面积不为零的区域 $D_0$, 使得 $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y), (x,y) \in D_0$, 则 $X$ 与 $Y$ 亦不独立.

由 (3.4.1) 式可知, 对任意集合 $D_1, D_2$, 当 $P\{X \in D_1\}P\{Y \in D_2\} \neq 0$ 时, $X, Y$ 相互独立的定义亦可写成

$$P\{X \in D_1 | Y \in D_2\} = P\{X \in D_1\} \quad \text{或} \quad P\{Y \in D_2 | X \in D_1\} = P\{Y \in D_2\}. \tag{3.4.5}$$

由相互独立的定义知, §3.1 的例 3.1.2 中 $X$ 与 $Y$ 不独立. 因为

$$P\{X=2,Y=1\}\neq P\{X=2\}\cdot P\{Y=1\}.$$

也就是吸烟的多少与是否患呼吸道疾病是不独立的.

再如 §3.3 的例 3.3.4 中的 $X,Y$ 亦不独立, 因为当 $|x|<1$ 时, $f_{Y|X}(y|x)\neq f_Y(y)$.

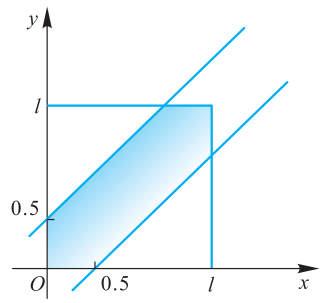
特别地, 若 $(X,Y)$ 为二元正态变量, 由本章 §3.3 例 3.3.5 知, $X$ 与 $Y$ 相互独立的充分必要条件为 $\rho=0$. 因为当且仅当 $\rho=0$ 时, (3.4.4) 式成立.

在实际问题中, 当一个变量的取值不影响另一个变量取值的概率时, 常认为这两个变量相互独立.

**例 3.4.1** 设在 $A$ 地与 $B$ 地间的距离 (以公里计) 为 $l(l>1)$ 的公路上有一辆急修车, 急修车所在的位置是随机的, 行驶中的车辆抛锚地点也是随机的. 求急修车与抛锚车的距离小于 0.5 公里的概率.

**解** 如图 3.4.1, 设急修车离 $A$ 地的距离为 $X$, 抛锚车离 $A$ 地的距离为 $Y$. 由题意知, $X$ 与 $Y$ 独立, 且均在 $(0,l)$ 上均匀分布. 所要求的概率为

$$P\{|X-Y|<0.5\}=\frac{l^2-(l-0.5)^2}{l^2}=\frac{l-0.25}{l^2}.$$




■ 图 3.4.1

**定理 3.4.1** 二元连续型随机变量 $X,Y$ 相互独立的充要条件是 $X,Y$ 的联合密度函数 $f(x,y)$ 几乎处处可写成 $x$ 的函数 $m(x)$ 与 $y$ 的函数 $n(y)$ 的乘积, 即

$$f(x,y)=m(x)\cdot n(y),\quad |x|<+\infty,\quad |y|<+\infty.$$

**证明** 先证必要性. 当 $X,Y$ 相互独立时, 由 (3.4.4) 式知, 下式几乎处处成立:

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

记 $m(x)=f_X(x),n(y)=f_Y(y)$, 则 $f(x,y)=m(x)\cdot n(y)$.

再证充分性. 当 $f(x,y)=m(x)\cdot n(y)$ 时, 由联合密度函数的性质知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}m(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}n(y)\mathrm{d}y.$$

记 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}m(x)\mathrm{d}x=a,\int_{-\infty}^{+\infty}n(y)\mathrm{d}y=b$, 那么 $ab=1$. 再结合边际密度函数与联合密度函数的关系, 可得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=m(x)\int_{-\infty}^{+\infty}n(y)\mathrm{d}y=bm(x).$$

同理得, $f_Y(y)=an(y)$. 所以

$$f(x,y)=m(x)\cdot n(y)=bm(x)\cdot an(y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

那么由 (3.4.4) 式知 $X,Y$ 相互独立.

**例 3.4.2** 问在下面两种情况下, $X$ 与 $Y$ 是否相互独立吗:

(1) 设 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}, & x>0,0<y<2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

(2) 设 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**解** (1) 记

$$m(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad n(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则

$$f(x,y)=m(x)\cdot n(y),\quad |x|<+\infty,\quad |y|<+\infty.$$

故 $X,Y$ 相互独立.

(2) 由于 $f(x,y)$ 不能分解成 $x$ 的函数与 $y$ 的函数的乘积, 故 $X,Y$ 不独立.

从另一角度来看, 我们可以求得 $X,Y$ 的边际密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故当 $0<y<x<1, f(x,y)\neq f_X(y)\cdot f_Y(y)$. 那么由 (3.4.4) 式也可知 $X,Y$ 不独立.

以上关于二元随机变量的一些概念, 容易推广到 $n$ 元随机变量的情形.

例如: 联合分布函数的概念, $n$ 元随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\},$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为任意的实数.

关于边际分布函数, 以下举例说明, 其他情形可举一反三. 例如:

$$F_{X_1}(x_1)=P\{X_1\leqslant x_1\}=F(x_1,+\infty,+\infty,\cdots,+\infty).$$

当 $n>2$ 时, 有 $(X_1,X_2)$ 的联合边际分布函数

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2\}=F(x_1,x_2,+\infty,\cdots,+\infty).$$

类似地, 也可以定义 $n$ 元离散型随机变量与 $n$ 元连续型随机变量. 当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的取值至多可列时, 称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 $n$ 元离散型随机变量; 若对 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 存在非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 使得

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

成立, 则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 **$n$ 元连续型随机变量**, 其中的 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**联合密度函数**.

关于边际密度函数, 类似地有

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$
$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n,$$

等等.

若对任意的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ **相互独立**.

当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 $n$ 元离散型随机变量时, 亦有如 (3.4.3) 类似的相互独立的等价定义; 当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 $n$ 元连续型随机变量时, 亦有如 (3.4.4) 类似的相互独立的等价定义.

**定义 3.4.2** 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 分别为 $m$ 元和 $n$ 元随机变量, 分别用 $F_X(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 与 $F_Y(y_1,y_2,\cdots y_n)$ 表示它们的**联合分布函数**, 再记 $F(x_1,x_2,\cdots,x_m;y_1,y_2,\cdots y_n)$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 的**联合分布函数**.

对任意的实数 $x_i,y_j,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$, 若有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m;y_1,y_2,\cdots,y_n)=F_X(x_1,x_2,\cdots,x_m)\cdot F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

则称两向量组 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ **相互独立**.

若 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立, $g_1$ 与 $g_2$ 是两个连续函数, 则 $g_1(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 与 $g_2(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立.

## *§3.5 二元随机变量函数的分布

在第 2 章的 §2.5 中我们研究了一元随机变量函数的分布问题, 并提到了求一元随机变量函数的分布问题实质是找等价事件. 其实求二元随机变量函数的分布问题实质上也是寻找等价事件. 当然求二元随机变量函数的分布问题较为复杂, 下面我们将对一些特殊的形式进行详细的讨论.

### （一）$Z=X+Y$ 的分布

在这一部分中，我们将研究已知二元随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布，求 $Z=X+Y$ 的概率分布问题.

若 $(X,Y)$ 为二元离散型随机变量，设 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$，又设 $Z$ 的可能取值为 $z_1,z_2,\cdots,z_k,\cdots$，则显然有

$$P\{Z=z_k\}=P\{X+Y=z_k\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=z_k-x_i\},\quad k=1,2,\cdots \tag{3.5.1}$$

或

$$P\{Z=z_k\}=P\{X+Y=z_k\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=z_k-y_j,Y=y_j\},\quad k=1,2,\cdots. \tag{3.5.2}$$

特别地，当 $X$ 与 $Y$ 相互独立时，(3.5.1) 式与 (3.5.2) 式就可写成

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=z_k-x_i\},\quad k=1,2,\cdots \tag{3.5.3}$$

或

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=z_k-y_j\}\cdot P\{Y=y_j\},\quad k=1,2,\cdots. \tag{3.5.4}$$

若 $(X,Y)$ 为二元连续型随机变量，设 $(X,Y)$ 的联合密度函数为 $f(x,y)$，则 $Z$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

如图 3.5.1，作积分变量变换 $\begin{cases}u=x,\\ v=x+y,\end{cases}$ 这样的变换下可知 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，所以

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\mathrm{d}v\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v-u)\mathrm{d}u,$$

从而

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,z-u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x. \tag{3.5.5}$$

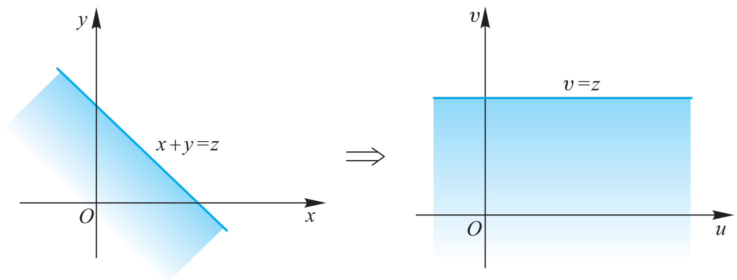
若作的积分变量变换为 $\begin{cases}u=x+y,\\ v=y,\end{cases}$ 通过同样的计算可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y. \tag{3.5.6}$$

特别地，当 $X,Y$ 相互独立时，(3.5.5) 式与 (3.5.6) 式就可写成

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x, \tag{3.5.7}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y. \tag{3.5.8}$$




■ 图 3.5.1

**例 3.5.1** 设 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2), X, Y$ 相互独立. 若 $Z = X + Y$, 求 $Z$ 的概率分布律.

**解** 由题意知

$$P\{X=i\} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}, i = 0, 1, 2, \cdots, \quad P\{Y=j\} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!}, j = 0, 1, 2, \cdots.$$

故

$$\begin{aligned}P\{Z=k\} = P\{X+Y=k\} &= \sum_{i=0}^{+\infty} P\{X=i\} \cdot P\{Y=k-i\} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2}\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.\end{aligned}$$

即 $Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$. 也就是说, 两个相互独立的服从泊松分布的随机变量的和仍服从泊松分布, 其参数为两个分布的参数之和.

用数学归纳法可以证明: $n$ 个相互独立的服从泊松分布的随机变量的和仍服从泊松分布, 其参数为 $n$ 个分布的参数之和.

**例 3.5.2** 设 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, \sigma^2), X$ 与 $Y$ 相互独立, $Z = X + Y$, 求 $Z$ 的密度函数.

**解** $f_X(x) \cdot f_Y(t-x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{2\pi\sigma}\mathrm{e}^{-\left[\frac{x^2}{2}+\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}\right]}$.

又因为

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2} + \frac{(t-x)^2}{2\sigma^2} &= \frac{t^2}{2\sigma^2} + \frac{(1+\sigma^2)[x^2 - 2xt/(1+\sigma^2)]}{2\sigma^2} \\ &= \frac{t^2}{2(1+\sigma^2)} + \frac{(1+\sigma^2)[x - t/(1+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2},\end{aligned}$$

所以

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2(1+\sigma^2)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(1+\sigma^2)[x-t/(1+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

对上式积分作积分变量变换, 令 $u = x - \dfrac{t}{1+\sigma^2}$, 可知 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, 从而可知此积分值为与 $t$ 无关的

常数, 暂且记作 $a$, 得

$$f_Z(t)=\frac{a}{2\pi\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2(1+\sigma^2)}}.$$

由上式可知 $Z\sim N(0,1+\sigma^2)$.

若当 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2), X,Y$ 相互独立时,

$$X+Y=\sigma_1\left(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}+\frac{Y-\mu_2}{\sigma_1}\right)+(\mu_1+\mu_2).$$

由例 2.5.5 知

$$\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1),\qquad \frac{Y-\mu_2}{\sigma_1}\sim N\left(0,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right).$$

由例 3.5.2 知

$$\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}+\frac{Y-\mu_2}{\sigma_1}\sim N\left(0,1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right).$$

再由例 2.5.5 可得

$$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

用数学归纳法可证, $n$ 个相互独立的正态变量之和仍为正态变量. 即若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i,\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$.

进一步可以证明: $n$ 个相互独立的正态变量的线性组合仍为正态变量.

**例 3.5.3** 设某服务台顾客等待时间 (以分钟计) $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布, 接受服务的时间 $Y$ 服从 (0, 20) 上的均匀分布, 且设 $X,Y$ 相互独立. 记 $Z=X+Y$.

(1) 求 $Z$ 的密度函数 $f_Z(t)$;

(2) 设 $\lambda=\dfrac{1}{20}$, 求等待与接受服务的总时间不超过 45 分钟的概率.

**解** (1) 由题意知

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & 0<y<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为 $X,Y$ 相互独立, 所以 $X,Y$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,0<y<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**解法 1** 利用 (3.5.5) 式,

$$f(x,t-x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,0<t-x<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t-x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(t-x)\mathrm{d}x.$$

由图 3.5.2 知

当 $t \leqslant 0$ 时, $f_Z(t) = 0$;

当 $0 < t < 20$ 时, $f_Z(t) = \int_0^t \frac{1}{20}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{20}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})$;

当 $t \geqslant 20$ 时, $f_Z(t) = \int_{t-20}^t \frac{1}{20}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathrm{e}^{20\lambda}-1)$.

**解法 2** 可先求 $Z$ 的分布函数, 再求 $f_Z(t)$. 由于 $F_Z(t) = P\{X+Y \leqslant t\}$, 由图 3.5.3 知

当 $t \leqslant 0$ 时, $F_Z(t) = 0$;

当 $0 < t < 20$ 时,

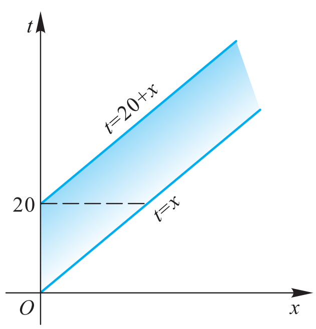
$$F_Z(t) = \int_0^t \mathrm{d}y \int_0^{t-y} \frac{1}{20}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{t}{20} - \frac{1}{20\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t});$$

当 $t \geqslant 20$ 时,

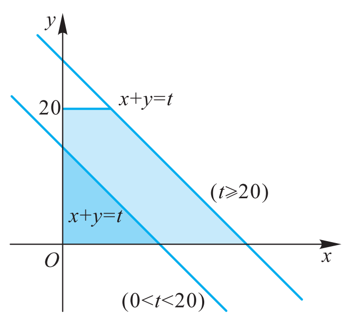
$$F_Z(t) = \int_0^{20} \mathrm{d}y \int_0^{t-y} \frac{1}{20}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{20\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathrm{e}^{20\lambda}-1).$$

从而

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{20}, & 0 < t < 20, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathrm{e}^{20\lambda}-1)}{20}, & t \geqslant 20. \end{cases}$$




■ 图 3.5.2




■ 图 3.5.3

(2) **解法 1** 利用 (1) 中的解法 2 求出的 $F_Z(t)$ 可知, 当 $\lambda = \frac{1}{20}$ 时,

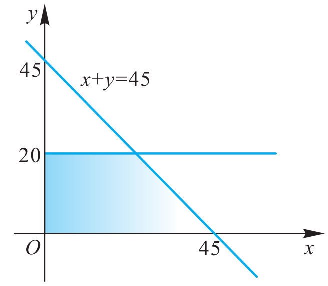
$$P\{Z \leqslant 45\} = F_Z(45) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{45}{20}}(\mathrm{e}-1) = 0.818\ 9.$$

**解法 2** 可由 $Z$ 的密度函数来计算得到:

$$P\{Z \leqslant 45\} = \int_{-\infty}^{45} f_Z(t)\mathrm{d}t = \int_0^{20} \frac{1-\mathrm{e}^{-t/20}}{20}\mathrm{d}t + \int_{20}^{45} \frac{\mathrm{e}-1}{20}\mathrm{e}^{-t/20}\mathrm{d}t = 0.818\ 9.$$

**解法 3**　直接计算. 如图 3.5.4, 得

$$P\{Z\leqslant 45\}=\int_0^{20}\mathrm{d}y\int_0^{45-y}\frac{\lambda}{20}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=0.818\ 9.$$




■ 图 3.5.4

**例 3.5.4**　设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 $Z=X+Y$, 求 $Z$ 的密度函数 $f_Z(t)$.

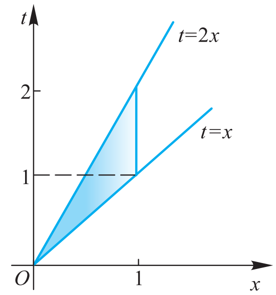
**解**　由 (3.5.5) 式可知 $f_Z(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t-x)\mathrm{d}x$. 而且由 $(X,Y)$ 的联合密度函数及定理 3.4.1 知, $X,Y$ 不独立, 且

$$f(x,t-x)=\begin{cases}3x, & 0<t-x<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

如图 3.5.5. 显然, 当 $t\leqslant 0$ 或 $t\geqslant 2$ 时, $f_Z(t)=0$;

当 $0<t<1$ 时, $f_Z(t)=\displaystyle\int_{t/2}^{t}3x\mathrm{d}x=\frac{9}{8}t^2$;

当 $1\leqslant t<2$ 时, $f_Z(t)=\displaystyle\int_{t/2}^{1}3x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)$.




■ 图 3.5.5

**例 3.5.5**　某人一天做两份工作, 一份工作得到的酬金 $X$ 具有概率分布律

| $X$ | 100 | 150 | 200 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

另一份工作的酬金 $Y$ 服从 $N$ (150,36). 设 $X,Y$ 相互独立, 记一天酬金总数为 $Z, Z=X+Y$.

(1) 求 $Z$ 的密度函数;　　　　(2) 求一天酬金多于 300 的概率.

**解**　(1) 先求 $Z$ 的分布函数, 利用全概率公式, 得

$$\begin{aligned}F_Z(t)&=P\{Z\leqslant t\}=P\{X+Y\leqslant t\}\\&=P\{X=100\}\cdot P\{X+Y\leqslant t|X=100\}+P\{X=150\}\cdot P\{X+Y\leqslant t|X=150\}+\\&\quad P\{X=200\}\cdot P\{X+Y\leqslant t|X=200\}\\&=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant t-100|X=100\}+P\{Y\leqslant t-150|X=150\}+\\&\quad P\{Y\leqslant t-200|X=200\}).\end{aligned}$$

因为 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 故有

$$\begin{aligned}F_Z(t)&=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant t-100\}+P\{Y\leqslant t-150\}+P\{Y\leqslant t-200\})\\&=\frac{1}{3}[F_Y(t-100)+F_Y(t-150)+F_Y(t-200)].\end{aligned}$$

那么

$$
\begin{aligned}
f_Z(t) = F_Z'(t) &= \frac{1}{3}[f_Y(t-100)+f_Y(t-150)+f_Y(t-200)] \\
&= \frac{1}{18\sqrt{2\pi}}[\mathrm{e}^{-\frac{(t-250)^2}{72}}+\mathrm{e}^{-\frac{(t-300)^2}{72}}+\mathrm{e}^{-\frac{(t-350)^2}{72}}].
\end{aligned}
$$

(2) $P\{Z>300\}=1-F_Z(300)=1-\frac{1}{3}\left[\Phi\left(\frac{50}{6}\right)+\Phi(0)+\Phi\left(-\frac{50}{6}\right)\right]=0.5.$

## （二）$M=\max(X,Y), N=\min(X,Y)$ 的分布

记 $X,Y$ 的联合分布函数为 $F(x,y)$, 且记 $F_X(t),F_Y(t)$ 分别为 $X,Y$ 的分布函数.

先来讨论 $M$ 的分布函数, 由 $M$ 的定义可知

$$
F_M(t)=P\{\max(X,Y)\leqslant t\}=P\{X\leqslant t,Y\leqslant t\}=F(t,t). \tag{3.5.9}
$$

特别地, 当 $X$ 与 $Y$ 相互独立时,

$$
F_M(t)=F_X(t)\cdot F_Y(t). \tag{3.5.10}
$$

再讨论 $N$ 的分布函数:

$$
\begin{aligned}
F_N(t)&=P\{\min(X,Y)\leqslant t\}=P\{(X\leqslant t)\cup(Y\leqslant t)\} \\
&=F_X(t)+F_Y(t)-F(t,t),
\end{aligned} \tag{3.5.11}
$$

或者

$$
F_N(t)=1-P\{\min(X,Y)>t\}=1-P\{X>t,Y>t\}. \tag{3.5.12}
$$

特别地, 当 $X$ 与 $Y$ 相互独立时,

$$
F_N(t)=F_X(t)+F_Y(t)-F_X(t)\cdot F_Y(t), \tag{3.5.13}
$$

或者

$$
F_N(t)=1-[1-F_X(t)]\cdot[1-F_Y(t)]. \tag{3.5.14}
$$

以上结果容易推广到 $n$ 个变量的情形. 特别地, 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 $n$ 个相互独立的随机变量, 相应的分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x)$, 记 $M=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n), N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 则有

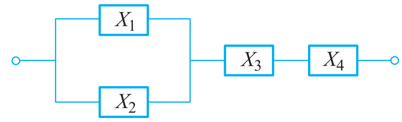
$$
F_M(t)=\prod_{i=1}^n F_i(t), \tag{3.5.15}
$$

$$
F_N(t)=1-\prod_{i=1}^n[1-F_i(t)]. \tag{3.5.16}
$$

**例 3.5.6** 一批元件的寿命服从参数为 $\lambda$ 的指数分布, 从中随机地取 4 件, 其寿命记为 $X_1,X_2,X_3,X_4$. 由于是随机抽取, 故这 4 个元件的寿命相互独立. 记 $N=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}X_i, M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}X_i$.

(1) 求 $N, M$ 的分布函数及密度函数;

(2) 将 4 个元件如图 3.5.6 连接成一系统, 求系统寿命大于 $t_0(t_0>0)$ 的概率.




■ 图 3.5.6

**解** (1) 由于 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 相互独立且均服从参数为 $\lambda$ 的指数分布, 故当 $t>0$ 时,

$$F_N(t)=P\{\min_{1\leqslant i\leqslant 4} X_i\leqslant t\}=1-P\{\min_{1\leqslant i\leqslant 4} X_i>t\}=1-\prod_{i=1}^{4}P\{X_i>t\}=1-\mathrm{e}^{-4\lambda t},$$

故
$$f_N(t)=\begin{cases}4\lambda\mathrm{e}^{-4\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

当 $t>0$ 时, $F_M(t)=P\{\max_{1\leqslant i\leqslant 4} X_i\leqslant t\}=\prod_{i=1}^{4}P\{X_i\leqslant t\}=(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^4.$

故
$$f_M(t)=\begin{cases}4\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^3, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

(2) 设系统寿命为 $T$, 则 $T=\min(\max(X_1,X_2),X_3,X_4)$, 那么对 $t_0>0$ 而言, 有

$$\begin{aligned}P\{T>t_0\}&=P\{\min(\max(X_1,X_2),X_3,X_4)>t_0\}\\&=P\{\max(X_1,X_2)>t_0\}\cdot P\{X_3>t_0\}\cdot P\{X_4>t_0\}\\&=[1-P\{X_1\leqslant t_0,X_2\leqslant t_0\}]\cdot\mathrm{e}^{-2\lambda t_0}\\&=[1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_0})^2]\cdot\mathrm{e}^{-2\lambda t_0}=\mathrm{e}^{-3\lambda t_0}(2-\mathrm{e}^{-\lambda t_0}).\end{aligned}$$

## ■ 思考题三

1. 若已知二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布, 就决定了 $X$ 及 $Y$ 的边际分布; 反之, 若已知 $X$ 及 $Y$ 的边际分布, 就可决定 $(X,Y)$ 的联合分布, 对吗? 若不对, 请给出正确的说法.

2. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 同分布, 以下说法是否正确:

   (1) $P\{X=Y\}=1$; (2) $P\{X+Y=2X\}=1$;

   (3) $X$ 与 $Y$ 有相同的分布函数; (4) $X$ 与 $Y$ 可以有不同的分布函数.

3. 设二元连续型随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}f_1(x,y), & (x,y)\in D,\\ f_2(x,y), & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

   则 $(X,Y)$ 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y}f_1(u,v)\mathrm{d}v, & (x,y)\in D,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y}f_2(u,v)\mathrm{d}v, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

对吗?

4. 设 $(X,Y)$ 为二元连续型随机变量, 以下等式是否正确:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}x = 1$;　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y = 1$;

(3) $F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{x} f_{Y|X}(y|u)\mathrm{d}u$　　(4) $F_{Y|X}(0|2) = \int_{-\infty}^{0} f_{Y|X}(0|2)\mathrm{d}y$.

5. 当 $(X,Y)$ 为二元离散型随机变量时, 若存在点 $(x_0,y_0)$ 使 $P\{X=x_0,Y=y_0\} \neq P\{X=x_0\}\cdot P\{Y=y_0\}$, 则 $X$ 与 $Y$ 不独立, 对吗? 当 $(X,Y)$ 为二元连续型随机变量时, 若存在一点 $(x_0,y_0)$ 使 $f(x_0,y_0) \neq f_X(x_0)\cdot f_Y(y_0)$, 则 $X$ 与 $Y$ 不独立, 对吗?

## ▶ 习题三

1. 有两个口袋均放着 3 个红球,2 个白球, 今从两口袋中同时各摸出 1 球互换 (设每个口袋摸到每个球的概率相等). 记 $X,Y$ 分别为两袋中互换球后的红球数, 求 $(X,Y)$ 的联合分布律及关于 $X$ 的边际分布律.
2. 设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| | | $Y$ | |
|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 |
| $X$ | 0 | 0.3 | $a$ |
| | 1 | $b$ | 0.2 |

且已知事件 $\{X=0\}$ 与事件 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 求常数 $a,b$ 的值.

3. 设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| | | $Y$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $-1$ | 0 | 1 |
| $X$ | 1 | $a$ | 0.1 | $b$ |
| | 2 | 0.1 | 0.1 | $c$ |

已知 $P\{Y \leqslant 0|X<2\} = 0.5$, $P\{Y=1\} = 0.5$, 求 $a,b,c$ 的值及 $X,Y$ 的边际分布律.

4. 设随机变量 $X,Y$ 的概率分布律分别为

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | 0.4 | 0.6 |

| $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

且已知 $P\{X=0,Y=0\} = P\{X=1,Y=2\} = 0.2$.

(1) 试写出 $(X,Y)$ 的联合分布律;

(2) 写出在 $\{X=0\}$ 的条件下 $Y$ 的条件分布律.

5. 将一枚均匀的骰子抛 2 次, 记 $X$ 为第 1 次出现的点数, $Y$ 为 2 次点数的最大值.

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合分布律及边际分布律;

(2) 写出 $\{Y=6\}$ 的条件下 $X$ 的条件分布律.

6. 某公司出钱为职工订报, 每位职工可以从 A, B, C 3 份报中任订一份, 已知有 $\dfrac{2}{3}$ 的女职工决定订 A 报, 有 $\dfrac{3}{5}$ 的男职工决定订 B 报, 余下的人在 3 份报中随机选一份. 公司男、女职工各占一半. 从该公司中随机找一职工, 记

$$X=\begin{cases}1, & \text{此人为女职工},\\ 0, & \text{此人为男职工},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{此人订 A 报},\\ 2, & \text{此人订 B 报},\\ 3, & \text{此人订 C 报}.\end{cases}$$

(1) 试写出 $(X,Y)$ 的联合分布律;

(2) 求 $Y$ 的边际分布律;

(3) 求 $\{Y=1\}$ 的条件下, $X$ 的条件分布律.

7. 设某路段单位时间内发生的交通事故数 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布, 其中事故原因是超速的概率为 0.1. 记因超速引发的事故数为 $Y$.

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合分布律;

(2) 求 $Y$ 的边际分布律.

8. 设一大型设备单位时间内发生的故障数 $X$ 具有概率分布律

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.6 | 0.3 | 0.1 |

每次故障以概率 $p$ 带来损失 $a$ 万元. 设 $Y$ 为该设备在单位时间内的损失 (以万元计).

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合分布律;

(2) 已知发生了 1 次故障, 求 $Y$ 的条件分布律.

9. 设二元离散型随机变量 $(X,Y)$ 具有边际分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.3, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 0.4, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$$

且已知 $P\{X=1,Y=0\}=0.1$.

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合分布律;

(2) 求给定 $\{Y=0\}$ 的条件下 $X$ 的条件分布函数.

10. 设 $A,B$ 为两随机事件, 已知 $P(A)=0.3, P(B|\overline{A})=0.5, P(B)=0.4$. 引入随机变量 $X,Y$, 分别为

$$X=\begin{cases}1, & A \text{ 发生},\\ 0, & A \text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B \text{ 发生},\\ 0, & B \text{ 不发生}.\end{cases}$$

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合分布律;

(2) 求 $X$ 的边际分布函数;

(3) 在已知 $\{X=1\}$ 的条件下求 $Y$ 的条件分布函数.

11. 设 $(X,Y)$ 为二元随机变量, 已知 $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=1,Y=1\}=0.1$, 现知 $(X,Y)$ 落在 $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$ 的任一小区域内的概率与该小区域面积成正比, 且 $(X,Y)$ 只能落在点 $(0,0),(1,1)$ 及 $D$ 内, 求 $(X,Y)$ 的联合分布函数.

12. 设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(y-x), & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 $c$;

(2) 求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$ 的值;

(3) 求 $P\{X<0.5\}$ 的值.

13. 设二元连续型随机变量 $(X,Y)$ 具有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x, & 0<x<1,0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 分别求 $X$ 及 $Y$ 的边际密度函数;

(2) 求 $P\{Y\leqslant 2X\}$ 的值.

14. 二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x-1), & 1<x<2,x<y<4-x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 $c$; (2) 求 $X,Y$ 的边际密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$.

15. 二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 $X,Y$ 的边际密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$;

(2) 求条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$;

(3) 当已知 $\{X=x\}$ 时, 问 $Y$ 的条件分布是均匀分布吗? 为什么?

16. 设 $(X,Y)$ 为二元随机变量, $X$ 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$. 当 $x>0$ 时, $Y$ 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-y/x}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合密度函数;

(2) 求当 $x>0$ 时, 在给定 $\{X=x\}$ 的条件下 $Y$ 的条件分布函数;

(3) 求 $P\{Y>1|X=1\}$ 的值.

17. 设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5}{4}x, & y^2<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 $Y$ 的边际密度函数 $f_Y(y)$;

(2) 求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$;

(3) 计算 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right\}$ 的值.

18. 在区间 $(0,1)$ 内随机取一数 $X$, 当 $\{X=x\}$ 时再在区间 $(x,1)$ 内随机取一数 $Y$.

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合密度函数;

(2) 在已知 $\{Y=y\}(0<y<1)$ 的条件下求 $X$ 的条件密度函数.

19. 有一件工作需要甲、乙两人接力完成, 完成时间不超过 4 小时. 设甲先干了 $X$ 小时, 再由乙完成, 加起来共用 $Y$ 小时. 若 $X\sim U(1,2)$, 在 $\{X=x\}$ 条件下, $Y$ 的条件密度函数

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2(4-y)}{(3-x)^2}, & x+1<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合密度函数 $f(x,y)$ 及 $P\{Y<3\}$;

(2) 求 $Y$ 的边际密度函数;

(3) 已知两人完成工作共花了 3 小时, 求甲的工作时间不超过 1.5 小时的概率.

20. 在 $A$ 地至 $B$ 地 (距离为 $m$ 公里) 的公路上, 事故发生地在离 $A$ 地 $X$ 公里处, 事故处理车在离 $A$ 地 $Y$ 公里处, $X$ 与 $Y$ 均服从 $(0,m)$ 上均匀分布, 且设 $X$ 与 $Y$ 相互独立. 求事故车与处理车的距离 $Z$ 的密度函数.

21. 在半圆 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1,x>0\}$ 内随机投点 $A$, 设 $A$ 点的坐标为 $(X,Y)$.

(1) 求 $X$ 的边际密度函数 $f_X(x)$;

(2) 求 $P\left\{X<\dfrac{1}{2}\right\}$ 的值;

(3) $X$ 与 $Y$ 相互独立吗? 为什么?

22. 设二元随机变量 $(X,Y)$ 服从 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 分布, 其中 $\mu_1=0,\mu_2=1,\sigma_1^2=1,\sigma_2^2=2,\rho=-\dfrac{1}{2}$.

(1) 试写 $X,Y$ 的边际密度函数;

(2) 写出在 $\{X=0\}$ 的条件下 $Y$ 的条件密度函数;

(3) 求 $P\{Y\leqslant 1|X=0\}$ 的值.

23. 设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

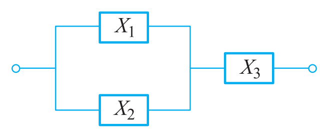
$$f(x,y)=\frac{1}{2}[f_1(x,y)+f_2(x,y)],$$

其中 $f_1(x,y)$ 与 $f_2(x,y)$ 分别为二元正态变量 $(X_1,Y_1)$ 与 $(X_2,Y_2)$ 的联合密度函数, 且已知 $(X_i,Y_i)(i=1,2)$ 的边际分布均为标准正态分布.

(1) 求 $X,Y$ 的边际密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$;

(2) 问当 $(X_i,Y_i)$ 的分布中的参数 $\rho_i=0(i=1,2)$ 时, $X$ 与 $Y$ 相互独立吗?

24. 设一系统由 3 个独立的、正常工作时间分别为 $X_1,X_2,X_3$ 的子系统组成 (如图 1). 且设 $X_i,i=1,2,3$ 均服从参数为 $\lambda$ 的指数分布. 求该系统正常工作时间 $T$ 的分布函数 $F_T(t)$ 及密度函数 $f_T(t)$.



■ 图 1

25. (1) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从参数为 $p(0<p<1)$ 的 0–1 分布, 记 $Z=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 求 $Z$ 的概率分布律;

(2) 设 $X\sim B(m,p),Y\sim B(n,p),X$ 与 $Y$ 相互独立. 记 $W=X+Y$, 求 $W$ 的概率分布律.

26. 设随机变量 $X$ 服从区间 $(-a,a)$ 上均匀分布, 其中 $a>0,Y\sim N(\mu,\sigma^2),X$ 与 $Y$ 相互独立, $Z=X+Y$, 求 $Z$ 的密度函数.

27. 设二元随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3-x-y}{3}, & 0<x<1,0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若 $Z=X+Y$, 求 $Z$ 的密度函数.

28. 某人连续参加 2 场比赛, 第 1,2 场比赛可得的奖金数分别为 $X,Y$, 且已知

| $X$ | 0 | 1 000 | 5 000 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.5 | 0.3 | 0.2 |

$Y$ 具有密度函数 $f(y)$, $X$ 与 $Y$ 相互独立. 求此人奖金总数 $Z$ 的密度函数.

29. 市场近期某种蔬菜的价格 (单位: 元/公斤) $X \sim U(6,8)$ (均匀分布), 某餐馆近期购买该种蔬菜的数量 $Y$ 为 8 公斤和 10 公斤的概率均为 0.5. 求:

(1) 购买金额 $Z$ 不大于 60 元的概率 $p$;

(2) 购买金额 $Z$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

30. 设一本书一页的错误个数 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布, 且各页错误数相互独立. 现随机选 10 页, 其错误数分别记为 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$.

(1) 求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i \geqslant 2\right\}$; (2) 求 $P\{\max_{1\leqslant i\leqslant 10} X_i \geqslant 2\}$;

(3) 求 $P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant 10} X_i \geqslant 2 \middle| \min_{1\leqslant i\leqslant 10} X_i = 0\right\}$.

31. 设随机变量 $X, Y$ 相互独立, 且具有以下概率分布律:

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.2 | 0.4 | 0.4 |

记 $Z = X + Y, M = \max(X, Y), N = \min(X, Y)$, 分别求 $Z, M, N$ 的概率分布律.

32. 设一系统由 2 个独立的子系统组成, 分别以 $X, Y$ 记两个子系统的正常工作时间, 且设 $X, Y$ 分别服从参数为 $\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 的指数分布. 当这 2 个子系统 (1) 串联, (2) 并联, (3) 有备份 (当一个损坏时另一个接着工作) 时, 分别求系统正常工作时间 $T$ 的密度函数.

33. 设二元随机变量 $(X, Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & 0 < x < 2, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

记 $Z = 2X - Y$, 求 $Z$ 的密度函数.

34. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立且都服从 $B(1, p)$ 分布 $(0 < p < 1)$. 定义

$$Z = \begin{cases} 1, & X + Y = 1, \\ 0, & X + Y \neq 1. \end{cases}$$

(1) 对 $X$ 独立观察 $n$ 次, 求 $n$ 次观察值之和 $W$ 的概率分布律;

(2) 求 $(X, Z)$ 的联合分布律.

35. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, $Y$ 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$X, Y$ 相互独立, 记 $M = \max(X, Y), N = \min(X, Y)$, 分别求 $M, N$ 的密度函数.