第14周作业

2020年6月4日　　8:16

习题七：18、19

习题八：3（1）

18. 为了解某市两所高校学生的消费情况, 在两所高校各随机调查 100 人, 调查结果为: 甲校学生月平均消费 803 元, 标准差 75 元; 乙校学生月平均消费 938 元, 标准差 102 元. 假设甲校学生月平均消费额 (单位: 元) $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, 乙校学生月平均消费额 (单位: 元) $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2), \mu_1, \mu_2, \sigma^2$ 未知, 两样本相互独立. 求两校学生月平均消费额差值 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间和单侧置信上限.

18. 枢轴量: $\dfrac{-(\mu_1-\mu_2)+(\bar{X}-\bar{Y})}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$. $n_1=n_2=100$

$S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$. $\Rightarrow S_w = \sqrt{8014.5} = 89.5$

$t_{\frac{0.05}{2}}(198) = 1.972$, $t_{0.05}(198) = 1.653$

$\therefore$ 置信区间: $\left(\bar{x}-\bar{y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(198) S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{x}-\bar{y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(198) S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$

即 $(-159.96, -110.04)$.

单侧置信上限: $t_\alpha(198) S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} + \bar{x}-\bar{y} = -114.08$

19. 某厂的一台瓶装灌装机, 每瓶的净重量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 从中随机抽出 16 瓶, 称得其净重的平均值为 456.64 g, 标准差为 12.8 g; 现引进了一台新灌装机, 其每瓶的净重量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 抽取产品 12 件, 称得其净重的平均值为 451.34 g, 标准差为 11.3 g.

(1) 假设 $\sigma_1 = 13, \sigma_2 = 12$, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(2) 假设 $\sigma_1 = \sigma_2$ 未知, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(3) 求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 95% 的置信区间.

19. (1) $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$, $\bar{x}-\bar{y} = 5.3$ $n_1=16, n_2=12$

又有 $z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$

$\therefore$ 置信区间: $\left((\bar{x}-\bar{y}) \pm z_{\frac{0.05}{2}}\sqrt{\frac{13^2}{16}+\frac{12^2}{12}}\right)$ 即 $(-4.01, 14.61)$

(2) $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$. $n_1=16, n_2=12$

$S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \Rightarrow S_w = \sqrt{148.5458} = 12.19$

$t_{0.025}(26) = 2.056$

$\therefore$ 置信区间: $(-4.27, 14.87)$

(3) $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

$\begin{cases} F_{0.025}(15,11) = 3.33 \\ F_{0.975}(15,11) = 0.324 \end{cases}$

$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} = 1.283$

置信区间: $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{(1-\frac{\alpha}{2})}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

即 $(0.385, 3.96)$

3. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从总体中抽取容量为 16 的简单随机样本, 样本均值为 $\overline{X}$, 样本方差为 S^2.

(1) 若 $\sigma^2 = 1$, 在显著水平为 0.05 下对于假设: $H_0 : \mu = 1, H_1 : \mu \neq 1$, 求出拒绝域; 并计算在 $\mu = 2$ 时犯第 II 类错误的概率;

3. (1)

由 N-P原则, 拒绝域 $W = \left\{ |Z| = \left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geqslant Z_{\frac{0.05}{2}} \right\}$

$\mu_0 = 1$, $\sigma = 1$, $n = 16$. $Z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$

即 $W = \left\{ \left|\frac{\overline{X}-1}{1/4}\right| \geqslant 1.96 \right\} = \left\{ 0.51 \leq \overline{X} \leq 1.49 \right\}$

$\beta = \Phi\left\{ \frac{1+\delta-\mu}{1/4} \right\} - \Phi\left\{ \frac{1-\delta-\mu}{1/4} \right\}$

而 $\delta = Z_{0.025}\sigma/\sqrt{n} = 0.49$, $\mu = 2$

$\therefore \beta = \Phi(-2.04) - \Phi(-5.96) = \Phi(5.96) - \Phi(2.04) = 0.0212$