第十周作业

2020年5月6日　　15:43

习题5：7、10、11

习题6：1、2、3

7. 设随机变量序列 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 独立同分布, 都服从期望为 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布, 其中 $\lambda > 0$.

(1) 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 均有 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left\{\left|\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1$ 成立, 求 a 的值;

(2) 给出 $\dfrac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ 的近似分布;

(3) 求 $P\left\{\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100} X_i^2 \leqslant \dfrac{2}{\lambda^2}\right\}$ 的近似值.

7. (1) 指数分布，对每个 X_i 有 $E(X_i)=\frac{1}{\lambda}$，$D(X_i)=\frac{1}{\lambda^2}$

$\because D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{1}{\lambda^2}$

$\therefore E(X_i^2)=\frac{2}{\lambda^2}$

则 $E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)}{n}=\frac{2}{\lambda^2}$

$\therefore$ 由辛钦定理知 $a=\frac{2}{\lambda^2}$

(2) 由中心极限定理知 $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i \overset{近似}{\sim} N\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{n\lambda^2}\right)$

故 $\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{100}X_i \overset{近似}{\sim} N\left(\frac{2}{\lambda},\frac{4}{n\lambda^2}\right)$

(3) 由于 $E\left(\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{100}\right)=\frac{2}{\lambda^2}$，则 $\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{100} \overset{近似}{\sim} N\left(\frac{2}{\lambda^2},\frac{6^2}{n}\right)$

恰好求的是 $P\left\{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{X_i} \le \frac{2}{\lambda^2}\right\} \overset{近似}{=} \Phi(0)=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 近似值为 0.5

10. 某企业庆祝百年华诞, 邀请了一些社会名流及企业的相关人士来参加庆典. 被邀请者独自一人或携伴 (一位同伴) 出席, 也有可能因故缺席, 这三种情况的可能性分别为 0.3, 0.5, 0.2. 若此次庆典事先发出了 800 份邀请函, 若每位被邀请人参加庆典的行为相互独立, 问有超过千人出席该庆典的可能性大概有多大?

10、可见对每份邀请函所邀来人数 X_i 服从

X_i	0	1	2
P	0.2	0.3	0.5

且为独立同分布. 由 $E(X_i)=1\times0.3+2\times0.5=1.3$，$D(X_i)=1.3^2\times0.2+0.3^2\times0.3+0.7^2\times0.5=0.61$

得 $E\left(\sum_{i=1}^{800}X_i\right)=800E(X_i)=1040$

$D\left(\sum_{i=1}^{800}X_i\right)=800D(X_i)=488$

$\therefore$ 由中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{800}X_i \overset{近似}{\sim} N(1040,488)$

则 $P\left(\sum_{i=1}^{800}X_i>1000\right)=1-P\left(\sum_{i=1}^{800}X_i\le1000\right)=1-\Phi\left(\frac{1040+1000}{\sqrt{488}}\right)$

$=\Phi\left(\frac{40}{\sqrt{488}}\right)=\Phi(1.8107)=0.9648$

11. 某次 “知识竞赛” 规则如下: 参赛者最多可抽取 3 个独立的问题一一回答, 若答错就被淘汰, 进而失去回答下一题的资格. 每答对一题得 1 分, 若 3 题都对则再加 1 分 (即共得 4 分). 现有 100 名参赛选手参赛, 每人独立答题.

(1) 若每人至少答对一题的概率为 0.7, 用中心极限定理计算 “最多有 35 人得 0 分” 的概率近似值;

(2) 若题目的难易程度类似, 每人答对每题的概率均为 0.8, 求这 100 名参赛选手的总分超过 220 分的概率近似值.

11. (1) 设得分的概率 $p=0.7$, 每人是否得分用随机变量 X_i 表示.

可见 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{得分} \\ 0, & \text{不得分} \end{cases}$ 则 $X \sim B(100, 0.7)$

则由中心极限定理知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$

则 $P(\sum_{i=1}^{n} X_i > 35) = 1 - P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 35)$

$\approx 1 - \Phi\left(\dfrac{35-70}{\sqrt{70\times 0.3}}\right) = \Phi\left(\dfrac{35}{\sqrt{21}}\right) = 1.0000$

(2) 设某名选手得分为 Y_i, 则 Y_i 独立同分布

则 $P(Y_i=0) = 0.2$

$P(Y_i=1) = 0.8\times 0.2 = 0.16$

$P(Y_i=2) = (0.8)^2\times 0.2 = 0.128$

$P(Y_i=4) = (0.8)^3 = 0.512$

则 $E(Y_i) = 1\times 0.16 + 2\times 0.128 + 4\times 0.512 = 2.464$

$\cancel{D(Y_i) = 2.464^2\times 0.2 + 2.304^2\times 0.16}$

$D(Y_i) = 2.464^2\times 0.2 + 1.464^2\times 0.16 + 0.464^2\times 0.128 + 1.536^2\times 0.512$

$= 2.792704$

故由中心极限定理知

$\sum_{i=1}^{100} Y_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(2.464\times 100, 2.792704\times 100)$

则 $P(\sum_{i=1}^{100} Y_i > 220) = 1 - P(\sum_{i=1}^{100} Y_i \leq 220) \approx 1 - \Phi\left(\dfrac{220-2.464\times 100}{\sqrt{2.792704\times 100}}\right)$

$= \Phi(1.5798) = 0.943$

1. 设总体 $X \sim N(\mu, 1)$, μ 未知, $X_1, \cdots, X_5$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 判断下列哪些是统计量, 哪些不是统计量:

(1) $\sum_{i=1}^{5} X_i$; (2) $\sum_{i=1}^{5} X_i^2 - 5\mu^2$; (3) $\sum_{i=1}^{5}(X_i - \mu)$; (4) $X_1 - X_2$.

由于μ未知，其它为已知，所以(1)(4)不含未知数为统计量，(2)(3)含未知数不是统计量。

2. 从总体 X 中抽取容量是 5 的样本, 其观察值为 2.6, 4.1, 3.2, 3.6, 2.9, 计算样本均值、样本方差和样本二阶中心矩.

样本均值

$$\bar{X} = \frac{2.6+4.1+3.2+3.6+2.9}{5} = 3.28$$

样本方差

$$S^2 = \frac{(2.6-3.28)^2 + (4.1-3.28)^2 + (3.2-3.28)^2 + (3.6-3.28)^2 + (2.9-3.28)^2}{5-1} = 0.347$$

样本二阶中心距

$$B_2 = \frac{(2.6-3.28)^2 + (4.1-3.28)^2 + (3.2-3.28)^2 + (3.6-3.28)^2 + (2.9-3.28)^2}{5} = \frac{4}{5}S^2 = 0.2776$$

3. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \cdots, X_{25}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值.

(1) 求 $P\{|\overline{X} - \mu| < 0.2\sigma\}$ 的值;

(2) 若 $P\{\overline{X} > \mu - c\sigma\} = 0.95$, 求 c 的值.

（1）由于$X_1, X_2 \dots X_{25}$是简单随机样本，所以$\sum_{i=1}^{25} X_i \sim N(25\mu, 25\sigma^2)$则$(\sum_{i=1}^{25} X_i - 25\mu) \sim N(0, 25\sigma^2)$

$$|\bar{X} - \mu| < 0.2\sigma \Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{25} X_i - 25\mu\right| < 5\sigma$$

所以$P\{|\bar{X} - \mu| < 0.2\sigma\} = P\{\left|\sum_{i=1}^{25} X_i - 25\mu\right| < 5\sigma\} = \Phi\left(\frac{5\sigma - 0}{\sqrt{25\sigma^2}}\right) = \Phi(1) = 0.8413$

（2）

$$\because \bar{X} > \mu - c\sigma \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{25} X_i > 25\mu - 25c\sigma \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{25} X_i - 25\mu > -25\sigma$$

$$\therefore P\{\bar{X} > \mu - c\sigma\} = P\left\{\sum_{i=1}^{25} X_i - 25\mu > -25c\sigma\right\} = 1 - P\left\{\sum_{i=1}^{25} X_i - 25\mu \le -25c\sigma\right\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-25c\sigma - 0}{\sqrt{25\sigma^2}}\right) = 1 - \Phi(-5c) = \Phi(5c) = 0.95$$

查标准正态分布表可以得到$5c = 1.645$

所以$c = 0.329$