$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y_l, Y_k) &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{li} Z_i, \sum_{j=1}^{n} a_{kj} Z_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{li} a_{kj} \operatorname{Cov}(Z_i, Z_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{li} a_{ki} = \delta_{lk},
\end{aligned}
$$

其中 $\delta_{lk} = 0$, 当 $l \neq k$; $\delta_{lk} = 1$, 当 $l = k$.

因此, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 仍相互独立同分布, $Y_i \sim N(0,1), i = 1, 2, \cdots, n$, 并且

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \sum_{i=1}^{n} a_{1i} Z_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} Z_i = \sqrt{n} \cdot \overline{Z}, \\
\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - n\overline{Z}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2 \sim \chi^2(n-1).
\end{aligned}
$$

即 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 仅和 $Y_2, Y_3, \cdots, Y_n$ 有关, 而 $\overline{X}$ 仅依赖于 Y_1, 因此推出 $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立.

■ 思考题六

1. 什么是统计量? 什么是统计量的值? 什么是抽样分布?
2. 简单随机样本有哪两个主要性质? 在实际中如何获得简单随机样本?
3. $N(0,1), t$ 分布, χ^2 分布和 F 分布的上、下分位数是如何定义的? 怎样利用附表查这些分位数的值? 如何利用 Excel 查出分位数的值?
4. 从总体 X 中抽取样本 X_1, X_2, X_3, 假设 X 服从 $N(0, \sigma^2)$, 则下列结果哪些不正确, 为什么?

   (1) $\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{\sigma} \sim N(0,3)$; (2) $\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3)$; (3) $\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2}} \sim t(2)$;

   (4) $D(X_1 + \overline{X}) = \dfrac{4}{3}\sigma^2$; (5) $\dfrac{2X_1^2}{X_2^2 + X_3^2} \sim F(1,2)$; (6) $\operatorname{Cov}(X_1, \overline{X}) = \sigma^2$.
5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本, 记 $\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差, 则 $\overline{X}$ 与 S^2 一定是相互独立的吗?
6. 设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 则 $t = \dfrac{\sqrt{n}X}{\sqrt{Y}} \sim t(n)$ 一定成立吗?

▶ 习题六

1. 设总体 $X \sim N(\mu, 1), \mu$ 未知, $X_1, \cdots, X_5$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 判断下列哪些是统计量, 哪些不是统计量:

   (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} X_i$; (2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} X_i^2 - 5\mu^2$; (3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} (X_i - \mu)$; (4) $X_1 - X_2$.

2. 从总体 X 中抽取容量是 5 的样本, 其观察值为 2.6, 4.1, 3.2, 3.6, 2.9, 计算样本均值、样本方差和样本二阶中心矩.

3. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, \cdots, X_{25}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值.

   (1) 求 $P\{|\overline{X}-\mu|<0.2\sigma\}$ 的值;

   (2) 若 $P\{\overline{X}>\mu-c\sigma\}=0.95$, 求 c 的值.

4. 设总体 X 服从标准正态分布, $X_1, \cdots, X_{16}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 写出下列统计量的分布:

   (1) 样本均值 $\overline{X}$; (2) $\sum\limits_{i=1}^{16} X_i^2$; (3) $\dfrac{3X_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=2}^{10} X_i^2}}$; (4) $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$; (5) $\overline{X}-X_1$.

5. 给出下列上分位数的值:

   (1) $\chi_{0.05}^2(5), \chi_{0.06}^2(5), \chi_{0.95}^2(5), \chi_{0.94}^2(5)$;

   (2) $t_{0.05}(8), t_{0.06}(8), t_{0.95}(8), t_{0.94}(8)$;

   (3) $F_{0.05}(3,5), F_{0.05}(5,3), F_{0.04}(3,5), F_{0.04}(5,3)$.

6. 对一重量为 a 的物体独立重复称 n 次, 现准备用这 n 次读数的平均值去估计 a. 假设这批读数来自均值为 a, 标准差为 2.5 的正态总体, 至少要称多少次才能使估计值与 a 之差的绝对值不大于 0.5 的概率 (1) 超过 90%;(2) 超过 95%.

7. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, \cdots, X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差, 写出下列抽样分布:

   (1) $\dfrac{3(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$; (2) $\dfrac{3(\overline{X}-\mu)}{S}$; (3) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$;

   (4) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$; (5) $\dfrac{9(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$; (6) $\dfrac{9(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}$;

   (7) $\dfrac{2(X_1-X_2)^2}{(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2}$;

   (8) $\dfrac{(X_1-Y_1)^2+(X_2-Y_1)^2+(X_3-Y_1)^2}{(X_4-Y_2)^2+(X_5-Y_2)^2+(X_6-Y_2)^2}$, 其中 $Y_1=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}, Y_2=\dfrac{X_4+X_5+X_6}{3}$.

8. 设总体 X 的密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}, \quad -\infty<x<+\infty,$$

   从总体中抽取容量是 10 的样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差, 求:

   (1) $\overline{X}$ 的数学期望和方差; (2) S^2 的数学期望.

9. 设总体 $X \sim U(0,\theta), X_1, \cdots, X_5$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差, 求 $E(\overline{X}), E(\overline{X}r)$ 和 $E(S^2)$.

10. 设总体 X 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

从总体中抽取容量是 10 的样本.

(1) 求样本均值的数学期望和方差;

(2) 记 $X_{(1)}=\min\{X_1,\cdots,X_{10}\}$, 求 $X_{(1)}$ 的数学期望和方差.

11. 设 $X_1,\cdots,X_8$ 是来自标准正态总体的样本, $\overline{X}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}X_i, S^2=\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=1}^{8}(X_i-\overline{X})^2, X_9$ 是新增的样本, 试确定 $Y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{X_9-\overline{X}}{S}$ 的分布.

12. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1,\cdots,X_5$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 是来自总体 X 的两个独立样本, $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是两个样本的样本均值, S_1^2 和 S_2^2 分别是两个样本的样本方差.

(1) 若 $\dfrac{a(\overline{X}-\overline{Y})}{\sigma}\sim N(0,1)$, 求 a;

(2) 若 $\dfrac{b(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{S_1^2+2S_2^2}}\sim t(12)$, 求 b.

13. 在两个等方差的正态总体中, 独立地各抽取一个容量为 7 的样本, 它们的样本方差分别为 S_1^2, S_2^2, 若 $P\left\{\max\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\dfrac{S_2^2}{S_1^2}\right)>c\right\}=0.05$, 求 c 的值.

14. 设总体 $X\sim\chi^2(n), X_1,\cdots,X_{16}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 求 $P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}X_i}{\sum\limits_{i=9}^{16}X_i}\leqslant 1\right\}$ 和 $P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}X_i}{\sum\limits_{i=9}^{16}X_i}=1\right\}$ 的值.