由协方差矩阵 $\boldsymbol{B}$ 知, $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0,\mathrm{Cov}(X_1,X_3)=-0.5,\mathrm{Cov}(X_2,X_3)=1$, 且 $\mathrm{Var}(X_1)=1,\mathrm{Var}(X_2)=2,\mathrm{Var}(X_3)=4$, 所以

$$\mathrm{Var}(\xi)=9\times 1+4\times 2+1\times 4-12\times 0+6\times(-0.5)-4\times 1=14.$$

即 $\xi\sim N(-2,14)$

(2) 注意到 $\boldsymbol{X}$ 服从三元正态分布, 且 $X_3,X_3-c_1X_1,X_3-c_2X_2$ 均为 X_1,X_2,X_3 的线性组合, 所以 X_3 与 $X_3-c_1X_1,X_3-c_2X_2$ 相互独立等价于

$$\mathrm{Cov}(X_3,X_3-c_1X_1)=0,\quad \mathrm{Cov}(X_3,X_3-c_2X_2)=0.$$

又 $\mathrm{Cov}(X_3,X_3)=\mathrm{Var}(X_3)=4,\mathrm{Cov}(X_3,X_1)=-0.5,\mathrm{Cov}(X_3,X_2)=1$, 故

$$\mathrm{Cov}(X_3,X_3-c_1X_1)=4-c_1\cdot(-0.5)=0,\quad \mathrm{Cov}(X_3,X_3-c_2X_2)=4-c_2\cdot 1=0.$$

解得 $c_1=-8,c_2=4$. 因此, 当 $c_1=-8,c_2=4$ 时, X_3 与 $X_3-c_1X_1,X_3-c_2X_2$ 均相互独立.

■ 思考题四

1. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x<1.\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

   则 X 的数学期望为

$$E(X)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{0}(1+x)x\mathrm{d}x, & -1\leqslant x<0,\\ \displaystyle\int_{0}^{1}(1-x)x\mathrm{d}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

   对吗?

2. 随机变量 X 与 Y 同分布, 那么它们的任意阶矩 (如果存在) 是否全部相等? 反之, 若有 $E(X)=E(Y)$ 且 $\mathrm{Cov}(X)=\mathrm{Cov}(Y)$, 能否推出随机变量 X 与 Y 分布一定相同?

3. 某品牌的矿泉水, 一瓶净含量记为随机变量 X (单位: mL). 已知 $X\sim N(500,2.5^2)$, 从中随机抽取两瓶, 则两瓶矿泉水的总重量的方差是 2×2.5^2 还是 $2^2\times 2.5^2$ 呢?

4. 试述独立性与不相关性的区别和联系.

5. 对于随机变量序列 $\{X_i,i\geqslant 1\}$, 判断下面两个结论是否成立:

(1) 对于 $n \geqslant 1$, 有 $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$, 且 $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$;

(2) 若 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 相互独立, 那么对于 $n \geqslant 1$, 有 $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$, 且 $\mathrm{Var}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$.

6. 若 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$, 则 $\mathrm{Var}(X - 2Y) = \mathrm{Var}(X) - 2\mathrm{Var}(Y) = -1$, 对吗?

7. 设 X 服从 $U(1,3)$, 则 $E\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{E(X)} = \dfrac{1}{2}$, 对吗?

▶ 习题四

1. 某批产品共有 M 件, 其中正品 N 件 $(0 \leqslant N \leqslant M)$. 从整批产品中随机地进行放回抽样, 每次抽取一件, 记录产品是正品还是次品后放回, 抽取了 n 次 $(n \geqslant 1)$. 试求这 n 次中抽到正品的平均次数.

2. 一位即将毕业的大学生有意向与某企业签订就业合同. 该企业给他两个年薪方案供选择. 方案一: 年薪 3 万; 方案二: 底薪 1.2 万, 如果业绩达到公司要求, 则再可获得业绩津贴 3 万元, 如果达不到, 则没有业绩津贴, 一般约有 80% 的可能性可以达到公司的业绩要求. 问: 他应当采用哪种方案? 并说明理由.

3. 一袋中有 8 个球, 分别编号为 $1 \sim 8$ 号, 现随机从袋中取出 2 球, 记其中最大号码的球号为 X, 求 $E(X)$.

4. 直线上一质点在时刻 0 从原点出发, 每经过一个单位时间向左或者向右移动一个单位, 若每次移动是相互独立的, 并且向右移动的概率为 $p(0 < p < 1)$. η_n 表示到时刻 n 为止质点向右移动的次数, S_n 表示在时刻 n 时质点的位置, $n \geqslant 1$. 求 η_n 与 S_n 的数学期望.

5. 抛一枚均匀的硬币, 直到正、反两面都出现后停止试验, 求试验的平均次数.

6. 设二元随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{-2x}, & 0 < x < +\infty, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求: (1) $E(X)$; (2) $E(3X-1)$; (3) $E(XY)$ 的值.

7. 已知一根长度为 1 的棍子上有个标志点 Q, 现随机地将此棍子截成两段.

(1) 求包含 Q 点的那一段棍子的平均长度 (若截点刚好在 Q 点, 则认为 Q 包含在较短的一截内);

(2) 当 Q 位于棍子何处时, 包含 Q 点的棍子平均长度达到最大?

8. 甲、乙两人约定上午 8:00—9:00 在某地见面, 两人均在该时段随机到达, 且到达时间独立. 求两人中先到的人需要等待的平均时间.
9. 为诊断 500 人是否有人患有某种疾病, 抽血化验. 可用两种方法: (1) 每个人化验一次; (2) 分成 k 人一组 $\left(共 \dfrac{500}{k} 组, 假设 \dfrac{500}{k} 为正整数, k > 1\right)$. 将每组 k 人的血样集中起来一起检验, 如果化验结果为阴性, 则说明组内的每人都是阴性, 就无需分别化验; 若检验结果为阳性, 则说明这 k 人中至少有一人患病, 那么就对该组内的 k 人再单独化验. 如果此病的得病率为 20%, 试问哪种方法的平均检验次数相对少些?
10. 某设备无故障运行的时间 T (以小时计) 服从数学期望为 $\dfrac{1}{\lambda}(\lambda > 0)$ 的指数分布. 若设备在一天 8 个小时的工作时间内发生故障就自动停止运行待次日检修, 否则就运行 8 小时后停止. 求该设备每天运行的平均时间.
11. 某电子监视器的圆形屏幕半径为 $r(r > 0)$, 若目标出现的位置点 A 服从均匀分布. 设 A 的平面直角坐标为 (X, Y).

    (1) 求 $E(X)$ 与 $E(Y)$; (2) 求点 A 与屏幕中心位置 $(0, 0)$ 的平均距离.
12. 一个袋子中有 15 个均匀的球, 其中 a 个是白球, 其他的是黑球. 不放回地随机抽取 n 次 (每次取一球), 记取到的白球数为 ξ_n. 当 $n = 2$ 时, 已知 $E(\xi_2) = \dfrac{4}{3}$.

    (1) 求 a; (2) 当 $n = 9$ 时, 求 $E(\xi_9)$.
13. 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取 n 个点 $(n \geqslant 2)$, 求相距最远的两个点间距离的数学期望.
14. 设进入大型购物中心的顾客有可能去其中的一家冷饮店购买冷饮, 购买的概率为 $p(0 < p < 1)$. 若在一天的营业时间内进入该购物中心的顾客数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布, 求这一天去该冷饮店购买冷饮的顾客数 Y 的分布及数学期望.
15. 接第 12 题. 当 $n = 2$ 时, 求 $\mathrm{Var}(\xi_2)$.
16. 随机变量 X 服从 $\mathit{\Gamma}$ 分布, 密度函数为

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

    其中, $\alpha > 0$ 称为 “形状参数”, $\lambda > 0$ 称为 “尺度参数”. 求 $E(X^k)(k \geqslant 1)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.
17. 设随机变量 X 服从拉普拉斯分布, 密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

    计算 X 与 $|X|$ 的方差.
18. 机器处于不同状态时制造产品的质量有所差异. 如果机器运作正常, 则产品的正品率为 98%; 如果机器老化, 则产品的正品率为 90%; 如果机器处于需要维修的状态, 则产品的正品率为

74%. 机器正常运作的概率为 0.7, 老化的概率为 0.2, 需要维修的概率为 0.1. 现随机抽取了 100 件产品 (假设生产这些产品的机器的状态相互独立).

(1) 求产品中非正品数的数学期望与方差;

(2) 在已知这些产品都是正常机器制造出来的条件下, 求正品数的数学期望和方差.

19. 随机变量 X 与 Y 独立同分布, 都服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的 $0-1$ 分布.

(1) 求 $P\{X+Y \geqslant 1\}$; (2) 计算 $E(X\cdot(-1)^Y)$ 及 $\mathrm{Var}(X\cdot(-1)^Y)$.

20. 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1 和 L_2 构成, L_1 和 L_2 的寿命 X 与 Y 分别服从期望为 $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ 的指数分布. 试就下列三种连接方式写出系统 L 寿命 Z 的数学期望和变异系数.

(1) L_1 和 L_2 串联; (2) L_1 和 L_2 并联; (3) L_2 为 L_1 的备用.

21. 接第 17 题. (1) 求 X 与 $|X|$ 的相关系数, 并判断两者是否相关?

(2) 判断 X 与 $|X|$ 是否独立?

22. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy), & 若\ |x|<1,|y|<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 计算 X 与 Y 的相关系数, 并判断它们的独立性和相关性;

(2) 计算 X^2 与 Y^2 的相关系数, 并判断它们的独立性和相关性.

23. 独立地抛一枚均匀的骰子 n 次 $(n\geqslant 2)$. 记 X,Y 分别表示试验中 “1 点朝上” 以及 “6 点朝上” 出现的次数, 求 X 与 Y 的相关系数, 并判断两者的相关关系.

24. 随机三角形 ABC, 角 A 与角 B 独立同分布, 其概率分布律均为

A	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
p	λ	θ	$1-\lambda-\theta$

其中 $\lambda>0,\theta>0$, 且满足 $\lambda+\theta<1$. 已知 $E(\sin A)=E(\cos A)=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}{8}$.

(1) 写出 (A,B) 的联合分布律;

(2) 求 $E(\sin C)$;

(3) 求角 A 与角 C 的相关系数, 并由此判断它们的相关性 (若相关, 要求说明是正相关还是负相关).

25. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均服从标准正态分布并且相互独立. 记 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i, T_k=\sum\limits_{j=n_0+1}^{n_0+k}X_j$, 其中 $1\leqslant n_0<k<n_0+k\leqslant n$, 求 S_k 与 T_k 的相关系数.

26. 设 $X \sim N(0,1), Y$ 的可能取值为 ± 1, 且 $P\{Y=1\}=p(0<p<1)$. 若 X 与 Y 相互独立, 并记 $\xi = X \cdot Y$.

(1) 证明: $\xi \sim N(0,1)$;

(2) 计算 $\rho_{X\xi}$, 并判断 X 与 ξ 的相关性和独立性.

27. 设甲、乙两个盒子中都装有 2 个白球,3 个黑球. 先从甲盒中任取 1 个球放入乙盒, 再从乙盒中随机地取出一球. 用 X 与 Y 分别表示从甲、乙盒中取得的白球数.

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律, 并判断 X 与 Y 是否独立;

(2) 求出 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 并由此判断 X 与 Y 的相关性.

28. 设二元随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(0,1,1,4,\rho)$. 令 $\xi = aX - bY, \eta = aY - bX$, 其中 a,b 为实数, $a \neq b$ 且 $ab \neq 0$.

(1) 当 $\rho = 0$ 时, 分别写出 ξ 与 η 的分布 (要求写出参数) 及它们各自的标准化变量, 并计算 ξ 与 η 相关系数;

(2) 当 $\rho = \dfrac{1}{2}$ 时, 计算 ξ 的变异系数;

(3) 当 $\rho = \dfrac{1}{2}$ 时, 计算 η 的中位数;

(4) 当 $\rho = -1$ 时, 判断 ξ 与 η 的独立性和相关性.

29. 三元正态变量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}} \sim N(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B})$, 其中

$$\boldsymbol{a} = (0,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) 写出 X 的每个分量的分布;

(2) 判别 X_1, X_2, X_3 的相关性与独立性;

(3) 若 $Y_1 = X_1 - X_2, Y_2 = X_3 - X_1$, 求 $Y = (Y_1, Y_2)^{\mathrm{T}}$ 的分布.

30. 设有一煤矿一天的产煤量 X (以万吨计) 服从 $N(1.5, 0.1^2)$ 分布. 设每天产量相互独立, 一个月按 30 天计, 求一月总产量超 46 万吨的概率.

31. 某地区成年男子身高 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(170, 144)$, 从该地区独立抽选 4 人, 求 4 人平均身高超过 176 cm 的概率.