数值分析实验六

赵浩宇,2016012390, 计科 60

2018 年 5 月 29 日

1 实验要求

题目：考虑常微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2y}{d^2x} + \frac{dy}{dx} = a \\ y(0) = 0, y(1) = 1 \end{cases}, 0 < a < 1$$

容易知道它的精确解为

$$y = \frac{1-a}{1-e^{-1/\varepsilon}}\left(1 - e^{-x/\varepsilon}\right) + ax$$

对微分方程进行离散化，把[0,1]区间 n 等分，令$h = \frac{1}{n}$

$x_i = ih$, i = 1,2,⋯,n − 1 得到有限差分方程

$$\varepsilon\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = a$$

简化为

$$(\varepsilon + h)\, y_{i+1} - (2\varepsilon + h)\, y_i + \varepsilon y_{i-1} = ah^2$$

从而离散后得到的线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon + h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) \end{bmatrix}$$

要求：

对于$\varepsilon = 1$，$a = \frac{1}{2}$，$n = 100$，分别用 Jacobi 法、Gauss-Seidel 法和 SOR 法求解上述线性方程组的解，要求有 4 位有效数字，然后比较其与精确解的误差，比较上述三种算法的优缺点，给出自己的思考。

图 1: 实验要求

2 算法描述

1. Jacobi 方法可以描述成为如下算法:

Algorithm 1 Jacobi method

Input: A, b

Output: x such that $Ax = b$.

procedure JACOBI(A, b)

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$.

for $k = 1, \dots, n$ **do**

$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii}, \forall i.$

end for

end procedure

2. GS 方法可以描述成为如下算法:

Algorithm 2 GS method

Input: A, b

Output: x such that $Ax = b$.

procedure GS(A, b)

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$.

for $k = 1, \dots, n$ **do**

$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii}, \forall i.$

end for

end procedure

3. SOR 方法可以描述成为如下算法:

Algorithm 3 SOR method

Input: A, b

Output: x such that $Ax = b$.

procedure SOR(A, b)

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$.

for $k = 1, \dots, n$ **do**

$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii}, \forall i.$

end for

end procedure

3 程序清单

详细程序清单见表 1。

文件名称	作用
codes.cc	实验代码
iter.out	实验结果输出文件
report.tex	实验报告源码
report.pdf	实验报告

表 1: 程序清单

Method	iteration	error
Jacobi	17724	0.00039
GS	8850	0.00040
SOR	3327	0.00033

表 2: 不同的矩阵迭代算法的迭代次数以及误差

4 运行结果

首先给出三种不同的迭代解方程的方法最终的迭代次数与产生的误差，见表 2。最终解得的向量在 iter.out 中给出。

在代码中，我们设 $\epsilon = 1e - 7$，当两次迭代之间所得向量的无穷范数小于 ϵ 时，我们停止迭代。同时，我们选取 SOR 算法中的松弛参数为 1.5。从结果中可以看出，从收敛的速度上来说，Jacobi 方法最慢，GS 其次，而 SOR 方法收敛速度最快。

原始及完整运行结果在 ‘iter.out’ 文件中给出。

5 体会与展望

通过这次迭代法解方程组的实验，更加深入地了解了迭代法解方程组的原理以及实现，更好的巩固了上课所学到的知识。