数值分析实验四

赵浩宇,2016012390, 计科 60

2018 年 4 月 21 日

1 实验要求

1. 用不同数值方法计算积分 $I = \int_0^1 e^x dx$。首先使用复合梯形公式与复合辛普森公式，通过预想估计步长大小，然后根据估计的步长进行程序实验。之后用龙贝格积分计算，如果达到相同精度，许多将区间分为多少等份。

2. 用复合高斯公式对 $4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$ 做近似积分。是对步长 h 作先验估计，然后根据高斯复合公式进行近似积分，最后将理论值 π 与实验结果进行比较。

2 算法描述

1. 对于复合梯形求积分方法，在对步长进行先验估计之后，通过给定的公式

$$I \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right),$$

进行计算即可。

2. 对于复合辛普森求积分方法，在对步长进行先验估计之后，通过给定的公式

$$I \approx \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right),$$

进行计算即可。

3. 对于龙贝格求积分方法，首先依据公式计算 $T_0^{(k)}$, 其中

$$T_0^{(k)} = \frac{1}{2}T_0^{(k-1)} + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}).$$

之后再根据外推法的公式，计算 $T_k^{(0)}$，其中计算公式为

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m-1}T_{m-1}^{(k)}.$$

如果 $|T_k^0 - T_{k-1}^0| < \epsilon$，则终止计算，所得结果 $I \approx T_k^0$。

4. 对于高斯求积公式，在对步长进行先验估计之后，根据给定的积分公式，

$$I \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i) + f(x_{i+1}\right),$$

进行计算即可。

3 程序清单

详细程序清单见表 1。

文件名称	作用
code.cc	实验代码
integral.out	实验结果输出文件
report.tex	实验报告源码
report.pdf	实验报告

表 1: 程序清单

4 运行结果

首先根据复合梯形公式的余项，

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta),$$

复合辛普森公式的余项，

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta),$$

以及高斯求积分公式的余项

$$R_n(f) = \frac{(b-a)h^4}{4320} f^{(4)}(\eta),$$

经过计算，得到对于复合梯形公式需要 $n = 476$，对于复合辛普森需要 $n = 6$，对于高斯求积方法需要 $n = 13$，将计算出来的理论值代入程序，不同数值积分方法的运行结果，包括 n 的值，对区间的等分数，计算结果，以及误差，均在表 2中给出。其中 step 表示区间的等分数。

方法名称	n	val	err	step
复合梯形	476	1.718282460433	0.000000631974	476
复合辛普森	6	1.718282288438	0.000000459979	12
龙贝格	3	1.718281828795	0.000000000335	8
高斯	13	3.141592653681	0.000000000091	13

表 2: 运行结果

原始运行结果在 'integral.out' 文件中给出。通过误差的计算可以知道，实际中的误差比理论中的误差要小。

5 体会与展望

通过数值积分的实验，知道了一些数值积分的方法，知道了在工程上或者积分解析解足够困难的时候如何去处理积分。做完这个实验中我觉得收获很大。