Variables and assignments

Pronouns and quantifiers

Pronoun: <u>She</u> is smart.

Quantification: <u>Every girl</u> is smart.

<u>Some boy</u> is silly.

Multiple quantifiers: <u>Every girl</u> saw <u>a boy</u>.

Quantifier+pronoun: <u>No kid</u> likes <u>their</u> school.

What do a pronoun or a quantifier denote?

Variables

A pronoun does not have a deterministic meaning. Its value varies among different contexts.

(1) Ada resolved the puzzle. She is smart.
(2) Becky got an A. She is smart.

Formally, variables do not have deterministic values, either.

Assignment (function)

$$g = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{a} \\ y \mapsto \mathsf{b} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{a} \\ y \mapsto \mathsf{a} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix}$$

$[\![\text{she}_x]\!]^{M,g} = g(x)$

The concrete value of g is **contextually** determined.

- For (1), $g(x) = \mathsf{a}$

$$\begin{aligned} [\![\text{she}_x \text{ is smart}]\!]^{M,g} &= [\![\text{smart}]\!]^{M,g}([\![\text{she}_x]\!]^{M,g}) \\ &= \mathsf{smart}(g(x)) \\ &= \mathsf{smart}(\mathsf{a}) \end{aligned}$$

- For (2), $g(x) = \mathsf{b}$

$$\begin{aligned} [\![\text{she}_x \text{ is smart}]\!]^{M,g} &= [\![\text{smart}]\!]^{M,g}([\![\text{she}_x]\!]^{M,g}) \\ &= \end{aligned}$$

Universal quantification

$[\![\text{everyone is smart}]\!]^{M,g} = \forall x.\mathsf{smart}(x)$

$$g = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{a} \\ y \mapsto \mathsf{b} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix} \dashrightarrow \quad g^{x\mapsto\mathsf{a}} = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{a} \\ y \mapsto \mathsf{b} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix} \quad g^{x\mapsto\mathsf{b}} = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{b} \\ y \mapsto \mathsf{b} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix} \quad g^{x\mapsto\mathsf{c}} = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{c} \\ y \mapsto \mathsf{b} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix}$$

'$\forall x.\mathsf{smart}(x)$' means:

$\mathsf{smart}(g^{x\mapsto\mathsf{a}}(x)) \wedge \mathsf{smart}(g^{x\mapsto\mathsf{b}}(x)) \wedge \mathsf{smart}(g^{x\mapsto\mathsf{c}}(x))$

Existential quantification

$[\![\text{someone is silly}]\!]^{M,g} = \exists x.\mathsf{silly}(x)$

$$g = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{a} \\ y \mapsto \mathsf{b} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix} \dashrightarrow \quad g^{x\mapsto\mathsf{a}} = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{a} \\ y \mapsto \mathsf{b} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix} \quad g^{x\mapsto\mathsf{b}} = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{b} \\ y \mapsto \mathsf{b} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix} \quad g^{x\mapsto\mathsf{c}} = \begin{bmatrix} x \mapsto \mathsf{c} \\ y \mapsto \mathsf{b} \\ z \mapsto \mathsf{c} \end{bmatrix}$$

'$\exists x.\mathsf{silly}(x)$' means:

$\mathsf{silly}(g^{x\mapsto\mathsf{a}}(x)) \vee \mathsf{silly}(g^{x\mapsto\mathsf{b}}(x)) \vee \mathsf{silly}(g^{x\mapsto\mathsf{c}}(x))$

Multiple quantifiers

$[\![\text{everyone saw someone}]\!]^{M,g} = \forall x \exists y.\mathsf{see}(y)(x)$

$g \dashrightarrow g^{x\mapsto\mathsf{a}} \dashrightarrow g^{x\mapsto\mathsf{a},y\mapsto\mathsf{a}},\ g^{x\mapsto\mathsf{a},y\mapsto\mathsf{b}},\ g^{x\mapsto\mathsf{a},y\mapsto\mathsf{c}}$

$g \dashrightarrow g^{x\mapsto\mathsf{b}} \dashrightarrow g^{x\mapsto\mathsf{b},y\mapsto\mathsf{a}},\ g^{x\mapsto\mathsf{b},y\mapsto\mathsf{b}},\ g^{x\mapsto\mathsf{b},y\mapsto\mathsf{c}}$

$g \dashrightarrow g^{x\mapsto\mathsf{c}} \dashrightarrow g^{x\mapsto\mathsf{c},y\mapsto\mathsf{a}},\ g^{x\mapsto\mathsf{c},y\mapsto\mathsf{b}},\ g^{x\mapsto\mathsf{c},y\mapsto\mathsf{c}}$

'$\forall x \exists y.\mathsf{see}(y)(x)$' means:

$$\bigwedge \left\{ \begin{array}{l} \bigvee \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{see}(g^{x\mapsto\mathsf{a},y\mapsto\mathsf{a}}(y))(g^{x\mapsto\mathsf{a},y\mapsto\mathsf{a}}(x)) \\ \mathsf{see}(g^{x\mapsto\mathsf{a},y\mapsto\mathsf{b}}(y))(g^{x\mapsto\mathsf{a},y\mapsto\mathsf{b}}(x)) \\ \mathsf{see}(g^{x\mapsto\mathsf{a},y\mapsto\mathsf{c}}(y))(g^{x\mapsto\mathsf{a},y\mapsto\mathsf{c}}(x)) \end{array} \right\} \\ \bigvee \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{see}(g^{x\mapsto\mathsf{b},y\mapsto\mathsf{a}}(y))(g^{x\mapsto\mathsf{b},y\mapsto\mathsf{a}}(x)) \\ \mathsf{see}(g^{x\mapsto\mathsf{b},y\mapsto\mathsf{b}}(y))(g^{x\mapsto\mathsf{b},y\mapsto\mathsf{b}}(x)) \\ \mathsf{see}(g^{x\mapsto\mathsf{b},y\mapsto\mathsf{c}}(y))(g^{x\mapsto\mathsf{b},y\mapsto\mathsf{c}}(x)) \end{array} \right\} \\ \bigvee \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{see}(g^{x\mapsto\mathsf{c},y\mapsto\mathsf{a}}(y))(g^{x\mapsto\mathsf{c},y\mapsto\mathsf{a}}(x)) \\ \mathsf{see}(g^{x\mapsto\mathsf{c},y\mapsto\mathsf{b}}(y))(g^{x\mapsto\mathsf{c},y\mapsto\mathsf{b}}(x)) \\ \mathsf{see}(g^{x\mapsto\mathsf{c},y\mapsto\mathsf{c}}(y))(g^{x\mapsto\mathsf{c},y\mapsto\mathsf{c}}(x)) \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

How about the other meaning: $\exists y \forall x.\mathsf{see}(y)(x)$

Bound pronouns

$[\![\text{no one likes their}_x \text{ school}]\!]^{M,g} = \neg\exists x.\mathsf{like}(\mathsf{school\text{-}of\text{-}}x)(x)$

The value of *their*$_x$ **co-varies** with $\exists x$