第三章　数值微分与数值积分

数值微分与数值积分是一种近似计算，它不必求出导函数或不定积分公式，而是利用差分公式计算导数，用梯形公式或其它数值积分公式如辛普生公式等计算定积分。

1. 用符号工具箱计算微积分

符号运算工具箱能够求导函数和计算不定积分公式，这属于符号运算。

diff	符号变量微分	limit	求极限	taylor	泰勒展开
int	符号变量积分	symsum	求级数和	simple	将表达式化简

```
>> syms x z                       %指定符号变量
>> diff(log(x+1))                 %求函数的一阶导数
ans = 1/(x+1)
>> diff(sin(x^2),2)               %求二阶导数
ans = -4*sin(x^2)*x^2+2*cos(x^2)
>> diff(x/(1+x^2),3)              %求三阶导数
ans = 48/(1+x^2)^3*x^2-6/(1+x^2)^2-48*x^4/(1+x^2)^4
>> int(x/(1+x^2))
ans = 1/2*log(1+x^2)              %计算不定积分公式
>>  int(z/(1+x^2),x)              %指定积分变量,其余变量为参数
ans =z*atan(x)
>>  int(x*log(1+x),0,1)           %计算区间(0,1)的定积分
ans = 1/4
>>  limit(sin(x)/x)               %计算函数极限，默认x=0为极限点
ans = 1
>> limit(1/x,x,0,'right')         %求函数的右极限
ans = Inf
>> limit(1/x,x,0,'left')          %求函数的左极限
ans = -Inf
>> limit((x-2)/(x^2-4),2)         %求x=2处函数的极限
ans = 1/4
```

```
>>  taylor(exp(-x))                %在零点求泰勒展开，默认取前五项
ans = 1-x+1/2*x^2-1/6*x^3+1/24*x^4-1/120*x^5
>> taylor(log(x),6,1)              %在x=1处计算泰勒展开前6项
ans =  x-1-1/2*(x-1)^2+1/3*(x-1)^3-1/4*(x-1)^4+1/5*(x-1)^5
```

>> symsum(k,0,n) %计算 $\sum_{k=0}^{n} k$

```
ans = 1/2*(n+1)^2-1/2*n-1/2
>>simple(symsum(k,0,n))            %用指令simple化简上式的结果
ans =  1/2*n*(n+1)
>> symsum(1/k^2,1,Inf)
ans = 1/6*pi^2                     %计算有无穷项的级数和
```

2. 数值微分与数值积分

下面推导出数值微积分计算中常用的几个公式

2.1 数值微分的算法

泰勒展开公式 $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$

前差公式 $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

后差公式 $f'(x) = \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$

中心差分(平均值) $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

用后差公式推 $f''(x) = \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$

二阶导数公式 $= \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$

2.2 数值积分的算法

曲线下面积 $I = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$

矩形积分公式之一 $L_n = h\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k, \quad h = \frac{b-a}{n}$

矩形积分公式之二 $R_n = h\sum\limits_{k=1}^{n} f_k, \quad h = \frac{b-a}{n}$

梯形公式(两式平均) $T_n = h\sum\limits_{k=1}^{n-1} f_k + \dfrac{h}{2}(f_0 + f_n), \quad h = \frac{b-a}{n}$

辛普生公式的推导

令$h=\dfrac{a-b}{2n}$，以$2k$ 标记偶数节点$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，
第k段区间包含三个节点$(x_{2k},f_{2k}),(x_{2k+1},f_{2k+1}),(x_{2k+2},f_{2k+2})$，
在这个区间内对x_{2k+1}作泰勒展开

$$f(x)\approx f(x_{2k+1})+f'(x_{2k+1})(x-x_{2k+1})+\frac{1}{2!}f''(x_{2k+1})(x-x_{2k+1})^2$$

$$\approx f_{2k+1}+\frac{f_{2k+2}-f_{2k}}{2h}(x-x_{2k+1})+\frac{f_{2k+2}-2f_{2k+1}+f_{2k}}{h^2}(x-x_{2k+1})^2$$

在这个区间内积分得

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx\approx\frac{h}{3}(f_{2k}+4f_{2k+1}+f_{2k+2})$$

上式对k求和得辛普生公式

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{3}(f_{2k}+4f_{2k+1}+f_{2k+2})$$

$$S_n=\frac{h}{3}\left(f_0+f_{2n}+2\sum_{k=1}^{n-1}f_{2k}+4\sum_{k=0}^{n-1}f_{2k+1}\right)$$

2. MATLAB指令

2.1 差分运算指令diff

差分$dx\approx\triangle x=x_{n+1}-x_n$

差商$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}\approx\dfrac{dy}{dx}$

diff用法示例

对矢量求差分,运算是后项减前项,所得结果比原来少一个元素。

对矩阵求差分是对列矢量作差分

```
>>a=[1,4,5,-2];
>>diff(a) =3 1 -7
>>b = [0.95013,      0.48598;
       0.23114,      0.8913;
       0.60684,      0.7621 ]
>> diff(b)
ans = -0.71899      0.40532
       0.3757      -0.1292
```

2.2 计算梯度gradient

梯度是相邻两个差分值的平均(即用导数的中心差分式计算)。在端点则取其差分值。

一维矢量的梯度就是导数。
矩阵的梯度是两个方向的偏导数。

```
>> a=[1,  5,  4,  2,  7;
      2,  1,  8,  3,  4];
>> [px,py]=gradient(a)
px = 4   1.5  -1.5  1.5  5
    -1   3     1   -2    1
py = 1  -4    4    1  -3
     1  -4    4    1  -3
```

2.3 梯形积分(trapz)

矢量的梯形积分是相邻两个函数值之和除2再乘以自变量的增量（梯形公式）。

矩阵的梯形积分对列矢量进行。

```
>> a=[1, 5, 7, 2, 3];
>> trapz(a)
ans =  16
>>b = 0.95013      0.48598
      0.23114       0.8913
      0.60684       0.7621
>> trapz(b)
ans = 1.0096       1.5153
```

2.4 累计梯形积分(cumtrapz)

累计梯形积分相当于不定积分的数值计算。
结果是矢量，它的第n个元素是原矢量前n个元素的梯形积分。
矩阵的累计梯形积分对列矢量进行。

```
>> cumtrapz(b)
ans =         0             0
        0.59063       0.68864
         1.0096        1.5153
```

2.5 函数积分(quad,quadl)

quad是自适应辛普生法。
quadl是自适应柯特法，精度更高。
下面两个计算结果精度不同

```
>> f=inline('exp(x.^(-3))','x');
>>format long
>> quad(f,0.5,0.6)
ans =  71.54649248133561
>> quadl(f,0.5,0.6)
ans =  71.54649247308223
```

2.6 函数的二重积分(dblquad)

积分时要按变量顺序指明两个变量的积分区间。

```
>> ff=inline('y.*sin(x)+x.*cos(y)','x','y')
>> dblquad(ff,pi,2*pi,0,pi)
ans =   -9.8696
```

3. 环形电流的磁场 — —物理场的可视化

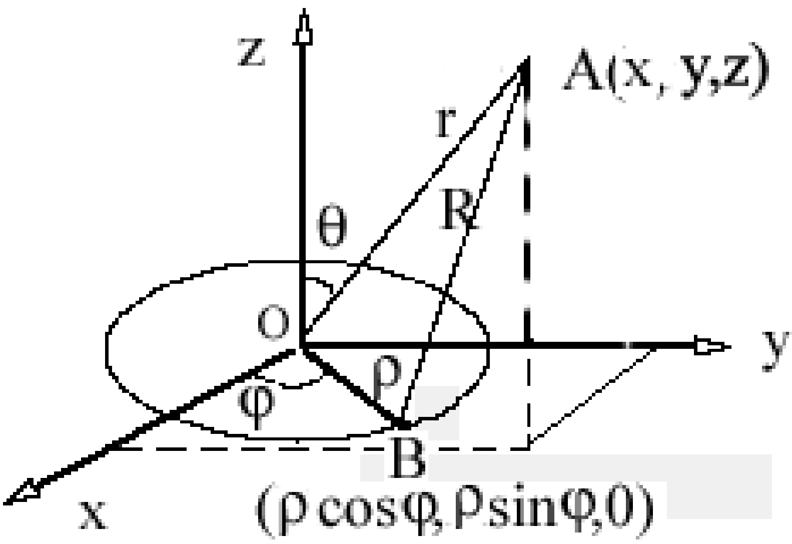
3.1 MATLAB画物理场的指令

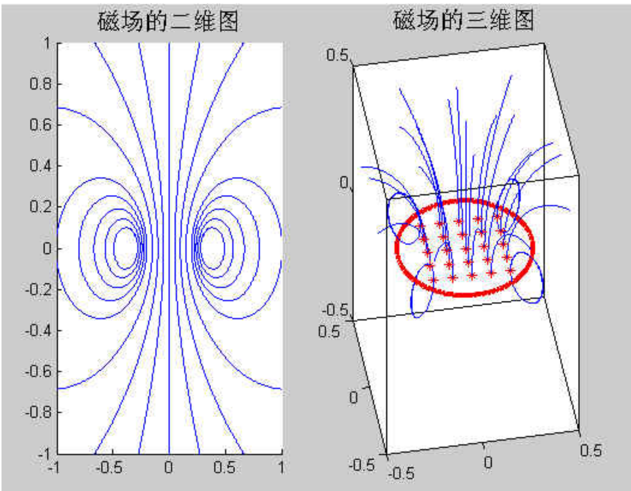
演示程序 (demo/3-D visualzation/volume visualzation)

指令	功能
QUIVER	用箭头表现二维矢量场
FEATHER	沿水平方向用箭头表现二维矢量场
QUIVER3	用箭头表现三维矢量场
ISOSURFACE	画标量场等密度面
CONEPLOT	矢量场锥体图,表现各点矢量场的大小与方向
STREAMLINE	画矢量场流线,表现场线的密度
STREAMTUBE	画矢量场流管,能表现矢量场的散度
STREAMRIBBON	画矢量场流带,能表现矢量场的旋度

3.2 实验演示 电流环磁场

3.3 环形电流的磁场的计算





在B点的电流密度是λ圆环电流元在在A产生的磁场是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda}{R^3}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= -\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathbf{i}+\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathbf{j} \\
\boldsymbol{R} &= (x-\rho\cos\varphi)\mathbf{i}+(y-\rho\sin\varphi)\mathbf{j}+z\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

代入得

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\lambda\mu_0}{4\pi R^3}[z\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathbf{i}+z\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathbf{j}+(\rho^2-y\rho\sin\varphi-x\rho\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathbf{k}\ ]
$$

当A点在yoz平面时，其坐标为A$(0,x,y)$,且有

$$
\boldsymbol{R}' = (-\rho\cos\varphi)\mathbf{i}+(y-\rho\sin\varphi)\mathbf{j}+z\mathbf{k}
$$

取上面d$\boldsymbol{B}$式中的$x=0$,得到yoz面上点A(0,y,z)产生的磁场。此时有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} dB_x &= \int_0^{2\pi}\frac{z\rho\cos\varphi d\varphi}{(\rho^2+r^2-2y\rho\sin\varphi)^{3/2}} \\
&= \frac{z\rho}{y\rho}\frac{1}{(\rho^2+r^2-2y\rho\sin\varphi)^{1/2}}\bigg|_0^{2\pi}=0
\end{aligned}
$$

所以在画二维图形时,只要计算

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{b} = \frac{\mu_0\lambda}{4\pi R^3}[z\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathbf{j}+(\rho^2-y\rho\sin\varphi)d\varphi\mathbf{k}\ ]
$$

利用上式,可以编出下面的程序,程序中省略了常数$\frac{\mu_0\lambda}{4\pi}$。

```
%画二维图形
a=0.35;     the=0:pi/20:2*pi;
y= -1:0.04:1;     z= -1:0.04:1;
[Y,Z,T]=meshgrid(y,z,the);
r=sqrt((a*cos(T)).^2+(Y-a*sin(T)).^2+Z.^2);
r3=r.^3;
dby =a*Z.*sin(T)./r3;      by=pi/40*trapz(dby,3);  %B的y分量
dbz =a*(a-Y.*sin(T))./r3; bz=pi/40*trapz(dbz,3);  %B的X分量

figure(1)
[bSY,bSZ]=meshgrid([0:0.05:0.2],0);
```

```
h1=streamline(Y(:,:,1),Z(:,:,1),by,bz,bSY,bSZ,[0.1,1000]);
h2=copyobj(h1,gca);
    %用图形复制与旋转画其余的象限,代替下面三句
rotate(h2,[1,0,0],180,[0 0 0]);
h3=copyobj(allchild(gca),gca);
rotate(h3,[0,1,0],180,[0 0 0]);
title('磁场的二维图','fontsize',15);


for kk=1:4      %曲率较大的场线要取不同的步长
[bSY,bSZ]=meshgrid(0.2+kk*0.02,0);
streamline(Y(:,:,1),Z(:,:,1),by,bz,bSY,bSZ,[0.02/(kk+1),4500]);
streamline(-Y(:,:,1),Z(:,:,1),-by,bz,-bSY,bSZ,[0.02/(kk+1),4500]
end
%以下画三维图形
[X,Y,Z]=meshgrid(-0.5:0.04:0.5);
r2=X.^2+Y.^2+Z.^2;
for k=1:81
   phi=pi/40*(k-1);    costh=cos(phi);    sinth=sin(phi);
   R3=(r2+a^2-2*a*(X*costh+Y*sinth)).^(3/2);
   Bx0(:,:,:,k)=a*Z*costh./R3;
   By0(:,:,:,k)=a*Z*sinth./R3;
   Bz0(:,:,:,k)=a*(a-X*costh-Y*sinth)./R3;
end
Bx=pi/40*trapz(Bx0,4);     %梯形积分
By=pi/40*trapz(By0,4);
Bz=pi/40*trapz(Bz0,4);


figure(2)
v=[-0.2,-0.1,0,0.1,0.2];
```

```
[Vx, Vy, Vz]=meshgrid(v,v,0);
plot3(Vx(:),Vy(:),Vz(:),'r*')
streamline(X,Y,Z,Bx,By,Bz,Vx,Vy,Vz,[0.01,2000]);
hold on;
axis([-0.5,0.5,-0.5,0.5,-0.5,0.5]);
view(-23,26);
box on;
title('磁场的三维图','fontsize',15);
t=0:pi/100:2*pi;
plot(a*exp(i*t),'r-','LineWidth',3);
```

程序中使用的指令streamline的作图精度与所选的步长有关,在语句中是最后两个参数, 一个表示步长,另一个表示步数.适当选择这两个参数的值,才能保证所画的场线闭合,否则可能由于计算精度不够而产生的误差积累会导致场线不闭合。

指令copyobj是复制图像,rotate是旋转图像。

4. 参考资料

参见《数学物理方程的MATLAB解法与可视化》pp103-114

4.1 用连带勒让德函数表示的磁感应强度的解析解

按照参考资料的做法,先解矢势的方程,再求磁感应强度B,得到问题的解是

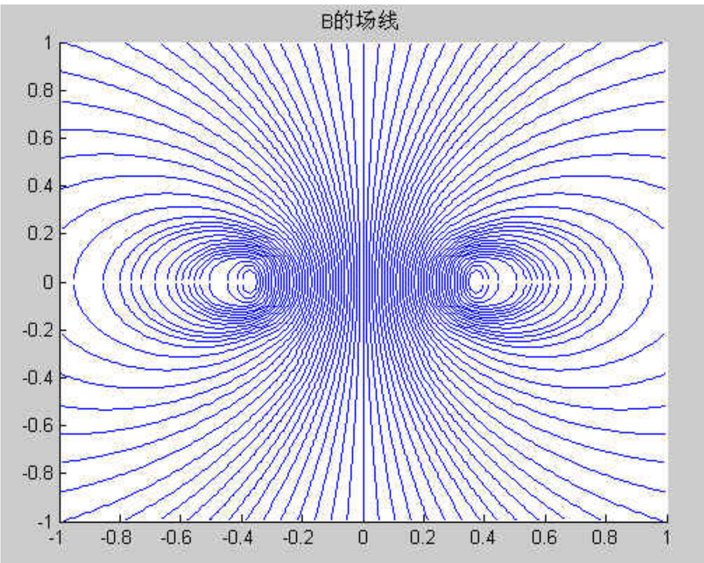
$$B_r(r,\theta) = -\frac{\mu_0 I}{2r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1} P_{2l+1}^1(0)P_{2l+1}^1(\cos\theta), (r<a)$$

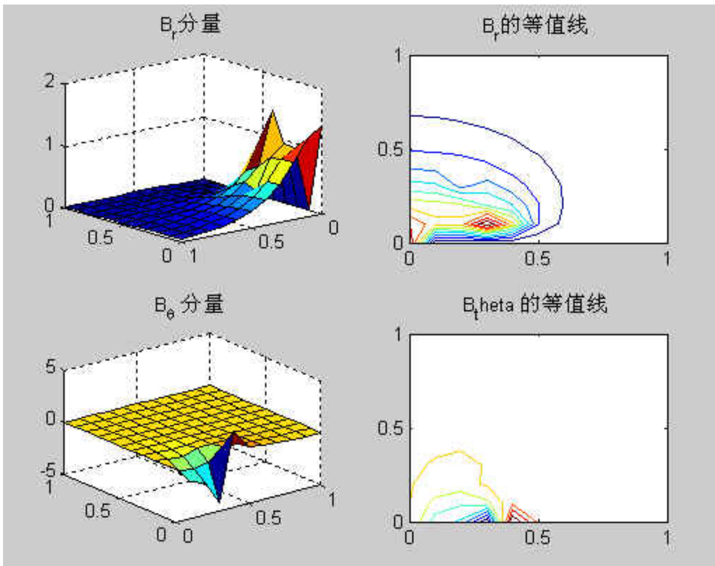
$$B_r(r,\theta) = -\frac{\mu_0 I}{2r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+1}^1(0)P_{2l+1}^1(\cos\theta), (r>a)$$

$$B_\theta(r,\theta) = -\frac{\mu_0 I}{2r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1} P_{2l+1}^1(0)P_{2l+1}^1(\cos\theta), (r<a)$$

$$B_\theta(r,\theta) = \frac{\mu_0 I}{2r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+1}^1(0)P_{2l+1}^1(\cos\theta), (r>a)$$

所得图形为





4.2. 利用椭圆函数表示的磁感应强度解析表达式

利用毕奥－萨伐尔定律，求出圆环电流在空间的磁感应强度解析表达式,积分计算得

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{a^2+r^2+2ar\sin\theta}}\left[\frac{a^2+r^2}{a^2+r^2-2ar\sin\theta}E-K\right]$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{\sqrt{a^2+r^2+2ar\sin\theta}}\left[\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\sin\theta}E+K\right]$$

其中,E, K椭圆函数,

$$K = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

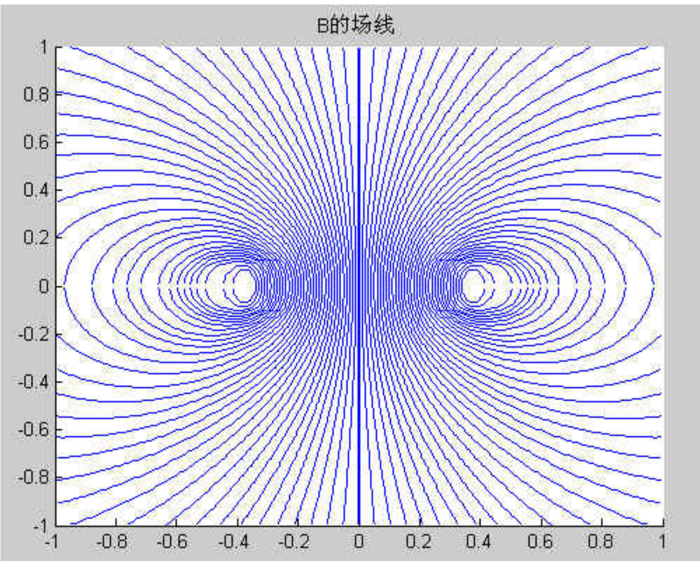
$$= \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6+\cdots\right]$$

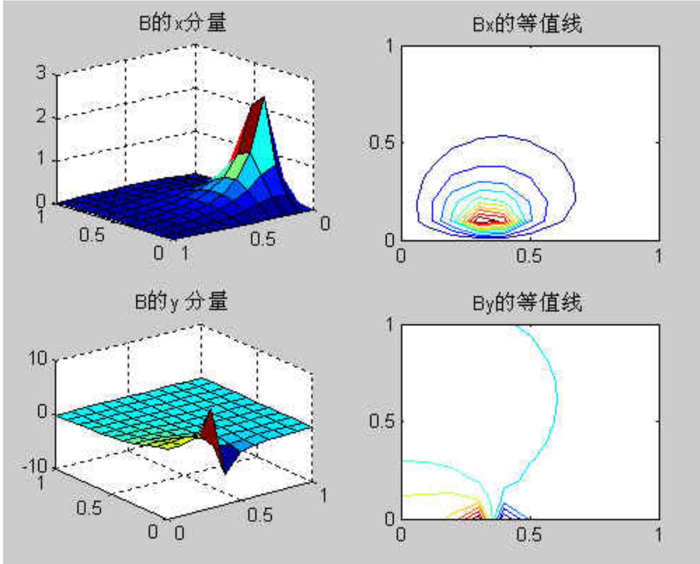
$$E = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\mathbf{x}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5}+\cdots\right]$$

$$k^2 = \frac{4ar\sin\theta}{a^2+r^2+2ar\sin\theta}$$

所得的图形是


B的场线
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1


B的x分量
Bx的等值线
B的y 分量
By的等值线