

第八章 数值积分

我们知道, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且原函数为 $F(x)$, 则可用牛顿——莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

来求得定积分。然而, 对有些函数来说, 找到原函数往往很困难, 有些原函数不能用初等函数表示出来, 例如:

$$\int_0^a e^{-x^2} dx \quad (a \text{ 为有限数})$$

还有的被积函数尽管能用初等函数的有限形式表示出来, 但表达式过于复杂, 也不便使用。特别是在实际问题中, 更多的函数是用表格或图形表示的, 对这种函数, 更无法用牛顿——莱布尼兹公式求积分。因此, 有必要研究用数值方法求定积分的问题。这种数值积分方法也是微分方程、积分方程数值解法的基础。

数值积分的基本思想是构造一个简单函数 (例如多项式) $P_n(x)$ 来近似代替被积分函数 $f(x)$, 然后通过求 $\int_a^b P_n(x)dx$ 求得 $\int_a^b f(x)dx$ 的近似值。

§1 插值型求积公式

设

$$I^* = \int_a^b f(x)dx \quad (8.1)$$

插值型求积公式就是构造插值多项式 $P_n(x)$, 使

$$I^* \approx I = \int_a^b P_n(x)dx$$

称 (8.1) 为插值求积公式。

由拉格朗日插值公式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)$$

代入 (8.1), 则有

$$I = \sum_{k=0}^n \int_a^b l_k(x) f(x_k) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b l_k(x) dx \cdot f(x_k)$$

记

$$\lambda_k = \int_a^b l_k(x) dx \quad I = \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k)$$

其中 λ_k 为求积系数, x_k 为求积节点。

1. 两点公式

构造以 a, b 为结点的线性插值多项式

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \\
T &= \int_a^b P_1(x) dx = \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \right] dx \\
&= \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b) dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a) dx \\
&= \frac{f(a)}{a-b} \times \frac{1}{2} (a-b)^2 + \frac{f(b)}{b-a} \times \frac{1}{2} (b-a)^2 = \frac{1}{2} (b-a) [f(a) + f(b)]
\end{aligned} \tag{8.2}$$

(8.2) 亦称为梯形公式。

2. 三点公式

以 $a, c = \frac{a+b}{2}$, b 为节点, 构造二次插值多项式

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) \\
&\quad + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_a^b P_2(x) dx \\
&= f(a) \int_a^b \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} dx + f(c) \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} dx \\
&\quad + f(b) \int_a^b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} dx \\
&= \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(c) + \lambda_2 f(b)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \int_a^b \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} dx \\
&= \frac{1}{(a-c)(a-b)} \int_a^b (x-c)(x-b) dx \\
&= \frac{1}{(a-c)(a-b)} \int_a^b [x^2 - (b+c)x + bc] dx \\
&= \frac{1}{(a-c)(a-b)} \left[\frac{1}{3} (b^3 - a^3) - \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot (b+c) + bc(b-a) \right] \\
&= \frac{1}{6} (b-a)
\end{aligned}$$

类似地, 可求得

$$\lambda_1 = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} dx = \frac{4}{6} (b-a)$$

$$\lambda_2 = \int_a^b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} dx = \frac{1}{6}(b-a)$$

得三点公式:

$$S = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad (8.3)$$

称 (8.3) 为辛卜生 (Simpson) 求积公式。

我们也可以类似地构造五点、七点, ..., n 点求积公式, 在实际运算中, 以梯形和 Simpson 公式为常用。

§2 复化求积公式

如果积分区间比较大, 直接地使用上述求积公式, 精度难以保证。在高等教学的学习中, 曾经介绍过梯形法求积公式, 它的几何意义是将积分区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 对 $f(x)$ 用分段线性插值, 然后积分。类似地, 也可以对 $f(x)$ 用分段抛物插值。

通常采取的办法是:

(1) 等分求积区间, 比如取步长 $h = \frac{b-a}{n}$, 分 $[a, b]$ 为 n 等分, 分点为

$$x_k = x_0 + kh \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

(2) 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上使用以上求积公式求得 I_k

(3) 取和值 $I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k$, 作为整个区间上的积分近似值。

这种求积方法称为复化求积方法。

1. 复化梯形公式

由 (8.2)

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \\ T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] \end{aligned} \quad (8.4)$$

2. 复化辛卜生公式

将 $[x_k, x_{k+1}]$ 对分, 中点记为 $x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$

由 (8.3)

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{h}{6} [f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})] \\ S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{6} [f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})] \end{aligned} \quad (8.5)$$

例 8. 1: 利用数据表

x_k	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
$f(x_k)$	4	3.93846	3.76470	3.50685	3.20000	2.87640	2.46000	2.26549	2

计算积分

$$I^* = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

这个问题有明显的答案

$$I^* = 4 \arctan x \Big|_0^1 = \pi = 3.1415926 \dots$$

取 $n=8$ 用复化梯形公式

$$\begin{aligned} T_8 &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{8}\right) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{3}{8}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2f\left(\frac{5}{8}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + 2f\left(\frac{7}{8}\right) + f(1) \right] \\ &= 3.13899 \end{aligned}$$

取 $n=4$, 用辛卜生公式

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{8}\right) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 4f\left(\frac{3}{8}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + 4f\left(\frac{5}{8}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + 4f\left(\frac{7}{8}\right) + f(1) \right] \\ &= 3.14159 \end{aligned}$$

比较 T_8 与 S_4 两个结果, 它们却需要调用 f 9 次, 工作量基本相同, 但精度差别却很大。这项计算结果表明, 复化辛卜生公式是一种精度较高的求积公式。

为编程方便, 我们将辛卜生公式 (8.5) 写成

$$S = \frac{b-a}{3n} \left\{ \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^n \left[2f(x_{k-\frac{1}{2}}) + f(x_k) \right] \right\}$$

§ 3 变步长梯形方法

前面介绍的复化求积方法对提高精度是行之有效的。但是使用复化求积公式之前须给出合适的步长, 步长取得太大精度难以保证, 步长太小则会导致计算量的增加, 而事先给出一个合适的步长往往又是十分困难的。

下面介绍一种变步长积分法, 其基本思想是将区间逐次对分进行计算, 用前后两次计算的结果进行估计, 若合乎精度要求, 就停止计算; 否则再次对分, 重复以上计算过程, 直至达到精度要求为止。

设将区间 $[a, b]$ n 等分, 共有 $n+1$ 个分点, 按复化梯形公式计算 T_n , 需要计算 $n+1$ 个 $f(x)$ 的值, 如果将求积区间再次对分, 若仍然直接用复化梯形公式计算二分后的积分值 T_{2n} , 则需要计算 $2n+1$ 个 $f(x)$ 的值。注意到 T_{2n} 的全部分点中有 $n+1$ 个是二分前原有的

点, 重复计算这些“老分点”上的函数值显然是个浪费。因此, 我们将二分前后两个积分值联系起来加以考虑, 注意到每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 经过二分再增加一个新分点 $x_{k+\frac{1}{2}}$ 后, 用复化梯形公式求得该区间上的积分值为:

$$I_k = \frac{h}{4} [f(x_k) + 2f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$

因此有

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{4} [f(x_k) + 2f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{h}{4} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} T_n + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (8.6)$$

(8.6) 式的前一项 T_n 是二分前的积分值, 在求 T_{2n} 时可作为已知值使用, 而它的后一项只涉及二分时新增加的分点 $x_{k+\frac{1}{2}}$, 所要计算 f 值的次数为 n , 可见递推公式 (8.6) 由于避免了老节点的重复计算, 而使计算量减少了一半。

§4 求积公式的误差

现在考虑求积公式的误差。因为 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次插值多项式, 所以当 $f(x)$ 本身就是次数不超过 n 的多项式时, $f(x) \equiv P_n(x)$, 这时, 在不考虑舍入误差时, 求积公式是精确成立的。

我们来看一下它的舍入误差, 此时

$$I^* = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k f^*(x_k)$$

取 $f(x) \equiv 1$, 则

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k = b - a$$

若 $f(x_k)$ 的舍入误差小于 ε , 则

$$\begin{aligned} |I^* - I| &= \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k f^*(x_k) - \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |\lambda_k| |f^*(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

可见, 舍入误差对数值积分的影响不大。因此, 在讨论求积公式的误差时, 主要考虑截断误差。

1. 梯形公式的截断误差

在求积区间 $[a, b]$ 上, 设 $f''(x) \leq M_2$ ($M_2 > 0$, 常数), 在 a 点附近将 $f(x)$ 展成泰勒级数

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x-a)^2 \quad a \leq \xi \leq b$$

$$\begin{aligned} I^* &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x-a)^2 \right] dx \\ &= (b-a)f(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f'(a) + \frac{1}{6} f''(\xi)(b-a)^3 \end{aligned}$$

另一方面，注意到

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(\xi)(b-a)^2$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \\ &= \frac{b-a}{2} \left[2f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(\xi)(b-a)^2 \right] \\ &= (b-a)f(a) + \frac{1}{2} f'(a)(b-a)^2 + \frac{1}{4} f''(\xi)(b-a)^3 \end{aligned}$$

$$I^* - T = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

梯形公式的截断误差为：

$$|I^* - T| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)^3$$

若取 $h = \frac{b-a}{n}$ ，对每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 用梯形公式

$$\begin{aligned} I^* - T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (I_k^* - I_k) = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{f''(\xi)}{12} \cdot h^3 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{12} f''(\xi) \frac{b-a}{n} \cdot h^2 \\ &= -\frac{(b-a)}{12} f''(\xi) h^2 \end{aligned}$$

复化梯形公式的截断误差限为

$$|I^* - T_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 h^2$$

2. 辛卜生公式的截断误差

假设在区间 $[a, b]$ 上， $f^{(4)}(x) \leq M_4$ ($M_4 > 0$ ，常数) 在 $c = \frac{a+b}{2}$ 附近，将 $f(x)$ 展成泰

勒级数

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(c)(x-c)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x-c)^4 \quad a \leq \xi \leq b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^* &= \int_c^b f(x)dx = \int_a^b \left[f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!}f'''(c)(x-c)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-c)^4 \right] dx \\
&= f(c)(b-a) + \frac{1}{3}f''(c)(b-a)^3 + \frac{1}{60}f^{(4)}(\xi)\left(\frac{b-c}{2}\right)^5
\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(c) - f'(c)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(c)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}f'''(c)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \\
f(b) &= f(c) + f'(c)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(c)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}f'''(c)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^4
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
S &= \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \\
&= \frac{b-a}{6} \left[2f(c) + 4f(c) + f''(c)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}f^{(4)}(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \right] \\
&= f(c)(b-a) + \frac{1}{3}f'''(c)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \frac{1}{36}f^{(4)}(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \\
I^* - S &= \frac{1}{60}f^{(4)}(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 - \frac{1}{36}f^{(4)}(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \\
&= -\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^5
\end{aligned}$$

截断误差限为

$$|I^* - S| \leq \frac{M_4}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

取 $h = \frac{b-a}{n}$, 得复化辛卜生公式的截断误差

$$\begin{aligned}
I^* - S_n &= \sum_{k=1}^n (I_k^* - I_k) \\
&= \sum_{k=1}^n -\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi) \left(\frac{h}{2}\right)^5 \\
&= -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi) \left(\frac{h}{2}\right)^4
\end{aligned}$$

截断误差限为:

$$|I^* - S_n| \leq \frac{b-a}{180} M_4 \left(\frac{h}{2}\right)^4$$

§5 龙贝格求积公式

龙贝格积分法是在计算梯形和序列的基础上应用了线性外推的加速方法, 由此构成的一种具有超线性收敛的自动积分法。该方法思路如下:

按照区间逐次分半的方法, 计算梯形和序列

$$n=1, \quad h_0 = b-a$$

$$T_0 = h_0 \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

$$n=2, \quad h_1 = \frac{h_0}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} T_0 + \frac{1}{2} h_0 f\left(a + \frac{h_0}{2}\right)$$

$$n=2^2, \quad h_2 = \frac{b-a}{2^2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} T_1 + \frac{h_0}{2^2} \sum_{i=1}^3 f\left(a + \frac{2i-1}{2^2} h_0\right)$$

.....

$$n=2^k, \quad h_k = \frac{b-a}{2^k}$$

$$T_k = \frac{1}{2} T_{k-1} + \frac{h_0}{2^k} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} f\left(a + \frac{2i-1}{2^k} \cdot h_0\right) \quad (8.7)$$

由此生成序列

$$T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$$

当 $|T_n - T_{n-1}| < \varepsilon$ 时, 就可以结束计算。

下面推导加速方法。

设 T_n 为梯形和, I 为积分真值, 由复化梯形公式

$$T_n = I + \frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2 \quad a < \xi < b$$

计算结果, T_n 可以看作是步长 h^2 的函数, 记为 $T(h^2)$, 容易证明, 对区间上任意可积函数 $f(x)$ 总有

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h^2) = \int_a^b f(x) dx = T(0)$$

很清楚, h 越小越精确, 但是计算量也越大。在实际中, 有时无法求出 $T(0)$, 于是就考虑能否通过 $T(h^2), T\left(\frac{h^2}{2}\right), \dots, T\left(\frac{h^n}{2^n}\right)$ 构造出一个新序列, 使它更快的收敛于 $T(0)$? 答案是肯定的。

它的几何解释如下: 以 h^2 为横轴, 以 T 为纵轴, 那么点列 $\{(h_n^2, T_n)\}$ 的极限为积分真值

I 。现在通过任意相邻两点

$$(h_n^2, T_n), (h_{n+1}^2, T_{n+1})$$

(其中 $h_{n+1} = \frac{1}{2} h_n$), 作一直线并延伸到 T 轴, 得到一截距 S_n , 若 $S_n < T_{n+1}$, 则说明新点列 $\{S_n\}$ 比原点列 $\{T_n\}$ 收敛快, 这就是线性外插加速的思想。

图 8.2

由解析几何

$$\frac{T - T_n}{h^2 - h_n^2} = \frac{T_{n+1} - T_n}{h_{n+1}^2 - h_n^2}$$

$$T - T_n = \frac{T_{n+1} - T_n}{h_{n+1}^2 - h_n^2} (h^2 - h_n^2)$$

令 $h = 0$, 则此直线在 T 轴上的截距为

$$S_n = T_n + \frac{T_{n+1} - T_n}{h_{n+1}^2 - h_n^2} (-h_n^2)$$

由 $h_{n+1} = \frac{1}{2}h_n$, 得:

$$\begin{aligned} S_n &= T_n + \frac{T_{n+1} - T_n}{\frac{1}{4}h_n^2 - h_n^2} (-h_n^2) = T_n - \frac{T_{n+1} - T_n}{\frac{1}{4} - 1} \\ &= \frac{4T_{n+1} - T_n}{4 - 1} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.8)$$

用梯形公式二分前后的两个结果 T_{n+1} 与 T_n 按 (8.8) 作线性组合, 所得到的是辛卜生公式的积分值

$$S_0 = \frac{4T_1 - T_0}{3}, \quad S_1 = \frac{4T_2 - T_1}{3}, \quad S_n = \frac{4T_{n+1} - T_n}{3}, \dots$$

不妨就 S_0 验证一下:

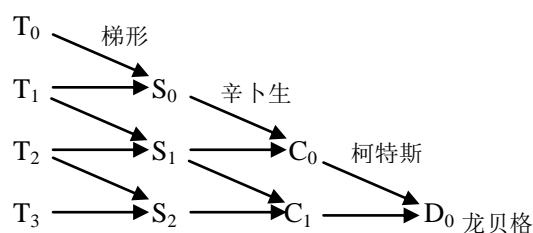
$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{4}{3}T_1 - \frac{1}{3}T_0 \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2}T_0 + \frac{h_0}{2}f\left(a + \frac{h_0}{2}\right) \right] - \frac{1}{3}T_0 \\ &= \frac{1}{3}T_0 + \frac{2}{3}h_0f\left(a + \frac{h_0}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}h_0f(a) + \frac{1}{2}h_0f(b) + 2h_0f\left(a + \frac{h_0}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{3}h_1 \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \\ &= \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \end{aligned}$$

用类似方法可推得:

$$C_n = \frac{4^2 S_{n+1} - S_n}{4^2 - 1} \quad \text{柯特斯序列}$$

$$D_n = \frac{4^3 C_{n+1} - C_n}{4^3 - 1} \quad \text{龙贝格序列}$$

由此法, 可得如下三角形数表



计算方法的实现:

首先构造 T 数表:

$$\begin{array}{cccc} T_0^{(0)} & & & \\ T_0^{(1)} & T_1^{(0)} & & \\ T_0^{(2)} & T_1^{(1)} & T_2^{(0)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ T_0^{(k)} & T_1^{(k-1)} & T_2^{(k-2)} & \dots T_k^{(0)} \end{array}$$

计算步骤:

1. 取 $h_0 = b - a$, 计算 $T_0 = \frac{h_0}{2} [f(a) + f(b)]$

2. 对 $k = 1, 2, \dots$ 计算下列各步

$$T_0^{(k)} = \frac{1}{2} T_0^{(k-1)} + \frac{h_0}{2^k} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} f\left(a + \frac{2i-1}{2^k} h_0\right)$$

3. 对 $n = 0, 1, 2, \dots, k = n-1, n-2, \dots$

$$T_n^{(k)} = \frac{4^n T_{n-1}^{(k+1)} - T_{n-1}^{(k)}}{4^n - 1}$$

4. 收敛控制

$$\text{若 } |T_k^{(0)} - T_{k-1}^{(0)}| < \varepsilon$$

$$\text{或 } \left| \frac{T_k^{(0)} - T_{k-1}^{(0)}}{T_k^{(0)}} \right| < \varepsilon'$$

则输出积分值 $T_k^{(0)}$, 否则转 3。

§ 6 高斯型求积公式

在插值型求积公式中, 插值节点是事先固定的, 有时还进一步限定是等距的。现在进一步考虑, 在节点个数一定的情况下, 是否可以在 $[a, b]$ 上自由选择节点的位置, 使求积公式的精度提得更高。

这一问题的回答是肯定的。为了讨论这一问题, 我们先介绍一下代数精确度的概念。称:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (8.9)$$

为一般求积公式。这里 A_k 为不依赖 $f(x)$ 的常数若 (8.9) 对任意不高于 m 次的多项式精确成立，而对于 x^{m+1} 不能精确成立，就说 (8.9) 式具有 m 次代数精确度。本节就是要讨论这种具有最高代数精确度的求积公式，它们也叫做高斯型求积公式。

例 8.2: 求形如

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的两点求积公式。

解: 本题的解法很多，结果也不一定相同，下面介绍两种解法。

(1) 用梯形公式（即以 $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ 为节点的插值型求积公式）立即可得

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f(-1) + f(1)$$

显然，此求积公式只具有一次代数精确度。

(2) 若对求积公式中的四个待定系数 A_0, A_1, x_0, x_1 适当选取，使求积公式对 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 都准确成立，即得方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

求解得

$$A_0 = A_1 = 1, \quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

图 8.3

故得

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

显然，此求积公式具有三次代数精确度。容易验证，它也是插值型求积公式，其几何意义见图 8.3。

此例告诉我们，对两点求积公式，只要适当选取求积节点 x_0, x_1 和求积系数 A_0, A_1 ，可使其代数精确度达到三次。由此可见，求积公式的代数精确度不仅与积分节点有关，而且与这些节点的所在位置有关。适当调整这些点的分布和求积系数，能使求积公式达到最高的代

数精确度。

引入权函数以后，可以考虑积分

$$I = \int_a^b \rho(x)f(x)dx \quad (8.10)$$

对于积分 (8.10)，假定我们采取 $n+1$ 个节点的求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (8.11)$$

其中系数 A_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) 不依赖于 $f(x)$ ，但与权函数 $\rho(x)$ 有关，目的是适当地选取 n 个节点，和相应的 n 个系数 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ ，使得积分公式 (8.11) 具有最大的代数精确度。

首先考虑对于固定的 n 值，公式 (8.11) 最大可以达到多少次代数精确度。假定公式 (8.11) 对所有的 m 次多项式 (m 待定)

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

是准确的。于是有

$$\begin{aligned} & a_m \int_a^b \rho(x) x^m dx + a_{m-1} \int_a^b \rho(x) x^{m-1} dx + \dots \\ & + a_1 \int_a^b \rho(x) x dx + a_0 \int_a^b \rho(x) dx \\ & = \sum_{i=0}^n A_i (a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_1 x_i + a_0) \end{aligned} \quad (8.12)$$

令

$$\mu_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

并重新组合 (8.12) 式右端各项，得

$$\begin{aligned} & a_m \mu_m + a_{m-1} \mu_{m-1} + \dots + a_1 \mu_1 + a_0 \mu_0 \\ & = a_m \sum_{i=0}^n A_i x_i^m + a_{m-1} \sum_{i=0}^n A_i x_i^{m-1} + \dots + a_1 \sum_{i=0}^n A_i x_i + a_0 \sum_{i=0}^n A_i \end{aligned} \quad (8.13)$$

由于系数 a_m, a_{m-1}, \dots, a_0 的任意性，使 (8.14) 式成立的充要条件是：

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \dots + A_n = \mu_0 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \mu_1 \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \dots + A_n x_n^2 = \mu_2 \\ \dots \\ A_1 x_1^m + A_2 x_2^m + \dots + A_n x_n^m = \mu_m \end{cases}$$

以上方程组中有 $n+1$ 个 A_i ， $n+1$ 个 x_i ，故有 $2n+2$ 个待定系数，而 $2n+2$ 个待定系数最多只能给 $2n+1$ 个独立的条件，因此可知 m 最多为 $2n+1$ 。

由引得出，对于 $n+1$ 个节点的求积公式，其最大可能的代数精确度是 $2n+1$ 次，并且可以证明 (8.13) 式当取 $m=2n+1$ 时是可解的。因此，确实可以找到一组 x_i 和 A_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) 使积分公式 (8.13) 达到 $2n+1$ 次代数精确度。这样的求积公式就是高斯型求积公式。

高斯型求积公式的结点和系数，可以由 (8.13) 式解得，但一般是利用正交多项式来确定它们由以下定理可以说明这点。

定理：插值型求积公式 (8.9) 中，节点 x_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) 是高斯点的充分必要条件是：在区间 $[a, b]$ 上，以这些点为零点的 $n+1$ 次多项式

$$A_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

与所有次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 都正交，即

$$\int_a^b p(x) A_{n+1}(x) dx = 0$$

此定理说明了高斯型求积公式的特点：

- (1) 代数精确度达到 $2n - 1$ ；
- (2) 节点是 $[a, b]$ 上的 $n + 1$ 次正交多项式的 $n + 1$ 个零点。

高斯求积公式的构造

根据以上定理，构造高斯型求积公式的方法就是去找 $[a, b]$ 上的 $n + 1$ 次多项式，再把它的 $n + 1$ 个零点求出来，由于正交多项式具有性质：在 $[a, b]$ 上的 $n + 1$ 次多项式一定有 $n + 1$ 个不同零点，且全部位于 $[a, b]$ 内，所以只要将此 $n + 1$ 个零点作为 $n + 1$ 次插值多项式的节点，构造出的插值多项式即为高斯型求积公式。

不失一般性，假定积分区间为 $(-1, 1)$ ，因为总可以利用变换

$$x = \frac{b+c}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

将区间 (a, b) 变成 $(-1, 1)$ 而积分变为：

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt$$

$$\text{式中 } g(t) = f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)$$

例 8. 3： 运用高斯——勒让德公式计算积分

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx = 2.399529$$

解：两点公式

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx = \sqrt{1.5-0.577350} + \sqrt{1.5+0.577350} = 2.401848$$

两点梯形公式

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx \approx 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{1+1.5} + \frac{1}{2} \sqrt{-1+1.5} \right) = 2.288246$$

三点公式：

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx &\approx 0.555556 (\sqrt{0.725403} + \sqrt{2.274597}) + 0.888889 \sqrt{1.5} \\ &= 2.399709 \end{aligned}$$

三点辛卜生公式：

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx \approx \frac{1}{3} (\sqrt{0.5} + 4\sqrt{1.5} + \sqrt{2.5}) = 2.395742$$

$$|I^* - S_n| \leq \frac{b-a}{180} M_4 \left(\frac{h}{2} \right)^4$$