Divide & Conquer

변행정복

최백준 choi@startlink.io

Divide & Conquer

- 분할 정복은 문제를 2개 또는 그 이상의 작은 부분 문제로 나눈 다음 푸는 것(분할)
- 푼 다음에는 다시 합쳐서 정답을 구할 때도 있음 (정복)
- 대표적인 분할 정복 알고리즘
- 퀵 소트
- 머지 소트
- 큰수곱셈(카라추바알고리즘)
- FFT

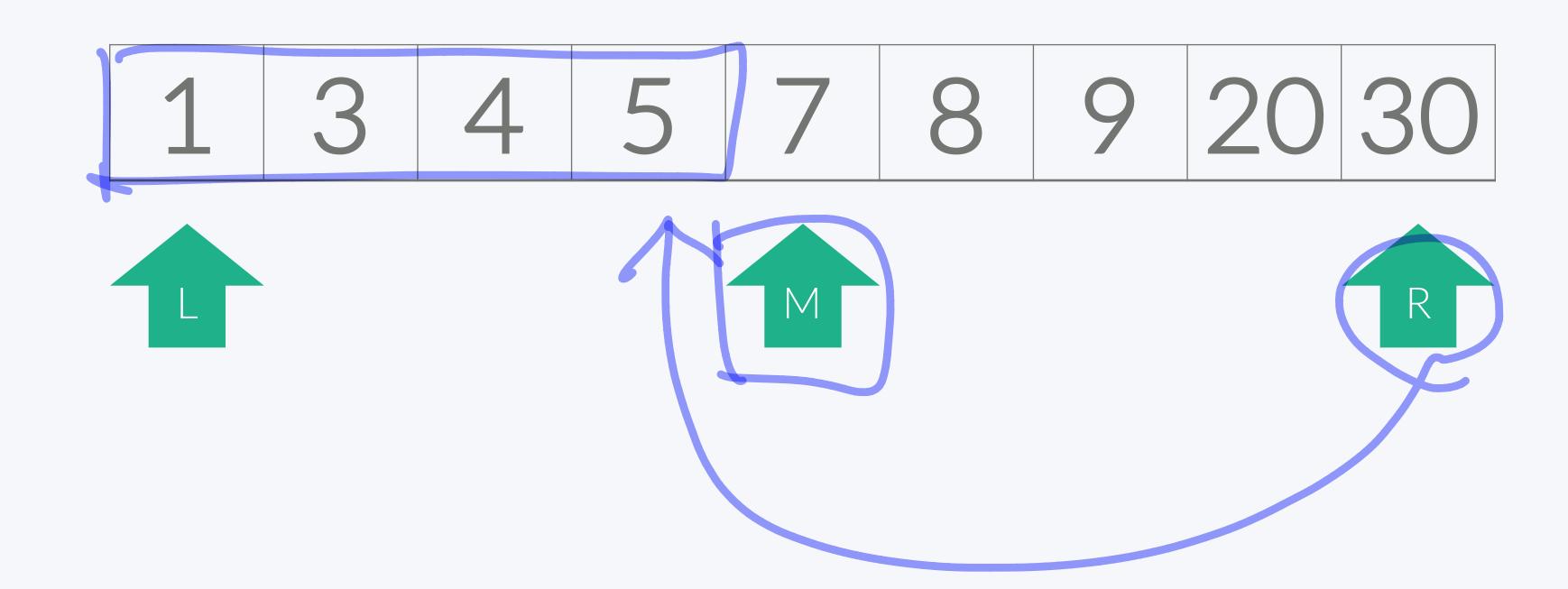
Divide & Conquer

- 분할 정복과 다이나믹은
- 문제를 작은 부분 문제로 나눈 다는 점은 동일하다
- 분할 정복: 문제가 겹치지 않음
- 다이나믹: 문제가 겹쳐서 겹치는 것을 Memoization으로 해결

Binary Search

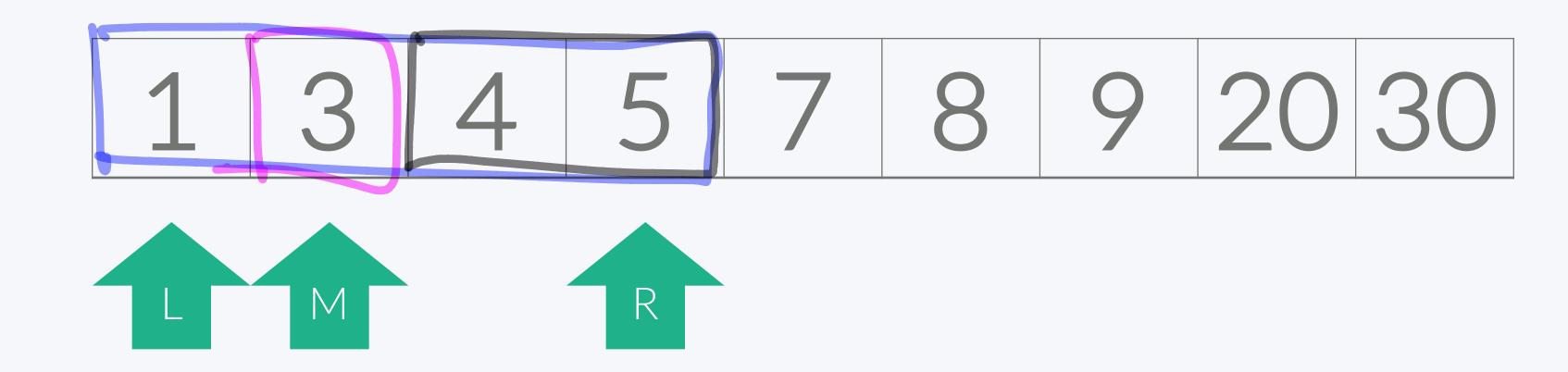
- 정렬되어 있는 리스트에서 어떤 값을 빠르게 찾는 알고리즘
- 리스트의 크기를 N 이라고 했을 때
- lgN의 시간이 걸린다.

- 4를 찾아보자
- L = 0, R = 8, M = 4
- 4<7이기때문에 왼쪽(L~M-1)에 4가 있을 수 있다.



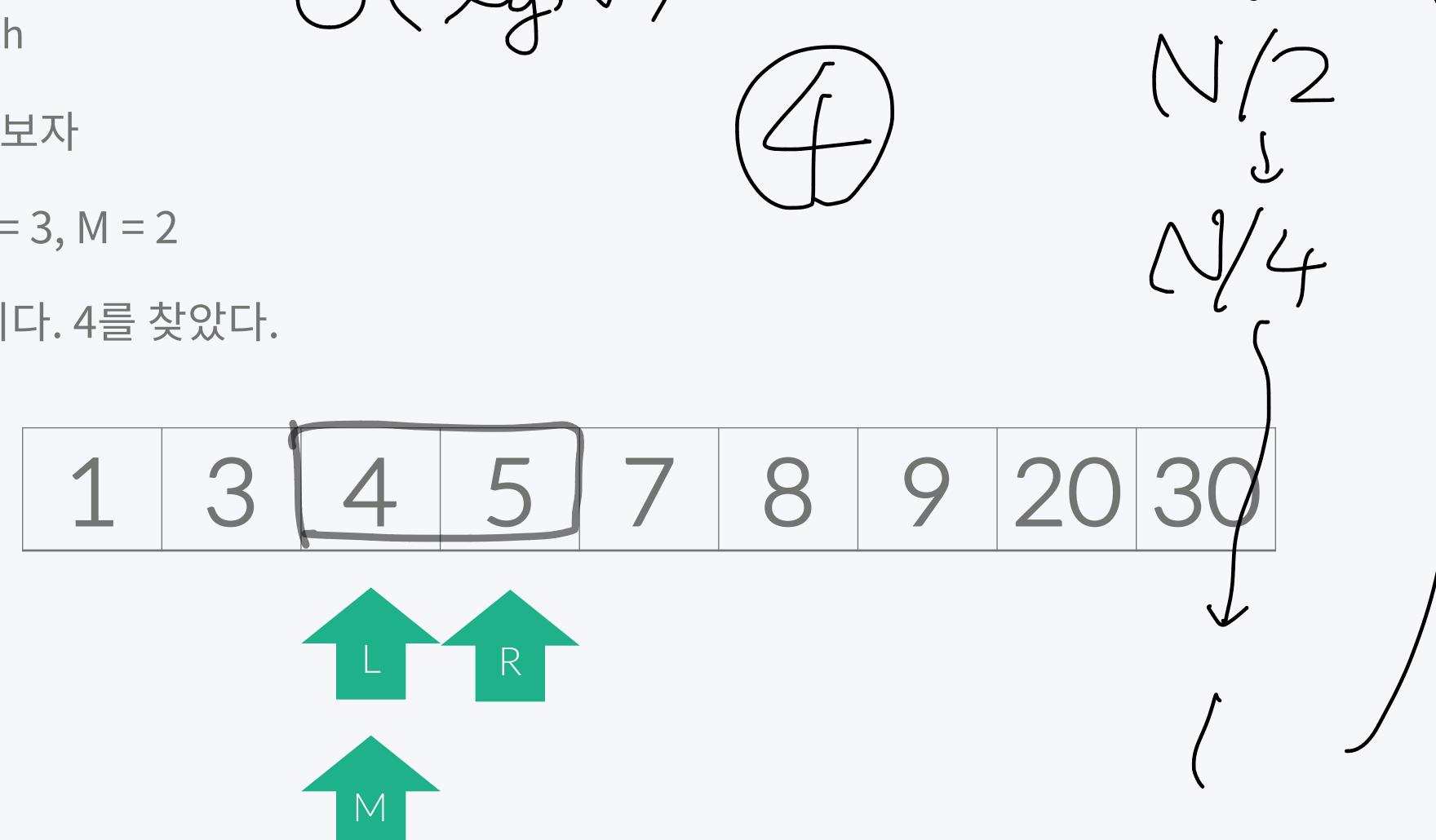


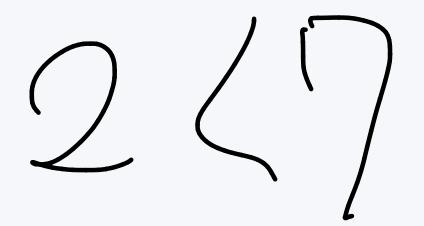
- 4를 찾아보자
- L = 0, R = 3, M = 1
- 4>3이기때문에 오른쪽 (M+1~R)에 4가 있을 수 있다.



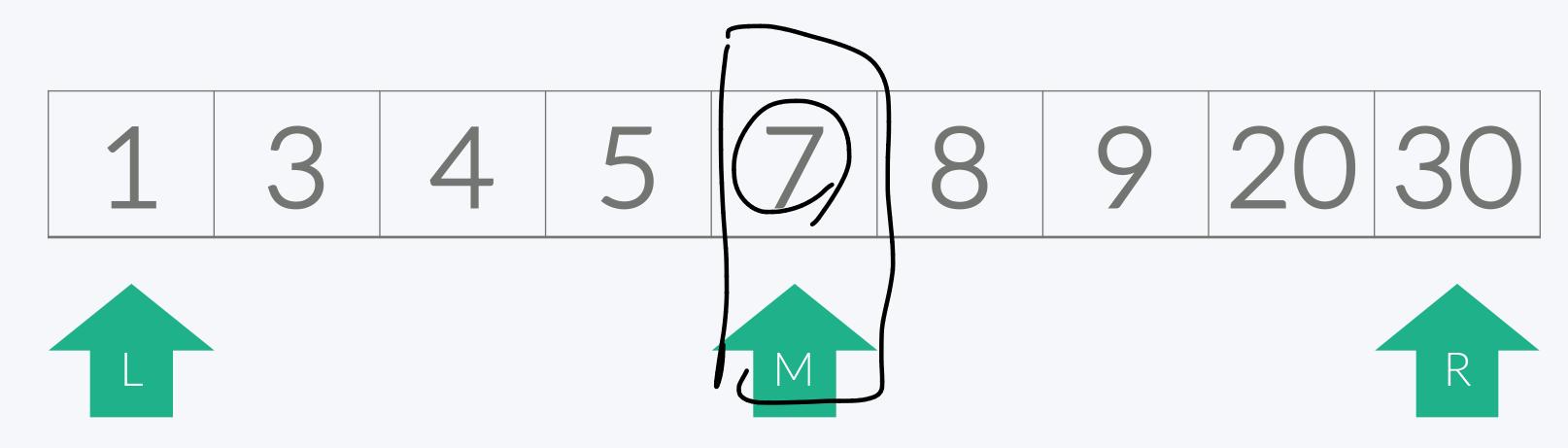


- 4를 찾아보자
- L = 2, R = 3, M = 2
- 4 == 4 이다. 4를 찾았다.

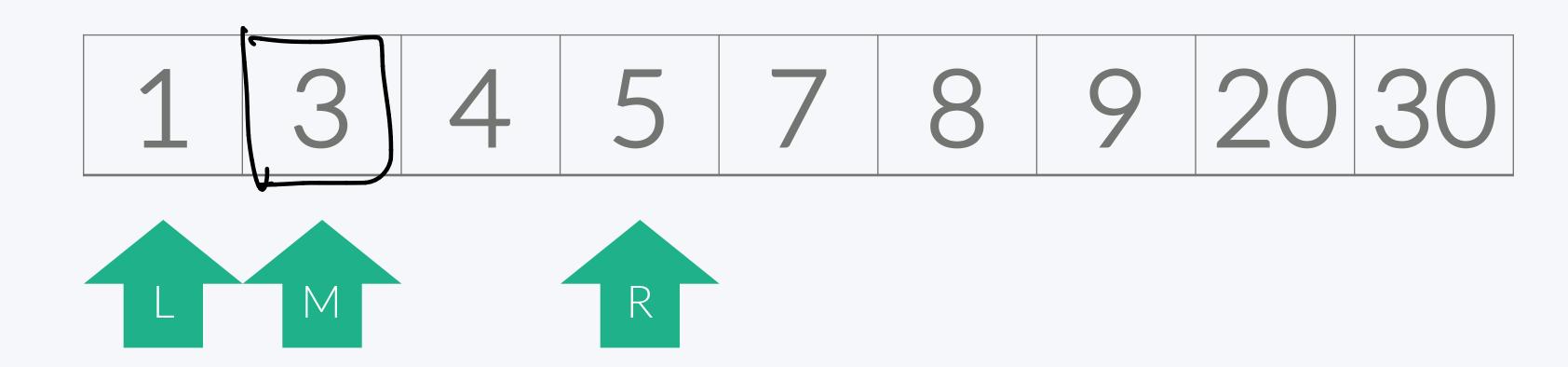


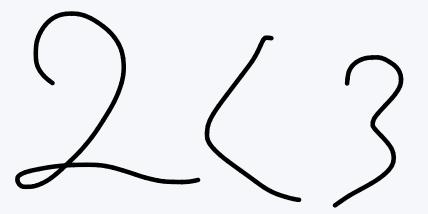


- 2를 찾아보자
- L = 0, R = 8, M = 4
- 2 < 7 이기 때문에 왼쪽 (L ~ M-1)에 4가 있을 수 있다.



- 2를 찾아보자
- L = 0, R = 3, M = 1
- 2 < 3 이기 때문에 왼쪽 (L~ M-1)에 2가 있을 수 있다.





- 2를 찾아보자
- L = 0, R = 0, M = 0
- 2 > 1 이기 때문에 오른쪽 (M+1~ R)에 2가 있을 수 있다.

1	3	4	5	7	8	9	20	30







Binary Search

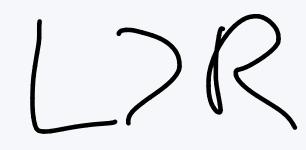
- 2를 찾아보자
- L = 1, R = 0, M = 0
- L < R 이기 때문에, 이분 탐색을 종료한다. 2는 리스트에 없다.

1 3 4 5 7 8 9 20 30









- 정렬되어 있는 리스트에서 어떤 값을 빠르게 찾는 알고리즘
- 리스트의 크기를 N 이라고 했을 때
- lgN의 시간이 걸린다.
- 시간 복잡도가 lgN인 이유는
- 크기가 N인 리스트를 계속해서 절반으로 나누기 때문이다.
- $2^k = N \supseteq W$, $k = \lg N$

```
while (left <= right) {</pre>
    int mid = (left + right) / 2;
    if (a[mid] == x) {
        position = mid;
        break;
    } else if (a[mid] > x) {
        right = mid-1;
    } else {
        left = mid+1;
```

```
=> left + (right-left) (2
```

숫자 카드

https://www.acmicpc.net/problem/10815

• 이분 탐색을 이용해 풀 수 있다.

숫자 카드

https://www.acmicpc.net/problem/10815

- C++ (이분 탐색 구현): https://gist.github.com/Baekjoon/bd0c441b31f85245a7ac
- C++ (STL): https://gist.github.com/Baekjoon/52f8f63c1863be93f7d1
- Java: https://gist.github.com/Baekjoon/5b2b2314e45b40116b88b25d4ed40c28

숫자 카드 2

https://www.acmicpc.net/problem/10816

• 이분 탐색을 이용해 풀 수 있다.

숫자카드 2

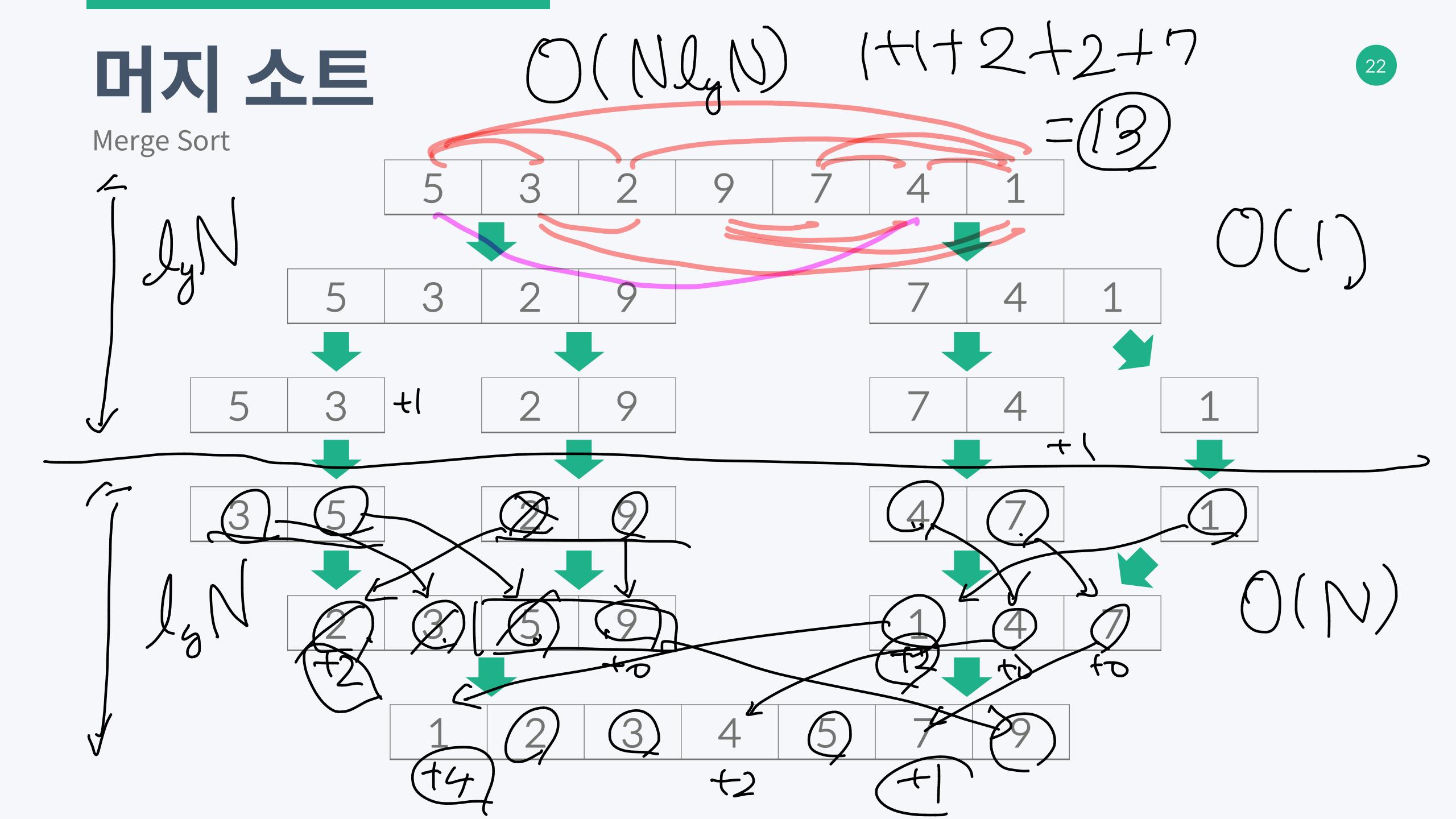
https://www.acmicpc.net/problem/10816

- C++ (equal_range): https://gist.github.com/Baekjoon/896c0b7c7bfb1c49bc08
- C++ (lower_bound, upper_bound): https://gist.github.com/Baekjoon/5d8e1fcdf1ed3f240201
- C++ (multiset 사용): https://gist.github.com/Baekjoon/98a2993e3d1258221f69

머지소트

Merge Sort

- N개를 정렬하는 알고리즘
- N개를 N/2, N/2개로 나눈다.
- 왼쪽 N/2와 오른쪽 N/2를 정렬한다.
- 두 정렬한 결과를 하나로 합친다.



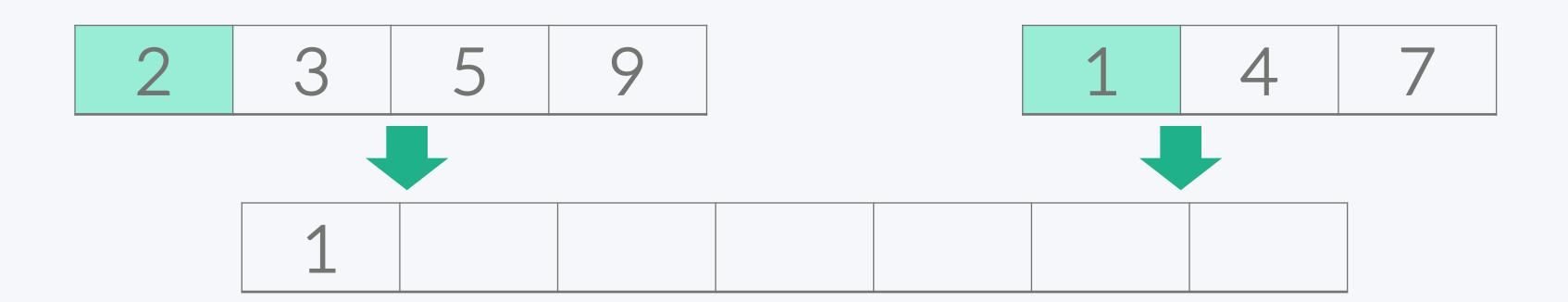
머지소트

Merge Sort

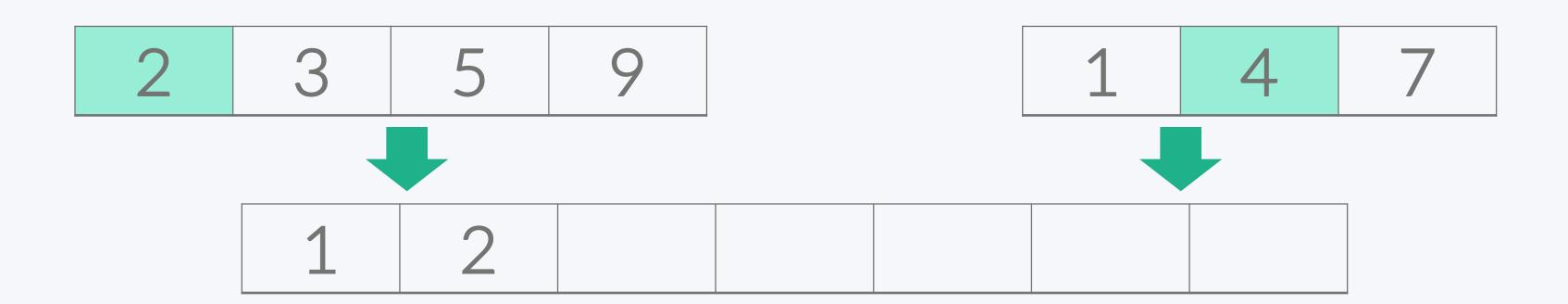
```
void sort(int start, int end) {
   if (start == end) {
       return;
    int mid = (start+end)/2;
   sort(start, mid);
   sort(mid+1, end); 73
   merge(start, end);
```

```
Merge Sort
void merge(int start, int end) {
    int mid = (start+end)/2;
    int(i) = start, (j) = mid+1, k = 0;
    while (i \le mid) && (j \le end) {
         if (a[i) <= (a[j)) b[k++] = a[i++];
        else b[k++] = a[j++]
    /while (i <= mid) b[k++] = a[i++];</pre>
    while (j <= end) b[k++] = a[j++];
    for (int i=start; i<=end; i++) {</pre>
        a[i] = b[i-start];
```

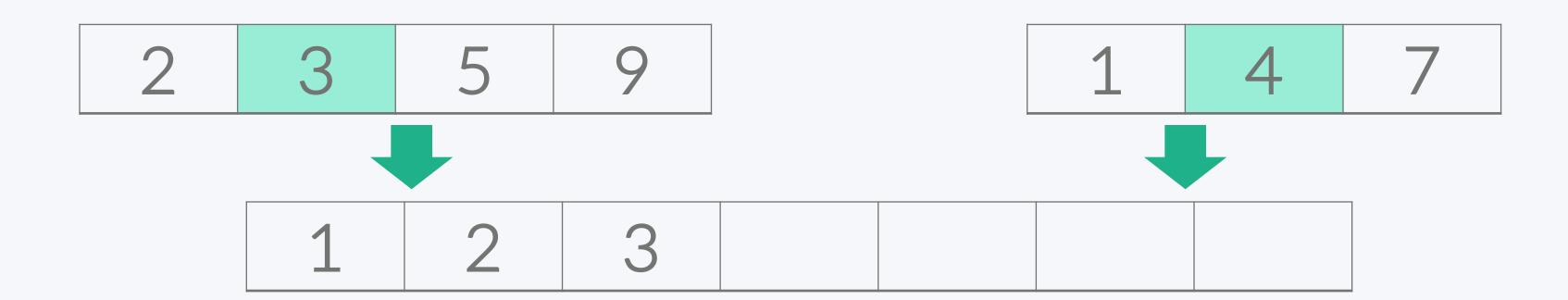
https://www.acmicpc.net/problem/11728



https://www.acmicpc.net/problem/11728



https://www.acmicpc.net/problem/11728



https://www.acmicpc.net/problem/11728



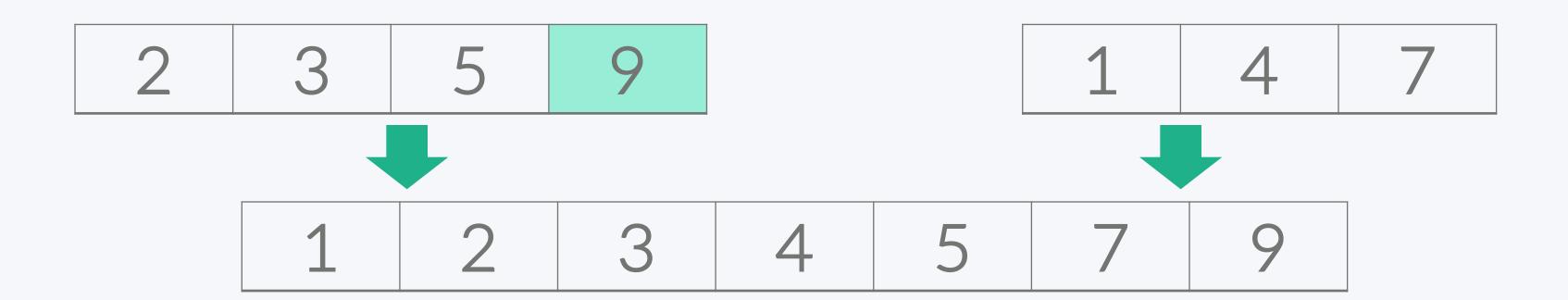
https://www.acmicpc.net/problem/11728



https://www.acmicpc.net/problem/11728



https://www.acmicpc.net/problem/11728



https://www.acmicpc.net/problem/11728

- C++: https://gist.github.com/Baekjoon/e95f28c61154f6cdc3c4
- C++: https://gist.github.com/Baekjoon/bb3b4c3b2a896cd76dcc
- Java: https://gist.github.com/Baekjoon/c949446ce64f03a4f8727203066f2331

当一分号

문제물기

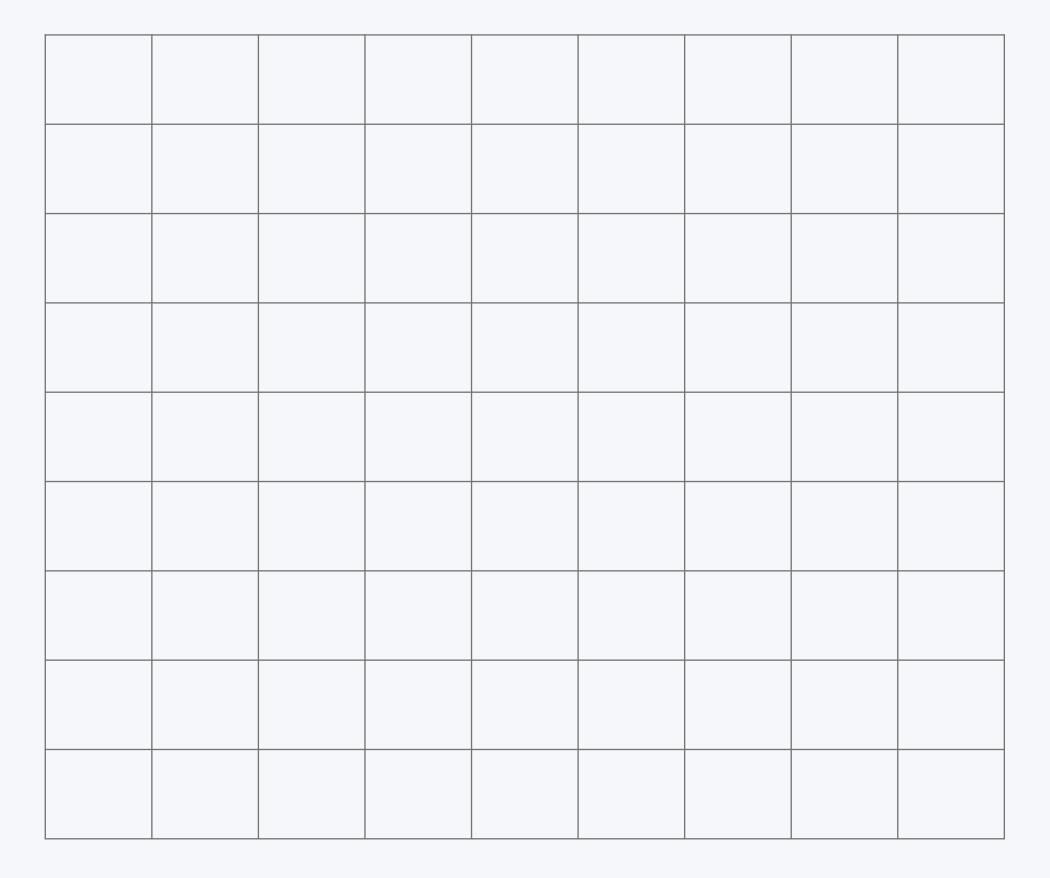
Divide & Conquer

- 분할 정복 문제는 어떻게 함수를 만들어야 할지 결정해야 한다.
- 함수 -> 문제를 푸는 함수
- 그 함수 내에서는 작은 문제를 어떻게 호출해야 할지 결정
- 만약에 부분 문제의 정답을 합쳐야 하는 경우에는 합치는 것을 어떻게 해야 할지 결정

종이의 개수

https://www.acmicpc.net/problem/1780

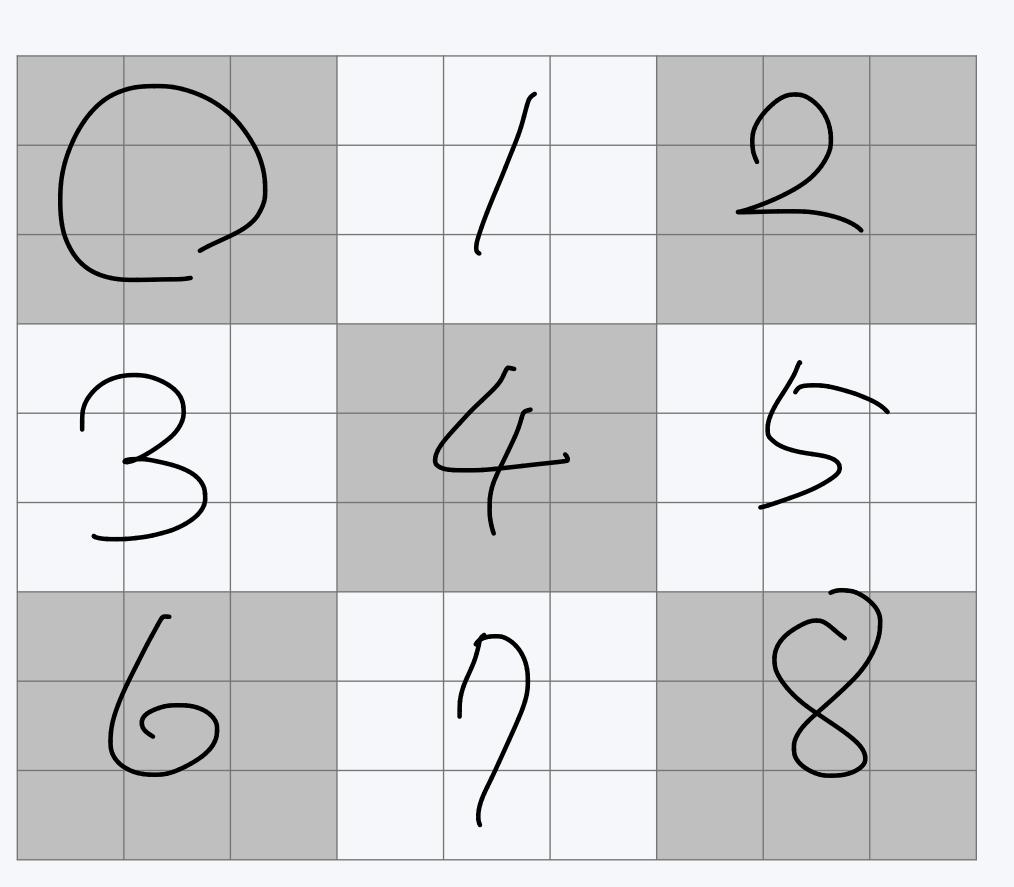
- solve(0, 0, n)
- (0, 0)부터 가로로 n개, 세로로 n개의 종이 개수를 확인하는 함수



종이의개수

https://www.acmicpc.net/problem/1780

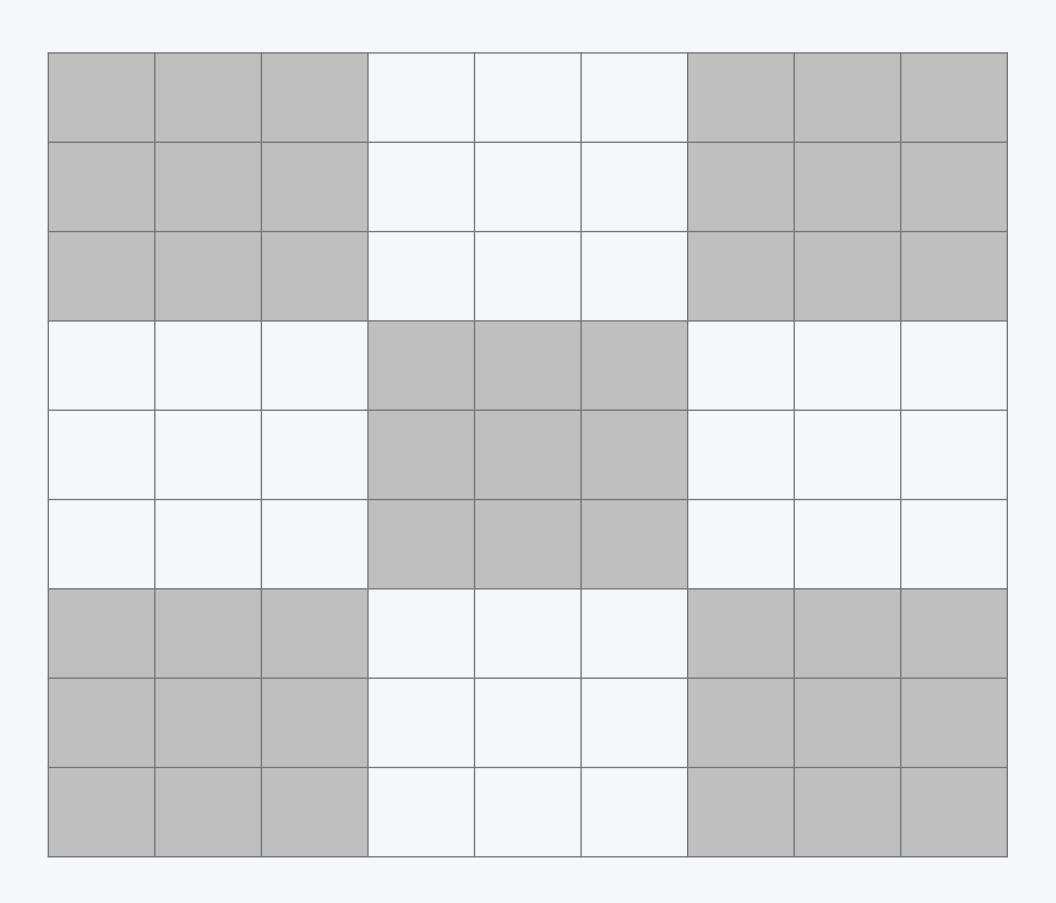
- solve(x, y, n)
- (x, y)부터 가로로 n개, 세로로 n개의 종이 개수를 확인하는 함수
- 작은 부분 문제는 총 9개
- m = n/3 이라고 했을 때
- 부분 문제를 나눠보면



- solve(x, y, n)
 - 0: solve(x, y, m)
 - 1: solve(x, y+m, m)
 - 2: solve(x, y+2*m, m)
 - 3: solve(x+m, y, m)
 - 4: solve(x+m, y+m, m)
 - 5: solve(x+m, y+2*m, m)
 - 6: solve(x+2*m, y, m)
 - 7: solve(x+2*m, y+m, m)
 - 8: solve(x+2*m, y+2*m, m)

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
3	3	3	4	4	4	5	5	5
3	3	3	4	4	4	5	5	5
3	3	3	4	4	4	5	5	5
6	6	6	7	7	7	8	8	8
6	6	6	7	7	7	8	8	8
6	6	6	7	7	7	8	8	8

- solve(x, y, n)
- (x, y)부터 가로로 n개, 세로로 n개의 종이 개수를 확인하는 함수
- 부분 문제를 호출하기 전에
- 같은 수로 되어 있는지를 확인해야 한다
- 그게 아니면 부분 문제를 호출

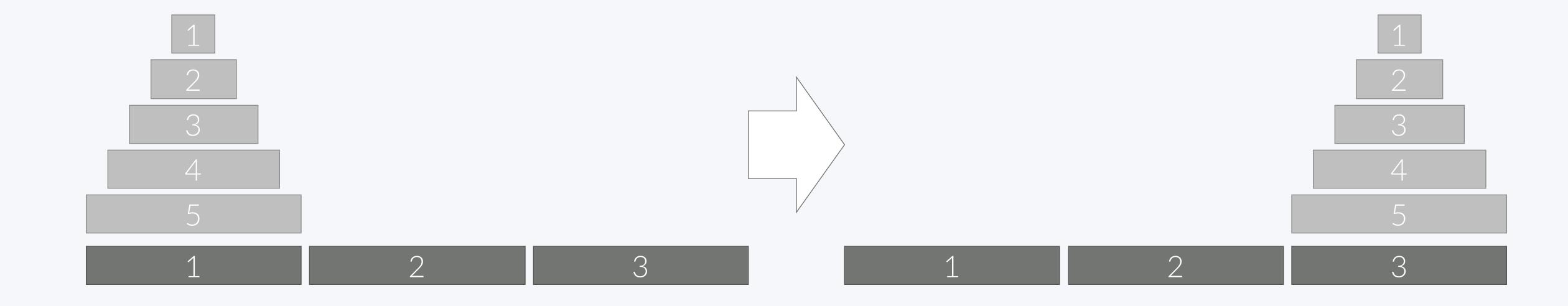


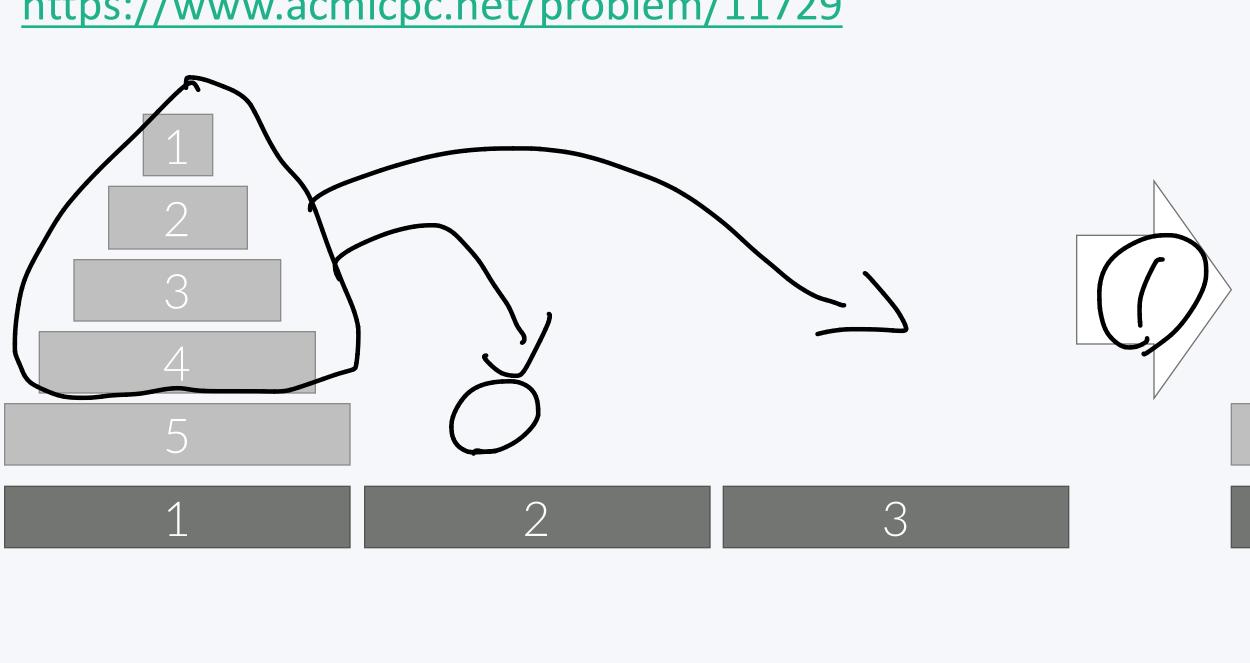
```
void solve(int x, int y, int n) {
    if (same(x, y, n)) {
        cnt[a[x][y]+1] += 1;
        return;
    int m = n/3;
    for (int i=0; i<3; i++) {
        for (int j=0; j<3; j++) {
            solve(x+i*m, y+j*m, m);
```

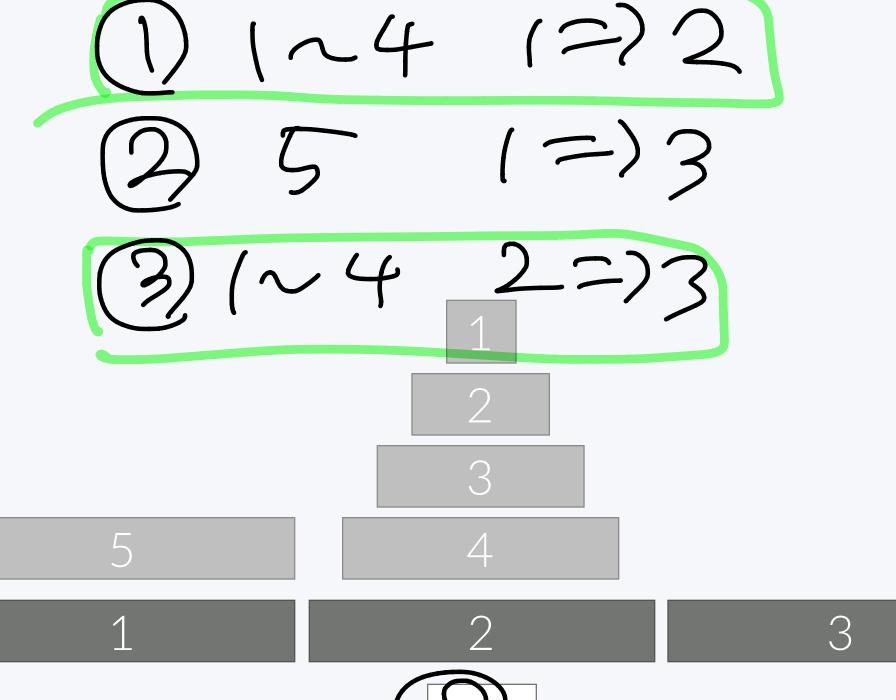
```
bool same(int x, int y, int n) {
    for (int i=x; i<x+n; i++) {</pre>
        for (int j=y; j<y+n; j++) {</pre>
             if (a[x][y] != a[i][j]) {
                 return false;
    return true;
```

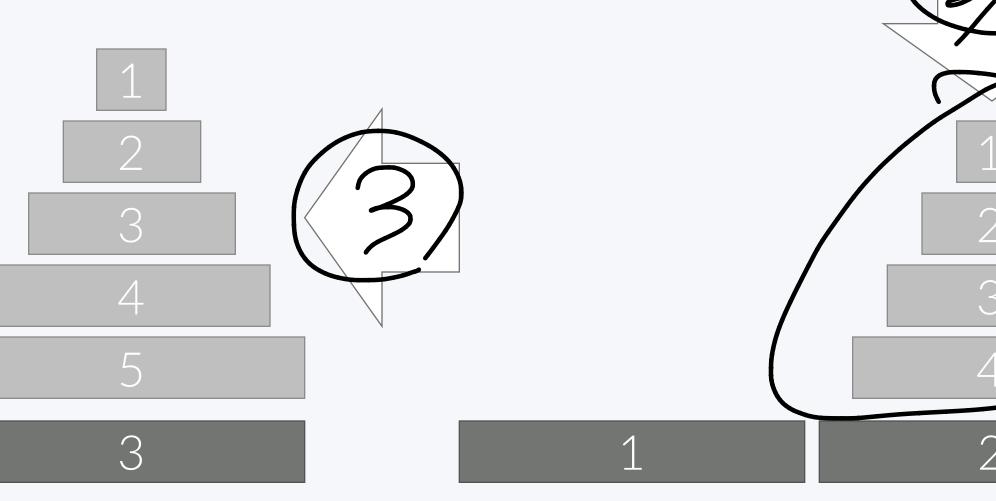
- C/C++: https://gist.github.com/Baekjoon/06950b687d63facf0e01
- Java: https://gist.github.com/Baekjoon/d699b334c05b743006867a4e54272c76

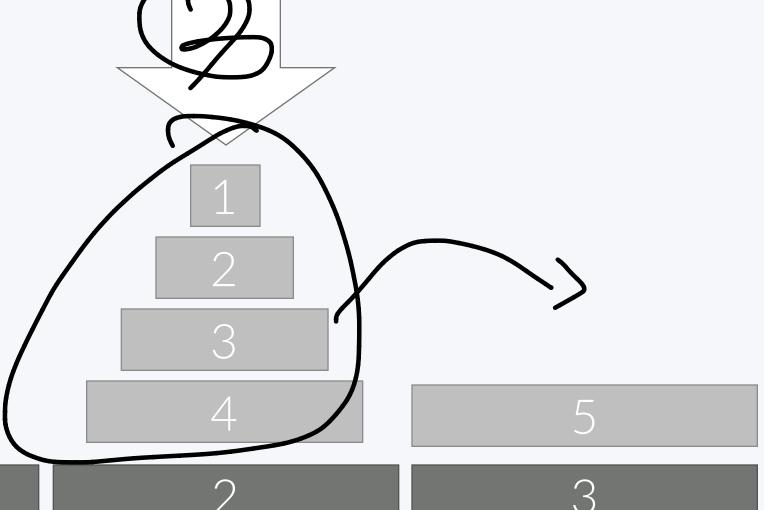
- 하노이 탑 문제
- 규칙 1: 한 번에 한 개의 원판만 다른 탑으로 옮길 수 있다
- 규칙 2: 쌓아 놓은 원판은 항상 위의 것이 아래의 것보다 작아야 한다 (중간 과정 포함)











https://www.acmicpc.net/problem/11729

- solve(n, x, y)
- 1~n개의 원판을 x에서 y로 이동하는 함수

Solve (M, X,y)

 $\sim \gamma$

(1) 1~1~1~2 Solve (n-1, x, 2)

メシメ

- 1~n-1개의 원판을 x에서 z로 이동한다. (<u>z는 x와 y가 아닌 원판</u>)
- n번 원판을 x에서 y로 이동한다.
- 1~n-1개의 원판을 z에서 y로 이동한다.

- (2) n= x=>y
- 3) [~N-1 =) 2=> 3 Solve(N-1, 2, y)

- solve(n, x, y)
- 1~n개의 원판을 x에서 y로 이동하는 함수

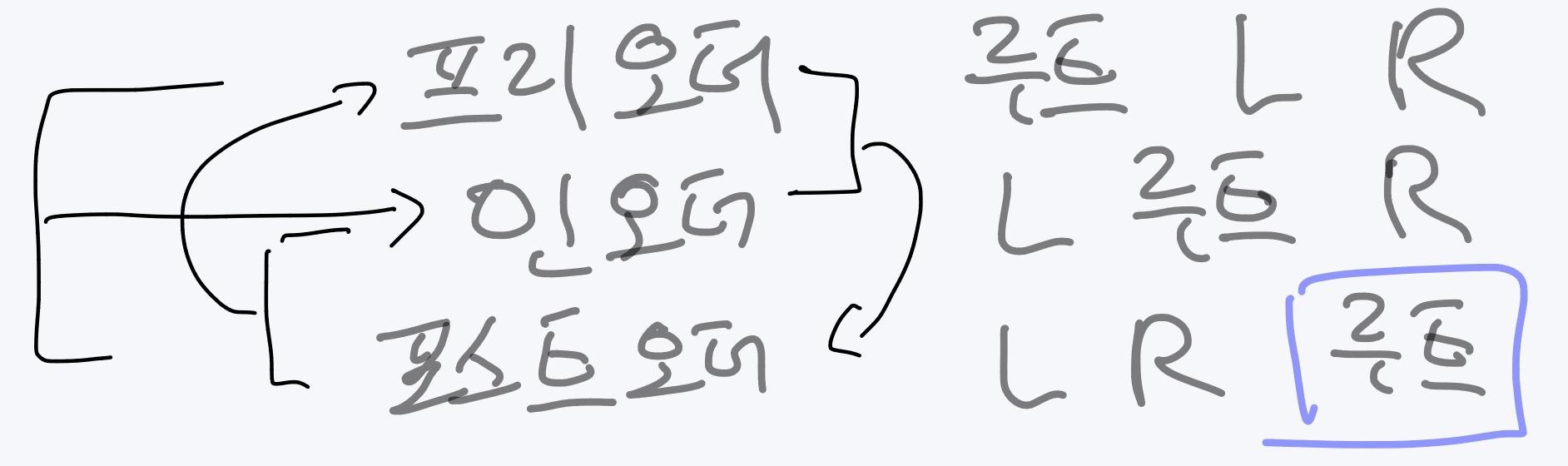
- 1~n-1개의 원판을 x에서 z로 이동한다. (z는 x와 y가 아닌 원판)
 - solve(n-1, x, z)
- n번 원판을 x에서 y로 이동한다.
- 1~n-1개의 원판을 z에서 y로 이동한다.
 - solve(n-1, z, y)

1~n X=) J

- 46

- C/C++: https://gist.github.com/Baekjoon/38c6cf2fe47d3f4055cf
- Java: https://gist.github.com/Baekjoon/2101ae21ba1429047c394b2026d723ba

- N개의 정점을 갖는 이진 트리의 정점에 1부터 N까지 번호가 중복없이 매겨져 있다
- 이 이진 트리의 인오더와 포스트오더가 주어졌을 때 프리오더를 구하는 문제



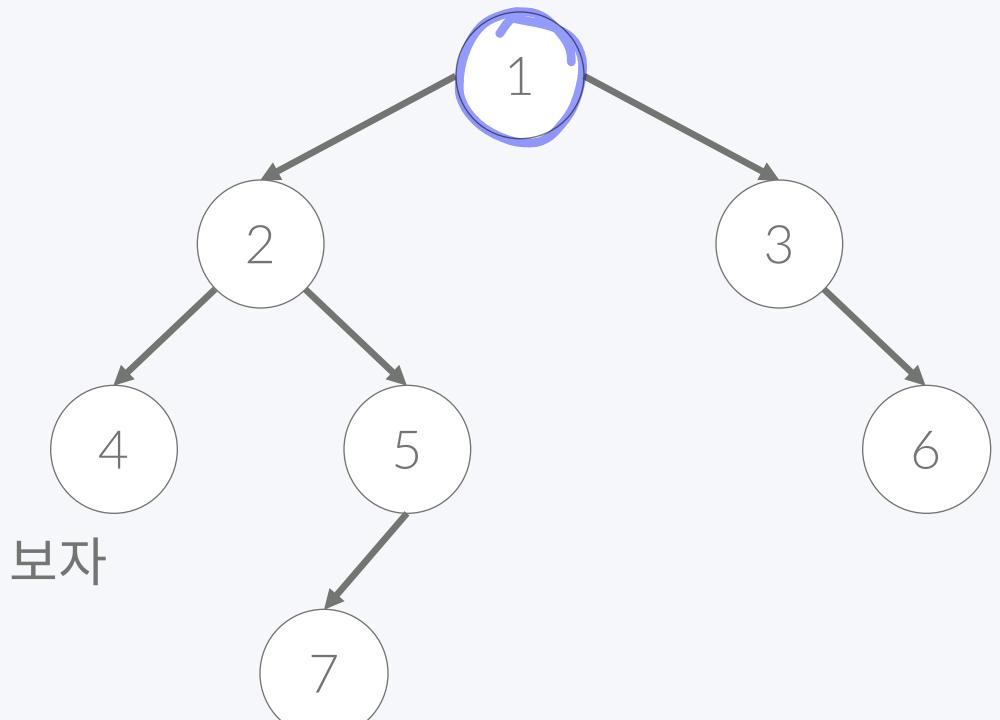
https://www.acmicpc.net/problem/2263

• 프리오더:1245736

• 인오더:4275136

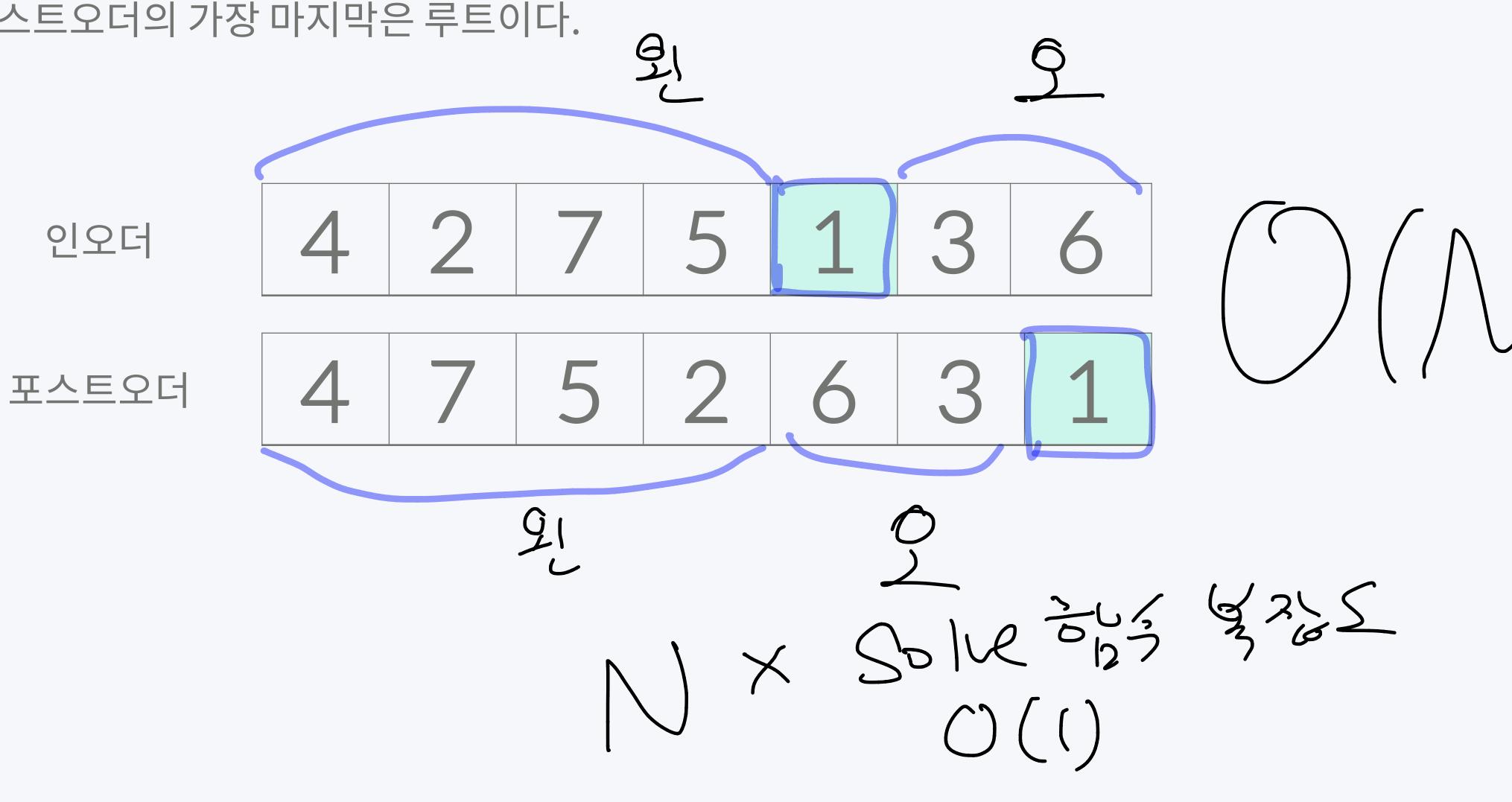
포스트오더: 4752631

• 인오더와 포스트오더를 가지고 프리오더를 만들어 보자



https://www.acmicpc.net/problem/2263

포스트오더의 가장 마지막은 루트이다.



https://www.acmicpc.net/problem/2263

• 포스트오더의 가장 마지막은 루트이다.

今2인오더

포스트오더

왼쪽

Solve (is, ie, Ps, pe)

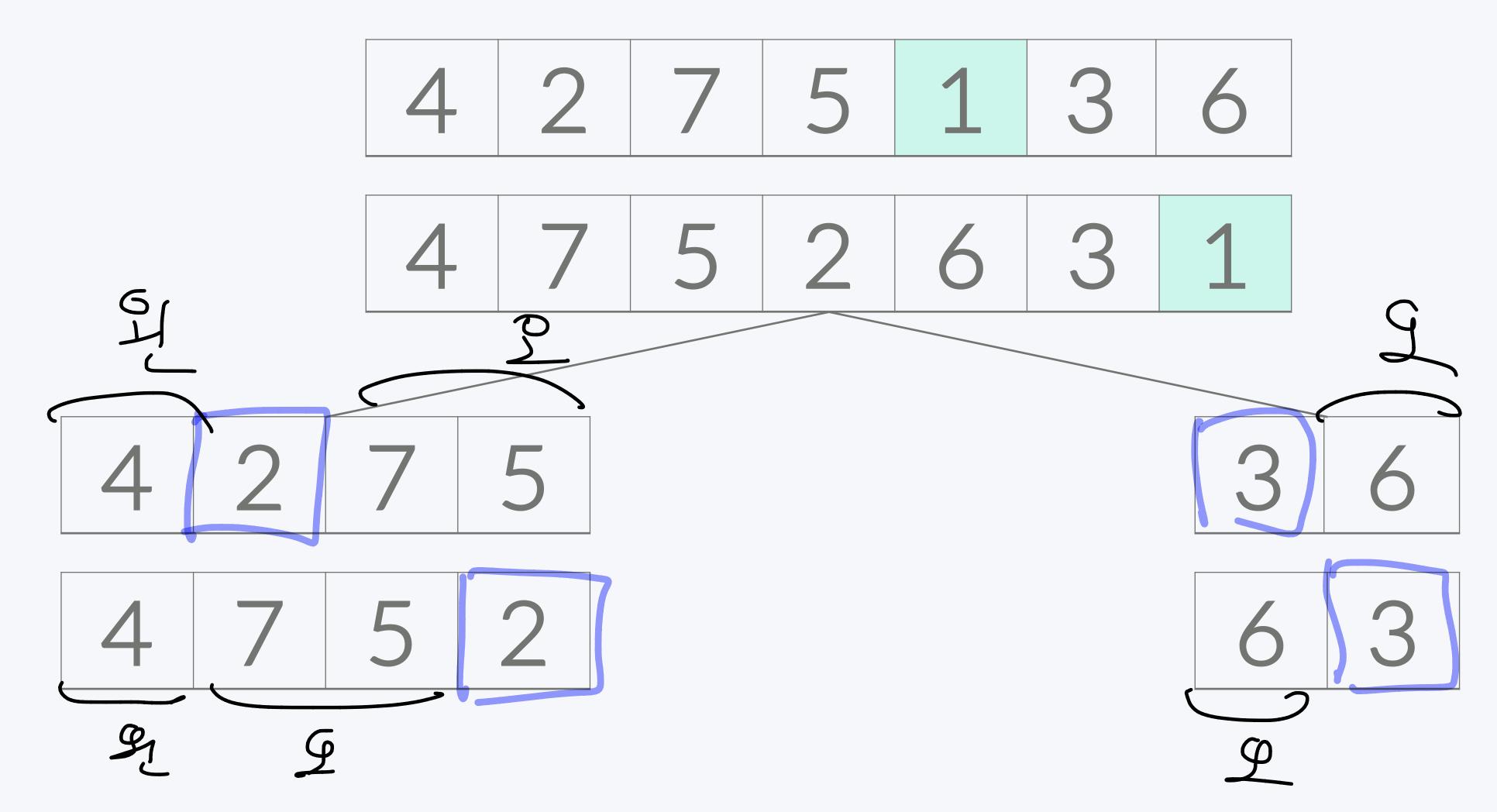
(1) voot= postorder[Pe]; O(1)

Solve (Trt1 왼쪽

Solve(is, iv-1, PS, pstl-1)

https://www.acmicpc.net/problem/2263

• 왼쪽과 오른쪽으로 나눠서 풀 수 있다.



https://www.acmicpc.net/problem/2263

• C/C++: https://gist.github.com/Baekjoon/8244aa7f00e2352cc78f462c4b9bbecc

쿼드트리

- 쿼드트리로 압축하여 출력하는 문제
- 분할 정복 + 프리오더
- 색종이 나누기와 비슷한 과정을 거치면 된다

쿼드트리

```
void solve(int x, int y, int n) {
    if (same(x,y,n)) {
        printf("%d",a[x][y]);
    } else {
        printf("(");
        int m = n/2;
        for (int i=0; i<2; i++) {
            for (int j=0; j<2; j++) {
                solve(x+m*i, y+m*j, m);
        printf(")");
```



https://www.acmicpc.net/problem/1992

• C/C++: https://gist.github.com/Baekjoon/0e2f73e53059d2b345ff

https://www.acmicpc.net/problem/2447

• 분할 정복으로 멋지게 별을 찍는 문제

https://www.acmicpc.net/problem/2447

• 가운데는 빈칸이고, 나머지 3칸은 다시 재귀적인 구조를 가지게 된다.

재		귀		재	
	빈	칸	빈		
귀	칸	빈	칸	귀	
	빈	칸	빈		
재		귀		재	

https://www.acmicpc.net/problem/2447

• C/C++: https://gist.github.com/Baekjoon/7267452f6a927560e57b

60

별찍기 - 11

https://www.acmicpc.net/problem/2448

• 분할 정복으로 멋지게 별을 찍는 문제

https://www.acmicpc.net/problem/2448

• 별찍기 – 10과 비슷하지만, 삼각형으로 계산하는 문제

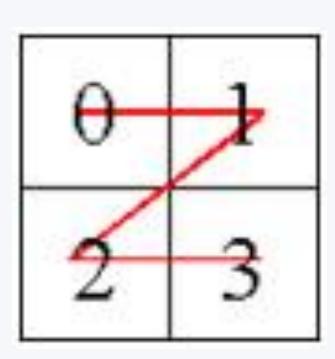
https://www.acmicpc.net/problem/2448

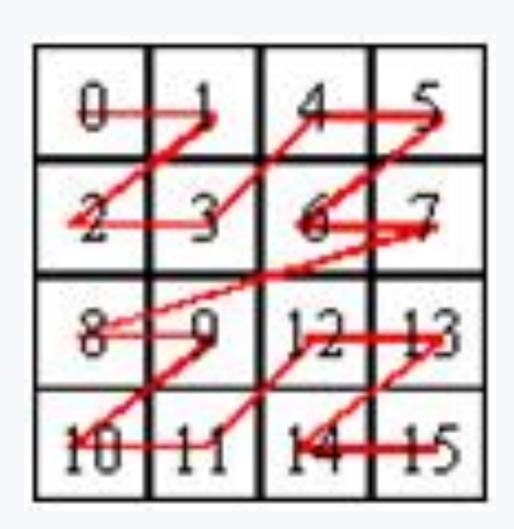
• C/C++: https://gist.github.com/Baekjoon/be9211f28bbd492fa09a

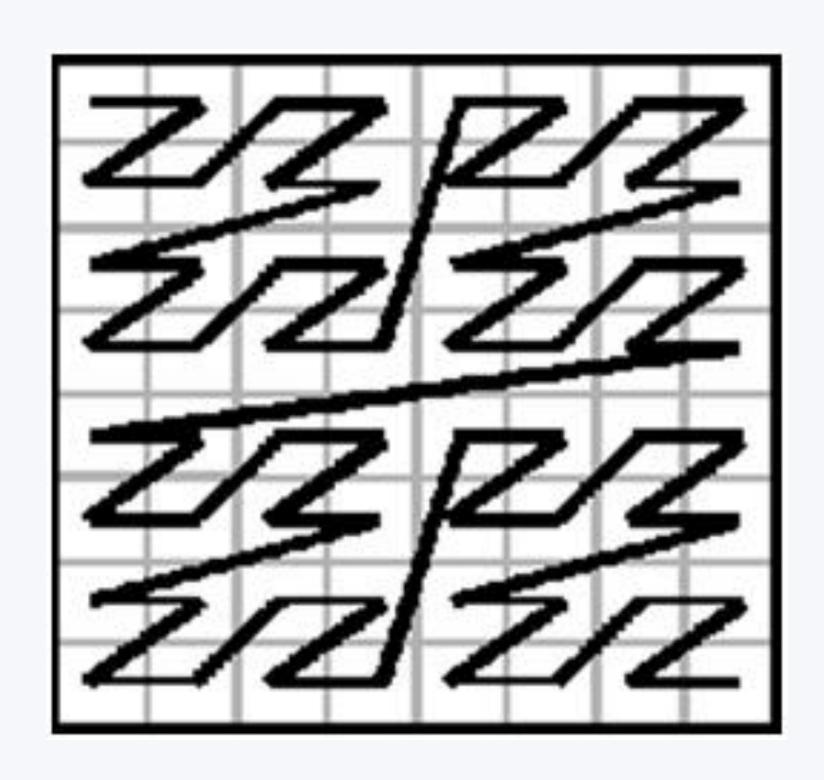
Z

https://www.acmicpc.net/problem/1074

만약, 2차원 배열의 크기가 2^N * 2^N라서 왼쪽 위에 있는 칸이 하나가 아니라면, 배열을 4등분한 후에 (크기가 같은 2^(N-1)로) 재귀적으로 순서대로 방문한다.







Z

https://www.acmicpc.net/problem/1074

• 분할 정복을 이용해서 현재 칸이 4등분 했을 때, 어디에 속하는지 알아보고 분할 정복을 이용한다.

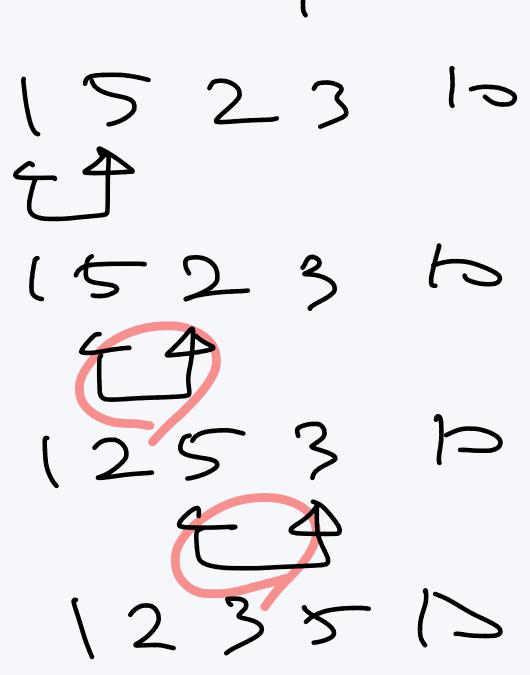
Z

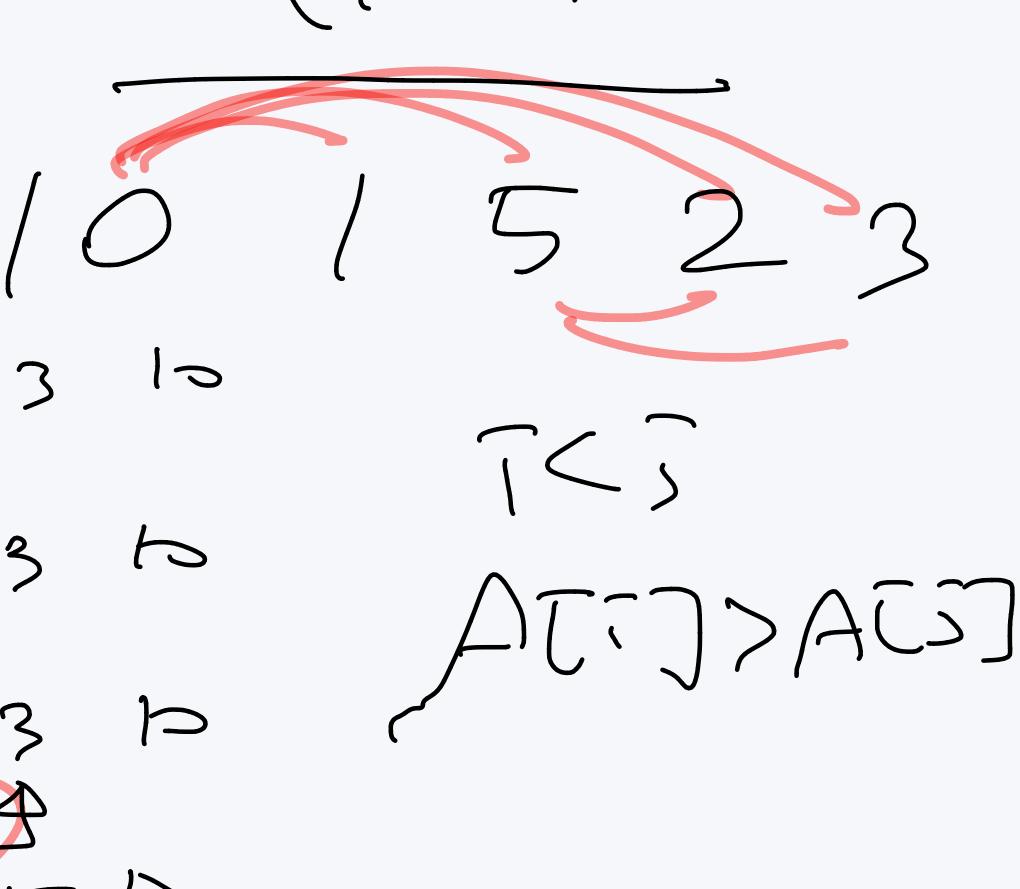
https://www.acmicpc.net/problem/1074

• C/C++: https://gist.github.com/Baekjoon/cc617ea564eb1328913d

15/25

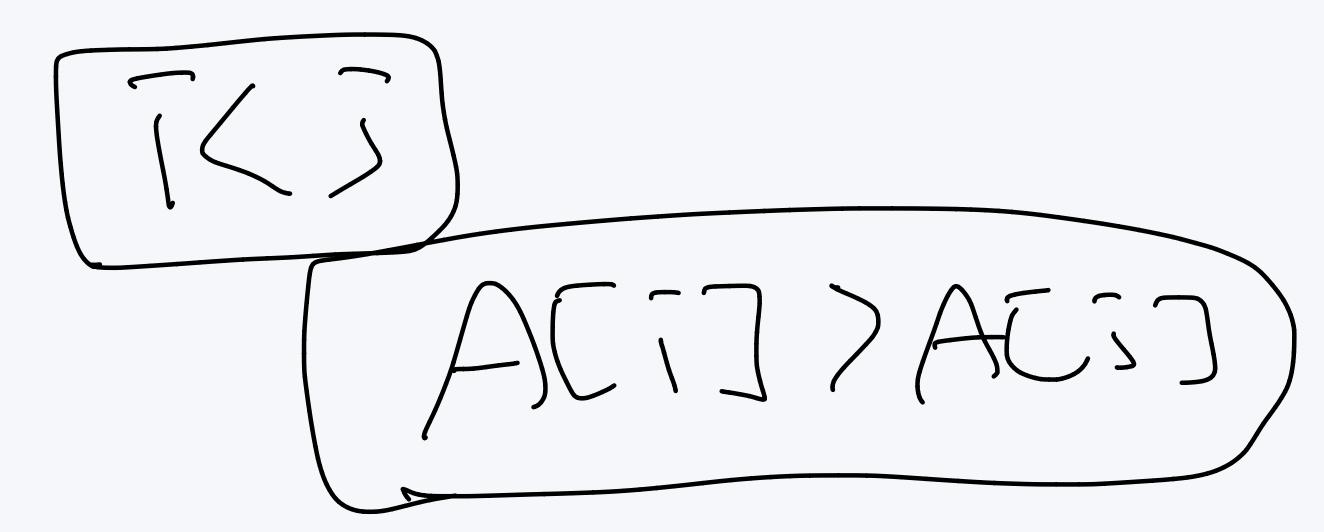
- N개로 이루어진 수열 A[1], A[2], …, A[N]이 있을 때
- Swap이 총 몇 번 발생하는지 알아내는 문제
- $321 \rightarrow 231 \rightarrow 213 \rightarrow 123 (3 \forall)$





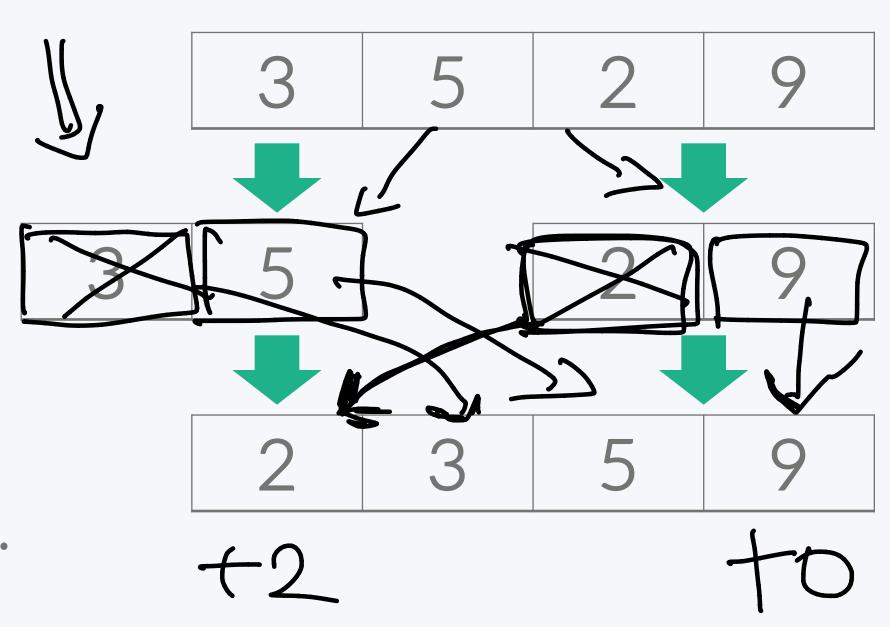
()

- 이 문제는 수열에서 inversion의 개수를 세는 문제이다.
- inversion: A[i] > A[j] (i < j)
- 머지 소트를 하면서 문제를 풀 수 있다.

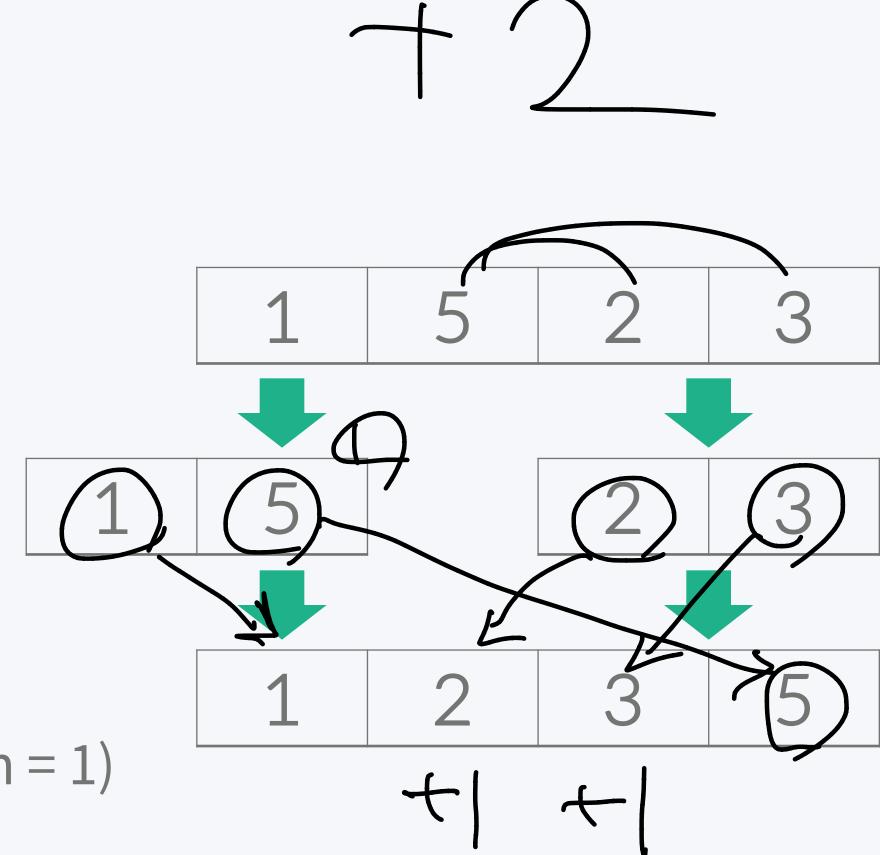


- 3529의 inversion의 개수는
- 3 > 2, 5 > 2로 2개다.
- 오른쪽절반이 이동할 때
- 왼쪽 절반에서 아직 이동하지 않은 것의 개수가
- 그 때의 inversion의 개수이다.
- 2가 먼저 이동하는데, 그 때 왼쪽 절반에는 3과 5가 있다.
- 이것은 3 > 2, 5 > 2를 의미한다.





- 1523의 inversion의 개수는
- 5 > 2, 5 > 3로 2개다.
- 오른쪽절반이 이동할 때
- 왼쪽 절반에서 아직 이동하지 않은 것의 개수가
- 그 때의 inversion의 개수이다.
- 2가 이동할 때, 왼쪽 절반에는 5가 남아있다. (inversion = 1)
- 3이 이동할 때도 왼쪽 절반에는 5가 남아있다. (inversion = 1)



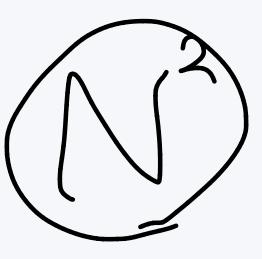
```
long long solve(int start, int end) {
    if (start == end) {
        return 0;
    int mid = (start+end)/2;
    long long ans = solve(start, mid) + solve(mid+1, end);
    int i = start;
    int j = mid+1;
   int k = 0;
```

```
while (i <= mid(| // j <= end) {
     if (i <= mid && (j > end || a[i] <= a[j])) {</pre>
         b[k++] = a[i++];
     } else {
         ans += (long long)(mid-i+1);
         b[k++] = a[j++];
 for (int i=start; i<=end; i++) {</pre>
     a[i] = b[i-start];
 return ans;
```

- C/C++: https://gist.github.com/Baekjoon/5e99ccde4b05b760d7d8
- Java: https://gist.github.com/Baekjoon/bfe783fdd0e7a8973735762e05e4d51c

가장 가까운 두 점

- 2차원 평면 위의 N개의 점 중에서 가장 가까운 두 점을 찾는 문제
- $2 \le N \le 100,000$



가장 가까운 두 점

https://www.acmicpc.net/problem/2261

• 먼저 점을 x좌표가 증가하는 순서로 정렬한다. 22 23

9 10 12 13 14 16 17 18 19 20 21

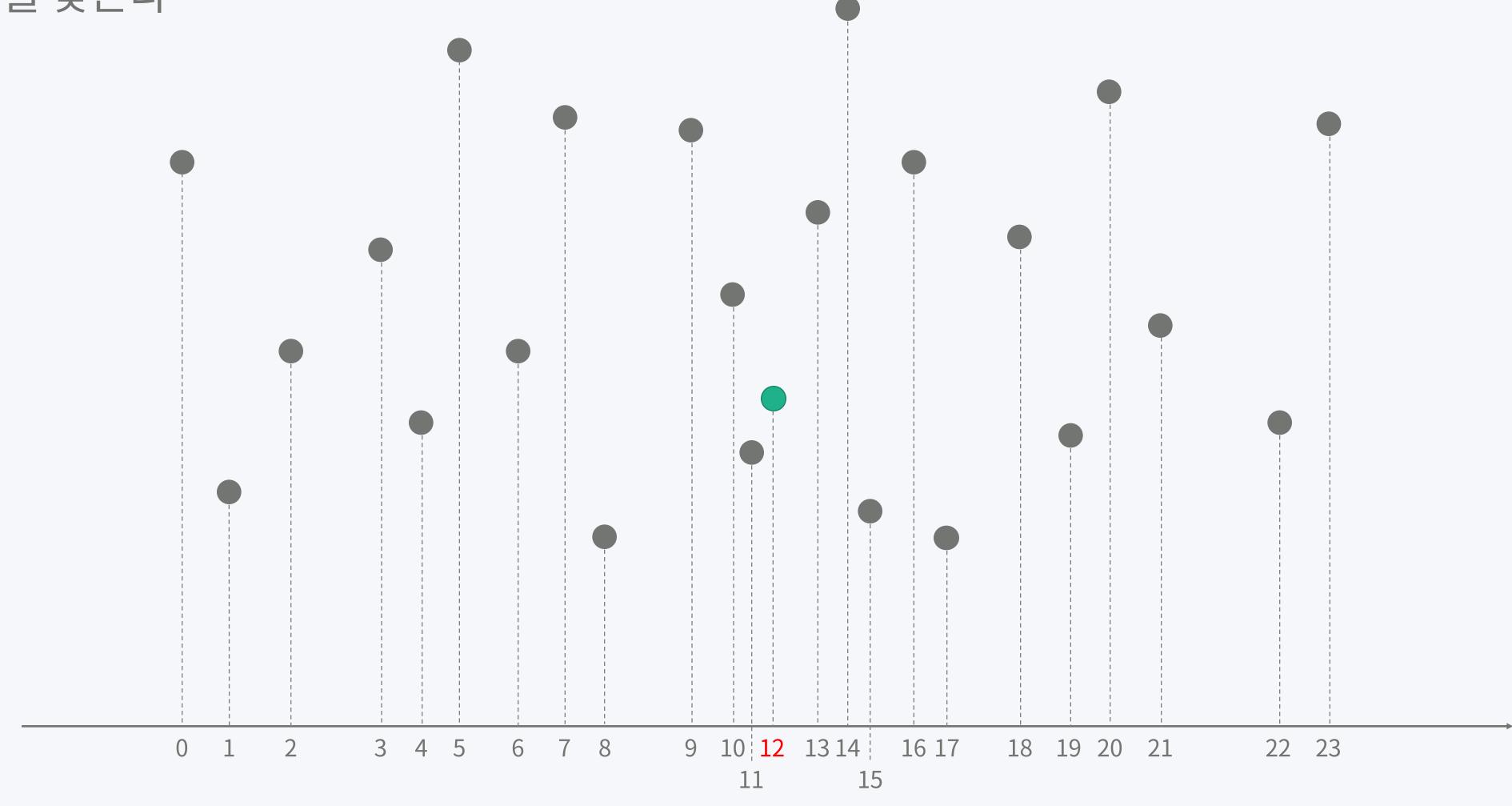
15

3 4 5 6 7 8

가장가까운두점

https://www.acmicpc.net/problem/2261

• 중간에 있는 점을 찾는다



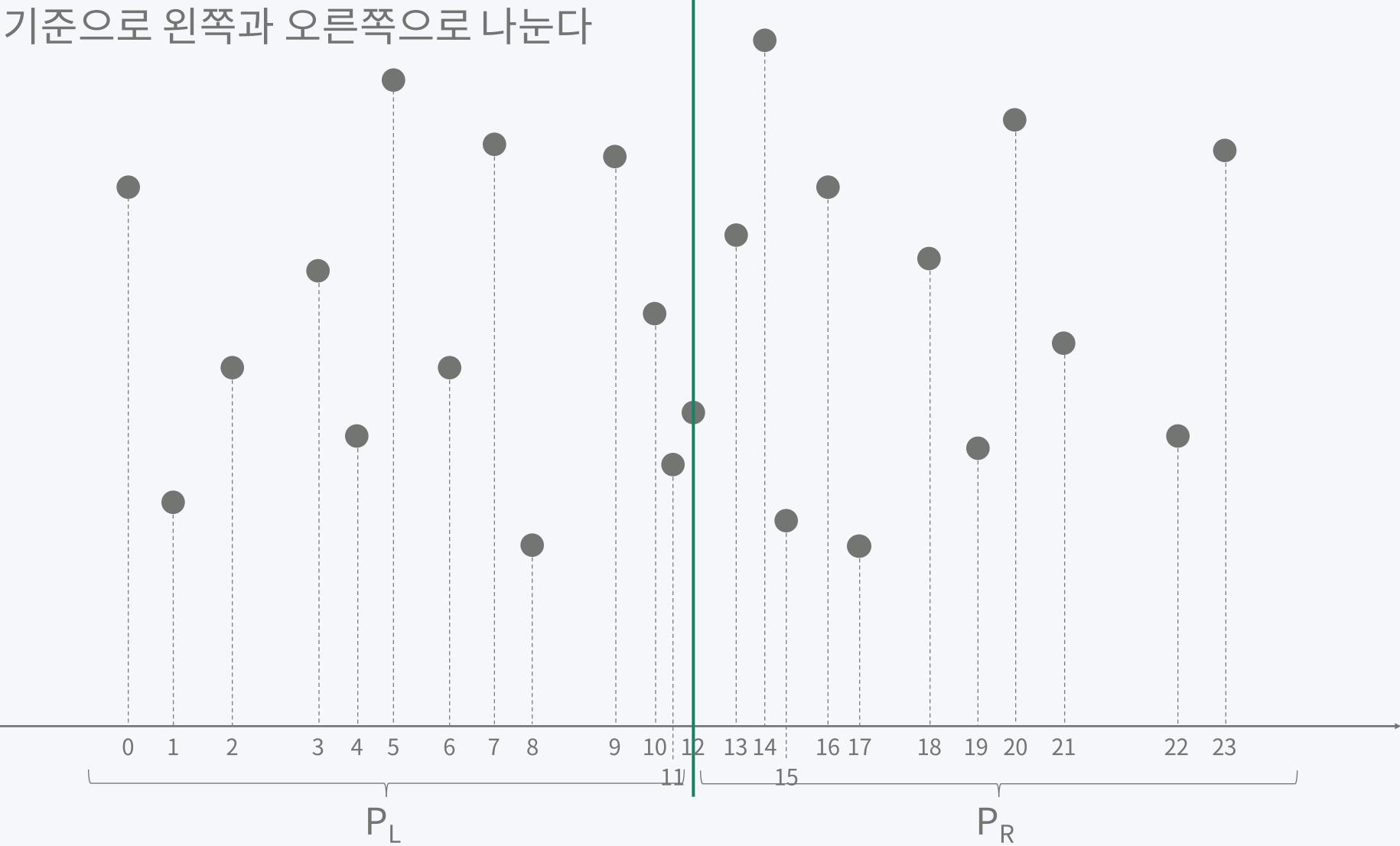
가장가까운두점

https://www.acmicpc.net/problem/2261

• 중간에 있는 점을 기준으로 왼쪽과 오른쪽으로 나눈다

• 왼쪽: P_I

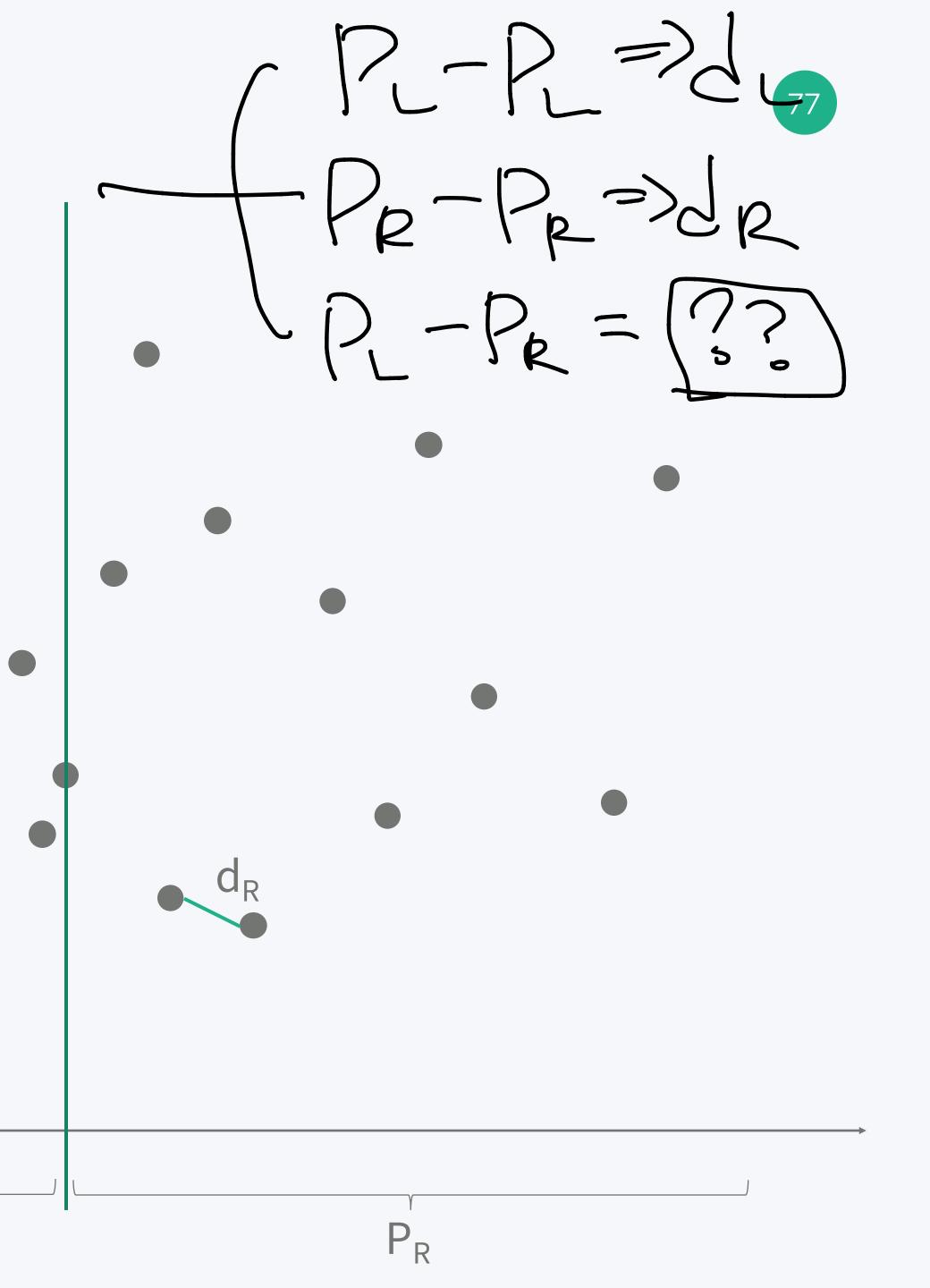
• 오른쪽: P_R



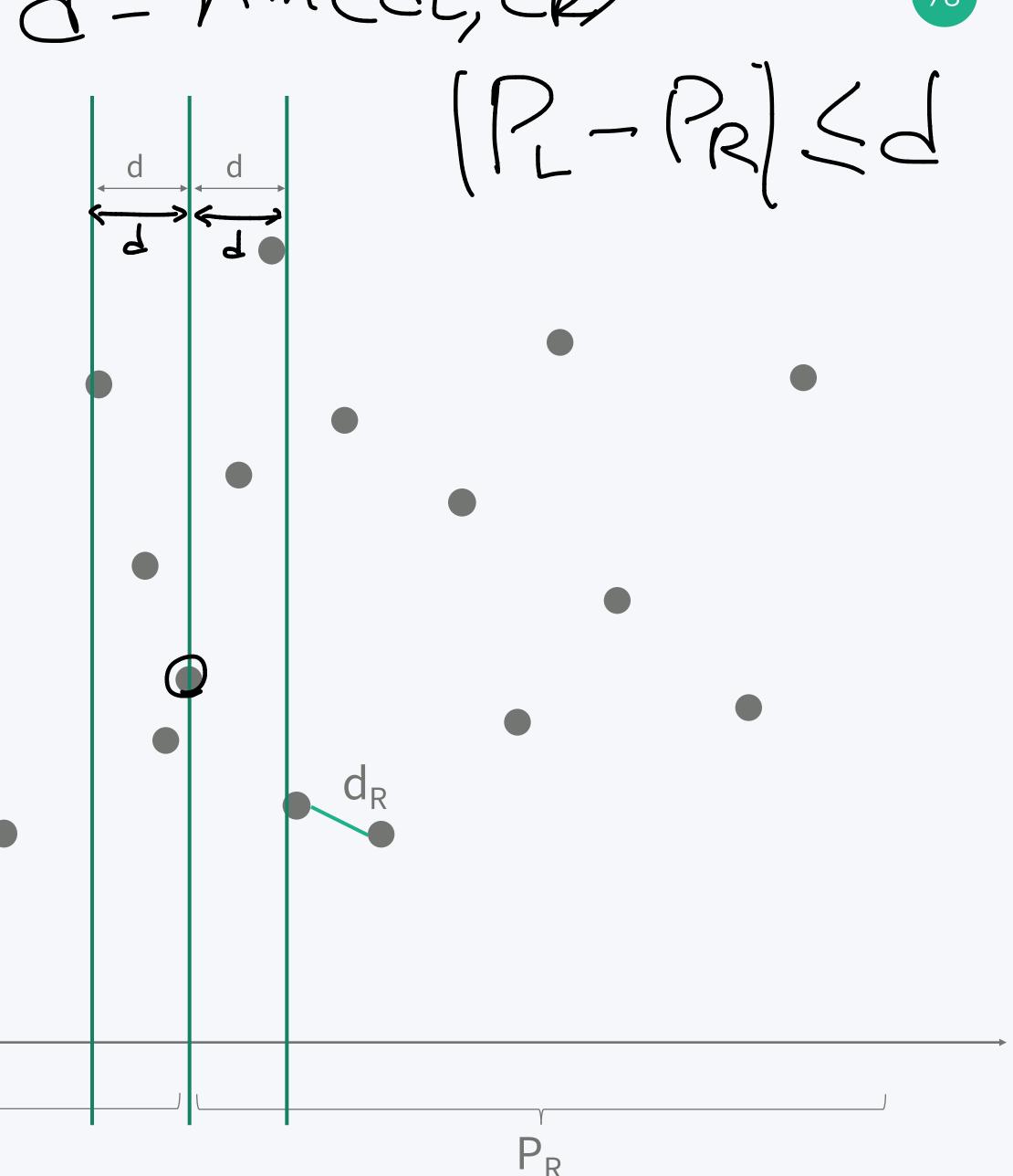
가장 가까운 두 점

- PL에서 가장 가까운 두 점을 찾고
- P_R 에서 가장 가까운 두 점을 찾는다

- PL에서 가장 가까운 두 점 d_L
- PR에서 가장 가까운 두 점 d_R



- $d = min(d_L, d_R)$
- 이라고 했을 때
- 가운데 점으로부터
- 가운데로부터 -d, +d 만큼
- 떨어진 곳에서
- 가장 가까운 두 점을
- 찾아야 한다



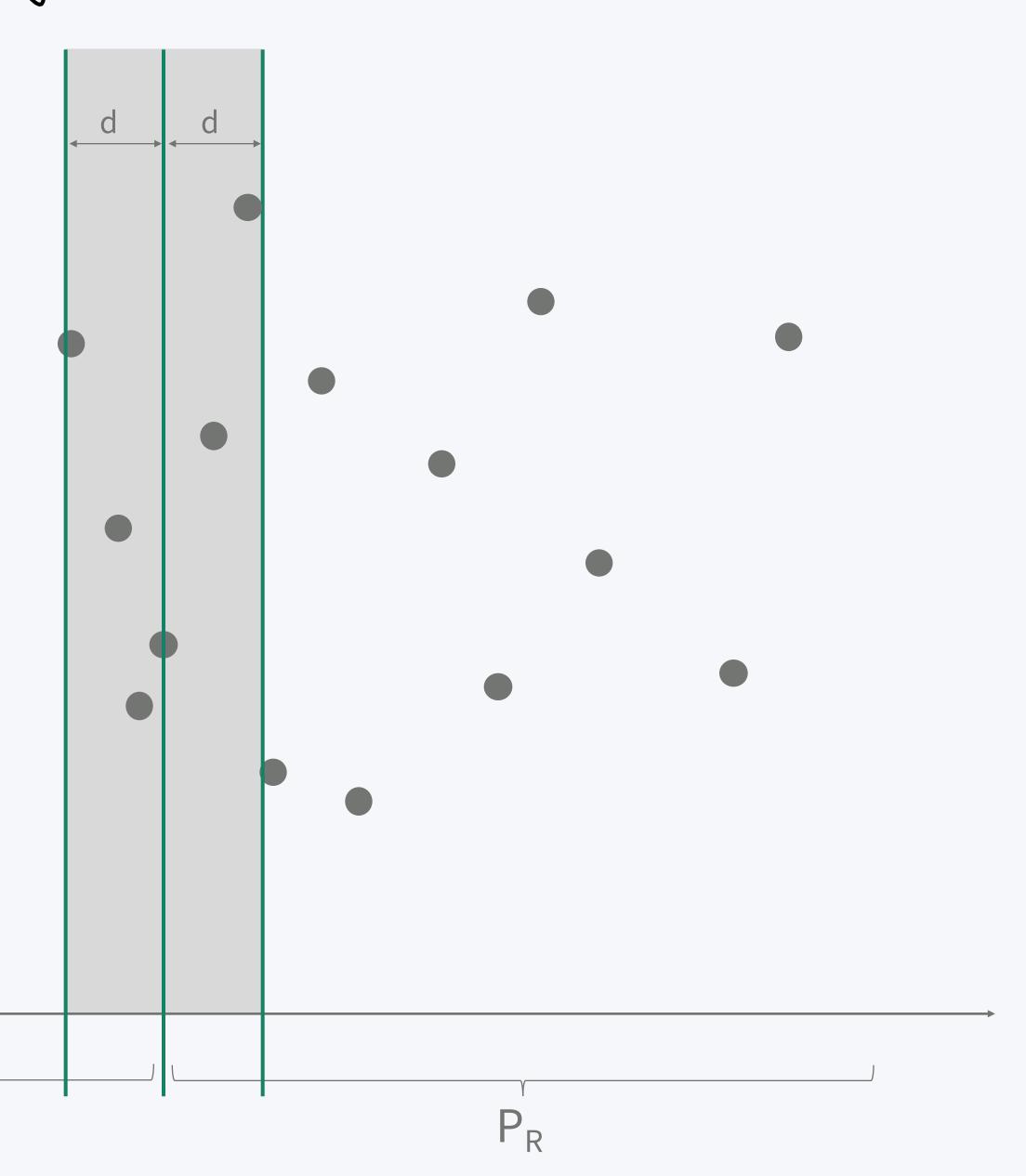
가장가까운두점

433

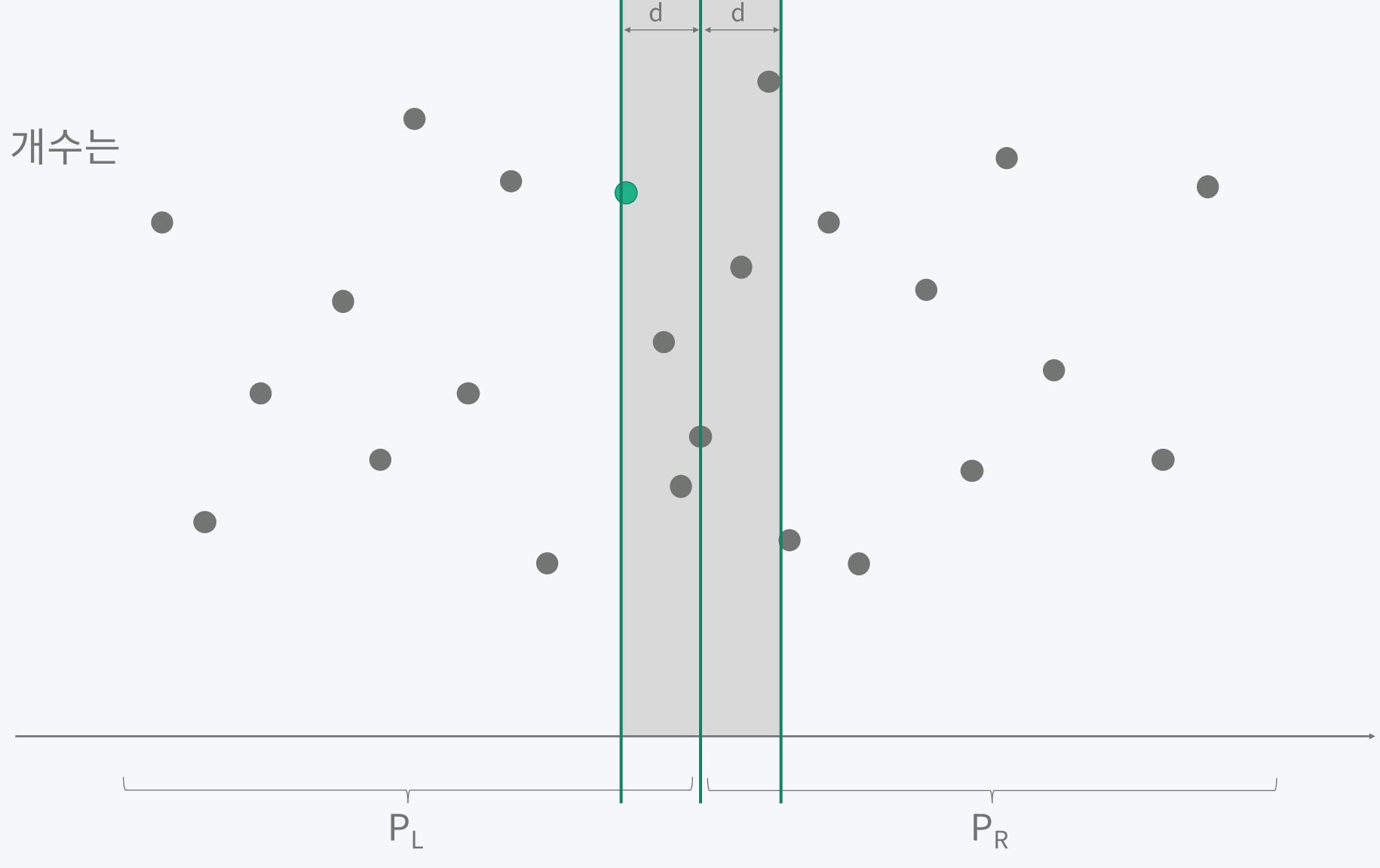
중가



- 이라고 했을 때
- 가운데 점으로부터
- 가운데로부터 -d, +d 만큼
- 떨어진 곳에서
- 가장 가까운 두 점을
- 찾아야 한다

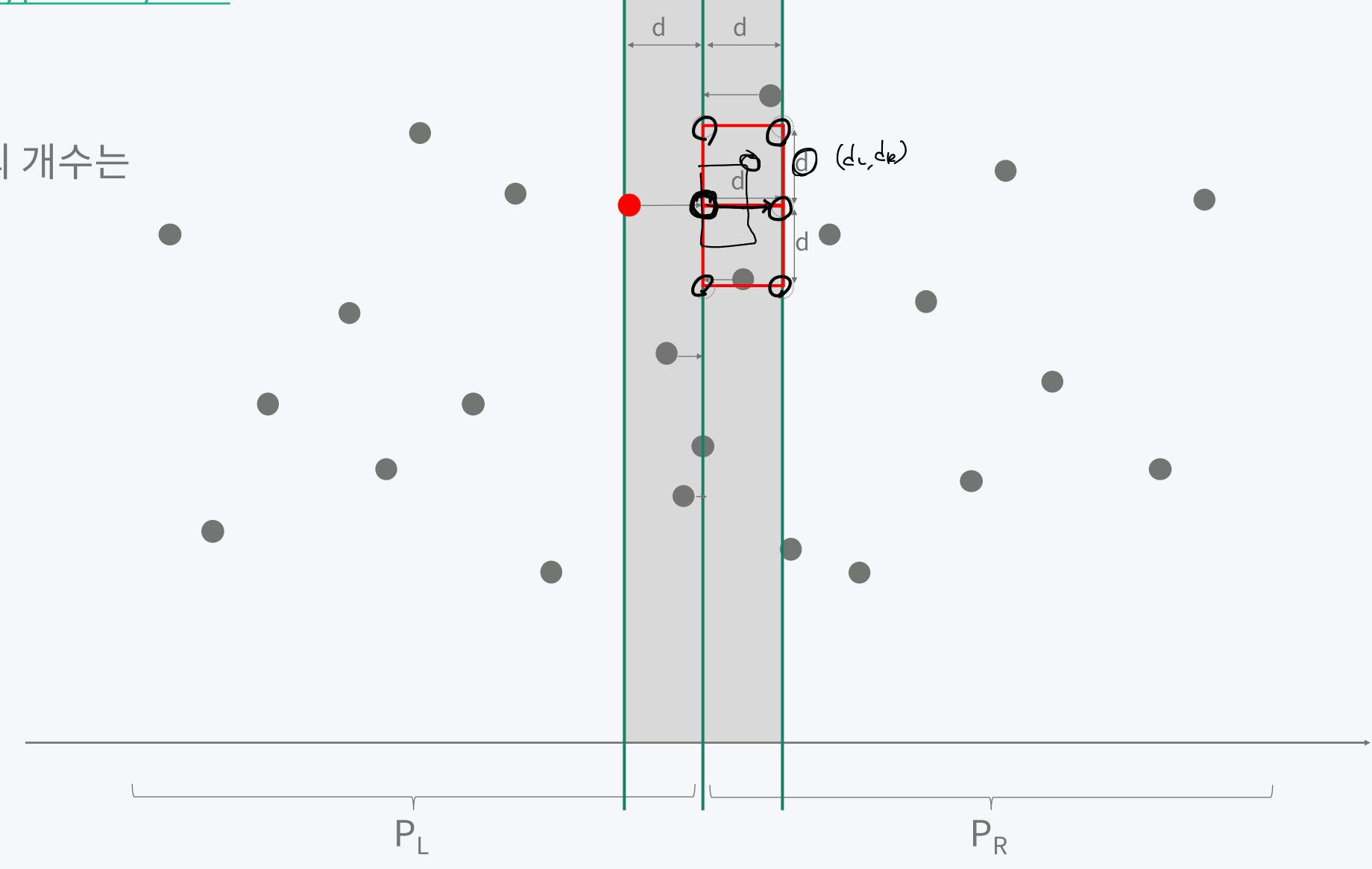


- 한점당
- 살펴봐야 하는 점의 개수는
- 6개이다.



가장 가까운 두 점

- 한점당
- 살펴봐야 하는 점의 개수는
- 6개이다.



가장 가까운 두 점

https://www.acmicpc.net/problem/2261

C++: https://gist.github.com/Baekjoon/4d240e06d2ec28fc8b78

(N) = Jy