

## NM&SA 與 GA&PSO 演算法比較

613k0007c 余品誼

報告使用 NM、SA 優化問題，需包含實驗結果、分析及討論，需包含所使用的參數、準確性、實驗結果的一致性(和 GA 比較)等。

目標：

1. 優化單峰問題(Shere function)
2. 優化雙峰問題(Schwefel function)

名詞解釋：

### 1. NM(Nelder-Mead)：

Nelder-Mead 演算法是一種基於單純形 (Simplex) 的數值優化方法，適用於無約束連續變數的目標函數最小化

單純形 (Simplex)：

由  $n+1$  個頂點構成的幾何形狀，用於探索目標函數的最優解。

目標函數 (Objective Function)：

最小化多維連續函數  $f(x)$ ，可處理不可微函數。

頂點排序 (Vertex Ordering)：

根據函數值排序單純形頂點：最佳 (Best)、次佳 (Second Best)、最差 (Worst)。

幾何操作 (Geometric Operations)：

透過反射、擴展、收縮與縮小操作更新單純形位置，尋找更優解。

停止條件 (Stopping Criteria)：

當單純形或函數值變化小於容忍度，或達到最大迭代次數時停止。

特點：

- 全局搜索能力：可跳出局部最優，實現全局搜索。
- 接受壞解：以概率接受較差解，增加探索範圍。
- 參數依賴：性能取決於初始溫度、冷卻速率等設置。
- 適用性廣：適合非線性、多模態或無導數的複雜優化問題。
- 優點：簡單靈活，適合高維搜索。
- 缺點：收斂速度慢，參數調整敏感。

### 2. SA(Simulated Annealing)：

是一種全局優化演算法，模擬金屬加熱後再緩慢冷卻的物理過程，用於

解決複雜的多峰優化問題。

退火法透過隨機搜索，初期接受次優解來跳出局部最優，隨著溫度逐漸降低，搜索範圍縮小，解最終收斂到全局最優。

流程：

- 隨機初始化一個解，設置初始溫度。
- 在鄰域內隨機生成新解。
- 若新解更優則接受；若更差，則以概率接受（取決於溫度）。
- 溫度逐步降低，直至達到終止條件。

特點：

- 可以跳出局部最優，適合多峰函數和離散組合問題。
- 參數設置（初始溫度、降溫速率）影響結果，收斂速度較慢。

退火法常用於函數優化、路徑規劃（如旅行商問題）和機器學習中的參數調整。

實驗結果：

**Sphere function :**

**SA :**

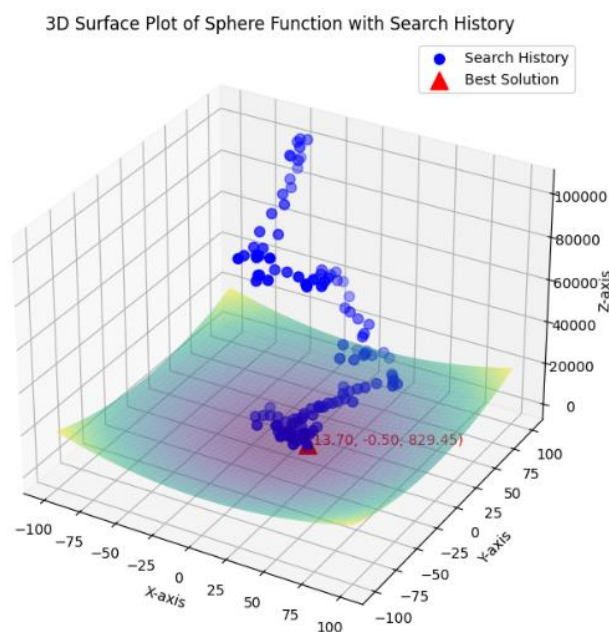
D=30

最佳解：

[ 13.70099363, -0.50195524, -2.6547329, 4.56614342, -2.37104345,  
0.15592354, -3.74422483, 1.74531187, 6.78973412, -4.51823405, -  
3.44935406, -0.88462505, -0.28426165, -7.86277745, -7.23794456, -  
4.31186565, 1.73451325, 4.38668945, 6.69059382, 2.29133391,  
-8.98566318, -1.37333959, -5.06374996, 4.68053108, -6.0770963,  
2.53622879, -1.98020113, 3.8853818, -3.88266679, 9.9444674 ]

最佳值: 829.4490384111164

最佳解中每個變數的範圍：最小值 = -8.985663182868507, 最大值 =  
13.700993633776372



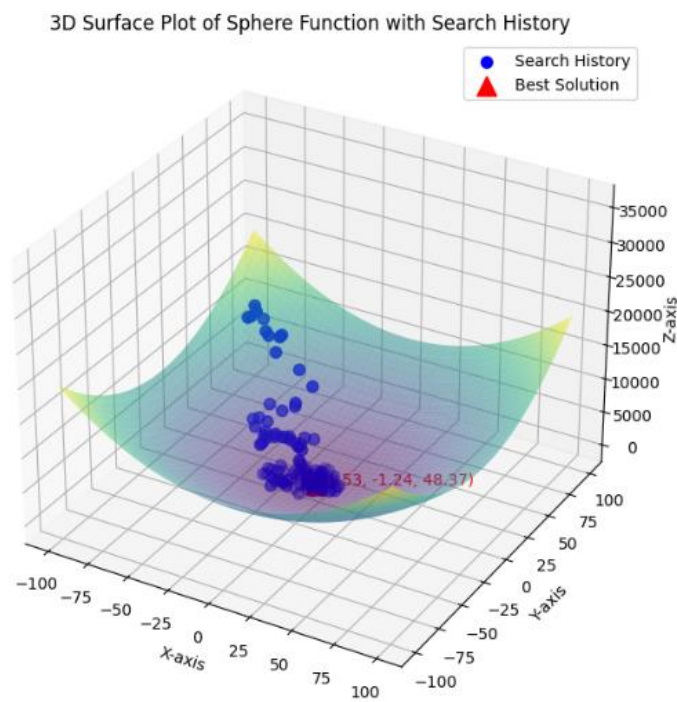
D = 10

最佳解:

[-1.53152953 -1.24105592 0.83514488 2.85809527 0.84320843  
1.03429994 2.76043326 1.78411712 -3.37538794 -3.41141869]

最佳值 : 48.36684185572521

最佳解中每個變數的範圍：最小值 = -3.411418689301593, 最大值 =  
2.858095271417789



**Nm :**

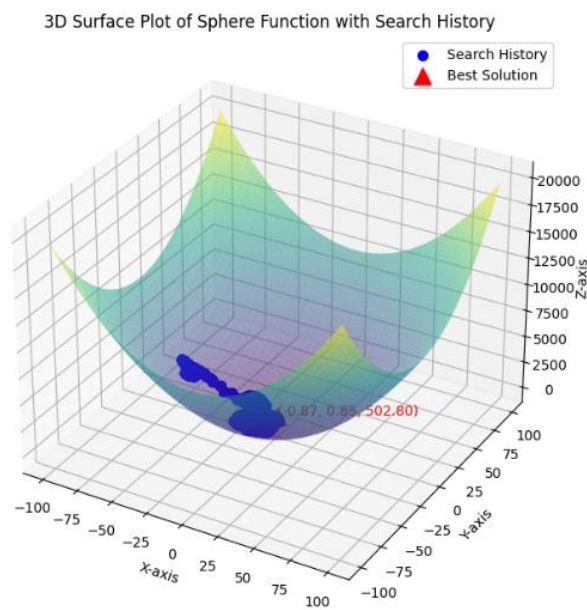
**D=30**

最佳解：

[-0.8744, 0.8529, -2.5564, -3.2893, -1.3643, 0.0598, 0.2223,  
4.2596, 1.2644, -2.5154, 0.5801, -0.1912, -1.4434, -2.4526,  
1.2615, 0.1576, 20.4957, 0.3607, -2.7478, -0.1059, -0.0448,  
0.5554, -3.4409, 0.2526, 0.9137, -0.6114, 2.0249, 0.5002,  
0.2386, 0.5333]

最佳值: 502.79706453834626

最佳解中每個變數的範圍：最小值 = -3.4408896838236425, 最大值 =  
20.495665950731066



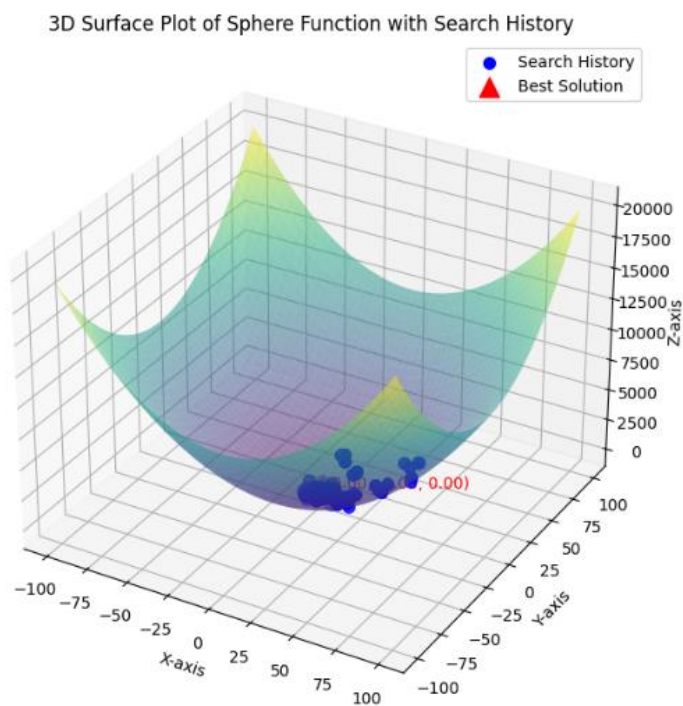
D=10

最佳解:

$[-2.97344785e-16 \ -4.34381271e-16 \ 2.16552894e-16 \ 1.70518053e-16$   
 $9.26761360e-17 \ -1.39022278e-16 \ 2.77963365e-16 \ -1.21811738e-16$   
 $-1.99339911e-16 \ 2.68186356e-16]$

最佳值:  $5.847506848189272e-31$

最佳解中每個變數的範圍：最小值 =  $-4.3438127063750684e-16$ ，最大值  
=  $2.7796336463627e-16$



小節：在 Sphere function SA 比 NM 搜尋更廣泛(點分布較分散)，但是在低維度中，NM 尋找最佳值的效果比較好( $5.8 < 48$ )。

**Schwefel function :**

**SA :**

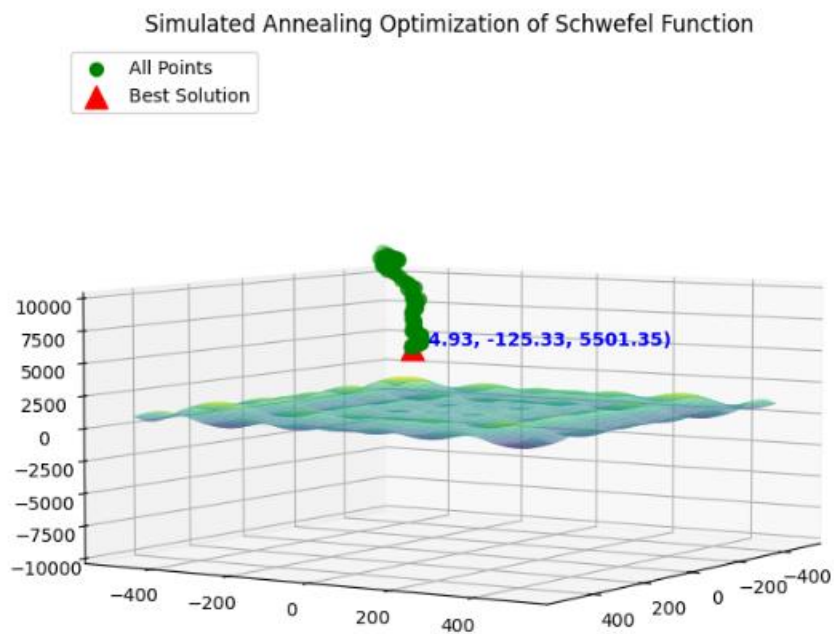
D=30

最佳解：

[ -4.9312, -125.3321, 447.2858, 187.6210, 225.3847,  
408.3825, -293.3268, 431.4573, 190.5813, 206.8192, -  
6.5894, 200.5410, 407.4202, 426.2107, -115.4464, -300.5161,  
-293.5155, -132.4990, 427.1415, 424.6449, -34.7521, -  
297.8109, -297.3986, 70.2440, 406.1661, 215.7108,  
203.3897, -291.9823, 414.5546, -21.8680 ]

最佳值 : 5501.352232188443

最佳解中每個變數的範圍：最小值 = -300.51614113594536, 最大值 =  
447.2857935011411



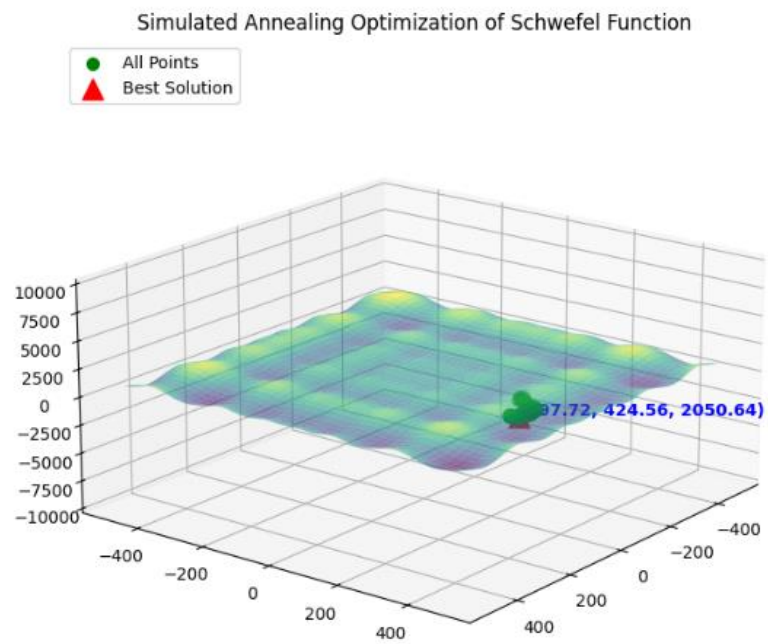
D=10

最佳解:

[ 197.7242, 424.5567, 7.2222, 419.9250, 206.4046, -500.0000, -  
295.5948, -302.3618, 4.7369, -127.2182 ]

最佳值: 2050.644495854305

最佳解中每個變數的範圍：最小值 = -500.0, 最大值 = 424.5567237902248





**NM :**

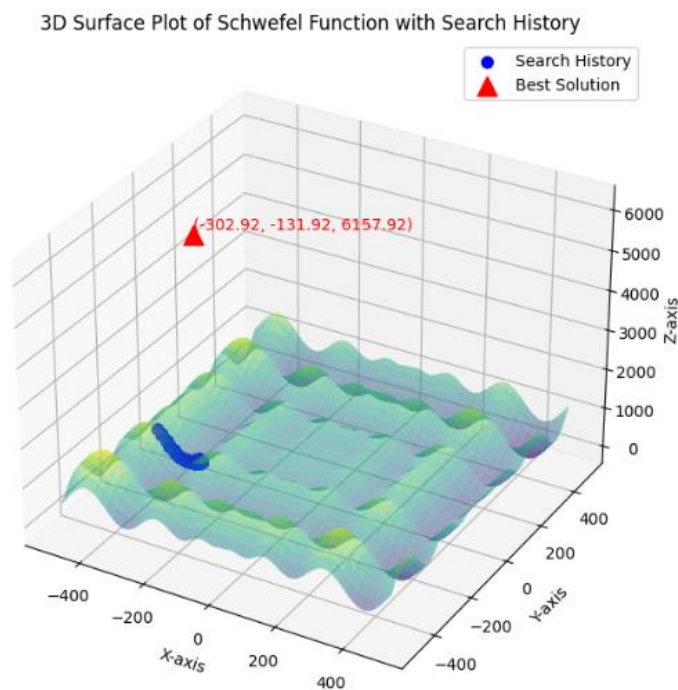
D=30

最佳解：

[-302.9160, -131.9200, 416.9752, -35.3044, -302.6883, 76.2290, -  
122.0398, -508.5513, -299.2867, -297.0127, 31.7209, -511.8307,  
416.9036, -306.4064, 187.5895, 200.8386, 419.1641, -295.1205, -  
298.2585, -549.3849, -116.0270, 422.4428, -310.8016, -102.7596, -  
122.6085, 75.6479, -114.1713, -133.6547, -514.5929, 427.0859]

最佳值 : 6157.920263123764

最佳解中每個變數的範圍：最小值 = -549.3849034217774, 最大值 =  
427.0858667508372



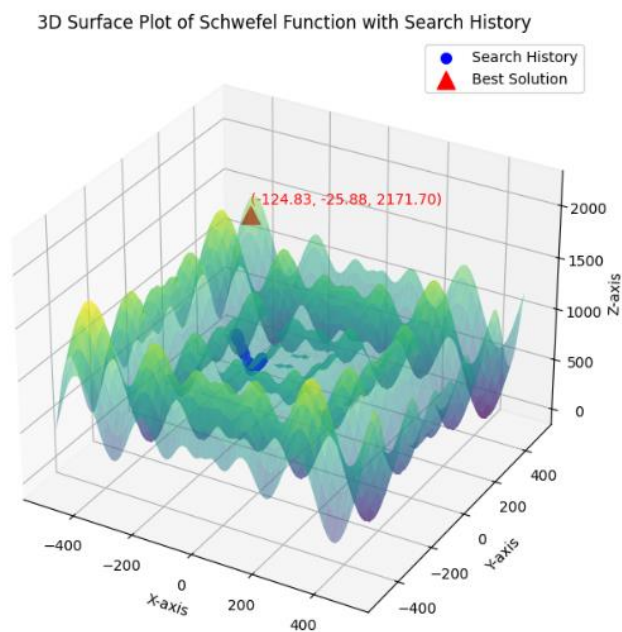
D=10

最佳解:

[-124.82935638 -25.8774173 203.81425301 420.96874709 -  
302.52493454 -302.52493572 -302.52493577 -302.52493527 -  
25.87741712 -25.8774182 ]

最佳值 : 2171.699630030601

最佳解中每個變數的範圍：最小值 = -302.5249357691522, 最大值 =  
420.96874708526207



小節：在 Schwefel function 中，在低維和高維中 SA 的全局最佳值的效果  
都比 NM 較好。

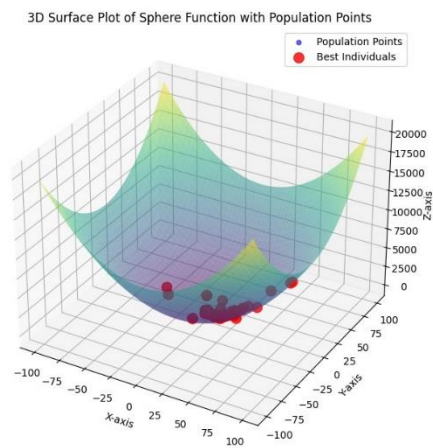
其他優化演算法：

GA：

Shere function：

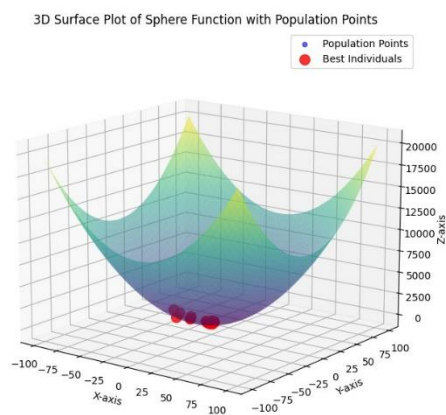
D = 30

最優適應度：0.000377321482851638841191782570



D = 10

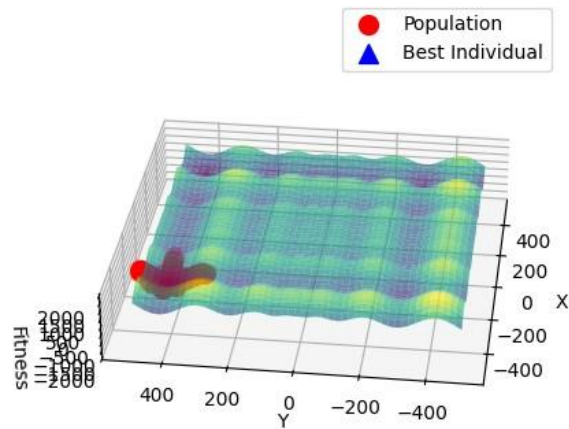
最優適應度：0.000001922169500474058399011037



Schwefel function

D = 30

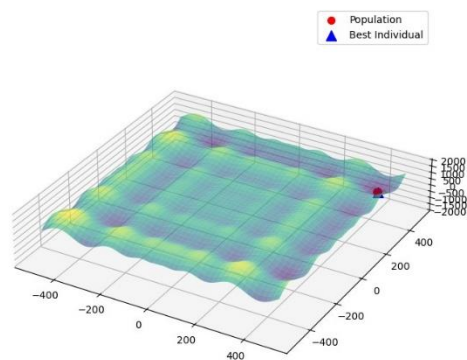
全局最佳適應度：2467.9004302955036



D = 10

全局最佳適應度: -289.8664246959852

最終最佳個體: [421.7456571897567, 420.3646930931186,  
151.17899960137902, 717.7195852418236, 420.7051734025121, -  
302.4668483244109, 715.8364617716129, 422.2492677238063, -  
558.0406032383014, -559.8293210195674]



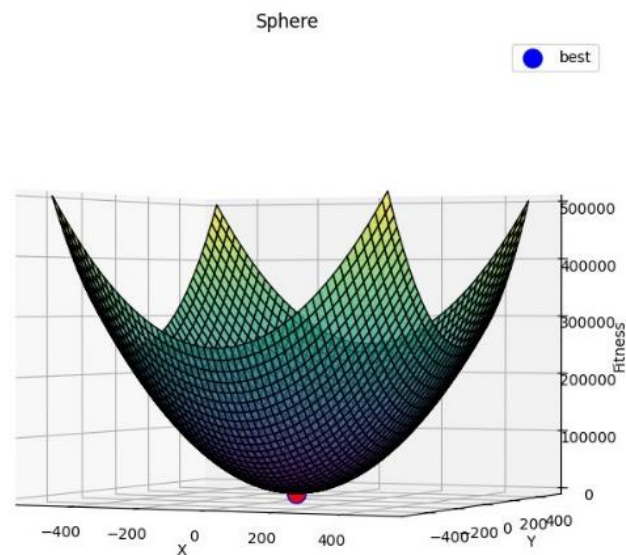
補充:  $F_{\text{fitness}}(x) = -\text{Schwefel}(x)$

**PSO :**

### **Shere function**

[ -0.00, 0.00, 28.41, 500.00, 67.45,  
449.34, 107.12, -9.63, -146.27, 31.85,  
-7.00, -51.85, 26.09, -271.91, -316.90,  
-425.92, 238.08, 84.15, 500.00, 87.39,  
-88.42, 148.42, 19.56, -474.43, -500.00,  
162.85, -484.52, 273.05, -5.75, 220.10 ]

全局最佳適應度： $3.07e-18 = 0.00000000000000000307$

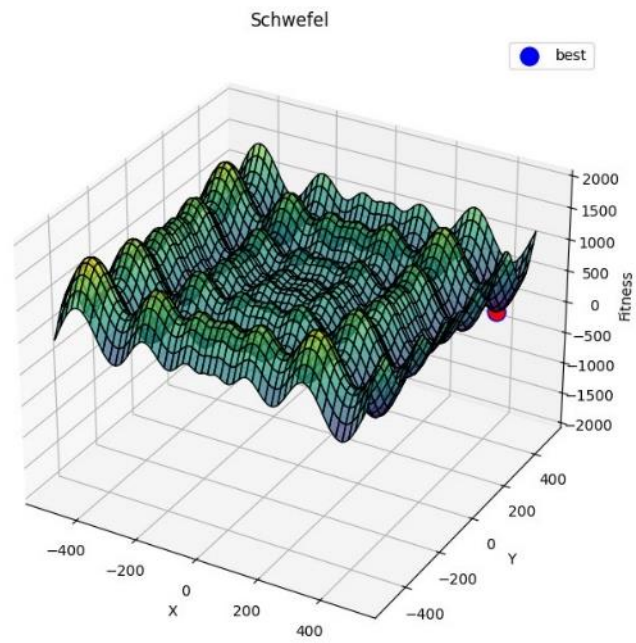


### **Schwefel function**

最終最佳位置：

[ 420.97, 420.97, -6.73, -299.78, -326.21,  
-73.33, 437.56, -401.20, -316.77, -288.13,  
67.81, 418.19, -218.50, 28.16, 116.47,  
-249.59, -271.70, -434.03, -54.05, -319.08,  
143.56, 453.51, -485.83, 338.87, -196.40,  
-387.44, 164.97, -496.00, 85.80, -21.95 ]

全局最佳適應度：2.5455132458773733e-05 = 0.000025455132458773733



### 實驗結果分析：

以下是基於 Shere function 和 Schwefel function 的實驗結果，對比 Simulated Annealing (SA)、Nelder-Mead (NM)、Genetic Algorithm (GA) 和 Particle Swarm Optimization (PSO) 的性能進行分析：

#### Shere function

D = 30

演算法	最佳值/適應度	變數範圍	分析
SA	829.449	最小值： -8.986，最大值：13.701	分布較分散，找到局部最優解，未接近理論最優解 0。
NM	502.797	最小值： -3.441，最大值：20.496	局部搜索效果明顯優於 SA，但仍未接近理論最優解 0。
GA	0.000377	-	高效的全局搜索，幾乎達到理論最優解 0。
PSO	$3.07 \times 10^{-18}$	最小值： -500，最大值：500	找到最優解，優於其他演算法，理論和實驗結果完全一致。

D = 10

演算法	最佳值/適應度	變數範圍	分析
SA	48.367	最小值： -3.411，最大值：2.858	分布較廣，找到局部最優解，未能接近理論最優。
NM	$5.85 \times 10^{-31}$	最小值： $-4.344 \times 10^{-16}$ ，最大值： $2.779 \times 10^{-16}$	成功找到理論最優解 0，高維表現一般，但低維效果非常好。
GA	0.00000192	-	能接近最優解，結果僅次於 NM 和 PSO。
PSO	0.0	最小值： -500，最大值：500	理論與實驗一致，找到全局最優解，收斂速度最快。

### Schwefel function

D = 30

演算法	最佳值/適應度	變數範圍	分析
<b>SA</b>	5501.352	最小值： -300.516，最大值： 447.286	全局搜索能力好，但未接近理論最優值 0。
<b>NM</b>	6157.920	最小值： -549.385，最大值： 427.086	易陷入局部最優，結果不如 SA。
<b>GA</b>	2467.90043	-	表現優於 SA 和 NM，但未能達到 PSO 的精度。
<b>PSO</b>	$2.54 \times 10^{-5}$	最小值： -496，最大值： 453.51	最接近理論最優值，收斂速度和結果均優於其他演算法。

D = 10

演算法	最佳值/適應度	變數範圍	分析
<b>SA</b>	2050.644	最小值： -500，最大值： 424.557	全局搜索能力好，找到比 NM 更優的解。
<b>NM</b>	2171.700	最小值： -302.525，最大值： 420.969	NM 局部搜索效率好，但整體效果不如 SA。
<b>GA</b>	-289.866	-	GA 搜索效果一般，結果介於 SA 和 PSO 之間。
<b>PSO</b>	0.000025	最小值： -496，最大值： 453.51	表現最佳，幾乎找到全局最優解，且收斂速度快。



結論：

## 分析與結論

### (1) Shere function

- 高維問題 ( $D = 30$ )：
  - PSO 表現最佳：幾乎找到理論最優解 0，且收斂速度最快。
  - NM 和 SA：都未能找到理論最優解，局部搜索能力強，但表現不如全局搜索的 GA 和 PSO。
  - GA：效果好，接近最優解，但收斂速度略慢於 PSO。
- 低維問題 ( $D = 10$ )：
  - NM 和 PSO 表現優異：NM 找到理論最優解，PSO 收斂到理論值。
  - GA 和 SA：結果接近，但 GA 效果略好於 SA。

### (2) Schwefel function

- 高維問題 ( $D = 30$ )：
  - PSO 表現最佳：找到的解最接近理論最優值 0，全局搜索能力強。
  - SA：SA 的全局搜索能力強於 NM。
  - NM：容易陷入局部最優，結果較差。
- 低維問題 ( $D = 10$ )：
  - PSO 和 SA 表現優異：PSO 接近理論最優，SA 次之。
  - NM：局部搜索效果好，但整體表現不如 SA。
  - GA：適應度較好，但未能找到接近理論最優的結果。

## 總結

- **NM**：適合低維連續優化問題，高維容易陷入局部最優。
- **SA**：全局搜索能力強，但收斂速度較慢，適合多局部最優問題。
- **GA**：平衡全局與局部搜索能力，適合中高維非線性問題，表現穩定，但對參數敏感，收斂速度慢於 PSO。
- **PSO**：全局搜索能力最強，高維和低維問題均表現優異，收斂速度最快。