NSGA-II 實作

613k0007c 余品誼

用 NSGA-II 演算法解決 ZDT 系列問題

目標：

1. 二個 10 維問題（ZDT6、ZDT4）
2. 一個 30 維問題（ZDT1）

名詞解釋：

1. ZDT 系列問題：問題旨在評估多目標優化算法，用於測試算法在處理收斂性和多樣性 問題上的能力。

   特徵：

   多目標問題的形式：

   - 目標函數：
     - f1(x)：第一個目標函數，通常與第一個決策變量 x1 直接相關。
     - f2(x)：第二個目標函數，通常與剩餘變數的組合相關。
   - 約束：
     - 所有變數通常都在範圍 $x_i \in [0,1]$ 內。

   維度（決策變數數量）:

   - 可以調整問題的維度，例如 10 維、30 維等。

   Pareto 前沿特性：

   - 每個 ZDT 問題的 Pareto 最優前沿具有不同的形狀（線性、非線性、多峰、間斷等）

2. ZDT1

   定義：

$$f1(x) = x1$$

$$g(x) = 1 + \frac{9}{n-1}\sum_{i=2}^{n} xi$$

$$h(f1, g) = 1 - \sqrt{f1/g}$$

$$0 \le xi \le 1 \quad i = 1, \ldots, n$$

Optimum：

$$0 \leq x1 \leq 1 \ \ and \ \ xi = 0 \ \ for \ i = 2, \dots, n$$

3. ZDT4

   定義：

$$f1(x) = x1$$
$$g(x) = 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^{n}(xi^2 - 10\cos(4\pi xi))$$
$$h(f1, g) = 1 - \sqrt{f1/g}$$
$$0 \leq x1 \leq 1 \qquad -10 \leq xi \leq 10 \quad i = 2, \dots, n$$

   Optimum：

$$0 \leq x1 \leq 1 \ \ and \ \ xi = 0 \ for \ i = 2, \dots, n$$

4. ZDT6

   定義：

$$f1(x) = 1 - \exp(-4(x1))\sin^6(6\pi x1)$$

$$g(x) = 1 + 9\left[(\sum_{i=2}^{n} xi)/9\right]^{0.25}$$

$$h(f1, g) = 1 - (\frac{f1}{g})^2$$

$$0 \leq xi \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

   Optimum：

$$0 \leq x1 \leq 1 \ \ and \ \ xi = 0 \ for \ i = 2, \dots, n$$

5. Pareto 最優解：

   不存在另一個解在所有目標上都優於它。

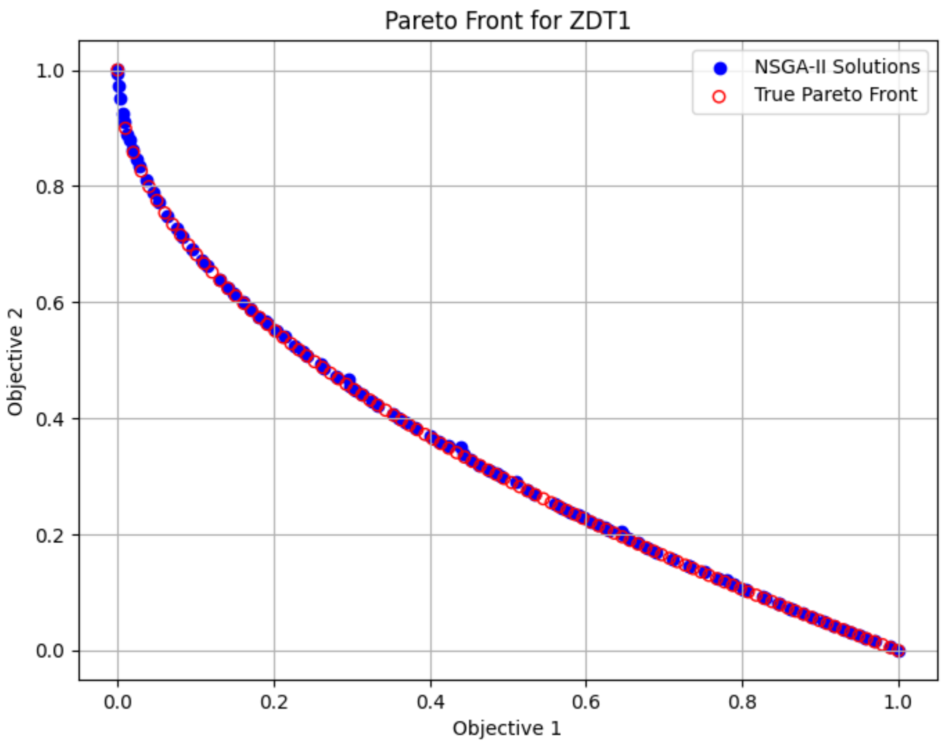
6. Pareto 前沿（Pareto Front）

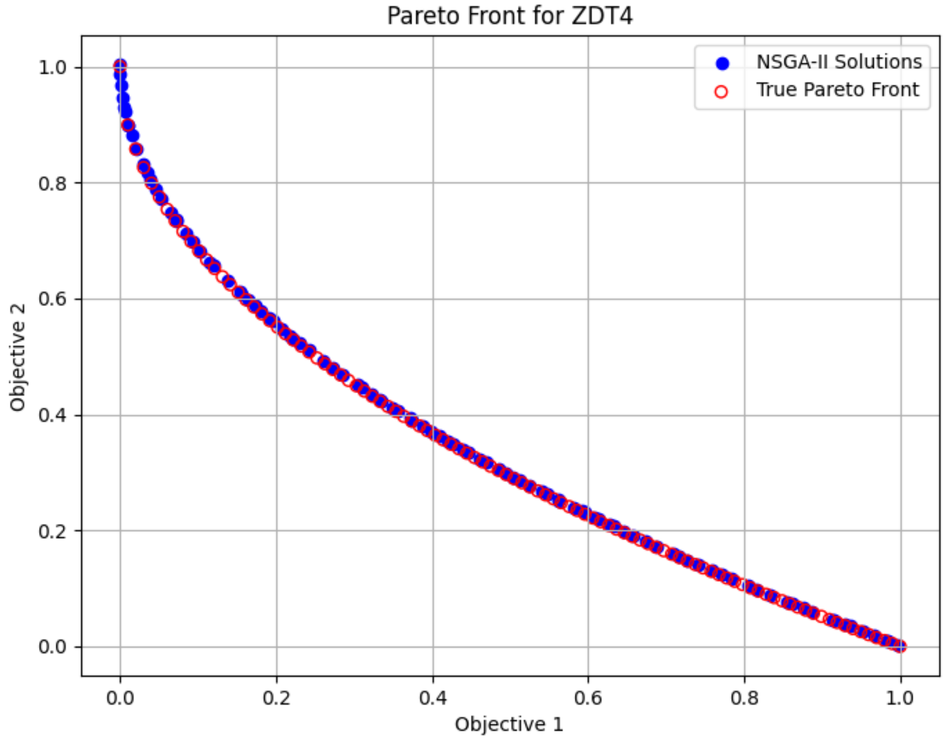
   Pareto 前沿 是所有 Pareto 最優解 在目標空間（Objective Space）中的對應位置的集合。

   - 特性：
     - 收斂性：指解是否靠近真實的 Pareto 前沿。
     - 多樣性：解是否均勻分佈在整個 Pareto 前沿上。

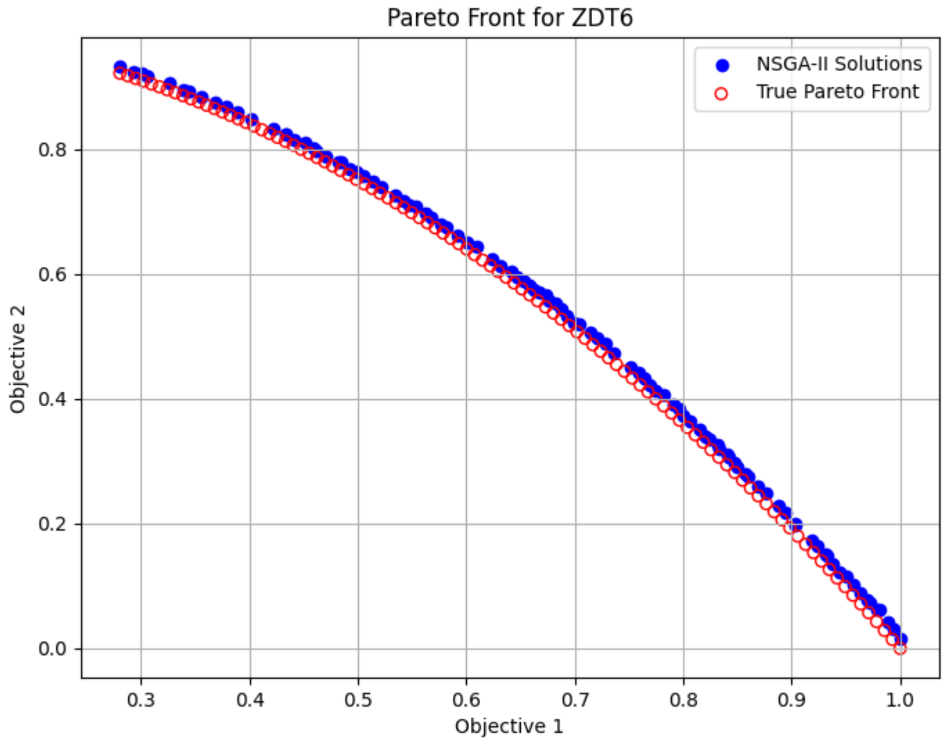
實驗結果：

散點圖顯示 NSGA-II 的解（藍色點）與真實 Pareto 前沿（紅色邊框）進行比較





Pareto Front for ZDT4
NSGA-II Solutions
True Pareto Front
Objective 2
Objective 1
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



Pareto Front for ZDT6
NSGA-II Solutions
True Pareto Front
Objective 2
Objective 1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0

實驗結果分析(個別)：

1. ZDT1
   - 特性：ZDT1 的 Pareto 前沿是凸形的，表示目標之間的折衷關係隨著目標 1（Objective 1）的增加逐漸變得困難。
   - 結果：
     - NSGA-II 的解集（藍色點）與理論 Pareto 前沿（紅色圈）高度重合。
     - 這表明算法在 ZDT1 上具有良好的 收斂性 和 多樣性。
   - 挑戰：由於問題比較簡單，主要挑戰是保持均勻的解分佈。
2. ZDT4
   - 特性：ZDT4 是多峰問題，其目標空間包含局部最優解。只有少數解能夠逐漸逼近 Pareto 最優前沿。
   - 結果：
     - NSGA-II 在多峰環境中表現良好，解集均勻分佈並能精準覆蓋前沿。
     - 挑戰：即使局部最優的影響，NSGA-II 的精英策略幫助其避開陷阱。
   - 適用性：這一結果表明 NSGA-II 對多峰問題具有良好的穩健性。
3. ZDT6
   - 特性：ZDT6 的 Pareto 前沿是凹形且包含不均勻分佈（Objective 1 的低值區域密集）。
   - 結果：
     - 解集在靠近低值 f1f_1f1 的地方略顯稀疏，但整體仍能很好地逼近真實前沿。
     - 挑戰：由於解的分佈非均勻，算法可能需要更高的種群多樣性維持機制。

- 改進方向：調整擁擠距離計算或採用其他策略改善低值分佈。

實驗結果分析(總體)：

1. 收斂性影響

收斂性是指算法找到接近真實 Pareto 前沿的能力。當決策變數維度增加時，收斂性受到以下挑戰與限制的影響。

(1) 維度增加對收斂性的挑戰

1. 高維問題的搜索空間更大：
    - 決策變數的數量從 10 增加到 30，決策空間的可能解數量指數增長。
    - 這使得算法需要探索的範圍更廣，進而增加了搜索的困難性。
    - 如果算法的探索能力不足，可能導致收斂速度變慢，甚至無法找到全局最優解。
2. 局部最優陷阱更明顯：
    - 在 ZDT4 這樣的多峰問題中，局部最優解的數量隨著維度增加而急劇增多。
    - 這對算法的全局搜索能力提出了更高要求，容易導致算法陷入局部最優。
3. 資源分配的限制：
    - 在 25000 次函數評估的限制下，30 維問題中每個變數能得到的探索資源（如交叉和變異）更少。
    - 這可能導致算法過早收斂於局部最優解，而未能充分探索全局空間。

(2) 實驗觀察

1. 10 維問題（如 ZDT4, ZDT6）：

- 收斂性良好，NSGA-II 能夠在較少的評估次數內逼近 Pareto 前沿。
- 解幾乎與真實前沿完全重合，表現出良好的全局搜索能力。
- 搜索空間複雜度較低，因此探索相對容易。

2. 30 維問題（如 ZDT1）：
    - 收斂速度明顯變慢，且需要更多的世代數才能接近 Pareto 前沿。
    - 部分區域（尤其是目標空間的邊緣）可能無法精確收斂到真實前沿。
    - 算法在高維空間中的探索能力受到較大挑戰，表現略有下降。