ABC 048 / ARC 064 解説

writer : sugim48

2016 年 12 月 4 日

A : AtCoder *** Contest

3 個の文字列を入力し，それらの 1 文字目を続けて出力すればよいです．

C++ のコード例

```
string a, b, c;
cin >> a >> b >> c;
cout << a[0] << b[0] << c[0] << endl;
```

B : Between a and b ...

a 以上 b 以下の整数のうち条件を満たすものの個数を求める問題です．このような問題では，

$$f(n) := 0 \text{ 以上 } n \text{ 以下の整数のうち条件を満たすものの個数}$$

と定義しておくと，答えは $f(b) - f(a-1)$ で求まるので楽です．ただし，$a = 0$ のときに $f(-1)$ が呼ばれることに注意してください．このことに注意すると，f は次のように書けます．

$$f(n) = \begin{cases} n/x + 1 & (n \geq 0) \\ 0 & (n = -1) \end{cases}$$

ただし，/ は切り捨ての除算です．

C : Boxes and Candies

各 $1 \leq i \leq N-1$ について $a_i + a_{i+1} \leq x$ となるように，a の各要素を (非負整数の範囲で) 減らしていきます．最後に，元の a と比べることで操作回数が分かります．この操作回数を最小化することを目指します．

まず，$a_1 > x$ ならば $a_1 = x$ としておきます．次に，$i = 1, 2, ..., N-1$ の順に $a_i + a_{i+1} \leq x$ を成立させていきます．とりあえず，最初から $a_i + a_{i+1} \leq x$ ならば何もする必要はありません．$a_i + a_{i+1} > x$ ならば，$a_i + a_{i+1} = x$ となるまで a_i と a_{i+1} を減らさなければなりませんが，このとき a_{i+1} だけを減らすのが最適であることが分かります．なぜならば，これから各 $j > i$ について $a_j + a_{j+1} \leq x$ を成立させていくときに，a_{i+1} が小さいほど操作回数が少なくなることが期待できるからです．

以上の貪欲法により正しく答えを求めることができます．なお，オーバーフローに注意してください．

D : An Ordinary Game

結論から述べると，「s の長さが偶数である」と「s の先頭文字と末尾文字が同一である」の排他的論理和が真ならば後手が勝ち，偽ならば先手が勝ちます．以降はこれを示します．

どちらかのプレイヤーが操作を行えなくなったときの，最終的な s について考えます．最終的な s は "`abababab...`" のように，異なる 2 文字が交互に並んでいるはずです．なぜならば，ルールより同一の文字が隣り合う箇所はなく，また "`abc`" のように異なる 3 文字が連続する箇所があれば，まだ真ん中の文字を取り除けるからです．

最終的な s の長さは一意には定まりませんが，その偶奇は一意に定まります．具体的には，s の先頭文字と末尾文字が同一ならば "`ababa`" のように奇数長となり，s の先頭文字と末尾文字が異なるならば "`ababab`" のように偶数長となります．以上より，最初と最後で s の長さの偶奇が分かっているので，ターン数の偶奇も分かります．よって，どちらのプレイヤーが先に操作を行えなくなるかが求まります．

E : Cosmic Rays

簡単のため，始点 (x_s, y_s) および終点 (x_t, y_t) にも半径 0 のバリアが張られていると仮定します．すると，始点および終点はそれぞれあるバリアの中心に位置することになります．

始点から終点までの最適経路を求めるとき，すぬけ君はバリアの中心どうしを結ぶ線分上のみを移動すると仮定してもよいことが分かります．なぜならば，あるバリアの境界から別のバリアの境界まで移動するときは，それらのバリアの中心を結ぶ線分上を移動するのが最適であり，また，あるバリアの内部を移動するときは，一度そのバリアの中心を経由しても損はしないからです．

よって，各バリアの中心を頂点として全点間に辺を張ったグラフを考え，このグラフの最短経路問題を解けばよいことになります．バリア i, j の中心を結ぶ辺のコストは w_{ij} は

$$w_{ij} = \max\left\{0, \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - (r_i + r_j)\right\}$$

と計算できます．辺のコストがすべて非負の最短経路問題なので，Dijkstra 法で解くことができます．時間計算量は $\mathrm{O}(N^2)$ です．なお，実装によっては，始点から終点まで直接移動する経路を見落とすことがあるので，注意してください．

F : Rotated Palindromes

長さ N の数列 a を考えます．d が N の約数であり，長さ d の数列の繰り返しとして a が表されるとします．このとき，d は a の周期であるとします．a の周期のうち最小のものを最小周期と呼ぶことにします．たとえば，$(1,2,1,2,1,2,1,2)$ の最小周期は 2 で，$(1,2,1)$ の最小周期は 3 です．

高橋君が用意する数列 a の最小周期 d を全探索することを考えます．最小周期 d を固定したとき，高橋君が用意できる数列 a の個数を $num[d]$ とします．$num[d]$ は次のように計算できます．まず，a は回文なので，a の先頭 d 文字分も回文であることが分かります．長さ d の回文の個数は $K^{\lceil d/2 \rceil}$ です．では $num[d] = K^{\lceil d/2 \rceil}$ なのかというと，そうではありません．d' $(\neq d)$ を d の約数としたとき，$num[d']$ も余分

に数えてしまっているからです．これを踏まえると，$num[d]$ は

$$num[d] = K^{\lceil d/2 \rceil} - \sum_{d'|d,\ d' \neq d} num[d']$$

と計算できます．以上のようにして，小さい d から順に $num[d]$ を埋めていくことができます．

次に，高橋君が最小周期 d の数列 a を用意したとき，青木君の操作によって何通りの数列が得られるかを考えます．最小周期が d なので，$0, 1, ..., d-1$ 回操作を行って得られる数列はすべて異なることが分かります．また，d 回操作を行うと元の a に戻ることが分かります．よって，最小周期 d の数列 a からは d 通りの数列が得られることになります．では問題の答えは $\sum_{d|N} num[d] \cdot d$ なのかというと，そうではありません．高橋君が用意した別々の数列 a から，青木君の操作によって同一の数列が得られる可能性があるからです．具体的には，最小周期 d が奇数の数列 a から得られる各数列は，全体でちょうど 1 回ずつ生成されており，最小周期 d が偶数の数列 a から得られる各数列は，全体でちょうど 2 回ずつ生成されています (証明は後述)．よって，正しい答えは

$$\sum_{d|N,\ d:\mathrm{odd}} num[d] \cdot d + \sum_{d|N,\ d:\mathrm{even}} num[d] \cdot \frac{d}{2}$$

と計算できます．

時間計算量は $\mathrm{O}(d(N)^2)$ です．ここで，$d(N)$ は N の約数の個数です．$N \leq 10^9$ における $d(N)$ の最大値は，$d(735{,}134{,}400) = 1{,}344$ とそこまで大きくありません．よって，$\mathrm{O}(d(N)^2)$ でも十分間に合います．

(証明) 高橋君が用意した別々の数列 a, b から，青木君の操作によって同一の数列が得られたとします．これはすなわち，a に何回か操作を行って得られる数列が b に一致するということです．よって，a と b の最小周期は等しいことが分かります．これを d とおきます．すると，a に $1, 2, ..., d-1$ 回操作を行って得られる数列のどれか 1 つのみが b に一致することになります．ここでは，a に t 回操作を行って得られる数列が b に一致するとします．このとき，a に t 回逆操作を行って得られる数列も b に一致します．なぜならば，数列 a を逆順にした数列を $\overline{a}$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned}(a \text{ に } t \text{ 回逆操作をした数列}) &= (\overline{a} \text{ に } t \text{ 回逆操作をした数列}) \\ &= \overline{(a \text{ に } t \text{ 回操作をした数列})} \\ &= \overline{b} \\ &= b\end{aligned}$$

となるからです．よって，a に $d-t$ 回逆操作を行って得られる数列も b に一致します．a に $1, 2, ..., d-1$ 回操作を行って得られる数列のどれか 1 つのみが b に一致するので，$t = d-t$ でなければならず，$d = 2t$ が得られます．

以上より，最小周期 d が奇数の数列 a については，同一の数列を生成するような別の数列 b は存在しません．逆に，最小周期 d が偶数の数列 a については，同一の数列を生成するような別の数列 b がちょうど 1 つ存在します．そのような b は，a に $\frac{d}{2}$ 回操作を行って得られる数列です．このとき，仮に $a = b$ とすると $\frac{d}{2}$ も周期となり矛盾するので，a と b は別々であることが分かります．