$*\alpha-\beta-\gamma$ filter

$\alpha-\beta$ filter와 과정은 동일하지만 state가 3개로 바뀐 버전이다. 예시로 state가 position, velocity, acceleration인 경우를 살펴보자. 그렇다면 다음과 같이 system을 정의할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
x_k &= \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix} w'_{k-1} \\
y_k &= [1\ 0\ 0]\, x_k + v_k \\
w'_k &\sim (0, \sigma_w^2) \\
v_k &\sim (0, R)
\end{aligned}
$$

위 식에서 state를 다음과 같이 변환 가능하다.

$$
\begin{aligned}
x_k &= \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + w_{k-1} \\
w_k &\sim (0, Q) \\
Q &= \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix} E[w'_k w'^T_k] \left[T^2/2\ T\ 1 \right] \\
&= \begin{bmatrix} T^4/4 & T^3/2 & T^2/2 \\ T^3/2 & T^2 & T \\ T^2/2 & T & 1 \end{bmatrix} \sigma_w^2
\end{aligned}
$$

위 식에서 다음과 같이 Kalman gain과 covariance의 변수들을 넣고 계산하여 식을 풀면 된다.

$$
\begin{aligned}
K &= \left[K_1\ K_2\ K_3 \right]^T = \left[\alpha\ \ \beta/T\ \ \gamma/2T^2 \right]^T \\
P^+ &= \begin{bmatrix} P_{11}^+ & P_{12}^+ & P_{13}^+ \\ P_{12}^+ & P_{22}^+ & P_{23}^+ \\ P_{13}^+ & P_{23}^+ & P_{33}^+ \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4) Fade-Memory Filter

Kalman Filter의 추정들은 원래 $E(J_N)$을 최소화 시켰다.

$$J_N = \sum_{k=1}^{N} [\left(y_k - H_k \hat{x}_k^-\right)^T R_k^{-1} \left(y_k - H_k \hat{x}_k^-\right) + \hat{w}_k^T Q_k^{-1} \hat{w}_k]$$

그런데 Kalman Filter에는 실제 상황과 다르게 모델링됨으로써 발생하는 Divergence Problem이 존재한다. 따라서 이를 조정하기 위해 다음과 같은 수정된 버전을 사용한다.

$$\widetilde{J_N} = \sum_{k=1}^{N} [\left(y_k - H_k \hat{x}_k^-\right)^T \alpha^{2k} R_k^{-1} \left(y_k - H_k \hat{x}_k^-\right) + \hat{w}_k^T \alpha^{2k+2} Q_k^{-1} \hat{w}_k] \qquad \alpha \geq 1$$

위 식을 사용함으로써 k가 클수록 loss가 커지게 되고, 결과적으로 최근의 관측값에 더 비중을 두어 filtering하게 된다.

적용은 원래의 Kalman Filter 식에 $R_k \to \alpha^{-2k} R_k$, $Q_k \to \alpha^{-2k-2} Q_k$로 치환함으로써 적용한다.

원래의 Kalman Filter 식에 해당 치환을 적용한 식은 다음과 같다.