Optimal Smoothing 1

1. Fixed Point Smoothing

Fixed된 j에 대해서 measurements $(y_1, ..., y_j, ..., y_k)$를 이용하여 x_j를 추정하는 과정이다.

일단 전개에 앞서 일반적인 Kalman Filter로부터 One-Step a priori Kalman Filter를 유도해보자.

우선 일반적인 Kalman Filter는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
x_k &= F_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1} \\
y_k &= H_k x_k + v_k \\
P_{k+1}^- &= F_k P_k^+ F_k^T + Q_k \\
K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\
\hat{x}_k^- &= F_k \hat{x}_{k-1}^+ \\
\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-)
\end{aligned}
$$

여기서 L을 다음과 같이 정의한다.

$$
\begin{aligned}
L_k &= F_k K_k \\
&= F_k P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}
\end{aligned}
$$

그러면 이를 이용해 다음 step의 priori를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{k+1}^- &= F_k \hat{x}_k^- + F_k K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) \\
&= F_k \hat{x}_k^- + L_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) \\
P_k^+ &= P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k H_k P_k^- H_k^T K_k^T + K_k R_k K_k^T \\
&= P_k^- - P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^- - P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^- \\
&\quad + P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^- \\
&\quad + P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} R_k \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^- \\
&= P_k^- - P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^- - P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^- \\
&\quad + P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right) \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^- \\
&= P_k^- - P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^- \\
P_{k+1}^- &= F_k P_k^+ F_k^T + Q_k \\
&= F_k \left(P_k^- - P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} H_k P_k^-\right) F_k^T + Q_k \\
&= F_k P_k^- (F_k - L_k H_k)^T + Q_k
\end{aligned}
$$

정리하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
L_k &= F_k P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
P_{k+1}^- &= F_k P_k^- (F_k - L_k H_k)^T + Q_k \\
\hat{x}_{k+1}^- &= F_k \hat{x}_k^- + L_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-)
\end{aligned}
$$

다시 smoothing으로 돌아가서 생각해보자. 우리가 구하고자 하는 값을 다음과 같이 정의하자.

$\hat{x}_{j,k} = E(x_j | y_1, ..., y_{k-1}) \quad k \geq j$

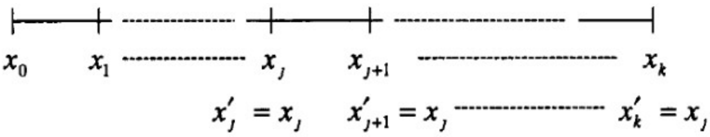
그리고 j에 대해서는 다음과 같이 원래 Kalman Filter의 priori와 posteriori로 표현 가능

하다.

$\hat{x}_{j,\,j} = E(x_j|y_1, \ldots, y_{j-1}) = \hat{x}_j^-$
$\hat{x}_{j,\,j+1} = E(x_j|y_1, \ldots, y_j) = \hat{x}_j^+$

그렇다면 우리가 구하고자 하는 값을 계산하기 위해서는 j+2, j+3 ... 일 때의 measurement를 이용해야 하는데 이는 어떻게 해야 할까?
이를 위해서 다음과 같은 새 변수를 정의하자.

$$x'_k = x_j \ \ \text{for} \ \ all \ \ k > j$$



이와 같이 정의하면 x'_k에 대한 priori는 곧 우리가 구하고자 하는 $\hat{x}_{j,k}$가 됨을 알 수 있다. 왜냐하면 x'_k에 대한 priori는 1~k-1 의 measurements를 이용하지만 상태는 j까지의 상태만 있기 때문이다.
그리고 이를 추정하기 위해 다음과 같은 system을 구축한다.

$$\begin{bmatrix} x_k \\ x'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x'_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} w_{k-1}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} H_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x'_k \end{bmatrix} + v_k$$

여기서 error covariance는 다음과 같다.

$$E\left(\begin{pmatrix} x_k - \hat{x}_k^- \\ x_j - \hat{x}_{j,\,k}^- \end{pmatrix} \left(\left(x_k - \hat{x}_k^-\right)^T \left(x_j - \hat{x}_{j,\,k}^-\right)^T \right)\right) = \begin{bmatrix} P_k & \Sigma_k^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix}$$

여기서 P_k는 원래 Kalman Filter에서의 error covariance이며 Π_k는 smoothing의 error covariance이다.
또한, k=j인 경우, $\hat{x}_{j,\,j} = \hat{x}_j^-$가 되므로, $\Sigma_j = \Pi_j = P_j$가 된다.

위 system에서 앞서 구한 One-Step a priori Kalman Filter를 이용하면 다음과 같이 priori를 계산할 수 있다. 아래의 두 식은 벡터 식을 scalar로 풀어쓴 것이다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1}^- \\ \hat{x}_{j,\,k+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \\ \hat{x}_{j,\,k}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} \left(y_k - \begin{bmatrix} H_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \\ \hat{x}_{j,\,k}^- \end{bmatrix} \right)$$

$$\hat{x}_{k+1}^- = F_{k-1}\hat{x}_k^- + L_k\left(y_k - H_k\hat{x}_k^-\right)$$

$$\hat{x}_{j,\,k+1}^- = \hat{x}_{j,\,k}^- + \lambda_k\left(y_k - H_k\hat{x}_k^-\right)$$

L과 λ도 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{k-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k & \Sigma_k^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} H_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k & \Sigma_k^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} + R_k \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k & \Sigma_k^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} \left(H_k P_k H_k^T + R_k \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$L_k = F_k P_k H_k^T \left(H_k P_k H_k^T + R_k \right)^{-1}$$

$$\lambda_k = \Sigma_k H_k^T \left(H_k P_k H_k^T + R_k \right)^{-1}$$

또한 마지막으로 covariance도 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P_{k+1} & \Sigma_{k+1}^T \\ \Sigma_{k+1} & \Pi_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_k & \Sigma_k^T \\ \Sigma_k & \Pi_k\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} F_k^T & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_k^T & \lambda_k^T\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_kP_kF_k^T - F_kP_kH_k^TL_k^T & -F_kP_kH_k^T\lambda_k^T + F_k\Sigma_k^T \\ \Sigma_kF_k^T - \Sigma_kH_k^TL_k^T & -\Sigma_kH_k^T\lambda_k^T + \Pi_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$P_{k+1} = F_kP_k(F_k - L_kH_k)^T + Q_k$$
$$\Pi_{k+1} = \Pi_k - \Sigma_kH_k^T\lambda_k^T$$
$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k(F_k - L_kH_k)^T$$

정리하면 다음과 같다.

The fixed-point smoother

1. Run the standard Kalman filter up until time j, at which point we have $\hat{x}_j^-$ and P_j^-. In the algorithm below, we omit the minus superscript on P_j^- for ease of notation.
2. Initialize the filter as follows:

$$\begin{aligned} \Sigma_j &= P_j \\ \Pi_j &= P_j \\ \hat{x}_{j,j} &= \hat{x}_j^- \end{aligned} \qquad (9.24)$$

3. For $k = j, j+1, \cdots$, perform the following:

$$\begin{aligned} L_k &= F_kP_kH_k^T(H_kP_kH_k^T + R_k)^{-1} \\ \lambda_k &= \Sigma_kH_k^T(H_kP_kH_k^T + R_k)^{-1} \\ \hat{x}_{j,k+1} &= \hat{x}_{j,k} + \lambda_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-) \\ \hat{x}_{k+1}^- &= F_k\hat{x}_k^- + L_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-) \\ P_{k+1} &= F_kP_k(F_k - L_kH_k)^T + Q_k \\ \Pi_{k+1} &= \Pi_k - \Sigma_kH_k^T\lambda_k^T \\ \Sigma_{k+1} &= \Sigma_k(F_k - L_kH_k)^T \end{aligned} \qquad (9.25)$$

As we recall from Equation (9.16), P_k is the *a priori* covariance of the standard Kalman filter estimate, Π_k is the covariance of the smoothed estimate of x_j at time k, and Σ_k is the cross covariance between the two.

Smoothing의 성능을 확인하기 위해 초기의 covariance와 smoothing covariance의 차이를 구해보자. 초기의 covariance는 P_j이다.

$$P_j - \Pi_{k+1} = \Pi_j - \left(\Pi - \sum_{i=j}^{k}\Sigma_iH_i^T\lambda_i^T\right) = \sum_{i=j}^{k}\Sigma_iH_i^T\lambda_i^T$$

또한 steady state일 때에도 살펴보면 다음과 같다.

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k(F - LH)^T = P[(F-LH)^T]^{k+1-j} = P\left(\tilde{F}^T\right)^{k+1-j}$$

$$P_j - \Pi_{k+1} = \sum_{i=j}^{k}\Sigma_iH^T\lambda^T = P\left[\sum_{i=j}^{k}\left(\tilde{F}^T\right)^{i-j}H^T(HPH^T + R)^{-1}H\tilde{F}^{i-j}\right]P > 0 \ (positive definite)$$

마지막으로 Constant Case를 살펴보자.

$F_k = I, Q = 0$

이 경우에는 covariance가 다음과 같이 계산된다.

$P_{k+1} = P_k(I - L_k H_k)^T$
$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k(I - L_k H_k)^T$
그런데 초기의 covariance는 $\Sigma_j = P_j$이고 식의 형태가 동일하므로 시간이 지난 뒤에도 두 covariance는 동일하게 된다.
또한 이에 따라 L_k도 다음과 같이 계산된다.

$$L_k = F_k P_k H_k^T \left(H_k P_k H_k^T + R_k\right)^{-1} = \Sigma_k H_k^T \left(H_k P_k H_k^T + R_k\right)^{-1} = \lambda_k$$

그에 따라 smoothing의 covariance도 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1} &= \Pi_k - \Sigma_k H_k^T \lambda_k^T \\ &= \Pi_k - P_k H_k^T L_k^T \end{aligned}$$

여기서 초기에는 $\Pi_j = P_j$이고 그러면 식의 꼴이 다른 covariance 식과 동일해지기 때문에 시간 k에 대해서 결국 $\Pi_k = P_k$가 된다. 따라서 constant state에 대해서는 smoothing이 필요없다.