Linear Model

Linear Model의 form : $x = H\theta + w$, where $w \sim N(0, \sigma^2 I)$

예를 들어,
$x[n] = A + Bn + w[n], n = 0, 1, ..., N-1, w[n] \sim N(0, \sigma^2)$의 자료들이 있을 때,
$x = [x[0] x[1] ... x[N-1]]^T$
$w = [w[0] w[1] ... w[N-1]]^T$
$\theta = [A\, B]^T$
$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ .. & .. \\ 1 & N-1 \end{bmatrix}$ 이면,
$x = H\theta + w$를 만족한다.

만약
$\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta} = I(\theta)(g(x) - \theta)$를 만족하면, $\hat{\theta} = g(x)$는 MVU estimator이다.
그런데,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}[-\ln(2\pi\sigma^2)^{N/2} - \frac{1}{2\sigma^2}(x - H\theta)^T (x - H\theta)] \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial}{\partial \theta}[x^T x - 2x^T H\theta + \theta^T H^T H\theta] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}[H^T x - H^T H\theta] \\ &= \frac{H^T H}{\sigma^2}[(H^T H)^{-1} H^T x - \theta] \end{aligned}$$

이므로 MVU estimator은
$\hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T x$, $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2 (H^T H)^{-1})$
$I(\theta) = \frac{H^T H}{\sigma^2}$
$C_{\hat{\theta}} = I^{-1}(\theta) = \sigma^2 (H^T H)^{-1}$
가 된다.

* 예제) Fourier Analysis for Periodic Signals

Fourier form은 다음과 같다.
$$x[n] = \sum_{k=1}^{M} a_k \cos(\frac{2\pi kn}{N}) + \sum_{k=1}^{M} b_k \sin(\frac{2\pi kn}{N}) + w[n], \ n = 0, 1, ..., N-1$$
이는 다음과 같이 정의할 수 있다.
$\theta = [a_1 a_2 \dots a_M b_1 b_2 \dots b_M]^T$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{2\pi M}{N}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2\pi M}{N}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\left[\frac{2\pi(N-1)}{N}\right] & \cdots & \cos\left[\frac{2\pi M(N-1)}{N}\right] & \sin\left[\frac{2\pi(N-1)}{N}\right] & \cdots & \sin\left[\frac{2\pi M(N-1)}{N}\right] \end{bmatrix}$$

$H = [h_1 h_2 \ldots h_{2M}]$

이때,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi in}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi jn}{N}\right) = \frac{N}{2}\delta_{ij}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi in}{N}\right)\sin\left(\frac{2\pi jn}{N}\right) = \frac{N}{2}\delta_{ij}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi in}{N}\right)\sin\left(\frac{2\pi jn}{N}\right) = 0$$

이므로

Orthogonality가 성립한다. ($h_i^T h_j = 0 \text{ for } i \neq j$)

따라서

$$H^T H = \begin{bmatrix} h_1^T \\ \ldots \\ h_{2M}^T \end{bmatrix} [h_1 \ldots h_{2M}] = \frac{N}{2} I$$

이를 이용하면 MVU estimator은

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= (H^T H)^{-1} H^T x \\ &= \frac{2}{N} H^T x \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{N} h_1^T x \\ \ldots \\ \frac{2}{N} h_{2M}^T x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이고, 이에 따라 추정값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\widehat{a_k} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$\widehat{a_k} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

* Extension to the Linear Model

Linear model의 노이즈는 보통 WGN이 아니다. 따라서 일반적인 경우, 다음과 같다.

$w \sim N(0, C)$

C 행렬은 노이즈이기 때문에 positive definite이다. 따라서 C^{-1}도 positive definite이며, 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$C^{-1} = D^T D$$

D 행렬은 일반적인 노이즈를 whitening 해주는 데 사용된다.

$$\begin{aligned} E[(Dw)(Dw)^T] &= DCD^T \\ &= DD^{-1}D^{-T}D \\ &= I \end{aligned}$$

따라서 정리하면, 일반적인 선형 모델이 다음과 같을 때,

$$x = H\theta + w$$

whitening을 위해 다음과 같이 변환해준다.

$$\begin{aligned} x' &= Dx \\ &= DH\theta + Dw \\ &= H'\theta + w' \end{aligned}$$

이렇게 되면 $w' \sim N(0, I)$로 whitening 되었으며, MVU estimator은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= (H'^T H')^{-1} H'^T x' \\ &= (H^T D^T D H)^{-1} H^T D^T D x \\ &= (H^T C^{-1} H)^{-1} H^T C^{-1} x \end{aligned}$$