$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$
$e_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+$
$e_k^+ = e_k^- - K_k\left(h(x_k, t_k) - h\left(\hat{x}_k^-, t_k\right)\right) - K_k v_k + \pi_k$
여기서 measurement에 대한 Taylor 전개를 통해 다음 항을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} h(x_k, t_k) &= h\left(\hat{x}_k^-, t_k\right) + \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{\hat{x}_k^-}\left(x_k - \hat{x}_k^-\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(x_k - \hat{x}_k^-\right)^T \frac{\partial^2 h(i)}{\partial x^2}\Big|_{\hat{x}_k^-}\left(x_k - \hat{x}_k^-\right) \\ &= h\left(\hat{x}_k^-, t_k\right) + H_k\left(x_k - \hat{x}_k^-\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(x_k - \hat{x}_k^-\right)^T \frac{\partial^2 h(i)}{\partial x^2}\Big|_{\hat{x}_k^-}\left(x_k - \hat{x}_k^-\right) \end{aligned}$$

$$h(x_k, t_k) - h\left(\hat{x}_k^-, t_k\right) = H_k e_k^- + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(e_k^-\right)^T D_{k,i} e_k^-$$

이 식을 이용해 위의 measurement update식을 치환하면 다음과 같다.

$$e_k^+ = e_k^- - K_k H_k e_k^- - \frac{1}{2}K_k\sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(e_k^-\right)^T D_{k,i} e_k^- - K_k v_k + \pi_k$$

따라서 위 식의 양변에 기댓값을 취하면 기댓값이 0이 되기 위해서 correction term π_k는 다음과 같다.

$$\pi_k = \frac{1}{2}K_k\sum_{i=1}^{m}\phi_i Tr\left(D_{k,i}P_k^-\right)$$

마지막으로 measurement-update에서 Kalman Gain은 covariance matrix를 최소화시키는 값이 된다. 이를 위해 covariance matrix를 살펴보면 다음과 같다.

$$P_k^+ = E[e_k^+\left(e_k^+\right)^T] = (I - K_k H_k)P_k^-(I - K_k H_k)^T + K_k(R_k + \Lambda_k)K_k^T$$

여기서 matrix Λ_k는 다음과 같이 정의된다.

$$\Lambda_k = \frac{1}{4}E\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\phi_i Tr\left(D_{k,i}\left(e_k^-\left(e_k^-\right)^T - P_k^-\right)\right)\right)(\ldots)^T\right)$$

계산을 위해 다음과 같은 cost function을 정의하자.

$$J_k = E[\left(e_k^+\right)^T S_k e_k^+] = Tr[S_k P_k^+]$$

위 cost function을 최소화하는 K_k는 다음과 같이 찾을 수 있다.

$$K_k = P_k^- H_k^T\left(H_k P_k^- H_k^T + R_k + \Lambda_k\right)^{-1}$$

이를 이용하여 P_k^+도 계산하면 다음과 같다.

$$P_k^+ = P_k^- - P_k^- H_k^T\left(H_k P_k^- H_k^T + R_k + \Lambda_k\right)^{-1} H_k P_k^-$$

또한 Λ_k의 각 항들은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Lambda_k(i,j) = \frac{1}{2}Tr\left(D_{k,i}P_k^- D_{k,j}P_k^-\right)$$

최종적으로 second-order extended kalman filter를 정리하면 다음과 같다.