Kalman Filter Generalization

1) Correlated Process and Measurement

다음과 같이 x_k의 노이즈와 y_k의 노이즈가 correlated 되었을 때이다.

$$
\begin{aligned}
x_k &= F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1} \\
y_k &= H_k x_k + v_k \\
w_k &\sim (0, Q_k) \\
v_k &\sim (0, R_k) \\
E[w_k w_j^T] &= Q_k \delta_{k-j} \\
E[v_k v_j^T] &= R_k \delta_{k-j} \\
E[w_k v_j^T] &= M_k \delta_{k-j+1}
\end{aligned}
$$

이 때 에러는 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
\epsilon_k^- &= x_k - \hat{x}_k^- \\
&= (F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}) - \left(F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1}u_{k-1}\right) \\
&= F_{k-1}\epsilon_{k-1}^+ + w_{k-1} \\
\epsilon_k^+ &= x_k - \hat{x}_k^+ \\
&= x_k - \left(\hat{x}_k^- + K_k\left(y_k - H_k\hat{x}_k^-\right)\right) \\
&= \epsilon_k^- - K_k\left(H_k x_k + v_k - H_k\hat{x}_k^-\right) \\
&= \epsilon_k^- - K_k\left(H_k\epsilon_k^- + v_k\right)
\end{aligned}
$$

에러들의 분산인 P_k^-와 P_k^+는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
P_k^- &= E[\epsilon_k^- \epsilon_k^{-\,T}] \\
&= F_{k-1}P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + Q_{k-1} \\
P_k^+ &= E[\epsilon_k^+ \epsilon_k^{+\,T}] \\
&= E[\left(\epsilon_k^- - K_k\left(H_k\epsilon_k^- + v_k\right)\right)\left(\epsilon_k^- - K_k\left(H_k\epsilon_k^- + v_k\right)\right)^T] \\
&= P_k^- - K_k H_k P_k^- - K_k E[v_k(\epsilon_k^-)^T] - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k H_k P_k^- H_k^T K_k^T + K_k E[v_k(\epsilon_k^-)^T] H_k^T K_k^T - \\
&\quad E[\epsilon_k^-(v_k)^T] K_k^T + K_k H_k E[\epsilon_k^-(v_k)^T] K_k^T + K_k E[v_k(v_k)^T] K_k^T
\end{aligned}
$$

그런데 이때

$$
\begin{aligned}
E(\epsilon_k^- v_k^T) &= E[\left(x_k - \hat{x}_k^-\right)v_k^T] \\
&= E[(F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1})v_k^T] - E[\hat{x}_k^- v_k^T] \\
&= 0 + 0 + M_k - 0
\end{aligned}
$$

이므로 이를 대입하면

$$
\begin{aligned}
P_k^+ =\ & P_k^- - K_k H_k P_k^- - K_k M_k^T - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k H_k P_k^- H_k^T K_k^T + K_k M_k^T H_k^T K_k^T - \\
& M_k K_k^T + K_k H_k M_k K_k^T + K_k R_k K_k^T \\
=\ & (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T + K_k\left(H_k M_k + M_k^T H_k^T\right)K_k^T - \\
& M_k K_k^T - K_k M_k^T
\end{aligned}
$$

와 같이 정리된다. 그런데 여기서 K_k는 $Tr\left(P_k^+\right)$를 최소화하기 때문에 미분하면

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Tr\left(P_k^+\right)}{\partial K_k} &= -2(I - K_k H_k)P_k^- H_k^T + 2K_k R_k + 2K_k\left(H_k M_k + M_k^T H_k^T\right) - M_k - M_k \\
&= 2\left(K_k\left(H_k P_k^- H_k^T + H_k M_k + M_k^T H_k^T + R_k\right) - P_k^- H_k^T - M_k\right) \\
K_k &= \left(P_k^- H_k^T + M_k\right)\left(H_k P_k^- H_k^T + H_k M_k + M_k^T H_k^T + R_k\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

다음과 같이 K_k가 구해진다.

이를 다시 P_k^+ 식에 대입하면 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
P_k^+ &= (I-K_kH_k)P_k^-(I-K_kH_k)^T + K_k\left(H_kP_k^-H_k^T + H_kM_k + M_k^TH_k^T + R_k\right)K_k^T - \\
&\quad M_kK_k^T - K_kM_k^T \\
&= P_k^- - K_kH_kP_k^- - P_k^-H_k^TK_k^T + K_k\left(H_kP_k^-H_k^T + H_kM_k + M_k^TH_k^T + R_k\right)K_k^T - \\
&\quad M_kK_k^T - K_kM_k^T \\
&= P_k^- - K_k\left(H_kP_k^- + M_k^T\right) - \left(P_k^-H_k^T + M_k\right)K_k^T + \\
&\quad \left(P_k^-H_k^T + M_k\right)\left(H_kP_k^-H_k^T + H_kM_k + M_k^TH_k^T + R_k\right)^{-1}\left(H_kP_k^- + M_k^T\right) \\
&= P_k^- - K_k\left(H_kP_k^- + M_k^T\right) - \left(P_k^-H_k^T + M_k\right)K_k^T + \left(P_k^-H_k^T + M_k\right)K_k^T \\
&= P_k^- - K_k\left(H_kP_k^- + M_k^T\right)
\end{aligned}$$

정리하면 일반적인 Discrete-Time Kalman Filter는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
P_k^- &= F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^T + Q_{k-1} \\
K_k &= \left(P_k^-H_k^T + M_k\right)\left(H_kP_k^-H_k^T + H_kM_k + M_k^TH_k^T + R_k\right)^{-1} \\
&= P_k^+\left(H_k^T + \left(P_k^-\right)^{-1}M_k\right)\left(R_k - M_k^T\left(P_k^-\right)^{-1}M_k\right)^{-1} \\
\hat{x}_k^- &= F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1}u_{k-1} \\
\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k\left(y_k - H_k\hat{x}_k^-\right) \\
P_k^+ &= P_k^- - K_k\left(H_kP_k^- + M_k^T\right)
\end{aligned}$$

2) Colored Process Noise

다음과 같이 노이즈에 조건이 있는 경우를 살펴보자.

$$\begin{aligned}
x_k &= Fx_{k-1} + w_{k-1} \\
w_k &= \psi w_{k-1} + \zeta_{k-1}
\end{aligned}$$

이와 같은 경우에는 w_k와 w_{k-1}사이 분산이 0이 아니다.

$$E\left(w_kw_{k-1}^T\right) = E\left(\psi w_{k-1}w_{k-1}^T + \zeta_{k-1}w_{k-1}^T\right) = \psi Q_{k-1}$$

따라서 다음과 같이 2D로 식을 변환시킬 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & I \\ 0 & \psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{k-1} \\ w_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_{k-1} \end{bmatrix}$$
$$x_k' = F'x_{k-1}' + w_{k-1}'$$

이 때 노이즈의 공분산은 다음과 같다.

$$E\left(w'_kw'^T_k\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E\left(\zeta_k\zeta_k^T\right) \end{bmatrix} = Q'_k$$

따라서 이제 x', w', F'에 Kalman Filter을 동일하게 적용할 수 있다.

이번엔 다음과 같이 measurement의 노이즈가 colored된 경우를 살펴보자.

$$\begin{aligned}
x_k &= F_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1} \\
y_k &= H_kx_k + v_k \\
v_k &= \psi_{k-1}v_{k-1} + \zeta_{k-1} \\
E\left(w_kw_j^T\right) &= Q_k\delta_{k-j} \\
E\left(\zeta_k\zeta_j^T\right) &= Q_{\zeta k}\delta_{k-j} \\
E\left(w_k\zeta_j^T\right) &= 0
\end{aligned}$$

이 경우에도 앞선 경우와 같이 state를 변환하여 식을 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{k-1} & 0 \\ 0 & \psi_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ v_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ \zeta_{k-1} \end{bmatrix} \\
y_k &= [H_k\ I] \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} + 0 \\
x'_k &= F'_{k-1} x'_{k-1} + w'_{k-1} \\
y_k &= H'_k x'_k + v'_k \\
E\left(w'_k w'^T_k\right) &= E\left(\begin{pmatrix} w_k \\ \zeta_k \end{pmatrix} \left(w_k^T\ \zeta_k^T \right) \right) = \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & Q_{\zeta k} \end{bmatrix} \\
E\left(v'_k v'^T_k\right) &= 0
\end{aligned}
$$

위 문제를 다른 방식으로, state가 아닌 measurement를 변환하는 방식으로 풀면 다음과 같다. 우선 measurement를 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
y'_{k-1} &= y_k - \psi_{k-1} y_{k-1} \\
&= (H_k x_k + v_k) - \psi_{k-1}(H_{k-1} x_{k-1} + v_{k-1}) \\
&= H_k (F_{k-1} x_{k-1} + w_{k-1}) + v_k - \psi_{k-1}(H_{k-1} x_{k-1} + v_{k-1}) \\
&= (H_k F_{k-1} - \psi_{k-1} H_{k-1}) x_{k-1} + H_k w_{k-1} + v_k - \psi_{k-1} v_{k-1} \\
&= (H_k F_{k-1} - \psi_{k-1} H_{k-1}) x_{k-1} + H_k w_{k-1} + \zeta_{k-1} \\
&= H'_{k-1} x_{k-1} + v'_{k-1}
\end{aligned}
$$

따라서 state는 그대로 두고 measurement만 다음과 같이 변환하여 Kalman Filter를 적용시킬 수 있다.

3) Steady-State Filtering

Steady-State Filtering은 시간에 따른 Kalman gain 대신에 steady-state Kalman gain을 사용하여 computational effort를 줄이는 방법이다. 전에 풀어봤던 예제를 가져와 생각해보자.

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + w_k \\
y_k &= x_k + v_k \\
w_k &\sim (0,1) \\
v_k &\sim (0,1)
\end{aligned}
$$

해당 문제에서 steady-state Kalman gain을 계산하면 다음과 같다.

$$
\lim_{k \to \infty} K_k = K_\infty = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}
$$

위의 kalman gain을 이용하여 다음과 같은 steady-state kalman filter를 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_k^- &= F\hat{x}_{k-1}^+ \\
\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_\infty (y_k - H\hat{x}_k^-) \\
&= F\hat{x}_{k-1}^+ + K_\infty (y_k - HF\hat{x}_{k-1}^+) \\
&= (I - K_\infty H) F\hat{x}_{k-1}^+ + K_\infty y_k
\end{aligned}
$$

steady-state kalman filter는 시간마다 kalman gain을 계산하는 것이 아니다 보니 optimal하지는 않다.

그렇다면 일반적인 경우에 steady-state kalman gain을 어떻게 구할지 살펴보자.

$$
\begin{aligned}
P_k^- &= F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^T + Q_{k-1} \\
K_k &= \left(P_k^- H_k^T + M_k\right)\left(H_k P_k^- H_k^T + H_k M_k + M_k^T H_k^T + R_k\right)^{-1} \\
&= P_k^+\left(H_k^T + \left(P_k^-\right)^{-1}M_k\right)\left(R_k - M_k^T\left(P_k^-\right)^{-1}M_k\right)^{-1} \\
\hat{x}_k^- &= F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1}u_{k-1} \\
\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k\left(y_k - H_k\hat{x}_k^-\right) \\
P_k^+ &= P_k^- - K_k\left(H_k P_k^- + M_k^T\right)
\end{aligned}
$$

위와 같은 일반적인 Discrete-Kalman Filter 식을 이용해서

$$
\begin{aligned}
P_{k+1}^- &= FP_k^+F^T + Q \\
&= FP_k^-F^T - FK_kHP_k^-F^T - FK_kM^TF^T + Q \\
&= FP_k^-F^T - F\left(P_k^-H^T + M\right)\left(HP_k^-H^T + HM + M^TH^T + R\right)^{-1}HP_k^-F^T - \\
&\quad F\left(P_k^-H^T + M\right)\left(HP_k^-H^T + HM + M^TH^T + R\right)^{-1}M^TF^T + Q \\
&= FP_k^-F^T - F\left(P_k^-H^T + M\right)\left(HP_k^-H^T + HM + M^TH^T + R\right)^{-1}\left(HP_k^- + M^T\right)F^T + Q
\end{aligned}
$$

$$
P_\infty = FP_\infty F^T - F\left(P_\infty H^T + M\right)\left(HP_\infty H^T + HM + M^TH^T + R\right)^{-1}\left(HP_\infty + M^T\right)F^T + Q
$$

다음과 같이 steady-state의 error covariance을 구할 수 있다. 위 식을 Discrete Algebraic Riccati Equation(DARE)라고 한다.

위 식을 이용해 다음과 같이 steady-state kalman gain을 구할 수 있다.

$$
K_\infty = \left(P_\infty H^T + M\right)\left(HP_\infty H^T + HM + M^TH^T + R\right)^{-1}
$$

Kalman Filter의 stability는 다음과 같이 4가지 종류로 확인할 수 있다.

1) controllability : (F, H)가 controllable 하려면 다음과 같은 controllability matrix가 full rank를 가져야 한다.

$$
C = \left[H\ FH\ F^2H \cdots\right]
$$

2) Observability : (F, H)가 observable하려면 다음과 같은 observability matrix가 full rank를 가져야 한다.

$$
O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \cdots \end{bmatrix}
$$

3) stabilizable : system이 controllable하거나 stable하면 stabilizable하다.

4) detectable : system이 observable하거나 stable하면 detectable하다.

위 상태들에 대해서 다음과 같은 정리가 만족한다.

DARE가 유일한 positive semidefinite solution P_∞를 가지는 것은 다음 두 조건을 모두 만족하는 것과 동치이다.

1) (F, H)가 detectable하다.

2) (F, $Q^{1/2}$)가 stabilizable하다.

또한, 해당하는 steady-state Kalman filter가 stable하면 이는 $(I - K_\infty H)F$의 eigenvalue 값의 크기가 1보다 작다는 의미이다.

*$\alpha-\beta$ filter

$\alpha-\beta$ filter는 steady-state kalman filter의 일종으로 2차원 state에 대한 system이다. 여기서는 position과 velocity를 state로 두고 살펴보자. 그렇다면 다음과 같이 state와 measurement를 정의 가능하다.

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} w'_{k-1} \\ y_k &= [1\ 0]\, x_k + v_k \\ w'_k &\sim (0, \sigma_w^2) \\ v_k &\sim (0, R) \end{aligned}$$

해당 식에서 state를 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + w_{k-1} \\ w_k &\sim (0, Q) \\ Q &= \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} E[w'_k w'^T_k] \left[\, T^2/2\ \ T \right] \\ &= \begin{bmatrix} T^4/4 & T^3/2 \\ T^3/2 & T^2 \end{bmatrix} \sigma_w^2 \end{aligned}$$

위 system에서 다음과 같은 Kalman Filter을 통해 Kalman gain과 covariance을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P^- &= FP^+F^T + Q \\ K &= P^-H^T(HP^-H^T + R)^{-1} \\ \hat{x}_k^- &= F\hat{x}_{k-1}^+ \\ \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K(y_k - H_k\hat{x}_k^-) \\ P^+ &= (I - KH)P^- \end{aligned}$$

위 Kalman Filter 식에 다음과 같은 변수들을 넣어 식을 풀면 된다.

$$\begin{aligned} K &= \left[K_1\, K_2\right]^T = [\alpha\ \beta/T]^T \\ P^- &= \begin{bmatrix} P_{11}^- & P_{12}^- \\ P_{12}^- & P_{22}^- \end{bmatrix} \\ P^+ &= \begin{bmatrix} P_{11}^+ & P_{12}^+ \\ P_{12}^+ & P_{22}^+ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

그 결과 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{1}{8}\left(\lambda^2 + 8\lambda - (\lambda+4)\sqrt{\lambda^2+8\lambda}\right) \\ K_2 &= \frac{1}{4T}\left(\lambda^2 + 4\lambda - \lambda\sqrt{\lambda^2+8\lambda}\right) \\ P_{11}^- &= \frac{K_1\sigma_w^2}{1-K_1},\ P_{12}^- = \frac{K_2\sigma_w^2}{1-K_1},\ P_{22}^- = \left(\frac{K_1}{T} + \frac{K_2}{2}\right)P_{12}^- \\ P_{11}^+ &= K_1R,\ P_{12}^+ = K_2R,\ P_{22}^+ = \left(\frac{K_1}{T} - \frac{K_2}{2}\right)P_{12}^- \end{aligned}$$

여기서 $\lambda = \frac{\sigma_w^2 T^2}{R}$이다.

*$\alpha-\beta-\gamma$ filter

$\alpha-\beta$ filter와 과정은 동일하지만 state가 3개로 바뀐 버전이다. 예시로 state가 position, velocity, acceleration인 경우를 살펴보자. 그렇다면 다음과 같이 system을 정의할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
x_k &= \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix} w'_{k-1} \\
y_k &= [1\ 0\ 0]\, x_k + v_k \\
w'_k &\sim (0, \sigma_w^2) \\
v_k &\sim (0, R)
\end{aligned}
$$

위 식에서 state를 다음과 같이 변환 가능하다.

$$
\begin{aligned}
x_k &= \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + w_{k-1} \\
w_k &\sim (0, Q) \\
Q &= \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix} E[w'_k w'^T_k] \left[T^2/2\ T\ 1 \right] \\
&= \begin{bmatrix} T^4/4 & T^3/2 & T^2/2 \\ T^3/2 & T^2 & T \\ T^2/2 & T & 1 \end{bmatrix} \sigma_w^2
\end{aligned}
$$

위 식에서 다음과 같이 Kalman gain과 covariance의 변수들을 넣고 계산하여 식을 풀면 된다.

$$
\begin{aligned}
K &= \left[K_1\ K_2\ K_3 \right]^T = \left[\alpha\ \ \beta/T\ \ \gamma/2T^2 \right]^T \\
P^+ &= \begin{bmatrix} P_{11}^+ & P_{12}^+ & P_{13}^+ \\ P_{12}^+ & P_{22}^+ & P_{23}^+ \\ P_{13}^+ & P_{23}^+ & P_{33}^+ \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4) Fade-Memory Filter

Kalman Filter의 추정들은 원래 $E(J_N)$을 최소화 시켰다.

$$J_N = \sum_{k=1}^{N} [\left(y_k - H_k \hat{x}_k^-\right)^T R_k^{-1} \left(y_k - H_k \hat{x}_k^-\right) + \hat{w}_k^T Q_k^{-1} \hat{w}_k]$$

그런데 Kalman Filter에는 실제 상황과 다르게 모델링됨으로써 발생하는 Divergence Problem이 존재한다. 따라서 이를 조정하기 위해 다음과 같은 수정된 버전을 사용한다.

$$\widetilde{J_N} = \sum_{k=1}^{N} [\left(y_k - H_k \hat{x}_k^-\right)^T \alpha^{2k} R_k^{-1} \left(y_k - H_k \hat{x}_k^-\right) + \hat{w}_k^T \alpha^{2k+2} Q_k^{-1} \hat{w}_k] \qquad \alpha \geq 1$$

위 식을 사용함으로써 k가 클수록 loss가 커지게 되고, 결과적으로 최근의 관측값에 더 비중을 두어 filtering하게 된다.

적용은 원래의 Kalman Filter 식에 $R_k \rightarrow \alpha^{-2k} R_k,\ Q_k \rightarrow \alpha^{-2k-2} Q_k$로 치환함으로써 적용한다.

원래의 Kalman Filter 식에 해당 치환을 적용한 식은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + \alpha^{-2k} R_k)^{-1} \\
&= \alpha^{2k} P_k^- H_k^T (H_k \alpha^{2k} P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
P_k^- &= F_{k-1} P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + \alpha^{-2k+2} Q_{k-1}/\alpha^2 \\
\alpha^{2k} P_k^- &= F_{k-1} \alpha^{2k} P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + Q_{k-1} \\
&= \alpha^2 F_{k-1} \alpha^{2(k-1)} P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + Q_{k-1} \\
P_k^+ &= P_k^- - K_k H_k P_k^- \\
\alpha^{2k} P_k^+ &= \alpha^{2k} P_k^- - K_k H_k \alpha^{2k} P_k^-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_k &= \tilde{P}_k^- H_k^T (H_k \tilde{P}_k^- H_k^T + R_k)^{-1} & \qquad \tilde{P}_k^+ &= \alpha^{2k} P_k^+ \\
\tilde{P}_k^- &= \alpha^2 F_{k-1} \tilde{P}_{k-1}^+ F_{k-1}^T + Q_{k-1} & \qquad \tilde{P}_k^- &= \alpha^{2k} P_k^- \\
\tilde{P}_k^+ &= \tilde{P}_k^- - K_k H_k \tilde{P}_k^-
\end{aligned}
$$

다음 예제를 살펴보자.

$$
\begin{aligned}
x_k &= x_{k-1} \\
y_k &= x_k + v_k \\
v_k &\sim (0, R)
\end{aligned}
$$

위의 경우 Fade-Memory Filter를 적용하면 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
&P_k^- = \alpha^2 P_{k-1}^+ \\
&K_k = \frac{P_k^-}{P_k^- + R} = \frac{\alpha^2 P_{k-1}^+}{\alpha^2 P_{k-1}^+ + R} \\
&P_k^+ = P_k^- - K_k H_k P_k^- = \alpha^2 P_{k-1}^+ - \frac{\alpha^2 P_{k-1}^+}{\alpha^2 P_{k-1}^+ + R} \alpha^2 P_{k-1}^+ \\
&P_\infty^+ = \alpha^2 P_\infty^+ - \frac{\alpha^2 P_\infty^+}{\alpha^2 P_\infty^+ + R} \alpha^2 P_\infty^+
\end{aligned}
$$

$$
P_\infty^+ = \frac{(\alpha^2 - 1) R}{\alpha^2}
$$

$$
K_\infty = \frac{\alpha^2 P_\infty^+}{\alpha^2 P_\infty^+ + R} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}
$$

위의 식에서

$\alpha = 1$이면 $P_\infty^+ = K_\infty = 0$이므로 이 경우 k가 커지면 measurement가 무시된다는 것을 알 수 있다.

$\alpha > 1$이면 $P_\infty, K_\infty > 0$인데 measurement 식이 $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - \hat{x}_k^-)$이므로 새로운 measurement가 반영이 되며,

$\alpha \to \infty$이면 $K_\infty = 1$이 되어 새로운 measurement가 곧 새로운 state가 된다.

5) Constrained Kalman Filtering

system 외에 $Dx = d$와 같은 추가적인 constaint가 존재하는 경우이다. 예를 들어 알려져 있는 물리 법칙이 이와 같이 작용할 수 있다.

1) Model Reduction
예시를 통해 알아보자.
다음과 같은 system이 있다고 가정하자.

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} w_{k1} \\ w_{k2} \\ w_{k3} \end{bmatrix}$$
$$y_k = [2\,4\,5]\,x_k + v_k$$

여기에 다음과 같은 constraint가 있다고 생각해보자.

$$[1\,0\,1]\,x_k = 0$$

위와 같은 constraint를 통해 다음과 같이 변수를 줄일 수 있다.

$$x_k(3) = -x_k(1)$$

이를 이용해 줄여보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{k+1}(1) &= x_k(1) + 2x_k(2) - 3x_k(1) = -2x_k(1) + 2x_k(2) \\ x_{k+1}(2) &= 3x_k(1) + 2x_k(2) - x_k(1) = 2x_k(1) + 2x_k(2) \\ y_k &= 2x_k(1) + 4x_k(2) - 5x_k(1) + v_k = -3x_k(1) + 4x_k(2) + v_k \end{aligned}$$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} w_{k1} \\ w_{k2} \end{bmatrix}$$
$$y_k = [-3\,4]\,x_k + v_k$$

하지만 이 방법의 경우 state variables에 있는 물리적 의미가 사라지며 등식이 아닌 부등식에는 적용이 불가능하다.

2) Perfect Measurement
system의 measurement 식에 constraint를 합쳐버리는 방식이다. 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k$$
$$\begin{bmatrix} y_k \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_k \\ D \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} v_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

하지만 이 경우 measurement noise항이 singular하게 되고, numerically stable하지 않으며 부등식은 적용하지 못한다.

3) Projection Method : Maximum Probability Approach
다음과 같은 확률을 최대화하는 x를 구하는 방식이다.

$$p(x_k | Y_k) = \frac{\exp[-(x_k - \bar{\bar{x}}_k)^T P_k^{-1}(x_k - \bar{\bar{x}}_k)/2]}{(2\pi)^{n/2}|P_k|^{1/2}}$$
$$\hat{x}_k = \arg\max_{x_k} p(x_k | Y_k)$$

위 식은 곧 다음과 같은 최소화 식으로 대체 가능하며 이를 풀면 다음과 같다.

$$\tilde{x}_k = \arg\min_{\tilde{x}_k} \left(\tilde{x}_k - \bar{\bar{x}}_k\right)^T P_k^{-1} \left(\tilde{x}_k - \bar{\bar{x}}_k\right) \quad \text{such that } D\tilde{x}_k = d$$
$$L = \left(\tilde{x}_k - \bar{\bar{x}}_k\right)^T P_k^{-1} \left(\tilde{x}_k - \bar{\bar{x}}_k\right) + 2\lambda^T \left(D\tilde{x}_k - d\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}_k} = P_k^{-1}\left(\tilde{x}_k - \bar{\bar{x}}_k\right) + D^T \lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = D\tilde{x}_k - d = 0$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_k &= D^{-1}d \\
P_k^{-1}\left(D^{-1}d - \bar{\bar{x}}_k\right) + D^T\lambda &= 0 \\
\lambda &= D^{-T}P_k^{-1}\left(\bar{\bar{x}}_k - D^{-1}d\right) \\
&= D^{-T}P_k^{-1}D^{-1}\left(D\bar{\bar{x}}_k - d\right) \\
&= \left(DP_kD^T\right)^{-1}\left(D\bar{\bar{x}}_k - d\right) \\
&= \left(DP_kD^T\right)^{-1}\left(D\hat{x}_k - d\right) \\
\tilde{x}_k &= \bar{\bar{x}}_k - P_kD^T\lambda \\
&= \hat{x}_k - P_kD^T\left(DP_kD^T\right)^{-1}\left(D\hat{x}_k - d\right)
\end{aligned}
$$

4) Projection Method : Mean Least Square Approach

mean least square method를 이용해 해당 조건을 만족하는 x를 찾는다.

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= \arg\min_{\tilde{x}} E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) \;\; such\ that\ \ D\tilde{x} = d \\
E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) &= \int (x - \tilde{x})^T (x - \tilde{x}) pdf(x|Y) dx \\
&= \int x^T x pdf(x|Y) dx - 2\tilde{x} \int x pdf(x|Y) dx + \tilde{x}^T \tilde{x} \\
L &= E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) + 2\lambda^T (D\tilde{x} - d) \\
&= \int x^T x pdf(x|Y) dx - 2\tilde{x} \int x pdf(x|Y) dx + \tilde{x}^T \tilde{x} + 2\lambda^T (D\tilde{x} - d) \\
\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}} &= -2\hat{x} + 2\tilde{x} + 2D^T\lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= D\tilde{x} - d = 0 \\
\lambda &= (DD^T)^{-1}(D\hat{x} - d) \\
\tilde{x} &= \hat{x} - D^T(DD^T)^{-1}(D\hat{x} - d)
\end{aligned}
$$

5) Projection Method : General Projection Approach

만약 constraint가 $Dx_k = d$라면 다음의 문제를 풀면 된다.

$$\tilde{x} = \arg\min_{\tilde{x}} (\tilde{x} - \hat{x})^T W (\tilde{x} - \hat{x}) \;\; such\ \ that\ \ D\tilde{x} = d$$

그리고 해당 문제에 대해 앞서 해결했던 방식으로 풀면 least squares solution은 다음과 같다.

$$\tilde{x} = \hat{x} - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}(D\hat{x} - d)$$

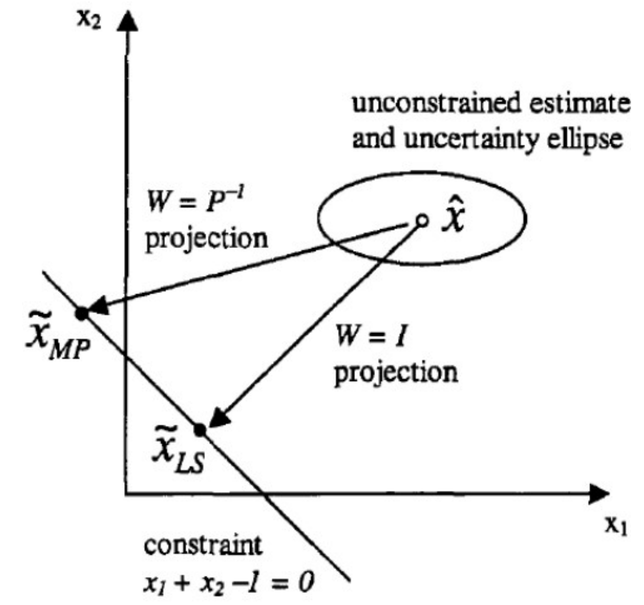
우선 해당 식은 $E(\tilde{x}) = E(x)$이므로 unbiased되어 있다.

또한 만약 $W = P^{-1}$이라면 해는 Maximum Probability Solution이 되며, minimum variance를 가진다.

그리고 만약 $W = I$라면 해는 Mean Least Squares Solution이 된다.

마지막으로 해당 접근은 다음과 같이 부등식 constraint에서도 풀이가 가능하다.

$$\tilde{x} = \arg\min_{\tilde{x}} (\tilde{x} - \hat{x})^T W (\tilde{x} - \hat{x}) \;\; such\ \ that\ \ D\tilde{x} \le d$$


x2
unconstrained estimate
and uncertainty ellipse
W = P^-1
projection
x̂
x̃MP
W = I
projection
x̃LS
x1
constraint
x1 + x2 -1 = 0