Kalman Filter

1. Discrete-Time Kalman Filter

다음과 같은 Discret-Time Linear System을 가정하자.

$x_k = F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}$
$y_k = H_k x_k + v_k$

여기서 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} w_k &\sim (0, Q_k) \\ v_k &\sim (0, R_k) \\ E(w_k w_j^T) &= Q_k \delta_{k-j} \\ E(v_k v_j^T) &= R_k \delta_{k-j} \\ E(v_k w_j^T) &= 0 \end{aligned}$$

해당 문제에서의 목표는 noisy measurement를 바탕으로 x_k를 추정하는 것이다.

앞서 진행될 논의에 대해서 다음의 notation들을 따른다.

$\hat{x}_k^+ = E[x_k | y_{1:k}]$ (a posteriori estimate)

$\hat{x}_k^- = E[x_k | y_{1:k-1}]$ (a priori estimate)

$\hat{x}_0^+ = E[x_0]$

$P_k^- = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T]$

$P_k^+ = E[(x_k - \hat{x}_k^+)(x_k - \hat{x}_k^+)^T]$

우선 dynamic update 과정을 살펴보면 다음과 같다. 여기서의 목표는 $\hat{x}_{k-1}^+$과 P_{k-1}^+로부터 $\hat{x}_k^-$와 P_k^-를 추정하는 것이다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= E[x_k | y_{1:k-1}] \\ &= E[F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1} | y_{1:k-1}] \\ &= F_{k-1}E[x_{k-1} | y_{1:k-1}] + G_{k-1}u_{k-1} \\ &= F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1}u_{k-1} \\ P_k^- &= E[\left(x_k - \hat{x}_k^-\right)\left(x_k - \hat{x}_k^-\right)^T] \\ &= E[\left(F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1} - \left(F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1}u_{k-1}\right)\right)(\bullet)^T] \\ &= E[\left(F_{k-1}\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+\right) + w_{k-1}\right)(\bullet)^T] \\ &= F_{k-1}E[\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+\right)\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+\right)^T]F_{k-1}^T + E[w_{k-1}w_{k-1}^T] \\ &= F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{aligned}$$

그 다음 Measurement update 과정은 다음과 같다. 여기서의 목표는 $\hat{x}_k^-$와 P_k^-로부터 $\hat{x}_k^+$와 P_k^+를 추정하는 것이다.

계산 이전에 우리가 구할 수 있는 정보는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_k^- &= E[x_k | y_{1:k-1}] \\
\hat{y}_k &= E[y_k | y_{1:k-1}] = H_k \hat{x}_k^- \\
C_{yy} &= E[(y_k - \hat{y}_k)(y_k - \hat{y}_k)^T | \bullet] = E[(H_k(x_k - \hat{x}_k) + v_k)(\bullet)^T | \bullet] = H_k P_k^- H_k^T + R_k \\
C_{xy} &= E[(x_k - \hat{x}_k)(y_k - \hat{y}_k)^T | \bullet] = E[(x_k - \hat{x}_k)(H_k(x_k - \hat{x}_k) + v_k)^T | \bullet] = P_k^- H_k^T
\end{aligned}
$$

따라서 LMMSE는 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + C_{xy} C_{yy}^{-1} (y_k - \hat{y}_k) \\
&= \hat{x}_k^- + P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k^-) \\
&= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) \\
P_k^+ &= P_k^- - P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k^- \\
&= P_k^- - K_k H_k P_k^-
\end{aligned}
$$

또한 추가로 전개를 진행하면 다음과 같은 식들이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
P_k^+ &= P_k^- - K_k H_k P_k^- \\
&= P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + P_k^- H_k^T K_k^T \\
&= P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T - K_k H_k P_k^- + K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T \\
&= P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T - K_k H_k P_k^- + K_k H_k P_k^- H_k^T K_k^T + K_k R_k K_k^T \\
&= (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\
P_k^+ &= P_k^- - K_k H_k P_k^- \\
&= P_k^- - P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k^- \\
&= \left((P_k^-)^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \right)^{-1} \\
K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
&= P_k^+ (P_k^+)^{-1} P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
&= P_k^+ \left((P_k^-)^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \right) P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
&= \left(P_k^+ H_k^T + P_k^+ H_k^T R_k^{-1} H_k P_k^- H_k^T \right) (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
&= P_k^+ H_k^T R_k^{-1} \left(R_k + H_k P_k^- H_k^T \right) (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
&= P_k^+ H_k^T R_k^{-1}
\end{aligned}
$$

이를 모두 정리하면 다음과 같다.

1. The dynamic system is given by the following equations:

$$
\begin{aligned}
x_k &= F_{k-1} x_{k-1} + G_{k-1} u_{k-1} + w_{k-1} \\
y_k &= H_k x_k + v_k \\
E(w_k w_j^T) &= Q_k \delta_{k-j} \\
E(v_k v_j^T) &= R_k \delta_{k-j} \\
E(w_k v_j^T) &= 0
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

2. The Kalman filter is initialized as follows:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_0^+ &= E(x_0) \\
P_0^+ &= E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T]
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

3. The Kalman filter is given by the following equations, which are computed for each time step $k = 1, 2, \cdots$:

$$
\begin{aligned}
P_k^- &= F_{k-1} P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + Q_{k-1} \\
K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
&= P_k^+ H_k^T R_k^{-1} \\
\hat{x}_k^- &= F_{k-1} \hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1} u_{k-1} = \textit{a priori} \text{ state estimate} \\
\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) = \textit{a posteriori} \text{ state estimate} \\
P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\
&= \left[(P_k^-)^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \right]^{-1} \\
&= (I - K_k H_k) P_k^-
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Songhwai Oh

Kalman Filter는 estimation error인 $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$를 매 step마다 최소화시키는 과정이라고 볼 수 있다. 따라서 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\min E[\tilde{x}_k^T S_k \tilde{x}_k]$$

여기서 S_k는 user-defined positive definite matrix이다.

또한 만약 w_k와 v_k가 Gaussian이며 zero-mean이고 uncorrelated되어 있으며 white하면 앞서 푼 식으로 Kalman Filter를 적용할 수 있다.
하지만 만약 w_k와 v_k가 zero-mean이고 uncorrelated되어 있으며 white하다면 이 때의 Kalman Filter는 optimal linear filter이다.

Measurement update equation $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-)$에서 $y_k - H_k\hat{x}_k^-$항은 innovations라 불리며 새로운 information을 포함하는 항이다.

2. Alternate Propagation of Covariance

앞서 계산했듯이 estimation-error covariance는 다음과 같다.

$P_k^- = F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^T + Q_{k-1}$

$P_k^+ = P_k^- - P_k^- H_k^T(H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k^-$

여기서 P_k^-를 다음과 같이 factorization할 수 있다면

$P_k^- = A_k B_k^{-1}$

P_{k+1}^-도 다음과 같이 표현할 수 있다.

$P_{k+1}^- = A_{k+1} B_{k+1}^{-1}$

그러면 각 A와 B는 다음과 같은 행렬식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F_k + Q_k F_k^{-T} H_k^T R_k^{-1} H_k) & Q_k F_k^{-T} \\ F_k^{-T} H_k^T R_k^{-1} H_k & F_k^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix}$$

만약 F, Q, H, R이 constant matrix라면,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (F + QF^{-T} H^T R^{-1} H) & QF^{-T} \\ F^{-T} H^T R^{-1} H & F^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} \\ &= \Psi \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

와 같이 표현할 수 있으며, 재귀적으로 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \Psi^{k-1} \begin{bmatrix} P_1^- \\ I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_\infty \\ B_\infty \end{bmatrix} = \Psi^{2^p} \begin{bmatrix} P_1^- \\ I \end{bmatrix}$$

위 식에서 large p에 대해서 A_∞, B_∞를 구할 수 있으며 다음 식을 통해 steady-state covariance를 구할 수 있다.

$P_\infty^- = A_\infty B_\infty^{-1}$

Scalar Case일 때 식을 풀어 써보면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F + \frac{H^2 Q}{FR}) & \frac{Q}{F} \\ \frac{H^2}{FR} & \frac{1}{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix}$$

$$= \Psi \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix}$$

여기서 Ψ는 다음과 같이 Eigenvalue Decomposition이 가능하다.

$$\Psi = M \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$\begin{aligned}
P_k^- &= \frac{\tau_1 \mu_1^{k-1}(2RH^2P_1^- - \tau_2) - \tau_2 \mu_2^{k-1}(2H^2P_1^- - \tau_1)}{2H^2\mu_1^{k-1}(2RH^2P_1^- - \tau_2) - 2H^2\mu_2^{k-1}(2H^2P_1^- - \tau_1)} \\
\lambda_1 &= \frac{H^2Q + R(F^2+1) + \sigma}{2FR} \\
\lambda_2 &= \frac{H^2Q + R(F^2+1) - \sigma}{2FR} \\
\sigma &= \sqrt{H^2Q + R(F+1)^2}\sqrt{H^2Q + R(F-1)^2} \\
\tau_1 &= H^2Q + R(F^2-1) + \sigma \\
\tau_2 &= H^2Q + R(F^2-1) - \sigma \\
\mu_1 &= H^2Q + R(F^2+1) + \sigma \\
\mu_2 &= H^2Q + R(F^2+1) - \sigma \\
M &= \begin{bmatrix} \frac{\tau_1}{2H^2} & \frac{\tau_2}{2H^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
M^{-1} &= \frac{1}{\tau_1(R-1) + 2\sigma} \begin{bmatrix} 2RH^2 & -\tau_1 \\ -2RH^2 & R\tau_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

따라서 재귀적으로 A, B는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \Psi^{k-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k-1} \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} P_1^- \\ 1 \end{bmatrix}$$

그리고 k가 극한으로 갈 때 P_k^-의 값은 다음과 같다.

$$\lim_{k \to \infty} P_k^- = \frac{\tau_1}{2H^2}$$

Ex) $x_{k+1} = x_k + w_k$

$y_k = x_k + v_k$

$w_k \sim (0, 1)$

$v_k \sim (0, 1)$

따라서 여기서 $F = 1, G = 0, H = 1, R = 1, Q = 1$이다.

그에 따라 계산해보면

$\tau_1 = 1 + \sqrt{5}$

$\tau_2 = 1 - \sqrt{5}$

$\mu_1 = 3 + \sqrt{5}$

$\mu_2 = 3 - \sqrt{5}$

$P_\infty^- = \frac{\tau_1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} = \frac{P_k^-}{P_k^- + 1}$

$$K_\infty = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-$$

$$P_\infty^+ = (1 - \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}) \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$