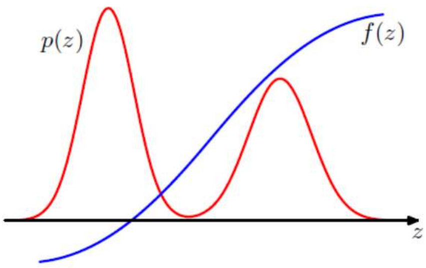
Particle Filter

1. Sampling



다음과 같이 우리는 복잡한 확률 변수와 함께 해당 함수의 기댓값을 구하고자 한다. 이는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$E[f] = \int f(z)p(z)dz$

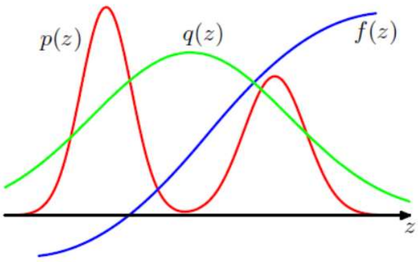
하지만 이는 계산이 매우 복잡하다. 따라서 이와 같이 근사하도록 하자.

$p(z)$로부터 독립적으로 sampling된 point들인 $\{z^{(l)}\}$을 이용해 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$E[\hat{f}] = E[f] = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} f(z^{(l)})$$

$$var[\hat{f}] = \frac{1}{L}E[(f - E[f])^2]$$

하지만 여기서 $p(z)$가 복잡하다면 여기서 sampling하기는 쉽지 않을 수 있다. 따라서 다음과 같이 sampling하기 쉬운 proposal distribution $q(z)$를 이용하여 계산할 수 있다.



위 그림에서 $q(z)$는 proposal distribution이다. 여기서 함수의 기댓값은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$E[f] = \int f(z)p(z)dz = \int f(z)\frac{p(z)}{q(z)}q(z)dz \approx \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\frac{p(z^{(l)})}{q(z^{(l)})}f(z^{(l)})$$

여기서 $z^{(l)}$은 $q(z)$로부터 sampling된 점들이다. 이 때 $p(z) = \frac{\tilde{p}(z)}{Z_p}, q(z) = \frac{\tilde{q}(z)}{Z_q}$를 대입하면 다음과 같다.

$$E[f] = \int f(z)p(z)dz = \frac{Z_q}{Z_p}\int f(z)\frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)}q(z)dz \approx \frac{Z_q}{Z_p}\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\tilde{r}_l f(z^{(l)})$$

여기서 $\tilde{r}_l = \frac{\tilde{p}(z^{(l)})}{\tilde{q}(z^{(l)})}$이다.

그런데 $\int p(z)dz = \int \frac{\tilde{p}(z)}{Z_p}dz = 1$이므로 $Z_p = \int \tilde{p}(z)dz$이다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$\frac{Z_p}{Z_q} = \frac{1}{Z_q}\int \tilde{p}(z)dz = \int \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)}q(z)dz \approx \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\tilde{r}_l$$

이를 앞선 기댓값 식에 대입하면 다음과 같다.

$$E[f] = \frac{Z_q}{Z_p}\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\tilde{r}_l f(z^{(l)}) = \frac{\sum_{l=1}^{L}\tilde{r}_l f(z^{(l)})}{\sum_{l=1}^{L}\tilde{r}_l} = \sum_{l=1}^{L}\frac{\tilde{r}_l}{\sum_{ml=1}^{L}\tilde{r}_m}f(z^{(l)}) = \sum_{l=1}^{L}w_l f(z^{(l)})$$

이에 따라 여기에 사용되는 weight는 다음과 같이 정의된다.

$$w_l = \frac{\tilde{r}_l}{\sum_{m=1}^{L}\tilde{r}_m} = \frac{\tilde{p}(z^{(l)})/q(z^{(l)})}{\sum_m \tilde{p}(z^{(m)})/q(z^{(m)})}$$

Sampling의 과정은 다음과 같다.

1) $q(z)$로부터 $z^{(1)}, \ldots, z^{(L)}$을 sampling한다.

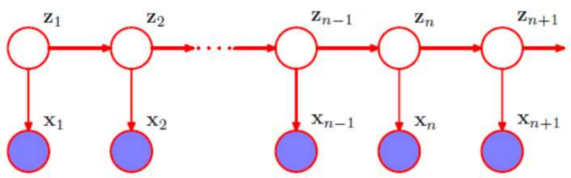
2) $w_1, \ldots, w_L$을 계산한다.

3) $(w_1, \ldots, w_L)$ 확률로부터 $z^{(1)}, \ldots, z^{(L)}$을 다시 sampling한다.

다음 식을 통해 개략적으로 weight를 사용하여 확률분포를 구할 수 있다.

$$p(z \le a) = \sum_{l : z^{(l)} \le a} w_l = \frac{\sum_l I(z^{(l)} \le a)\tilde{p}(z^{(l)})/q(z^{(l)})}{\sum_l \tilde{p}(z^{(l)})/q(z^{(l)})}$$

2. Particle Filter



1) dynamic update

$$\begin{aligned} p(z_{n+1}|X_n) &= \int p(z_{n+1}|z_n, X_n)p(z_n|X_n)dz_n \\ &= \int p(z_{n+1}|z_n)p(z_n|X_n)dz_n \\ &= \int p(z_{n+1}|z_n)p(z_n|x_n, X_{n-1})dz_n \\ &= \frac{\int p(z_{n+1}|z_n)p(x_n|z_n)p(z_n|X_{n-1})dz_n}{\int p(x_n|z_n)p(z_n|X_{n-1})dz_n} \\ &= \sum_l w_n^{(l)} p(z_{n+1}|z_n^{(l)}) \end{aligned}$$

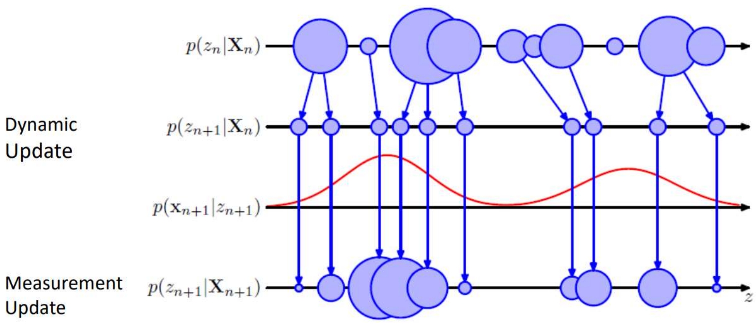
여기서 $p(z_{n+1}|X_n)$에서 sampling한다.

2) measurement update

$$
\begin{aligned}
E[f(z_n)] &= \int f(z_n)p(z_n|X_n)dz_n \\
&= \int f(z_n)p(z_n|x_n, X_{n-1})dz_n \\
&= \frac{\int f(z_n)p(x_n|z_n)p(z_n|X_{n-1})dz_n}{\int p(x_n|z_n)p(z_n|X_{n-1})dz_n} \\
&\approx \sum_{l=1}^{L} w_n^{(l)} f\left(z_n^{(l)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
w_n^{(l)} = \frac{p\left(x_n|z_n^{(l)}\right)}{\sum_{m=1}^{L} p\left(x_n|z_n^{(m)}\right)}
$$

3) total process



time step n에서 posterior distribution $p(z_n|X_n)$은 sample $z_n^{(l)}$에 의해 표현되며 $w_n^{(l)}$이 계산된다.

n+1에 L개의 sample이 분포 $\sum_l w_n^{(l)} p(z_{n+1}|z_n)$에 의해 sampling된다. (dynamic update)

각 sample들은 새로운 measurement x_{n+1}을 이용하여 weight $w_{n+1}^{(l)} \propto p\left(x_{n+1}|z_{n+1}^{(l)}\right)$에 의해 가중화된다. (measurement update)

4) summary