Unscented Kalman Filter

1, Means and Covariances of Nonlinear Transformations

Taylor 전개를 활용하는 EKF의 경우 Nonlinear system을 linearization하는 과정에서 오차가 발생한다. 예시를 통해 평균과 분산에 얼마나 오차가 발생하는 지 확인해보자.

다음과 같은 nonlinear system을 살펴보자.

$$
\begin{aligned}
x &= \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}, y = h(x) \\
y_1 &= rcos\theta \\
y_2 &= rsin\theta \\
r &\sim \left(1, \sigma_r^2\right) \\
\theta &\sim \left(\pi/2, \sigma_\theta^2\right)
\end{aligned}
$$

우선 first order linearization에서의 평균을 살펴보면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= E[h(x)] \\
&\approx E[h(\bar{x}) + \frac{\partial h}{\partial x}|_{\bar{x}}(x - \bar{x})] \\
&= h(\bar{x}) + \frac{\partial h}{\partial x}|_{\bar{x}}E(x - \bar{x}) \\
&= h(\bar{x}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

반면에 실제 y_1과 y_2의 평균은 다음과 같다.

우선 r과 θ를 다음과 같이 표현하자.

$$
\begin{aligned}
r &= \bar{r} + \tilde{r} \\
\theta &= \bar{\theta} + \tilde{\theta}
\end{aligned}
$$

여기서 $\bar{x} = E(x)$이며 $\tilde{x}$는 x의 deviation이다. 그러면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_1 &= E(rcos\theta) \\
&= E[(\bar{r} + \tilde{r})\cos(\bar{\theta} + \tilde{\theta})] \\
&= E[(\bar{r} + \tilde{r})(\cos\bar{\theta}\cos\tilde{\theta} - \sin\bar{\theta}\sin\tilde{\theta})] \\
&= \bar{r}\cos\bar{\theta}E(\cos\tilde{\theta}) \\
&= 0 \\
\bar{y}_2 &= E(rsin\theta) \\
&= E[(\bar{r} + \tilde{r})\sin(\bar{\theta} + \tilde{\theta})] \\
&= E[(\bar{r} + \tilde{r})(\sin\bar{\theta}\cos\tilde{\theta} + \cos\bar{\theta}\sin\tilde{\theta})] \\
&= \bar{r}\sin\bar{\theta}E(\cos\tilde{\theta}) \\
&= E(\cos\tilde{\theta}) \\
&= \frac{\sin\theta_m}{\theta_m}
\end{aligned}
$$

이때, $\theta_m > 0$에 대해 $\frac{\sin\theta_m}{\theta_m} < 1$이며, $\lim_{\theta_m \to 0}\frac{\sin\theta_m}{\theta_m} = 1$이다.

이와 같이 1차 Taylor 전개를 했을 때와 실제가 평균에 있어 차이가 나는 것을 확인할 수 있다.

실제의 measurement를 Taylor 전개를 하여 기댓값을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y &= h(x) \\ &= h(\bar{x}) + D_{\tilde{x}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{x}}^2 h + \frac{1}{3!}D_{\tilde{x}}^3 h + \dots \\ \bar{y} &= E[h(\bar{x}) + D_{\tilde{x}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{x}}^2 h + \frac{1}{3!}D_{\tilde{x}}^3 h + \dots] \\ &= h(\bar{x}) + E[D_{\tilde{x}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{x}}^2 h + \frac{1}{3!}D_{\tilde{x}}^3 h + \dots] \end{aligned}$$

하지만 위 식에서 홀수 미분차수 항들은 결국에 풀어서 전개할 때 미분차수가 1인 항이 하나씩은 나오게 되고 아래와 같이 deviation 값의 1차식의 기댓값은 0이기 때문에 결과적으로 홀수 미분차수 항들의 기댓값이 0이 된다.

$$E[D_{\tilde{x}}h] = E[\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} h(x)|_{x=\tilde{x}}] = \sum_{i=1}^{n} E(\tilde{x}_i) \frac{\partial}{\partial x_i} h(x)|_{x=\tilde{x}} = 0$$

따라서 measurement의 기댓값은 다음과 같이 Taylor 전개가 된다.

$$\bar{y} = h(\bar{x}) + \frac{1}{2!}E(D_{\tilde{x}}^2 h) + \frac{1}{4!}E(D_{\tilde{x}}^4 h) + \dots$$

여기서 뒤의 항은 날리고 2차 항만 남겨서 Taylor 2차 전개에서의 measurement 기댓값을 구해보자.

$$\begin{aligned} \bar{y} &\approx h(\bar{x}) + \frac{1}{2!}E(D_{\tilde{x}}^2 h) \\ &= h(\bar{x}) + \frac{1}{2}E\left(\left(\sum_{i=1}^{2} \tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 h(x)|_{x=\tilde{x}}\right) \\ &= h(\bar{x}) + \frac{1}{2}\left(E(\tilde{x}_1^2)\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1^2}|_{x=\tilde{x}} + 2E(\tilde{x}_1\tilde{x}_2)\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1 \partial x_2}|_{x=\tilde{x}} + E(\tilde{x}_2^2)\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_2^2}|_{x=\tilde{x}}\right) \\ &= h(\bar{x}) + \frac{1}{2}\left(\sigma_r^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2(rcos\theta)}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2(rsin\theta)}{\partial r^2} \end{bmatrix}|_{x=\tilde{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_\theta^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2(rcos\theta)}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2(rsin\theta)}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}|_{x=\tilde{x}}\right) \\ &= h(\bar{x}) + \frac{1}{2}\left(\sigma_r^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}|_{x=\tilde{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_\theta^2 \begin{bmatrix} -rcos\theta \\ -rsin\theta \end{bmatrix}|_{x=\tilde{x}}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\sigma_\theta^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\sigma_\theta^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{E(\tilde{\theta}^2)}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이처럼 1차일 때보다는 줄었지만 실제와 평균에서 차이가 나는 것을 확인할 수 있다.

다음으로 covariance를 계산해보자.

우선 Taylor 전개된 버전의 measurement를 사용하여 measurement의 covariance를 계산해보자.

$$\begin{aligned} y - \bar{y} &= \left(h(\bar{x}) + D_{\tilde{x}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{x}}^2 h + \dots\right) - \left(h(\bar{x}) + \frac{1}{2!}E(D_{\tilde{x}}^2 h) + \frac{1}{4!}E(D_{\tilde{x}}^4 h) + \dots\right) \\ &= \left(D_{\tilde{x}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{x}}^2 h + \dots\right) - \left(\frac{1}{2!}E(D_{\tilde{x}}^2 h) + \frac{1}{4!}E(D_{\tilde{x}}^4 h) + \dots\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_y &= E\left((y-\bar{y})(y-\bar{y})^T\right) \\
&= E\left(D_{\tilde{x}}h\left(D_{\tilde{x}}h\right)^T\right) + E\left(\frac{D_{\tilde{x}}h\left(D_{\tilde{x}}^3h\right)^T}{3!} + \frac{D_{\tilde{x}}^2h\left(D_{\tilde{x}}^2h\right)^T}{2!2!} + \frac{D_{\tilde{x}}^3h\left(D_{\tilde{x}}h\right)^T}{3!}\right) + E\left(\frac{D_{\tilde{x}}^2h}{2!}\right)E\left(\frac{D_{\tilde{x}}^2h}{2!}\right)^T + \ldots
\end{aligned}
$$

이 때 첫번째 항은 다음과 같이 계산되므로

$$
\begin{aligned}
E\left(D_{\tilde{x}}h\left(D_{\tilde{x}}h\right)^T\right) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\frac{\partial h}{\partial x_i}|_{x=\tilde{x}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\frac{\partial h}{\partial x_i}|_{x=\tilde{x}}\right)^T\right) \\
&= E\left(\sum_{i,j}\tilde{x}_i\frac{\partial h}{\partial x_i}|_{x=\tilde{x}}\frac{\partial h^T}{\partial x_j}|_{x=\tilde{x}}\tilde{x}_j\right) \\
&= \sum_{i,j}H_iE\left(\tilde{x}_i\tilde{x}_j\right)H_j^T \\
&= \sum_{i,j}H_iP_{ij}H_j^T \\
&= HPH^T
\end{aligned}
$$

covariance 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
P_y &= HPH^T + E\left(\frac{D_{\tilde{x}}h\left(D_{\tilde{x}}^3h\right)^T}{3!} + \frac{D_{\tilde{x}}^2h\left(D_{\tilde{x}}^2h\right)^T}{2!2!} + \frac{D_{\tilde{x}}^3h\left(D_{\tilde{x}}h\right)^T}{3!}\right) + E\left(\frac{D_{\tilde{x}}^2h}{2!}\right)E\left(\frac{D_{\tilde{x}}^2h}{2!}\right)^T + \ldots \\
&\approx HP_xH^T
\end{aligned}
$$

위의 예시에서는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& y_1 = rcos\theta,\ y_2 = rsin\theta \\
& H = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -rsin\theta \\ \sin\theta & rcos\theta \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
& P_x = E\left(\begin{bmatrix} r-\bar{r} \\ r-\bar{\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r-\bar{r} \\ r-\bar{\theta} \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix} \\
& P_y \approx HP_xH^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

또한 뒤의 고차항들을 무시하지 않은 정확한 covariance는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
P_y &= \left((y-\bar{y})(y-\bar{y})^T\right) \\
&= E\left(\begin{bmatrix} rcos\theta - E(rsin\theta) \\ rsin\theta - E(rcos\theta) \end{bmatrix}[\ldots]^T\right) \\
&= E\left(\begin{bmatrix} rcos\theta \\ rsin\theta - \dfrac{\sin\theta_m}{\theta_m} \end{bmatrix}[\ldots]^T\right) \\
&= E\left(\begin{bmatrix} r^2\cos^2\theta & r^2\cos\theta sin\theta - rcos\theta\dfrac{\sin\theta_m}{\theta_m} \\ r^2\cos\theta sin\theta - rcos\theta\dfrac{\sin\theta_m}{\theta_m} & \left(rsin\theta - \dfrac{\sin\theta_m}{\theta_m}\right)^2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

여기서 다음의 식들을 대입하게 되면, (여기서 앞서 정의했듯 $r \sim u\left(1, \sigma_r^2\right)$이고, $\theta \sim u(\pi/2-\theta_m, \pi/2+\theta_m)$이다.

$$
\begin{aligned}
&E(r^2) = 1 + \sigma_r^2 \\
&E(\cos 2\tilde{\theta}) = \frac{\sin 2\theta_m}{2\theta_m} \\
&E(\cos^2\tilde{\theta}) = \frac{1 - E(\cos 2\tilde{\theta})}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\theta_m}{2\theta_m}\right) \\
&E(\sin\theta) = E(\cos\tilde{\theta}) = \frac{\sin\theta_m}{\theta_m}
\end{aligned}
$$

다음과 같이 covariance가 계산된다.

$$
P_y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\sigma_r^2)\left(1 - \frac{\sin 2\theta_m}{2\theta_m}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\sigma_r^2)\left(1 + \frac{\sin 2\theta_m}{2\theta_m}\right) - \frac{\sin^2\theta_m}{\theta_m^2} \end{bmatrix}
$$

2. Unscented Transformation

unscented transformation은 두 기본 정리를 기반으로 한다. 하나는 nonlinear transformation을 하나의 single point로 표현하는 것은 쉽다는 것이고, 다른 하나는 개별적인 점들의 집합으로 true pdf를 근사하는 sample pdf를 만드는 것은 어렵지 않다는 것이다.

예시로 $n \times 1$ 크기의 벡터 x와 nonlinear function $y = h(x)$를 통해 다음과 같은 2n개의 sigma point들을 생각하자.

$$
\begin{aligned}
&x^{(i)} = \bar{x} + \tilde{x}^{(i)} && i = 1, \ldots, 2n \\
&\tilde{x}^{(i)} = (\sqrt{nP})_i^T && i = 1, \ldots, n \\
&\tilde{x}^{(n+i)} = -(\sqrt{nP})_i^T && i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

위 식에서 $(\sqrt{nP})_i$는 $\sqrt{nP}$의 i번째 항이며 해당 식에 따라 n번째까지는 deviation이 $(\sqrt{nP})_i^T$인 point들이, n번째에서 2n번째까지는 deviation이 $-(\sqrt{nP})_i^T$인 point들이 만들어져 대칭적인 분포가 완성된다.

위 분포에 대해서 구해지는 y의 근사적인 평균은 다음과 같이 weighted sum으로 정의된다.

$$
\bar{y}_u = \sum_{i=1}^{2n} W^{(i)} y^{(i)}
$$

여기서 weight coefficient는 $W^{(i)} = \frac{1}{2n}$으로 정의되어 결국 다음과 같다.

$$
\bar{y}_u = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} y^{(i)}
$$

위 식에 앞서 구했던 measurement의 Taylor 전개된 식을 대입하면 다음과 같다.

$$\bar{y}_u = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(h(\bar{x}) + D_{\tilde{x}^{(i)}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^2 h + \ldots\right)$$
$$= h(\bar{x}) + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(D_{\tilde{x}^{(i)}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^2 h + \ldots\right)$$

그런데 미분차수가 홀수 차수인 식들은 아래와 같이 deviation값이 홀수차수가 되는데 분포의 대칭성에 의해 이를 모두 sum하게 되면 결국 0이 된다.

$$\sum_{j=1}^{2n} D_{\tilde{x}^{(j)}}^{2k+1}h = \sum_{j=1}^{2n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^{(j)}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{2k+1} h(x)|_{x=\bar{x}}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{x}_i^{(j)}\right)^{2k+1}\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x_i^{2k+1}}h(x)|_{x=\bar{x}}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{2n}\left(\tilde{x}_i^{(j)}\right)^{2k+1}\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x_i^{2k+1}}h(x)|_{x=\bar{x}}\right)$$
$$= 0$$

따라서 홀수 차수는 모두 지워지고 다음과 같다.

$$\bar{y}_u = h(\bar{x}) + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{1}{2!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^2 h + \frac{1}{4!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^4 h + \ldots\right)$$
$$= h(\bar{x}) + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^2 h + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{1}{4!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^4 h + \frac{1}{6!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^6 h + \ldots\right)$$

여기서 두 번째 항을 따로 계산해보면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^2 h = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 h(x)|_{x=\bar{x}}$$
$$= \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{x}_i^{(k)}\tilde{x}_j^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}h(x)|_{x=\bar{x}}$$
$$= \frac{1}{4n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}\tilde{x}_i^{(k)}\tilde{x}_j^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}h(x)|_{x=\bar{x}}$$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{x}_i^{(k)}\tilde{x}_j^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}h(x)|_{x=\bar{x}} \quad \text{(분포의 대칭성에 의해)}$$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{nP})_{ki}(\sqrt{nP})_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}h(x)|_{x=\bar{x}}$$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n} nP_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}h(x)|_{x=\bar{x}}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}h(x)|_{x=\bar{x}}$$

위 식을 대입해서 다시 써보면 다음과 같다.

$$\bar{y}_u = h(\bar{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}h(x)|_{x=\bar{x}} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{1}{4!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^4 h + \frac{1}{6!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^6 h + \ldots\right)$$

이번에는 앞서 계산했었던 실제 measurement의 평균 식을 다시 한 번 살펴보자.

$$\bar{y} = h(\bar{x}) + \frac{1}{2!}E\left(D_{\tilde{x}}^2 h\right) + \frac{1}{4!}E\left(D_{\tilde{x}}^4 h\right) + \ldots$$

여기서도 두번째 항을 전개하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2!}E\left(D_{\tilde{x}}^2 h\right) &= \frac{1}{2!}E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 h(x)|_{x=\bar{x}}\right) \\
&= \frac{1}{2!}E\left(\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{x}_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}h(x)|_{x=\bar{x}}\right) \\
&= \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}E\left(\tilde{x}_i\tilde{x}_j\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}h(x)|_{x=\bar{x}} \\
&= \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}P_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}|_{x=\bar{x}}
\end{aligned}
$$

따라서 이를 대입하고 다시 써보면 다음과 같다.

$$
\bar{y} = h(\bar{x}) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}P_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}|_{x=\bar{x}} + \frac{1}{4!}E\left(D_{\tilde{x}}^4 h\right) + \frac{1}{6!}E\left(D_{\tilde{x}}^6 h\right) + \ldots
$$

위에서 구한 approximation mean과 비교해보면 2차항까지는 동일하다는 것을 알 수 있다. 3차항은 0이므로 unscented transformation은 3차항까지 실제와 동일하며 1차항까지 match되는 linearization보다는 훨씬 정확하다.

이제 approximation covariance도 계산해보자.
동일하게 다음과 같이 weighted sum으로 계산 가능하며 weight는 동일하다.

$$
P_u = \sum_{i=1}^{2n}W^{(i)}\left(y^{(i)} - y_u\right)\left(y^{(i)} - y_u\right)^T = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(y^{(i)} - y_u\right)\left(y^{(i)} - y_u\right)^T
$$

그리고 nonlinear function을 대입하면 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
P_u &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y_u\right)\left(h\left(x^{(i)}\right) - y_u\right)^T \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(h(\bar{x}) + D_{\tilde{x}^{(i)}}h + \frac{1}{2}D_{\tilde{x}^{(i)}}^2 h + \frac{1}{3!}D_{\tilde{x}^{(i)}}^3 h + \ldots - h(\bar{x}) - \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{1}{2}D_{\tilde{x}^{(j)}}^2 h + \frac{1}{4!}D_{\tilde{x}^{(j)}}^2 h + \ldots\right)\right)(\ldots)^T \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}D_{\tilde{x}^{(i)}}h\left(D_{\tilde{x}^{(i)}}h\right)^T + HOT \qquad (HOT : Higher - Order\ Terms)
\end{aligned}
$$

Higher-Order Term들을 모두 날려버리면 결국 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
P_u &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\tilde{x}_j^{(i)}\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_j}\right)\left(\tilde{x}_k^{(i)}\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_k}\right)^T \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\tilde{x}_j^{(i)}\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_j}\right)\left(\tilde{x}_k^{(i)}\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_k}\right)^T \\
&= \sum_{j,k=1}^{n}P_{jk}\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_j}\left(\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_k}\right)^T \\
&= HPH^T
\end{aligned}
$$

결과적으로 unscented Transformation 과정을 정리하면 다음과 같다.

The unscented transformation

1. We begin with an n-element vector x with known mean $\bar{x}$ and covariance P. Given a known nonlinear transformation $y = h(x)$, we want to estimate the mean and covariance of y, denoted as $\bar{y}_u$ and P_u.

2. Form $2n$ sigma point vectors $x^{(i)}$ as follows:

$$
\begin{aligned}
x^{(i)} &= \bar{x} + \tilde{x}^{(i)} \quad i = 1, \cdots, 2n \\
\tilde{x}^{(i)} &= \left(\sqrt{nP}\right)_i^T \quad i = 1, \cdots, n \\
\tilde{x}^{(n+i)} &= -\left(\sqrt{nP}\right)_i^T \quad i = 1, \cdots, n
\end{aligned} \tag{14.50}
$$

where $\sqrt{nP}$ is the matrix square root of nP such that $(\sqrt{nP})^T \sqrt{nP} = nP$, and $(\sqrt{nP})_i$ is the ith row of $\sqrt{nP}$.

3. Transform the sigma points as follows:

$$
y^{(i)} = h(x^{(i)}) \quad i = 1, \cdots, 2n \tag{14.51}
$$

4. Approximate the mean and covariance of y as follows:

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_u &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} y^{(i)} \\
P_u &= \frac{1}{2n} \sum^{2n} \left(y^{(i)} - y_u\right)\left(y^{(i)} - y_u\right)^T
\end{aligned} \tag{14.52}
$$

3. Unscented Kalman Filtering

앞서 unscented transformation에서 평균과 분산을 구해 보았을 때, EKF에서의 차이보다 훨씬 실제와 오차가 적다는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 이를 이용하여 unscented Kalman Filtering을 다음과 같이 적용할 수 있다.

우선 다음과 같은 nonlinear system이 있을 때,

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= f(x_k, u_k, t_k) + w_k \\
y_k &= h(x_k, t_k) + v_k \\
w_k &\sim (0, Q_k) \\
v_k &\sim (0, R_k)
\end{aligned}
$$

우선 unscented transformation을 통해 다음과 같이 dynamic update가 가능하다.

<u>Dynamic Update</u>

Sigma points

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{k-1}^{(i)} &= \hat{x}_{k-1}^{+} + \tilde{x}^{(i)} \quad i = 1, \cdots, 2n \\
\tilde{x}^{(i)} &= \left(\sqrt{nP_{k-1}^{+}}\right)_i^T \quad i = 1, \cdots, n \\
\tilde{x}^{(n+i)} &= -\left(\sqrt{nP_{k-1}^{+}}\right)_i^T \quad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

Sigma point prediction

$$
\hat{x}_k^{(i)} = f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}, u_k, t_k)
$$

Combination

$$
\hat{x}_k^{-} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{x}_k^{(i)}
$$

$$
P_k^{-} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^{-}\right)\left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^{-}\right)^T + Q_{k-1}
$$

그 후에 dynamic update에서 추정한 값을 통해 다시 한 번 unscented transformation을 통해 measurement update가 가능하다.

Sigma points	$$\begin{aligned}\hat{x}_k^{(i)} &= \hat{x}_k^- + \tilde{x}^{(i)} \quad i = 1, \cdots, 2n \\ \tilde{x}^{(i)} &= \left(\sqrt{nP_k^-}\right)_i^T \quad i = 1, \cdots, n \\ \tilde{x}^{(n+i)} &= -\left(\sqrt{nP_k^-}\right)_i^T \quad i = 1, \cdots, n\end{aligned}$$
Sigma point prediction	$$\hat{y}_k^{(i)} = h(\hat{x}_k^{(i)}, t_k)$$
Combination	$$\hat{y}_k = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\hat{y}_k^{(i)}$$ $$P_y = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k\right)\left(\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k\right)^T + R_k$$
Measurement Update	$$P_{xy} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^-\right)\left(\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k\right)^T$$ $$\begin{aligned}K_k &= P_{xy}P_y^{-1} \\ \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k(y_k - \hat{y}_k) \\ P_k^+ &= P_k^- - K_k P_y K_k^T\end{aligned}$$

추가적으로 다음과 같이 general unscented transformation이 있는데, 이는 κ값을 조정함으로써 high-order approximation error 값들을 줄일 수 있다.

$$\begin{aligned}x^{(0)} &= \bar{x} \\ x^{(i)} &= \bar{x} + \tilde{x}^{(i)} \quad i = 1, \cdots, 2n \\ \tilde{x}^{(i)} &= \left(\sqrt{(n+\kappa)P}\right)_i^T \quad i = 1, \cdots, n \\ \tilde{x}^{(n+i)} &= -\left(\sqrt{(n+\kappa)P}\right)_i^T \quad i = 1, \cdots, n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W^{(0)} &= \frac{\kappa}{n+\kappa} \\ W^{(i)} &= \frac{1}{2(n+\kappa)} \quad i = 1, \cdots, 2n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^{(i)} &= h\left(x^{(i)}\right) \\ \bar{y}_u &= \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} y^{(i)} \\ P_u &= \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)}\left(y^{(i)} - y_u\right)\left(y^{(i)} - y_u\right)^T\end{aligned}$$