https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=318

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 15

20 stycznia 2021 r.

- Lista ta zawiera **wybrane** zadania egzaminacyjne z ostatnich lat.
- Podanymi zadaniami **nie należy** nadmiernie sugerować się podczas przygotowań do egzaminu.[a]

[a] Nie oznacza to jednak, że prawdopodobieństwo zdarzenia *kilka bardzo podobnych zadań pojawi się na egzaminie* jest zerowe.

L15.1. W języku programowania `PWO++` funkcja `cos`(x) oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość $\cos(x)$, jednak **tylko wtedy**, gdy $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Wykorzystując funkcję `cos`, zaproponuj `algorytm` wyznaczający wartości funkcji cosinus z dużą dokładnością dla $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

L15.2. Jakie znaczenie z punktu widzenia analizy numerycznej ma pojęcie uwarunkowania zadania?

L15.3. Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli: **a)** $f(x) = \ln(x)$, **b)** $f(x) = (x-1)^{10}$.

L15.4. Podaj definicję zadania źle uwarunkowanego, a następnie zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

L15.5. Załóżmy, że liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są tego samego znaku. Uzasadnij, że zadanie obliczania ich sumy jest zadaniem dobrze uwarunkowanym. Jakie znaczenie ma ten fakt w kontekście obliczeń numerycznych?

L15.6. Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x. Wartość funkcji $f(x) := e^{5x}$ obliczamy w punkcie $x \approx 0.8$. Jak dużej utraty dwójkowych cyfr znaczących spodziewamy się, jeżeli x odbiega od 0.8 o jedną dwójkową cyfrę znaczącą?

L15.7. Wytłumacz dokładnie kiedy występuje i na czym polega zjawisko utraty cyfr znaczących wyniku. Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażenia $(\sqrt{x^2+2}+x)^{-1}$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.

L15.8. Dla $x \approx 0$ obliczanie wartości wyrażenia $x^{-5}(\sin(3x) - 3x + 9x^3/2)$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku. Zakładając, że $|x| \leq \frac{1}{10}$, zaproponuj taki sposób obliczenia wartości tego wyrażenia, aby mieć pewność, że błąd bezwzględny nie przekracza 10^{-7}.

L15.9. Do rozwiązania zadania obliczeniowego $\mathcal{A}$ użyto komputera i algorytmu numerycznie poprawnego. Czy można mieć pewność, że otrzymany w ten sposób wynik jest bliski rzeczywistego rozwiązania zadania $\mathcal{A}$? Odpowiedź uzasadnij.

L15.10. Sprawdź czy następujący algorytm jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```
S:=x[0];

  for i from 1 to 4
    do
      S:=3*S+x[i]
    od;

return(S)
```

L15.11. Niech dany będzie wielomian $w(x) := a_1x/3! - a_3x^3/5! + a_5x^5/7! - a_7x^7/9!$. Rozważmy następujący algorytm obliczania jego wartości w punkcie $x \in \mathbb{R}$:

```
w:=a[7]

  for n from 3 downto 1
    do
      w:=a[2*n-1]-x^2/(2*n+3)/(2*n+2)*w
    od

return(w*x/2/3)
```

Przyjmując, że a_1, a_3, a_5, a_7 oraz x są liczbami maszynowymi, sprawdź czy algorytm ten jest algorytmem numerycznie poprawnym.

L15.12. Opisz metodę bisekcji i podaj jej własności.

L15.13. Stosując metodę Newtona, zaproponuj sposób przybliżonego obliczania wartości $\sqrt[5]{a}$ $(a > 0)$. Jak dobrać x_0? Jak powinien wyglądać warunek *stopu*?

L15.14. Niech α będzie pierwiastkiem pojedynczym funkcji f $(f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) \neq 0)$. Udowodnij, że wówczas rząd zbieżności metody Newtona wynosi $p = 2$.

L15.15. Zaproponuj efektywny algorytm obliczania z dużą dokładnością wartości $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ wykorzystując **jedynie** operacje arytmetyczne $(+, -, \cdot, /)$.

L15.16. Sformułuj i podaj interpretację geometryczną metody siecznych. Jak w wypadku tej metody powinien wyglądać *warunek stopu*?

L15.17. Podaj efektywny algorytm wyznaczania wartości liczby naturalnej a, której cyframi dziesiętnymi (od najbardziej do najmniej znaczącej) są $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, gdzie $a_n \neq 0$.

L15.18. Sformułuj i uzasadnij uogólniony schemat Hornera obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Newtona.

L15.19. Sformułuj i uzasadnij algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Czebyszewa.

L15.20. Niech dany będzie wielomian $w_n \in \Pi_n$ postaci

$$w_n(x) := z_0(x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n),$$

gdzie liczby rzeczywiste $z_0, z_1, \ldots, z_n$ są dane. Opracuj i uzasadnij **oszczędny** algorytm znajdowania postaci potęgowej wielomianu w_n. Określ złożoność zaproponowanej metody. Gdzie, w kontekście metod omówionych w ramach wykładu, algorytm taki może mieć zastosowania?

L15.21. Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_4 \in \Pi_4$ dla danych

x_k	-2	-1	1	2	3
y_k	1	2	10	29	106

.

L15.22. Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

a)

x_k	-2	-1	0	1
y_k	2	0	2	-4

,

b)

x_k	1	2	-1	-2	0
y_k	-4	-30	0	2	2

.

L15.23. Funkcję $f(x) = \cos(x/2)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Jak należy dobrać n, aby mieć pewność, że

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-8} \ ?$$

L15.24. Niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ w węzłach postaci

$$x_{nk} := \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) + \frac{1}{2} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Jak należy dobrać n, aby mieć pewność, że

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-15} \ ?$$

L15.25. Niech dane będą: liczba naturalna n i parami różne liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Zaproponuj algorytm znajdowania takich liczb $c_0, c_1, \ldots, c_n$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$x^n = c_0 + c_1(x - a_0) + c_2(x - a_0)(x - a_1) + \ldots + c_n(x - a_0)(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n-1}).$$

Podaj jego złożoność obliczeniową i pamięciową.

L15.26. (a) Podaj definicję naturalnej funkcji sklejanej trzeciego stopnia.

(b) Znajdź naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

x_k	-1	0	1
y_k	-1	2	-3

.

L15.27. Niech dane będą wektory $\mathtt{x}{:=}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $(x_k < x_{k+1},\ 0 \le k \le n-1)$, $\mathtt{y}{:=}[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\mathtt{z}{:=}[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ $(0 \le k \le n)$. Jak pamiętamy, w języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor $\mathtt{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję f. Wywołując procedurę

`NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich **miejsc zerowych** funkcji f znajdujących się w przedziale $[x_0, x_{100}]$. W swoim rozwiązaniu możesz **użyć wielokrotnie** innej procedury języka `PWO++`, a mianowicie `Solve3(a,b,c,d)` znajdującej z dużą dokładnością wszystkie rzeczywiste miejsca zerowe wielomianu $\mathtt{a}x^3+\mathtt{b}x^2+\mathtt{c}x+\mathtt{d}$ albo informującej, że takich miejsc zerowych nie ma.

L15.28. Wstęp. Niech dane będą wektory liczb rzeczywistych $\mathtt{x}:=[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ($x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), $\mathtt{y}:=[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ i $\mathtt{z}:=[z_0, z_1, \ldots, z_m]$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Niech s_n oznacza naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \le k \le n$). W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor $[s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)]$. Zadanie. Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \le k \le 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f. Można więc przypuszczać, że

$$S_n := \int_{x_0}^{x_n} s_n(x)\,\mathrm{d}x$$

jest bardzo dobrym przybliżeniem wartości całki $I := \displaystyle\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x$. Stosując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, zaproponuj szkic **efektywnego algorytmu** wyznaczania wielkości S_n. Zadbaj więc m.in. o to, aby liczba współrzędnych wektora `z` (czyli wartość $m+1$) **była możliwie jak najmniejsza**.

L15.29. Dana jest *postać Béziera* wielomianu $p \in \Pi_n$, tj.

$$p(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k B_k^n(t), \qquad \text{gdzie} \qquad B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Uzasadnij, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(1)} B_k^{n+1}(t) \qquad \text{dla} \qquad a_k^{(1)} := \frac{n-k+1}{n+1} a_k + \frac{k}{n+1} a_{k-1} \quad (0 \le k \le n+1),$$

gdzie przyjęto $a_{-1} = a_{n+1} := 0$. Jakie zastosowanie może mieć ta zależność?

L15.30. Podaj definicję krzywej Béziera P stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Uzasadnij, że dla każdego $t \in [0,1]$, $P(t)$ jest punktem na płaszczyźnie.

L15.31. Niech P będzie krzywą Béziera stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Ustalmy $t \in [0,1]$. Zaproponuj algorytm wyznaczania $P(t)$ w czasie $O(n)$.

L15.32. Niech p będzie wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej n. W języku `PWO++` procedura `BezierCoeffs(`p, t`)` wyznacza taki wektor $\mathtt{c}:= [c_0, c_1, \ldots, c_n]$, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k B_k^n(t),$$

gdzie $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n$ są wielomianami Bernsteina stopnia n. Współczynniki c_k ($0 \le k \le n$) nazywamy *współczynnikami Béziera* wielomianu p. Niestety, procedura ta ma **pewne ograniczenie**, mianowicie: **musi być** $n \le 50$.

W jaki sposób, używając procedury `BezierCoeffs` co najwyżej **dwa razy**, wyznaczyć współczynniki Béziera wielomianu $w(t) := p(t) \cdot q(t)$, gdzie $p \in \Pi_{50}$, a $q \in \Pi_2$? Jak zmieni się rozwiązanie, jeśli przyjąć, że $q \in \Pi_{50}$?

L15.33. Pomiary (t_k, c_k) $(0 \le k \le N;\ t_k > 0,\ c_k > 1)$ pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 2^{(At^2+2018)^{-1}}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobną wartość parametru A.

L15.34. Wyznacz funkcję postaci $y(x) = \dfrac{ax^2-3}{x^2+1}$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_k	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

,

przy założeniu, że $s_2 = 10$, $s_4 = -3$, gdzie $s_m := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^m}{(x_k^2+1)^2}$ $(m = 2, 4)$.

L15.35. (a) Znajdź wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne względem iloczynu skalarnego

$$(f, g) := f(-2)g(-2) + f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

(b) Wykorzystując wynik otrzymany w punkcie (a), wyznacz wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	4	1	1	1	4

.

L15.36. Niech $P_0, P_1, \ldots, P_N$ będą wielomianami ortogonalnymi względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f, g)_N := \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k),$$

gdzie $x_k := -a + \frac{2ak}{N}$ $(k = 0, 1, \ldots, N;\ a > 0)$. Udowodnij, że jeśli α jest miejscem zerowym wielomianu P_k $(0 \le k \le N)$, to także $-\alpha$ jest miejscem zerowym tego wielomianu.

L15.37. Podaj definicję ciągu wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Jak efektywnie wyznaczać takie wielomiany? Jakie jest ich zastosowanie w aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym?

L15.38. Znajdź wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do następujących danych:

x_k	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y_k	-5.5	-5	-3.2	-1	1	3.2	5	5.5

.

Uwaga. Rozwiązanie nie wymaga wielu obliczeń, ale jeśli tego nie zauważysz, też możesz zdobyć maksimum punktów.

L15.39. Podaj definicję rzędu kwadratury liniowej $Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$. Udowodnij, że jeśli rząd kwadratury Q_n wynosi przynajmniej $n+1$, to jest to kwadratura interpolacyjna.

L15.40. Jaki maksymalnie rząd może mieć kwadratura liniowa? Odpowiedź uzasadnij.

L15.41. Opisz ideę kwadratur złożonych. Wyprowadź złożony wzór Simpsona.

L15.42. Opisz metodę Romberga obliczania przybliżonej wartości całki $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

L15.43. Opisz kwadratury złożone. Jaką mają one przewagę nad kwadraturami Newtona-Cotesa? Czy są one związane z metodą Romberga? Jeśli tak, to w jaki sposób?

L15.44. Znajdź rozkład LU macierzy $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 9 \\ -8 & -24 & 32 & -16 \end{bmatrix}$. Następnie wykorzystaj otrzymany rozkład do rozwiązania układu równań $Ax = b$, gdzie $b := [17, -33, 70, -112]^T$.

L15.45. Niech dana będzie macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Przypomnijmy, że *rzędem* macierzy nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych kolumn. Opracuj algorytm numerycznego wyznaczania rzędu macierzy A. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

L15.46. Niech dana będzie macierz nieosobliwa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zaproponuj efektywny algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej A^{-1} i podaj jego złożoność.

L15.47. Niech dane będą macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania takiej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, aby zachodziła równość $AX = B$. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

L15.48. Opracuj metodę wyznaczania rozkładu LU macierzy $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & & & & & c_1 \\ & a_2 & & & & c_2 \\ & & a_3 & & & c_3 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Podaj jej złożoność.

L15.49. Załóżmy, że macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ma wszystkie minory główne różne od zera. Niech dane będą wektory $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$. Zaproponuj **oszczędny** algorytm wyznaczania wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, dla kórych $Ax_k = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Jak opracowaną metodę zastosować do znalezienia takiej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dla której $AX = B$, gdzie macierz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest dana?

Uwaga. W rozwiązaniu **nie wolno** wprost wyznaczać macierzy A^{-1}, bo – jak wiadomo – nie jest to bezpieczne z numerycznego punktu widzenia.

(–) Paweł Woźny