Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Część egzaminu.

Informacje organizacyjne.

1. Zadanie jest częścią egzaminu.
2. Zadanie jest oceniane w skali 0–8 punktów.
3. Wynikiem końcowym jest $\Phi(t)$.
4. Termin realizacji to 16. kwietnia, $23^{\underline{59}}$.
5. Do zadania dołączamy od 3 do 6 stron sprawozdania (w LaTeXu). Tekst źródłowy nie zalicza się do długości dokumentu.
6. We wszystkich zadaniach korzystamy ze standardowej funkcji obliczającej e^x. Rozwiązanie powinno opierać się na złożonym wzorze trapezów i metodzie Romberga. Dokładność – 8 cyfr dziesiętnych.
7. Niech $j = (\text{index} \bmod 5) + 1$. Rozwiązujemy zadanie numer j.

Zadanie 1.

Standardowy rozkład normalny ma gęstość określoną wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dla dystrybuanty otrzymujemy wyrażenie:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

która to całka nie ma przedstawienia za pomocą funkcji elementarnych.

Dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$ obliczyć wartość całki

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\,.$$

Zadanie 2.

Rozkład Fishera z parametrami $m, n \in \mathbb{N}$ ma gęstość

$$f(x) = \sqrt{\frac{(mx)^m \cdot n^n}{(mx+n)^{m+n}}} \Big/ \left(x \cdot B(m/2, n/2)\right), \quad x \in (0, \infty). \tag{2}$$

Dla ustalonego $t > 0$ obliczyć wartość całki

$$G(t) = \int_0^t f(x)\,dx\,.$$

Zadanie 3.

Rozkład $\chi^2(k)$ ma gęstość

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1}\,\mathrm{e}^{-x/2}, \quad x \in (0, \infty). \tag{3}$$

Dla ustalonego $t > 0$ obliczyć wartość całki

$$G(t) = \int_0^t f(x)\,dx\,.$$

Zadanie 4.

Rozkład t-Studenta z k stopniami swobody ma gęstość

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma(\frac{k}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$ obliczyć wartość całki

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx\,.$$

Zadanie 5.

Rozkład Erlanga z parametrami k, λ ma gęstość

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(k-1)!}, \quad x \in (0, \infty). \tag{5}$$

Dla ustalonego $t > 0$ obliczyć wartość całki

$$G(t) = \int_{0}^{t} f(x)\,dx\,.$$

Witold Karczewski