Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 14, w czerwcu 2021

1. Załóżmy, że wartościami i wektorami własnymi macierzy A są liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ oraz wektory własne $x_1, \ldots, x_n$. Niech $X = [x_1, \ldots, x_n]$. Sprawdzić, że $AX = X\Lambda$, gdzie Λ to macierz diagonalna z liczbami $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na przekątnej.

2. Znaleźć wartości własne oraz wektory własne macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Sprawdzić, czy wektory własne są ortogonalne.

3. Sprawdzić określoność poniższych macierzy:
$$Z_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}+2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}+2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}+2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

4. Podać wartości i wektory własne macierzy A podanej poniżej. Jakie są krotności geometryczne i algebraiczne wartości własnych?
$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{bmatrix}.$$

5. Niech A będzie symetryczną macierzą $n \times n$ o elementach rzeczywistych. Czy macierz wektorów własnych X jest nieosobliwa?

6. Weźmy macierz diagonalną, dla przykładu $\Lambda = \mathrm{diag}(16, 8, 4, 1)$ oraz macierz Q:
$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Sprawdzić, że $Q^TQ = QQ^T = I_4$;
   (b) Obliczyć macierz A: $A = Q\Lambda Q^T$;
   (c) Jakie są wartości i wektory własne macierzy A?

7. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Znaleźć wartości własne macierzy AA^T i A^TA.

8. Niech $V_1 = A^TU_1\bar{\Sigma}^{-1}$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $U_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $\bar{\Sigma} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}\right)$. Kolumny macierzy U_1 to ortonormalne wektory własne, odpowiadające niezerowym wartościom własnym macierzy AA^T. Sprawdzić, że $V_1^TV_1 = I_r$.

9. Niech $V_2 = A^TU_2\bar{\Sigma}^{-1}$. Wykazać, że $V_2TV_2 = I$ oraz $V_1^TV_2 = \mathbb{O}$.

Witold Karczewski