Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 9

2 grudnia 2020 r.

Zajęcia 8 grudnia 2020 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L9.1. 1 punkt Wytłumacz na przykładzie, dlaczego operacja dodawania punktów *po współrzędnych* nie jest dobrym pomysłem.

L9.2. 2 punkty Sprawdź, że wielomiany Bernsteina B_i^n mają następujące własności:

(a) B_i^n jest nieujemny w przedziale $[0, 1]$ i osiąga w nim dokładnie jedno maksimum.

(b) $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \equiv 1$,

(c) $B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) \quad (0 \le i \le n)$,

(d) $B_i^n(u) = \dfrac{n+1-i}{n+1}B_i^{n+1}(u) + \dfrac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(u) \quad (0 \le i \le n)$.

L9.3. 1 punkt Udowodnij, że wielomiany $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n$ tworzą bazę przestrzeni Π_n.

L9.4. 1 punkt Sformułuj i **udowodnij** *algorytm de Casteljau* wyznaczania punktu na krzywej Béziera. Jaka jest jego interpretacja geometryczna?

L9.5. 1 punkt Wykorzystaj schemat Hornera do opracowania algorytmu obliczania punktu na krzywej Béziera, który działa w czasie liniowym względem liczby jej punktów kontrolnych.

L9.6. 2 punkty Niech p będzie wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej n. W języku `PWO++` procedura `BezierCoeffs`(p, t) wyznacza taki wektor $\mathtt{c} := [c_0, c_1, \ldots, c_n]$, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k B_k^n(t),$$

gdzie $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n$ są wielomianami Bernsteina stopnia n. Współczynniki c_k $(0 \le k \le n)$ nazywamy *współczynnikami Béziera* wielomianu p. Niestety, procedura ta ma **pewne ograniczenie**, mianowicie: **musi być** $n \le 50$.

W jaki sposób, używając procedury `BezierCoeffs` co najwyżej **dwa razy**, wyznaczyć współczynniki Béziera wielomianu $w(t) := p(t) \cdot q(t)$, gdzie $p \in \Pi_{50}$, a $q \in \Pi_2$? Jak zmieni się rozwiązanie, jeśli przyjąć, że $q \in \Pi_{50}$?

Wskazówka: $B_5^7(t) \cdot B_2^4(t) = \frac{21}{55} B_7^{11}(t)$.

Wymierną krzywą Béziera R_n stopnia $n \in \mathbb{N}$ definiujemy wzorem

$$R_n(t) := \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i W_i B_i^n(t)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} \qquad (0 \le t \le 1), \tag{1}$$

gdzie $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{E}^2$ są danymi *punktami kontrolnymi*, a $w_0, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_+$ — odpowiadającymi im *wagami*.

L9.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykaż, że dla każdego $t \in [0, 1]$ $R_n(t)$ jest punktem na płaszczyźnie będącym kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{E}^2$ (patrz (1)).

L9.8. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Używając komputera, narysuj wykres wymiernej krzywej Béziera dla punktów kontrolnych

$$(39.5, 10.5),\ (30, 20),\ (6, 6),\ (13, -12),\ (63, -12.5),\ (18.5, 17.5),\ (48, 63),$$
$$(7, 25.5),\ (48.5, 49.5),\ (9, 19.5),\ (48.5, 35.5),\ (59, 32.5),\ (56, 20.5)$$

i odpowiadającego im układu wag $1, 2, 3, 2.5, 6, 1.5, 5, 1, 2, 1, 3, 5, 1$. Co ona przedstawia? Zmieniając wartości wag, postaraj się ustalić eksperymentalnie jakie mają one znaczenie dla kształtu wymiernej krzywej Béziera.

(–) Paweł Woźny