

## Zadanie 3

Weźmy dowolną macierz kwadratową  $M$ , taką że  $\lambda^2$  jest wartością własną macierzy  $M^2$ . Wtedy zbiór wektorów własnych dla  $M^2$  to  $\ker(M^2 - \lambda^2 Id)$ . Weźmy dowolny wektor  $V \in \ker(M^2 - \lambda^2 Id)$ :

$$V \in \ker(M^2 - \lambda^2 Id) \Leftrightarrow (M^2 - \lambda^2 Id)V = 0 \Leftrightarrow (M - \lambda Id)(M + \lambda Id)V = 0$$

To oznacza, że  $(M + \lambda Id)V = 0 \quad \vee \quad (M - \lambda Id)[(M + \lambda Id)V] = 0$ , ponieważ  $(M + \lambda Id)V$  to wektor, możemy za niego podstawić wektor  $W$  i otrzymamy  $(M - \lambda Id)W = 0$ , wtedy:

1. Gdy  $(M + \lambda Id)V = 0$  to  $V \in \ker(M - (-\lambda)Id)$  zatem  $-\lambda$  jest wartością własną macierzy  $M$ .
2. Gdy  $(M - \lambda Id)W = 0$  to  $W \in \ker(M - (\lambda)Id)$  zatem  $\lambda$  jest wartością własną macierzy  $M$ .

Zatem jeśli  $\lambda^2$  jest wartością własną macierzy  $M^2$  to  $-\lambda$  lub  $\lambda$  jest wartością własną macierzy  $M$ .

■