EGZAMIN Z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

8 lutego 2021 r.

Pierwszy termin

Pracuj samodzielnie!!!

Imię i nazwisko: Piotr Piesiak

Numer części: 4 Numer zadania: 2

Algorytm de Casteljau służy do wyznaczenia wartości punktów na krzywej Béziera.

krzywa Béziera: $P_n(t) := \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, w_i$, B_i^n wielomiany Bernsteina.

$t \in \langle 0, 1 \rangle$, $w_i \in E^2$ (punkty kontr.)

algorytm:

$$w_k^{(0)} := w_k \quad [\text{dla } k = 0, 1, \dots, n]$$

$$w_k^{(i)} := (1-t)\, w_k^{(i-1)} + t \cdot w_{k+1}^{(i-1)} \quad \left[\begin{array}{l} \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-i \end{array}\right]$$

po wykonaniu algorytmu $P(t) = w_0^{(n)}$

Dowód poprawności: (indukcja)

baza: $n = 0$, $P_0(t) = B_0^0 w_0 = w_0 = w_0^{(0)}$, ✓

krok indukcyjny: weźmy dowolne $n \geq 0$ i załóżmy, że $P_n(t) = w_0^{(n)}$

$$P_{n+1}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} w_i B_i^{n+1}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} w_i \left[(1-t) B_i^n(t) + t B_{i-1}^n(t) \right] =$$

$$= \overset{\square}{\sum_{i=0}^{n}} w_i B_i^n(t)(1-t) + t \cdot \overset{\square}{\sum_{i=0}^{n}} w_{i+1} B_i^n(t) \overset{\text{zał. indukcyjne}}{=}$$

$$= (1-t) \cdot w_0^{(n)} + t \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} w_{i+1} B_i^n(t)}_{(*)\; = w_1^{(n)}} = w_0^{(n+1)}$$

Na mocy indukcji, $\forall n \in \mathbb{N}$ algorytm jest poprawny #

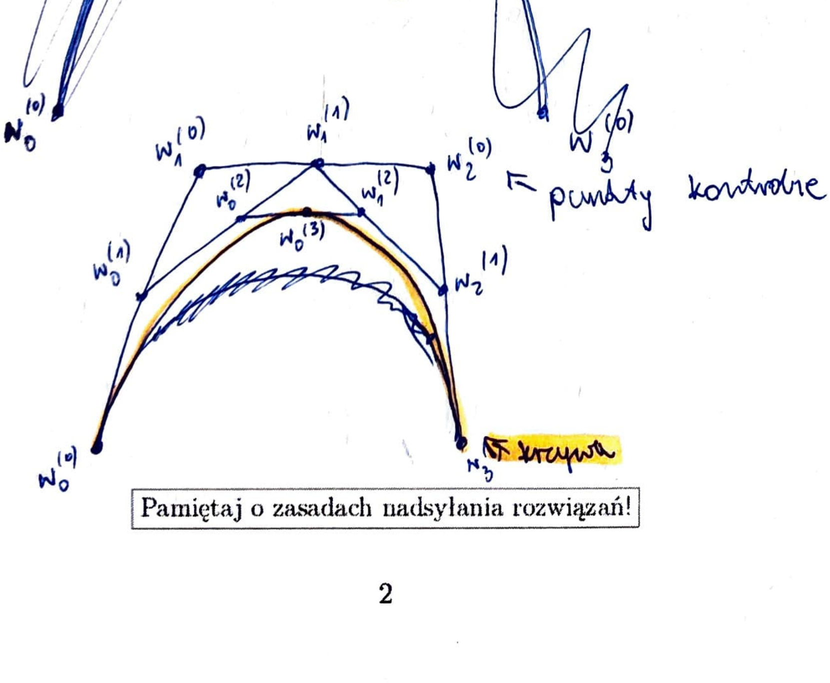
Dowód $(*, \square)$

$\square \to (1-t)B^n_{n+1}(t) = 0$, $tB^n_{-1}(t) = 0$

$* \to$ gdyby naszymi danymi były $w_1, w_2, \dots w_n, w_{n+1}$ to mogli byśmy je przeindeksować „o jeden w dół" i skorzystać z zał. indukcyjnego uzyskując wtedy $\sum_{i=0}^{n} w_{i+1} B_i^n(t) = w_1^{(n)}$

(ponieważ w wyliczeniu $w_1^{(n)}$ używamy tylko w_k^i, gdzie k przebiega od 1 do n+1) nie potrzebujemy w_0^i

interpretacja geometryczna:



Pamiętaj o zasadach nadsyłania rozwiązań!