

12. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Funkcja $f(x, y)$ o ciągłych pochodnych cząstkowych spełnia warunki $f(x, 0) = \sin x$ oraz $f(x, 1) = \pi^{-1} + x^3$. Pokazać, że w pewnym punkcie pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ zeruje się. **Wskazówka:** Skorzystać z twierdzenia Lagrange'a.
2. Funkcja $g(x, y)$ ma dodatnie pochodne cząstkowe. Pokazać, że $g(x, y) < g(s, t)$ jeśli $x < s$ i $y < t$.
3. Funkcja $h(x, y)$ spełnia warunki $\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} > 0$ i $\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} > 0$. Pokazać, że $h(0, 0) < h(\pi, e)$.
4. Funkcja $s(u, v)$ posiada pochodne cząstkowe w każdym punkcie i spełnia $s(0, 0) = s(3, 4)$. Pokazać, że istnieje punkt płaszczyzny, w którym $3\frac{\partial s}{\partial u} + 4\frac{\partial s}{\partial v} = 0$.
5. Pokazać, że funkcja $f(x, y)$ mająca ograniczone pochodne cząstkowe w pewnym wypukłym obszarze płaszczyzny jest jednostajnie ciągła w tym obszarze, tzn. wartości funkcji leżą blisko siebie, jeśli argumenty funkcji leżą blisko siebie.
* Czy założenie o wypukłości obszaru jest istotne ?
6. Wyrazić pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(1, 2, 3)$ przy pomocy pochodnych cząstkowych funkcji g jeśli $f(x, y, z) = g(y, z, x)$. Użyć oznaczenia $D_i f$ na pochodną cząstkową względem i -tej współrzędnej, aby uniknąć pomieszania oznaczeń.
7. Niech $z = f(x - y)$. Pokazać, że $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}$.
8. Dla $w = f(x - y, y - z, z - x)$ pokazać, że $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$.
9. Niech $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$ i $y = r \sin \theta$. Pokazać, że $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$ oraz $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$.
10. Funkcja $f(x, y)$ jest jednorodna stopnia n jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej t spełniony jest warunek

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y). \quad (1)$$

Pokazać, że dla takiej funkcji zachodzi wzór

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n f(x, y).$$

Wskazówka: Zróżniczkować obie strony (1) względem t i podstawić $t = 1$.

11. Korzystając z poprzedniego zadania pokazać, że funkcja $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x^2 + y^2}{xy}$ spełnia $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
12. Samochód zbliża się do przejazdu kolejowego przebiegającego pod kątem prostym do drogi, z prędkością 30 km/h. Pociąg zbliża się z prędkością 160 km/h. Znaleźć tempo zmiany odległości pomiędzy samochodem i pociągiem, gdy samochód znajduje się 1 km a pociąg 2 km od przejazdu.
13. Wielkość z jest funkcją zmiennych x i y i spełnia równanie

$$x^2 z^2 - 2xyz + z^3 y^2 = 3.$$

Obliczyć $\partial z / \partial x$ i $\partial z / \partial y$ stosując różniczkowanie niejawne.

14. Wykonać polecenie poprzedniego zadania dla

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{2}.$$

15. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) .
- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$; $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
 - (b) $f(x, y) = \sin xy$; $(x_0, y_0) = (-\pi/2, 1)$.
16. Czy istnieje płaszczyzna styczna do wykresu funkcji $z = x^2 - y^2 + 2x + 2y$
- (a) równoległa do płaszczyzny $z = x + y$;
 - (b) prostopadła do wektora $(1, 2, 3)^T$.
17. Znaleźć pochodną odwzorowania $(x, y, z)^T \mapsto (x^2 + \sin zy, y^2 - \arctan xy, e^{x+y+z})^T$ w punkcie $(1, 0, 0)^T$.
18. Znaleźć pochodną odwzorowania $(x, y, z)^T \mapsto (xyz^2, x^2 - z^2)^T$ w dowolnym punkcie $(x, y, z)^T$.
19. Pokazać, że pochodna w dowolnym punkcie odwzorowania liniowego związanego z macierzą A wymiaru m na n jest równa macierzy A .
20. Znaleźć pochodną w punkcie (a, b) odwzorowania z $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ w \mathbb{R} zadanego wzorem $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (x, y) \mapsto x \circ y \in \mathbb{R}$.