EGZAMIN Z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)
8 lutego 2021 r.
Pierwszy termin

Pracuj samodzielnie!!!

Imię i nazwisko: Piotr Piesiak

Numer części: 3 **Numer zadania:** 1

Rząd kwadratury Q_M wynosi $r \in \mathbb{N}$ jeśli:

- $\int_a^b w(x)\,dx = Q_M(w) \Rightarrow R_M(w) = 0 \qquad w \in \Pi_{r-1}$

- $\exists\, v \in \Pi_r \setminus \Pi_{r-1} \qquad \int_a^b v(x)\,dx \neq Q_M(v) \Rightarrow R_M(w) \neq 0$

założmy, że Q_M ma rząd $\geqslant M+1$

dla dow. $w_M \in \Pi_M \qquad Q_M(w_M) = \int_a^b w_M(x)\,dx$

zauważmy, że $\lambda_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{M} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ to $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M\}$ tworzą bazę przestrzeni wielomianów w Π_M. $^{(*)}$ $\lambda_i(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & \text{wpp} \end{cases}$

(*) wynika to stąd, że wektory $\lambda_i^{\,\text{b}}$ ~~w~~ postaci $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, czyli na i-tej pozycji jest 1. Wszystkie są liniowo niezależne i jest ich $M+1$. Stąd rozpinają przestrzeń Π_M.

~~Skoro (*) to $w_M = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i \lambda_i$~~ ~~$w_M(x) = L_M(x) = \sum_{k=0}^{M} w_M(x_k) \cdot \lambda_k(x)$~~

zauważmy $\int_a^b \lambda_i(x)\,dx = Q_M(\lambda_i(x)) = \sum_{k=0}^{M} A_k \cdot \lambda_i(x_k) = A_i \cdot \lambda_i(x_i) = A_i$

$\uparrow$ bo $\lambda_i \in \Pi_M$

Pamiętaj o zasadach nadsyłania rozwiązań!

$$Q_n\left(\overset{W_n}{\cancel{f}}\right) = \sum_{k=0}^{n} A_k \overset{W_n}{\cancel{f}}(x_k) = \sum_{k=0}^{n} I(\lambda_k(x))\, \overset{W_n}{\cancel{f}}(x_k)$$, I to całka,

zatem Q_n to kwadratura interpolacyjna.