Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 11

16 grudnia 2020 r.

Zajęcia 12 stycznia 2021 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L11.1. 1 punkt Uzasadnij proces *ortogonalizacji Grama-Schmidta*.

L11.2. 1 punkt Niech P_k $(1 \le k \le N)$ będzie k-tym wielomianem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Pokaż, że dla dowolnego wielomianu $w \in \Pi_{k-1}$ jest $(w, P_k)_N = 0$.

L11.3. 2 punkty Niech $P_0, P_1, \ldots, P_N$ $(1 \le k \le N)$ będzie ciagiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Udowodnij podaną na wykładzie zależność rekurencyjną spełnianą przez te wielomiany.

L11.4. 2 punkty Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(f,g)_N := \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k)$, gdzie $x_0, x_1, \ldots, x_N$ są parami różnymi punktami. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ oraz liczbę naturalną $n < N$. Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby obliczyć wartości $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$? Uwzględnij **wszystkie** szczegóły obliczeń.

L11.5. 1 punkt Niech $\{Q_k\}$ będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1, \qquad Q_1(x) = x - c_1, \\ Q_k(x) = (x - c_k)Q_{k-1}(x) - d_k Q_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

gdzie c_k, d_k są danymi stałymi. Udowodnij, że następujący *algorytm Clenshawa*:

$$B_{m+2} := B_{m+1} := 0,$$

$$B_k := a_k + (x - c_{k+1})B_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} \qquad (k = m, m-1, \ldots, 0),$$

$$\texttt{wynik} := B_0,$$

oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k(x)$. Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości $Q_m(x)$?

L11.6. 1 punkt Dwoma podanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, gdzie $x_j := -10 + 5j$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$.

L11.7. 1 punkt Funkcja h przyjmuje w punktach $x_j := -10+5j$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$ odpowiednio wartości $3, -5, -1, -5, 3$. Wykorzystując ortogonalność wielomianów **skonstruowanych w poprzednim zadaniu**, wyznacz taki wielomian $w_2^* \in \Pi_2$, aby wyrażenie

$$\sum_{j=0}^{4} [w_2^*(x_j) - h(x_j)]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

L11.8. $\boxed{\textsf{\textbf{Włącz komputer!}}}\boxed{\textsf{2 punkty}}$ W pliku `punkty.csv`[1] znajduje się zbiór 50 par liczb ze zbioru $\mathcal{X} := \{(t_i, y_i)\ :\ 0 \le i \le 49\}$. Wartość te są odczytami z aparatury mierzącej pewną wielkość fizyczną f zachowującą się – jak mówi teoria – zgodnie ze wzorem

$$f(t) = (t + 3.6)(t - 2.1)(t - 3.7).$$

Z tym jednak, że aparatura dokonuje pomiarów z dokładnością ± 0.15 z rozkładu jednostajnego, czyli

$$y_i = f(t_i) + U[-0.15, 0.15] \qquad (0 \le i \le 49).$$

(a) Narysuj wykres funkcji f i zbiór $\mathcal{X}$.

(b) Wyznacz i narysuj wielomian interpolacyjny dla danych z pliku `punkty.csv`. Co obserwujemy?

(c) Korzystając z **własnej implementacji** skonstruuj i narysuj wielomiany optymalne w_n^* w sensie aproksymacji średniokwadratowej dla danych ze zbioru $\mathcal{X}$ o stopniach $2 \le n \le 8$. Skomentuj wyniki.

L11.9. $\boxed{\textsf{\textbf{Włącz komputer!}}}\boxed{\textsf{do 5 punktów}}$ Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do opracowania modelu opisującego przebieg pandemii koronawirusa w Polsce. Możesz rozważyć i modelować różne dane i wskaźniki. Na przykład liczbę aktywnych przypadków w pierwszych 100 dniach od wykrycia pierwszego zakażenia (4 marca 2020 r.). Zadanie to ma charakter *badawczy* — wiele zależ tu od Ciebie i Twojej pomysłowości.

Wskazówki. 1. Wiele dobrze opracowanych danych na temat epidemii w Polsce znajdziesz pod tym adresem (autor zbioru danych: Michał Rogalski). 2. Jeśli zdecydujesz sie modelować liczbę aktywnych przypadków, to warto rozpocząć od próby dopasowania danych do modelu typu $\exp(f(x))$, gdzie f jest odpowiednio dobraną funkcją, np. wielomianem niewysokiego stopnia (porównaj z zadaniem **L10.6**). 3. Osoby zainteresowane *matematyką koronawrusa* powinny odwiedzić m.in. stronę PTM.

(–) Paweł Woźny

[1] Patrz SKOS.