EGZAMIN Z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

8 lutego 2021 r.

Pierwszy termin

Pracuj samodzielnie!!!

Imię i nazwisko: Piotr Piesiak

Numer części: Cz. 1 Numer zadania: 1

Schemat Hornera to algorytm służący do obliczania wartości wielomianu w punkcie x, PSEUDOKOD:

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ to współczynniki wielomianu $w \in \Pi_n$, $w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

ALGORYTM:

$w_n = a_n$

Dla k od n-1 do 0:

$w_k = w_{k+1} \cdot x + a_k$

wtedy $w(x) = w_0$

Uzasadnienie:

Po wykonaniu sch. Hornera $w_0 = (\ldots((a_n \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + \ldots) x + a_0$

po wymnożeniu wszystkich wyrazów dostaniemy $w_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = w(x)$,

zatem algorytm ten zwraca faktycznie wartość wielomianu w x.

NUMERYCZNA POPRAWNOŚĆ:

Niech $|\alpha_i| \leq 2^{-t}$, $|\beta_i| \leq 2^{-t}$, $|\gamma_i| \leq 2^{-t}$ oraz $\beta_n = 0$, wtedy:

$$\tilde{w}_0 = (1+\beta_0)\Big(a_0(1+\gamma_0) + x(1+\beta_1)(1+\alpha_1)\Big(a_1(1+\gamma_1) + x(1+\beta_2)(1+\alpha_2)\Big(a_2(1+\gamma_2) + \ldots$$

$$\ldots\Big(a_{n-1}(1+\gamma_{n-1}) + (1+\beta_n)(1+\alpha_n)(1+\gamma_n)x \cdot a_n\Big)\ldots\Big) =$$

2 str. →

Pamiętaj o zasadach nadsyłania rozwiązań!

$$\ldots = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i \cdot \prod_{j=0}^{i} (1+\beta_j) \cdot \prod_{j=1}^{i} (1+\alpha_j) \cdot (1+\gamma_i)$$

gdzie β_j oznacza błędy przy dodawaniach, α_i przy mnożeniach oraz γ_i to błąd reprezentacji. Z tw. o kumulacji błędów

$$\left| \overbrace{\prod_{j=0}^{i} (1+\beta_j) \cdot \prod_{j=1}^{i} (1+\alpha_j) \cdot (1+\gamma_i)}^{|E_i|} \right| \leqslant |(2i+2) \cdot 2^{-t}|$$

zatem $\tilde{w}_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i \cdot (1+E_i)$, ponieważ $|E_i| \leqslant |(2i+2) \cdot 2^{-t}|$ to $\tilde{w}_0$ jest dokładnym wynikiem dla nieco zmienionych danych ($\tilde{w}_0 = \sum_{i=0}^{m} \tilde{a}_i \cdot x^i$, $\tilde{a}_i = a \cdot (1+E_i)$)

stąd algorytm jest numerycznie poprawny.

Pamiętaj o zasadach nadsyłania rozwiązań!