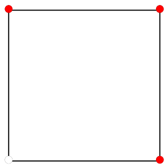
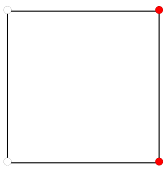
Zadanie 10

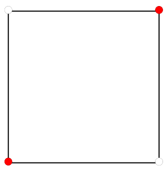
Rozpatrzmy poszczególne przypadki z zadania:

1. - 4 wierzchołki czerwone i 0 białych. Z prostej obserwacji wynika, że jest tylko 1 rozróżnialny kwadrat (wystarczy zastosować na nim np. identycznośc). Gdy dodamy symetrię odpowiedź się nie zmieni.
2. - 3 wierzchołki czerwone i 1 biały.



Zauważmy, że wsytarczy obrócić kwadrat o jeden z kątów - 90°, 180°,270°aby przenieść biały wierzchołek w dowolny inny. Zatem dla obrotów jak i obrotów z symetrią mamy tylko 1 rozróżnialny kwadrat.
3. - 2 wierzchołki czerwone i 2 białe.





Intuicyjnie to powinny być jedyne dwa rozróżnialne kwadraty dla obrotu jak i obrotu z symetrią, sprawdźmy to wykorzystując lemat Burnside'a:

$$|A| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} fix(g)$$

Gdzie $|A|$ to ilość orbit, czyli szukane rozróżnialne kwadraty. Mamy 8 przekształceń:

przekształcenie identyczności e - możliwe kolorowanie wierzchołków to $((4 \cdot 3) \div 2 = 6)$ i każde z nich jest punktem stałym.

obrót o 90 °- 0 punktów stałych

obrót o 180 °- sytuacja, kiedy narożniki naprzeciwko (względem przekątnej) siebie mają ten sam kolor, czyli 2 punkty stałe

obrót o 270 °- 0 punktów stałych

symetria wzdłóż jednej z przekątnych - dla jednej przekątnej są 2 punkty stałe, narożniki naprzeciwko (względem przekątnej) siebie mają ten sam kolor

symetria przez bok - dla jednego boku są 2 punkty stałe, wtedy kiedy narożniki wzdłóż tego samego boku mają ten sam kolor
Dla grupy obrotów kwadratu ze złożeniem przekształceń mamy:

$$|A| = \frac{1}{4} \cdot (0 + 6 + 0 + 2) = 2$$

Dla grupy obrotów i symetrii kwadratu ze złożeniem przekształceń mamy:

$$|A| = \frac{1}{8} \cdot (0 + 6 + 0 + 2 + 4 + 4) = 2$$

Zatem w przypadku, gdy 2 wierzchołki są białe istnieją 2 różne kwadraty.
4. - 3 wierzchołki białe i 1 czerwony. Analogicznie jak w 2. , 1 rozróżnialny kwadrat.
5. - 4 wierzchołki białe i 0 czerwonych. Analogicznie jak w 1. , 1 rozróżnialny kwadrat.