Zadanie 2

1. Weźmy dowolną macierz symetryczną M. Z zadania 1 wiemy, że:

$$\langle u, Mv\rangle = \langle M^T u, v\rangle$$

M jest symetryczna, zatem $M^T u = Mu$ co daje nam:

$$\langle u, Mv\rangle = \langle Mu, v\rangle$$

2. Jeśli λ i λ' są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych v i v' to $Mv = \lambda v$ oraz $Mv' = \lambda v'$. Z (1.) wiemy , że:

$$\langle v', Mv\rangle = \langle Mv', v\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle v', \lambda v\rangle = \langle \lambda' v', v\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda\langle v', v\rangle = \lambda'\langle v', v\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda\langle v', v\rangle - \lambda'\langle v', v\rangle = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda - \lambda')\langle v', v\rangle = 0$$

Ponieważ $\lambda \neq \lambda'$ to $\langle v, v'\rangle = 0$, czyli v i v' są prostopadłe.