Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Druga część egzaminu.

Informacje organizacyjne.

1. Zadanie jest oceniane w skali 0–6 punktów.
2. Termin realizacji to 30. kwietnia, $23^{\underline{59}}$.
3. Rozwiązanie zadania to **czytelny** rękopis.
4. W każdym z zadań dane są dwa niezależne rozkłady X, Y, wynikiem jest rozkład Z pewnej funkcji tych zmiennych. Rozwiązania powinny podpadać pod schemat:
   (a) przejście od zmiennej (X, Y) do zmiennej (Z,V),
   (b) Jacobian,
   (c) gęstość brzegowa $g_Z(z)$.
5. Nie korzystamy z innych sposobów rozwiązywania (np. MGF).
6. Dla sprawdzenia poprawności rozwiązania podano rozkład zmiennej Z.
7. Rozwiązujemy zadanie (*indeks* mod 4).

$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$	$x \in \mathbb{R}.$
$t(n)$	$f(x) = \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$	$x \in \mathbb{R}.$
$\chi^2(n)$	$f(x) = \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\, x^{n/2-1}\, \mathrm{e}^{-x/2},$	$x \in (0, \infty).$
$\%hline \mathrm{F}(n, k)$	$f(x) = \sqrt{\dfrac{(nx)^n \cdot k^k}{(nx+k)^{n+k}}} \Big/ \left(x \cdot B(n/2, k/2)\right),$	$x \in (0, \infty).$

Zadanie 0.

$X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2).$
$Z = X + Y, \quad Z \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$

Zadanie 1.

$X \sim \mathrm{N}(0, 1), \quad Y \sim \chi^2(n).$
$Z = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}, \quad Z \sim \mathrm{t}(n)$. Rozkład t-Studenta z n stopniami swobody.

Zadanie 2.

$X \sim \chi^2(n), \quad Y \sim \chi^2(k).$
$Z = X + Y, \quad Z \sim \chi^2(n + k).$

Zadanie 3.

$X \sim \chi^2(n), \quad Y \sim \chi^2(k).$
$Z = \frac{X}{Y} \cdot \frac{k}{n}, \quad Z \sim \mathrm{F}(n, k)$. Rozkład Fishera z m, k stopniami swobody.

Witold Karczewski