The Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA)

Piotr Piesiak

21 grudnia 2021

1 Optymalizacja wielokryterialna - definicje

Zajmujemy się problemem maksymalizacji / minimalizacji wielu funkcji kosztów.

$$y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$$

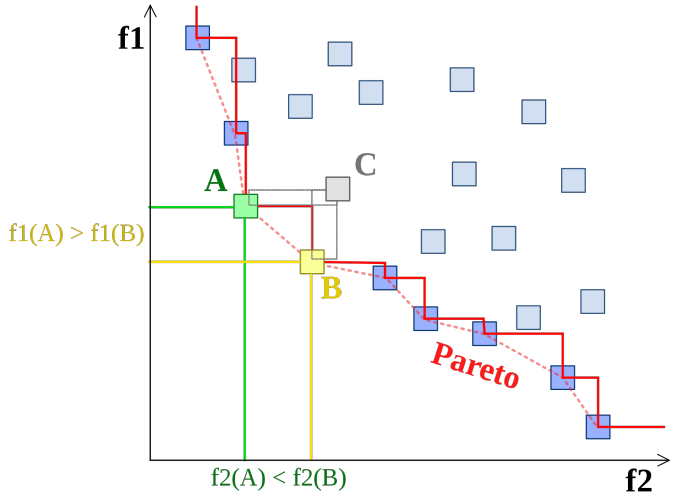
Gdzie x to wektor parametrów:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_m)$$

Problem minimalizacji n funkcji kosztów polega na tym, że nie możemy jednoznacznie stwierdzić, który wektor y jest lepszy. Próbujemy zatem znaleźć zbiór rozwiązań Pareto optymalnych - należących do frontu Pareto. Mówimy, że x_1 dominuje x_2 wtw

1. $\forall_{i\in\{1,2,...,n\}} f_i(x_1) \leq f_i(x_2)$
2. $\exists_{i\in\{1,2,...,n\}} f_i(x_1) < f_i(x_2)$

Rozwiązanie x jest optymalne w sensie Pareto, jeśli nie istnieje żadne inne rozwiązanie, które je dominuje (jest niezdominowane). Na (rys. 1) możemy zobaczyć front Pareto (problem minimalizacji). Punkty A,B dominują punkt C, ale nie dominują siebie nawzajem - dlatego leżą na froncie Pareto.



Rysunek 1: Przykład frontu Pareto (źródło: wikipedia/Multi-objective_optimization)

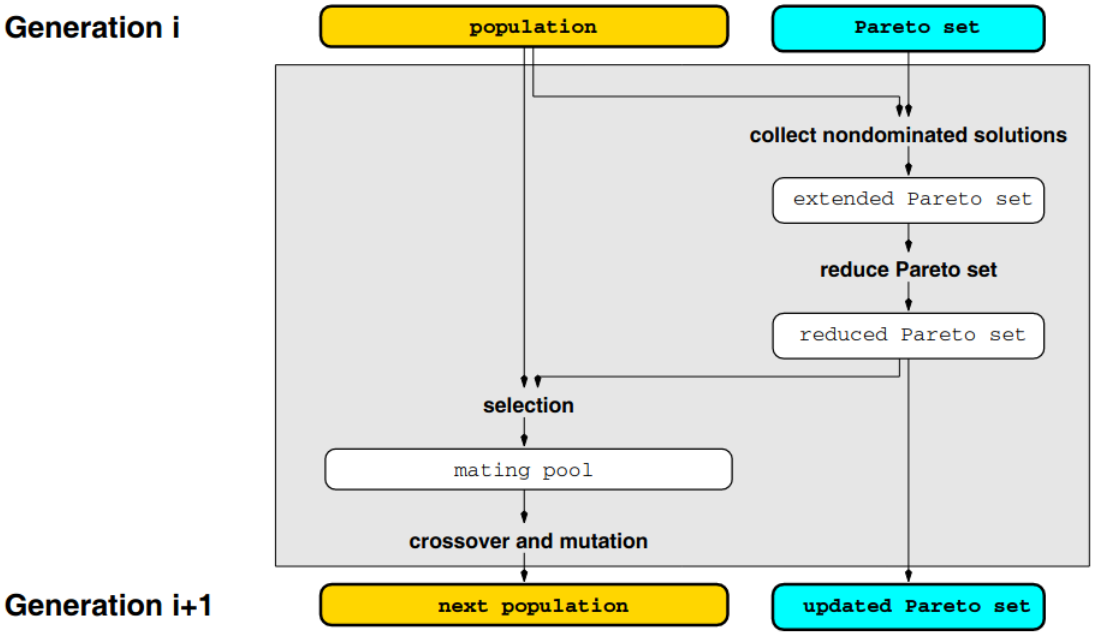
2 Algorytm SPEA

2.1 Zarys algorytmu

The Strength Pareto Evolutionary Algorithm - algorytm zaporponowany przez Eckarta Zitzler'a i Lothara Thiel'a w 1998 roku. Jego głownymiu cechami są:

1. Wykorzystywanie optimum w sensie Pareto
2. Przechowywanie punktów niezdominowanych w osobnym zbiorze (obok populacji) nazywanym zbiorem Pareto

3. Redukowanie liczby osobników w zbiorze Pareto i dbanie o zachowanie charakterystyki frontu Pareto
4. Przystosowanie osobnika w populacji zależy tylko od osobników w zewnętrznym zbiorze
5. Selekcje, Krzyżowanie i Mutacje wykonujemy na sumie zewnetrznego zbioru i populacji



Rysunek 2: Szkic SPEA (źródło: praca Zitzlera i Thiela, 1998)

2.2 Selekcja

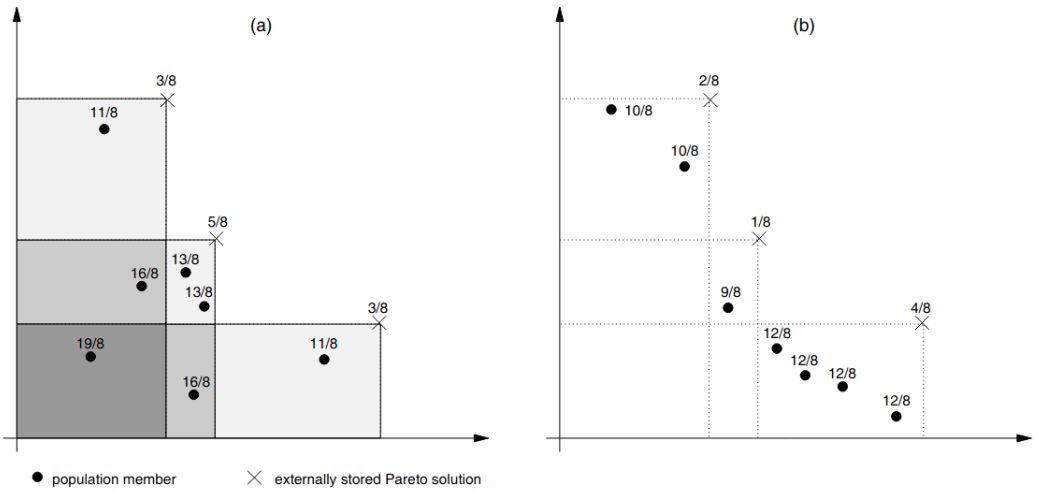
Każdemu osobnikowi ze zbioru Pareto przypisujemy jego siłę $s \in [0, 1]$, parametr ten jest proporcjonalny do ilości zdominowanych osobników. Siła $S(i)$ osobnika i wyliczana jest następująco:

$$S(i) = \frac{n}{N+1}$$

gdzie n to liczba osobników w populacji zdominowanych przez osobnika i, a N to liczność populacji. Wartością przystosowania osobnika ze zbioru Pareto jest jego siła. Na tej podstawie osobniki populacji (czyli osobnego zbioru) są rankingowane względem zbioru Pareto P w sposób :

$$F(i) = \sum_{j \succeq i, j \in P} S(j) + 1$$

Czyli wartością przystosowania osobnika i jest powiększona o jeden suma sił osobników ze zbioru Pareto, które dominują i. Dodanie jedynki zapewnia, że ranking osobników ze zbioru Pareto będzie zawsze lepszy od rankingu osobnika z populacji. Przydaje się to w sytuacji, gdy osobnika i dominuje tylko jeden osobnik j. Przez lepszego osobnika rozumiemy osobnika o mniejszej wartości przystosowania.



Rysunek 3: Wartości przysotosowania poszczególnych osobników - problem maksymalizacji (źródło: praca Zitzlera i Thiela, 1998)

Na rysunku widać dwa różne scenariusze - po lewej wartość przystosowania zależy od ilości dominujących punktów ze zbioru Pareto (zbalansowana populacja). Po prawej każdego osobnika z populacji dominuje tylko jeden punkt ze zbioru Pareto - tutaj wartość przystosowania zależy od siły osobnika z zewnetrznęgo zbioru (niezbalansowana populacja). Dzięki temu odosobnione osobniki są bardziej cenione w selekcji i nasz algorytm porusza się bardziej równomiernie. Mając sposób na ocenienie osobników możemy przystąpić do selekcji. Autorzy zaproponowali selekcję poprzez metodę turnieju binarnego. Losujemy dwóch osobników i, j z sumy populacji i zbioru Pareto. Oceniamy ich wg. wartości przystosowania i. Do zbioru rodziców R przepuszczamy jednostkę o mniejszej wartości. Powtarzamy turniej (losowanie ze zwracaniem) aż uzyskamy odpowiednią liczbę rodziców.

2.3 Krzyżowanie i mutacje

Mając już wybrany zbiór rodziców R, który może zawierać osobników z populacji i zbioru Pareto, możemy przystąpić do krzyżowania i mutacji. Możemy tu dostosowywać te metody w zależności od problemu.

2.4 Redukcja zbioru Pareto

Musimy dbać o mały rozmiar i równomierne rozłożenie punktów w zbiorze Pareto z kilku powodów:

1. Nie potrzeba nam tylu punktów - dla osoby podejmującej decyzje nie jest potrzebna ogromna liczba punktów z Frontu Pareto
2. Oszczędzamy pamieć - nie uda się przechować ciągłego frontu Pareto
3. Gdy zbiór Pareto nie jest równomiernie rozłożony, poszukiwania mogą być nakierowane na tylko niektóre rejony, przez co generujemy nierównomierną populacje

Proces redukcji zbioru Pareto ma na celu nie tylko zmniejszenie liczby osobników, ale także zachowanie charakterystyki przebiegu frontu. Algorytm redukcji dzieli podobnych osobników w q grup (niech q to maksymalna moc zbioru Pareto). Następnie dla każdej grupy wybierany jest osobnik reprezentujący, który zastępuje swoją grupę. Dzięki temu w zrównoważony sposób redukujemy moc zbioru Pareto do q.

1. Formowanie grup - początkowo każdy osobnik zbioru Pareto tworzy osobną grupę. W kolejnych krokach wybieramy najbliższe grupy i łączymy je w jedną. Powtarzamy tę czynność aż liczba grup zmniejszy się do wymaganej wartości.
2. Najbliższe grupy - odległość grup X, Y definiujemy jako średnią z odległości pomiędzy parami punktów z X , Y, tzn. dla każdej pary punktów z X, Y znajdujemy jej odległość euklideoswą i wyciągamy średnią.
3. Reprezentanci grup - mając odpowiednią ilość grup wybieramy reprezentantów. Reprezentatem grupy nazywamy centroid grupy, czyli punkt który ma najmniejszą średnią odległość do wszystkich innych punktów danej grupy.

```
PROCEDURE ReduceParetoSet
IN/OUT:
    paretoSet;
BEGIN
    (* initialization: each Pareto point forms a cluster *)
    clusterSet := {};
    FOR paretoInd IN paretoSet DO
        clusterSet := clusterSet ∪ {{paretoInd}};
    OD
    (* join clusters until numbers of clusters remains under maximum *)
    WHILE |clusterSet| > maxParetoPoints DO
        (* select two clusters which have minimum distance *)
        minDistance := ∞;
        FOR {X, Y} SUBSET OF clusterSet DO
            IF ClusterDistance(X, Y) < minDistance THEN
                cluster1 := X;
                cluster2 := Y;
                minDistance := ClusterDistance(cluster1, cluster2);
            FI
        OD
        (* join the two selected clusters *)
        newCluster := cluster1 ∪ cluster2;
        clusterSet := clusterSet \ {cluster1, cluster2};
        clusterSet := clusterSet ∪ {newCluster};
    OD
    (* for each cluster pick out representative solution (centroid) *)
    paretoSet := {};
    FOR cluster IN clusterSet DO
        paretoInd := GetCentroid(cluster);
        paretoSet := paretoSet ∪ {paretoInd};
    OD
END
```

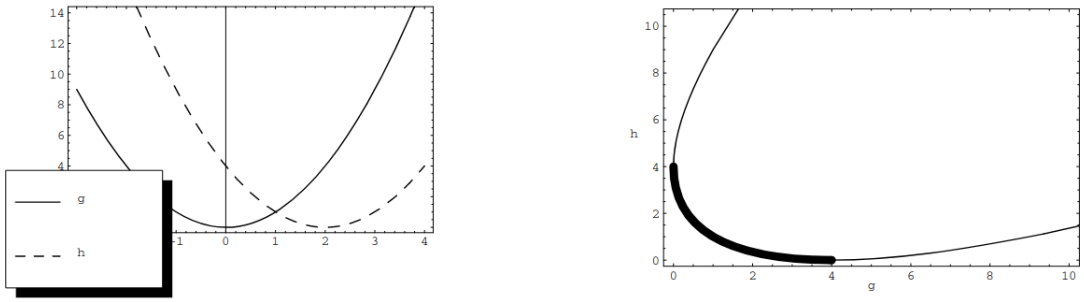
Rysunek 4: Pseudokod procedury podziału na grupy (źródło: praca Zitzlera i Thiela, 1998)

3 Działanie w praktyce - f_2 funkcja Shaffer'a

Shaffer zaproponował prostą funkcję testową:

$$f_2(x) = (g(x), h(x)) \ , g(x) = x^2, h(x) = (x-2)^2$$

Celem jest zminimalizowanie obydwu funkcji na raz. Na rys. 5 możemy zobaczyć wykresy dwóch funkcji i naszkicowany front Pareto. Jak łatwo sprawdzić, punkty x frontu Pareto należą do przedziału $[0, 2]$ - poza tym przedziałem g i h rośnie, zatem punkty $x \notin [0, 2]$ są zdominowane.

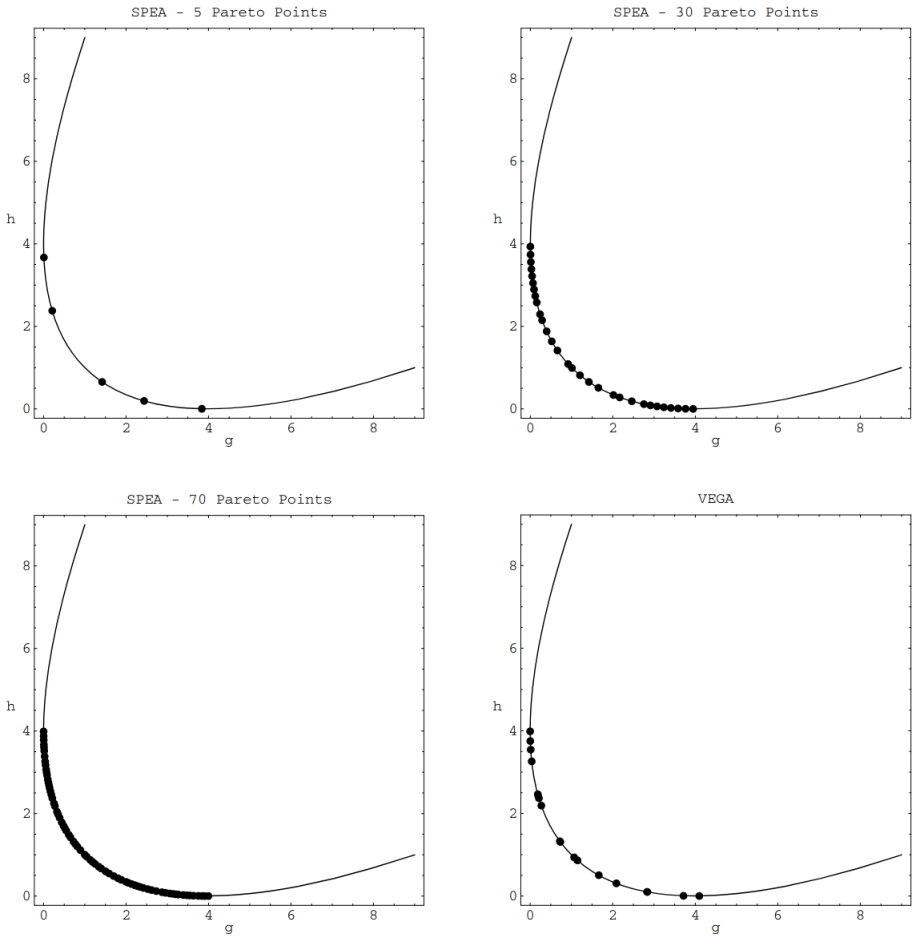


Rysunek 5: Funkcja Shaffer'a i funkcja parametryczna z zaznaczonym frontem Pareto (źródło: praca Zitzlera i Thiela, 1998)

W swojej pracy Zitzler i Thiel przeprowadzili prosty test porównujący algorytm SPEA oraz VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm). Algorytm VEGA polega na podziale populacji na k grup, gdzie k to liczba funkcji celu. Selekcja wewnątrz każdej grupy przeprowadzana jest niezależnie, względem wybranego kryterium. Mutacje i krzyżowanie są wykonywane na całej populacji. Jest to prosty algorytm optymalizujący problemy wielokryterialne. Jego podstawową wadą jest pomijanie rozwiązań pośrednich - zwracane rozwiązania maksymalizują / minimalizują zwykle jedną z funkcji celu.
Aby porównać efektywność algorytmu SPEA i VEGA, autorzy ustawili następujące parametry w SPEA:

1. Rozmiar populacji: 95/70/30
2. Rozmiar zewnętrznego zbioru Pareto: 5/30/70
3. Prawdopodobieństwo krzyżowania: 1.0
4. Prawdopodobieństwo mutacji: 0.0
5. Liczba iteracji: 100

Zastosowali 3 rózne kombinacje, w każdej z nich suma zbioru Pareto i populacji sumowała się do 100. Prawdopodobieństwo mutacji zostało ustawione na 0.0, aby móc porównać efektywność samego SPEA. W algorytmie VEGA użyto populacji o wielkości 100 i takich samych pozostałych parametrów. Na rys. 6 możemy zobaczyć, że algorytm SPEA poradził sobie ze znalezieniem frontu i zwrócił bardzo zrównoważone rozwiązania. W algorytmie VEGA, pomimo takiej samej sumarycznej liczby osobników, rozwiązanie jest gorsze i mniej zrównoważone.



Rysunek 6: Wyniki SPEA w porównaniu do VEGA (źródło: praca Zitzlera i Thiela, 1998)

Literatura

[1] Eckart Zitzler and Lothar Thiele (1998) An Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization: The Strength Pareto Approach.

[2] Rahman Gharari, Navid Poursalehi, Mohammadreza Abbasi, Mahdi Aghaie (2016) Implementation of Strength Pareto EvolutionaryAlgorithm II in the Multiobjective Burnable PoisonPlacement Optimization of KWU Pressurized WaterReactor.

[3] Marcin Wściubiak (2000) Ewolucyjna optymalizacja wielokryterialna.