12. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

**1.** Wykazać, że dla $x \neq y$, $x, y > 0$ zachodzi

$$\min(x,y) \leqslant \frac{x-y}{\log x - \log y} \leqslant \max(x,y)$$
$$\min(x,y) \leqslant \left(\frac{n}{m}\frac{x^m - y^m}{x^n - y^n}\right)^{1/(m-n)} \leqslant \max(x,y).$$

**2.** Wykazać nierówności.

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2},\ (x \neq 0) \qquad \sin x > x - \frac{x^3}{6},\ (x > 0),$$
$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2},\ (x > 0) \qquad e^x \geqslant \left(\frac{ex}{n}\right)^n,\ (x \geqslant 0).$$

**3.** Niech $h(x) = f(x)g(x)$. Wyrazić drugą pochodną funkcji $h(x)$ za pomocą funkcji $f(x)$ i $g(x)$ oraz ich pochodnych. Wyprowadzić wzór na $n$-tą pochodną funkcji $h(x)$

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

przy czym $f^{(0)}(x) = f(x)$.

**4.** Znaleźć wzór na $n$-tą pochodną funkcji $x^{-1}\log x$ i $e^x \cos x$.

**5.** Gracz baseballa biegnie po linii prostej, aby schwytać piłkę przy środku ogrodzenia boiska. Prędkość gracza w stopach na sekundę wynosi

$$v(x) = \frac{1}{100}x^2 - \frac{11}{10}x + 25$$

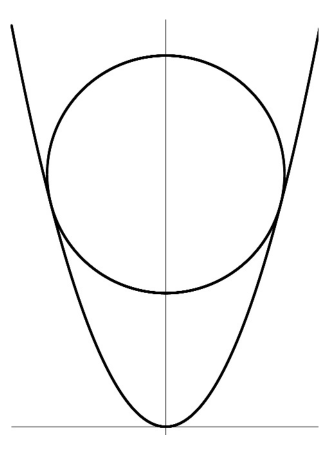
gdy znajduje się w odległości $x$ stóp od środka ogrodzenia. Jakie jest przyśpieszenie gracza, gdy znajduje się w odległości 1 stopy od środka płotu ?

**6.** Zastosować różniczkowanie niejawne, aby obliczyć $dy/dx$ w podanym punkcie.

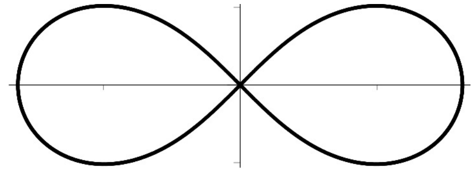
$$x^2 + xy + 2y^2 = 4;\ (-1,-1) \qquad (\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+2) = 8;\ (1,4)$$

**7.** Znaleźć styczną do wykresu $x^3 + y^3 = 3xy$ w punkcie $(3/2, 3/2)$.

**8.** Okrąg o promieniu 1 i środku na osi $y$ jest wpisany w parabolę $y = 2x^2$. Znaleźć punkty, w których parabola i okrąg stykają się. `Wskazówka:` W tych punktach okrąg i parabola mają wspólne styczne.



**9.** Lemniskata na rysunku poniżej zadana jest wzorem $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Znaleźć punkty wykresu, w których styczna jest pozioma.



**10.** Obliczyć $d^2y/dx^2$ w poniższych przykładach.

$$x^2 - y^4 = 6 \qquad\qquad x^2 \sin 2y = 1$$

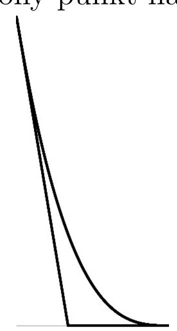
**11.** W poniższych przykładach $x$ i $y$ są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej $t$. Wyrazić $dy/dt$ za pomocą $x$, $y$ oraz $dx/dt$.

$$x \sin y = 2 \qquad x^2 + y^3 = x \qquad y = \cos xy^2 \qquad \frac{2x + y}{xy^2} = 2$$

**12.** Znak drogowy w kształcie kwadratu o boku 50 cm i zaniedbywalnej grubości obraca się wokół swojej osi pionowej przechodzącej przez środek w tempie 10 obrotów na minutę. Osoba obserwująca znak z dużej odległości widzi go jako prostokąt o zmieniającej się szerokości. Jak szybko zmienia się szerokość znaku, gdy robi wrażenie prostokąta o szerokości 30 cm i szerokość się powiększa ? `Wskazówka:` Rozważyć kąt jaki tworzy płaszczyzna znaku z linią łącząca go z obserwatorem.

**13.** Woda jest wypuszczana ze stożkowego pojemnika o wysokości 120 cm i promieniu 40 cm do pojemnika w kształcie prostopadłościanu, którego pole podstawy wynosi 1000 cm$^2$. Gdy wysokość poziomu wody w stożku wynosi $x$ cm wysokość ta maleje w tempie $100 - x$ cm na minutę. W jakim tempie podnosi się poziom wody w dolnym pojemniku, gdy wysokość wody w górnym pojemniku będzie równa 10 cm ?

**14.** Nocna łódź patrolowa zbliża się do punktu $(0, 0)$ na brzegu wzdłuż krzywej $y = -\frac{1}{2}x^3$, $x < 0$. Oś $x$ utożsamiamy z brzegiem. Łódź porusza się tak, że $dx/dt = -x$, jej reflektor jest skierowany na wprost. Jak szybko przesuwa się oświetlony punkt na brzegu, gdy $x = -2$ ?



**15.** Podać przybliżone wartości liczb używając wzoru $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$.

$$\sqrt{101} \qquad \sqrt[3]{29} \qquad (28)^{4/3} \qquad \cos(2\pi/13) \qquad \operatorname{tg}(99\pi/100)$$