

Pracuj samodzielnie!!!

Imię i nazwisko: Piotr Piesiak

Numer części: 3 Numer zadania: 1

Rząd kwadratury Q_m wynosi $r \in \mathbb{N}$ jeśli:

$$\bullet \int_a^b w(x) dx = Q_m(w) \Rightarrow R_m(w) = 0 \quad w \in \Pi_{r-1}$$

$$\bullet \exists v \in \Pi_r \setminus \Pi_{r-1} \quad \int_a^b v(x) dx \neq Q_m(v) \Rightarrow R_m(w) \neq 0$$

okażemy, że Q_m ma rząd $\geq m+1$

dla dowol. $w_m \in \Pi_m \quad Q_m(w_m) = \int_a^b w_m(x) dx$

zauważmy, że $\lambda_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^m \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ to $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ tworzą
przestrzeń bazę \forall wielomianów w Π_m . $\lambda_i(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & \text{wpp} \end{cases}$

(*) wynika to stąd, że wektory λ_i postaci $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, czyli na i -tej pozycji jest 1. Wszystkie są liniowo niezależne i jest ich $m+1$.
stąd rozpinają przestrzeń Π_m .

Skoro (*) to $w_m(x) = L_m(x) = \sum_{k=0}^m f(x_k) \cdot \lambda_k(x)$

zauważmy $\int_a^b \lambda_i(x) dx = Q_m(\lambda_i(x)) = \sum_{\substack{k=0 \\ \text{bo } \lambda_i \in \Pi_m}}^m A_k \cdot \lambda_i(x_k) = A_i \cdot \lambda_i(x_i) = A_i$

Pamiętaj o zasadach nadsyłania rozwiązań!

$$Q_m(\frac{w_m}{f}) = \sum_{k=0}^m A_k \frac{w_m}{f}(x_k) = \sum_{k=0}^m I(\lambda_k(x)) \frac{w_m}{f}(x_k) \quad , \quad \underline{I \text{ to value}}$$

zatem Q_m to kwadratowa interpolacyjna.