ARCHIWUM - ANALIZA II, 2020

1. Próba ćwiczeń 13-03-2020

1.1. Zadnie 3/1 (MPr).

$$\partial_u \int_{-u}^{u^2} \sqrt{1+x^2}\, dx = \partial_u (\int_0^{u^2} ... - \int_0^{-u} ...) = \sqrt{1+u^4} \cdot 2u - (-1)\sqrt{1+u^2}$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

1.2. Zadnie 3/2 (KO).

Date: March 17, 2020.

1.3. **Zadanie 8/0 (AM)j.**

$$\left(e^{e^x}\right)' = e^x e^{e^x}$$

$$\left(c(e^x)^k e^{e^x}\right)' = c\left(\left(e^x\right)^k\right)' e^{e^x} + c(e^x)^k \left(e^{e^x}\right)' = kc(e^x)^k e^{e^x} + c(e^x)^{k+1} e^{e^x}$$

Wnioski: $\left(e^{e^x}\right)^{(n)} = W_n(e^x)e^{e^x}$

$$\left(e^{e^x}\right)^{(n)} \leq e^x \left(e^{e^x}\right)^{(n-1)} + (n-1)\left(e^{e^x}\right)^{(n-1)}$$

$$W_0(x) = 1\ ,\ W_1(x) = x\ ,\ W_2(x) = 2x + x^2\ , \cdots$$

Lemat 1: $W_n(e^0) = W_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n \leq n!$

d-d: $W_0(1) = W_1(1) = 1$

$$W_n(1) \leq 1 \cdot W_{n-1}(1) + (n-1)W_{n-1}(1) \leq (n-1)! + (n-1)(n-1)! = n!$$

Lemat 2: $\xi \in [-|x|, |x|] \Rightarrow \left(e^{e^\xi}\right)^{(n)} \leq n!\left(1 + (e^{|x|})^n\right) e^{e^{|x|}}$

d-d: $\xi > 0 \Rightarrow (e^\xi)^k \leq (e^\xi)^n \leq (e^{|x|})^n$

$\xi \leq 0 \Rightarrow (e^\xi)^k \leq 1$

Skoro W_n ma dodatnie współczynniki, to $W_n(e^\xi) \leq n!$ lub $W_n(e^\xi) \leq n!(e^{|x|})^n$ stąd teza.

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{\left(e^{e^\xi}\right)^{(n)} x^n}{n!} \right| \leq (1 + (e^{|x|})^n)|x|^n e^{e^{|x|}}$$

dla $x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ szereg zbieżny do e^{e^x}

i teraz tak:

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, e^{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!}$$

i teraz skoro to zbiega dla każdego x i wszystko poza x^n dodatnie to szereg zb. bezwzględnie (dla $x < 0$ szereg w $-x$ zbieżny) więc

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Gdzie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ zbieżne do pewnej stałej (zależnej od n, ale nie od x).
Wiemy, że ten nowy szereg jest szeregiem potęgowym zbieżnym do e^{e^x} a szereg MacLaurina jest zbieżny do tejże funkcji na pewnym przedziale. Z jednoznaczności rozkładu w szereg potęgowy są to te same szeregi, więc szereg MacLaurina jest również zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

$$|e^x| \leq e^{|x|} \tag{1}$$

1.4. **Lemacik.** Zadanie: $a_{n,k} \geq 0$ takie, że

$$\sum_k (\sum_n a_{n,k}) < \infty$$

to

$$\sum_k (\sum_n a_{n,k}) = \sum_n (\sum_k a_{n,k})$$

Tzn. dla $\varepsilon > 0$ istnieje k_0

$$\sum_{k>k_0} (\sum_n a_{n,k}) < \varepsilon$$

Dla $k = 1, \cdots, k_0$ mamy $N_1, \cdots, N_{k_0}$

$$\sum_{n>N_j} a_{n,k} < \frac{\varepsilon}{k_0}$$

Tzn. $N = \max(N_1, \cdots, N_{k_0})$ to

$$\sum_{n>N} (\sum_k a_{n,k}) < 2\varepsilon$$