Piotr Piesiak

zad. 4 wszystkich ciągów 2^n

zauważmy, że ciągów gdzie liczba 0 jest większa o 1 jest tyle samo co 1 większa od 0. Ciągów w których liczba jedynek jest taka sama co 0 jest:

gdy n nieparzyste 0

gdy n parzyste jest to $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ -> liczba wyborów ustawienia $\frac{n}{2}$ jedynek (w wolne miejsca 0)

-> $\frac{\text{liczba ciągów}}{2}$

zatem gdy n jest nieparzyste: 2^{n-1}

gdy n jest parzyste: $\binom{n}{\frac{n}{2}} + \left(\frac{2^n - \binom{n}{\frac{n}{2}}}{2}\right)$

liczba ciągów, w których liczba 0 przekracza 1

zad. 8

weźmy dowolny n-elementowy zbiór Z. (2^n - l. podzbiorów) Wyróżnijmy element „z".

Zauważmy, że ilość podzbiorów zbioru Z, które zawierają element „z" jest taka sama jak tych co nie zawierają. ~~(więcej każdy podzb)~~

X - podzbiory zawierające „z"

Y - podzbiory niezawierające „z", zauważmy, że każdy podzbiór $x \in X$ możemy stworzyć poprzez dodanie do odpowiedniego $y \in Y$ elementu „z".

(oczywista obserwacja: po usunięciu „z" z $x \in X$ otrzymujemy $y \in Y$)

Stąd wszystkie podzbiory Z możemy zapisać w „dwójkach": $(y, y \cup \{z\})$

zbiór z $\{z\}$ oraz bez

takich par będzie 2^{n-1}, w każdej parze jeden jest podzbiorem drugiego.

Z zasady szufladkowej (szufladkami są pary, kulkami podzbiory)

$2^{n-1} + 1 > 2^{n-1}$ wśród wybranych podzbiorów co najmniej 2 będą w tej samej parze, a co za tym idzie - jeden będzie podzbiorem drugiego.

\#

Piotr Piesiak

zad. 2

$$E^2\langle a_n\rangle = 3E\langle a_n\rangle - 2\langle a_n\rangle + \langle \tfrac{1}{11}^n + 7\rangle$$

zatem anihilator: $(E^2-3E+2)(E-\frac{1}{11})(E-1) = (E-1)^2(E-2)(E-\frac{1}{11})$

$$\underline{a_n = an + b + 2^n\cdot c + \left(\tfrac{1}{11}\right)^n\cdot d}$$

zad. 3

f. tworząca dla 7^n $(1, 7, 7^2, 7^3, \dots)$ $\to$ $\frac{1}{1-7x}$

f. tworząca dla $a_n = 7^0 + 7^1 + \dots + 7^n \to \overset{A(x)}{=} \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-7x} \to (1, 1+7, 1+7+7^2, \dots)$

f. tworząca dla $(1, 0, 1+7, 0, 1+7+7^2, 0, \dots) \to A(x^2)$

Odp. $A(x^2) = \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-7x^2}$

~~zad. 4~~

~~zauważmy, że jest to analogiczne zadanie co w~~

~~przypadku~~

zad. 5

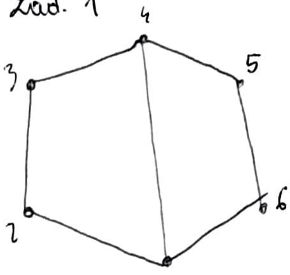
5 aktorek i 3 sztuki $\to$ 15 różnych gier aktorek

$2\cdot 7 < 15$, zatem z zasady szufladkowej (szufladkami są sztuki, rozdzielamy w nie role aktorek)

przynajmniej w jednej zagrają 3 aktorki.

Piotr Piesiuk

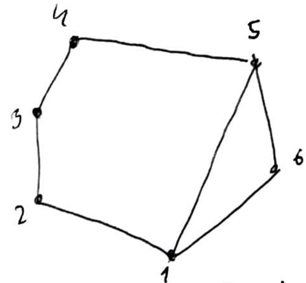
Zad. 1



a) nie ma bo st. nieparzyste

b) ma 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1

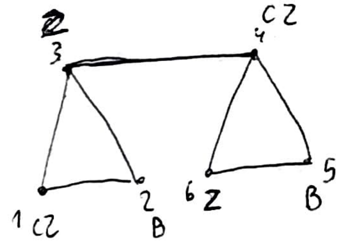
d) ~~2 kolorowanie~~ 3 kolorowanie bo krawędź 1-4 to wymusza



a) nie ma bo st. nieparzyste

b) ma 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1

d) 3 kolory bo 1-5 wymusza (cykl 1, 5, 6)

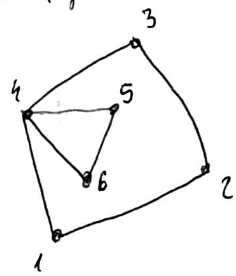


a) nie ma ~~t.~~ bo nieparzyste

b) nie ma

d) 3 - kolory (CZ, B, Z)

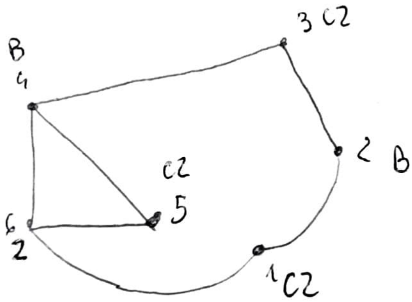
pokolorowanie mniej się nie da bo 1, 2, 3 cykl.



a) nie ma bo st. nieparzyste

b) ~~ma~~ nie ma

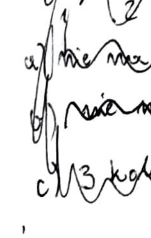
d) 3 - kolorowanie bo cykl 4, 5, 6



a) nie ma bo st nieparzyste

b) ma, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1

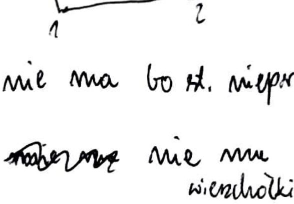
d) 3 kolorowanie ~~(minimalne)~~ bo cykl ~~[illegible]~~ 4, 5, 6



~~a) nie ma bo st. nieparzyste~~

~~b) nie ma~~

~~c) 3 kolory bo cykl (6, 3, 4)~~



a) nie ma bo st. nieparzyste

b) ~~[illegible]~~ nie ma

c) 3 kolory bo ~~krawędź~~ wierzchołki 5-6-2 wymuszają

Piotr Piesiak

zad. 6

wszystkich wyrazów $\to 4^n$

n-literowych

- ilość wyrazów gdzie wybrane 2 litery ~~się~~ mają tę samą liczbę wystąpień (różną od 0)

$G_0 = 1,\ G_1 = 2$

(*) $G_n = \underbrace{2 \cdot G_{n-1}}_{\text{dodajemy 1 literę z 2 możliwych}} + \underbrace{2 \cdot G_{n-2}}_{\text{dodajemy 2 litery na 2 sposoby}}$ ← wzór rek. na n-lit. wyrazów gdzie 2 litery wyst. tyle samo razy

od tego musimy odjąć sytuację gdzie liczba tych liter wynosi $0 \to 2^n$ możliwości

(*) anihilator: $(E^2 - 2E - 2) = (E - (1-\sqrt{3}))(E - (1+\sqrt{3}))$

$G_n = (1-\sqrt{3})^n \cdot a + (1+\sqrt{3})^n \cdot b \quad \overset{G_1 = 2 = G_0}{\Longrightarrow} \quad a = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\ b = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$

czyli takich jest $\boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot (1-\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \cdot (1+\sqrt{3})^n - 2^n} = A$

- ilość wyrazów gdzie wybrane 3 litery wyst. tyle samo razy (różne od 0)

$H_0 = 1,\ H_1 = 1,\ H_2 = 1$

$H_n = H_{n-1} + 3! \cdot H_{n-3}$ do tego odejmujemy gdzie liczba wynosi $0 \to 1$

anihilator: $(E^3 - E^2 - 6)$ ~~Rozpisujemy f. tworzącą~~

→ po rozwiązaniu jawnego wzoru otrzymamy liczbę $B-1$

~~rozkład n na wielokrotności 3 i 1: $\frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x}$~~

- ilość wyrazów gdzie wybrane 4 litery wyst. tyle samo

$I_n = 4! \cdot I_{n-4},\ I_n = 0$ ~~9n~~ → po rozwiązaniu otrzymamy C

z zasady włączeń i wyłączeń n-elementowych wyrazów (wg. polecenia) jest

$4^n - \binom{4}{2} \cdot A + \binom{4}{3} \cdot (B-1) - C$