

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 8. Tydzień rozpoczynający się 26. kwietnia

Zadania

1. O zmiennej losowej X wiadomo, że

$$P(X > t) = \alpha e^{-\lambda t} + \beta e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

$\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\lambda, \mu > 0$. Obliczyć wartość oczekiwaną X .

[Do zadań 2–4] Zmienna losowa X_n ma gęstość $f_n(x) = \frac{c_n}{x^{n+1}}$ dla $x \in [c_n, \infty)$.

2. Wyznaczyć c_n oraz $E(X_n)$.

3. Wyznaczyć gęstość zmiennej $Z_n = \ln X_n$.

4. Dla jakich wartości m istnieje wartość oczekiwana $E(X_n^{m+1})$?

5. X jest ciągłą zmienną losową określoną na przedziale $(0, a)$. Wykazać, że $E(X) = \int_0^a (1 - F(t)) dt$.

6. a). Dane są gęstości $\{f_i\}_{i=1}^n$ oraz ciąg skalarów $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ takich, że $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$. Wykazać, że

$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej.

- b). Niezależne zmienne Y_1, Y_2 mają rozkład jednostajny na $[0, 1]$. Wyznaczyć gęstość zmiennej $Z = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$.

[Do zadań 7–8] Zmienna losowa X podlega rozkładowi normalnemu z parametrami jak poniżej:

$$N \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \right).$$

7. Niech $Y_1 = 3X_1 + X_2$, $Y_2 = -4X_1 + 2X_2$. Znaleźć rozkład zmiennej Y .

8. Niech $Y_1 = 2X_1 - 3X_2$, $Y_2 = 4X_1 + 2X_2$. Jaka jest wartość współczynnika korelacji ρ_{y_1, y_2} ?

[Do zadań 9–11] Zakładamy, że zmienne X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają ten sam ciągły rozkład o dystrybucie $F(x)$ i gęstości $f(x)$. Tworzymy nowe zmienne losowe, mianowicie: $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_{(2)}$ to druga co do wielkości wartość, $X_{(3)} = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

9. Udowodnić, że $f_{(2)}(x) = 6 \cdot F(x) \cdot (1 - F(x)) \cdot f(x)$.

[Do zadań 10–11] Dodatkowo zakładamy, że $X_k \sim U[0, a]$, $k = 1, 2, 3$.

10. Niech $Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$, $Y_2 = X_{(2)}$, $Y_3 = \frac{X_{(1)} + X_{(3)}}{2}$. Udowodnić, że wartości oczekiwane są takie same: $E(Y_1) = E(Y_2) = E(Y_3) = \frac{a}{2}$.

WSK.: $E(Y_1)$ z własności wartości oczekiwanej, $E(Y_2)$ – całkowanie, $Y_3 = \frac{3Y_1 - Y_2}{2}$.

11. Wykazać, że: $V(Y_1) = \frac{a^2}{36}$, $V(Y_2) = \frac{a^2}{20}$.

WSK.: Wariancja sumy niezależnych zmiennych losowych, $E(Y_2^2)$ poprzez całkowanie.

12. **(E2)** Niech (X, Y) oznacza wybrany losowo punkt na płaszczyźnie. Załóżmy, że współrzędne X i Y są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0, 1)$. Od zmiennej (X, Y) przechodzimy do zmiennej (R, Θ) , gdzie R i Θ są współrzędnymi biegunowymi punktu (X, Y) . Wykazać, że gęstość zmiennej (R, Θ) określona jest wzorem

$$g(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} r \cdot \exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \right\}, \quad \text{gdzie } 0 < \Theta < 2\pi, \quad 0 < r < \infty.$$

13. **(E2)** Znaczenie zmiennej (X, Y) niech będzie takie, jak w poprzednim zadaniu. Niech

$$D = R^2 = X^2 + Y^2, \quad \Theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X}.$$

- (a) Udowodnić, że gęstość zmiennej (D, Θ) to: $f(d, \Theta) = \frac{1}{2} \exp \left\{ -\frac{d}{2} \right\} \frac{1}{2\pi}$,
gdzie $0 < d < \infty$, $0 < \Theta < 2\pi$.
(b) Sprawdzić czy zmienne D i Θ są niezależne.
(c) Jaki rozkład ma zmienna D ?

Witold Karczewski