Zadanie 7

Weźmy dowolną dodatnią stochastyczną macierz A : n x n o wartości własnej λ takiej, że $|\lambda| = 1$ Pokażę, że (1) dla wektora własnego $W \in \mathbb{C}^n$ wartości własnej λ możemy znaleźć $\alpha \in \mathbb{C}$ i $V \in \mathbb{R}^n$, takie że $W = \alpha V$, (2) V z poprzedniego podpunktu takie, że $V > 0$ oraz (3) A ma jedynie rzeczyiwste wartości własne o module 1.

1. Z definicji wartości własnej, wiemy że $AW = \lambda W$. Określmy równość modułów wektorów w $\mathbb{C}^n$ jako: dla $Z, S \in \mathbb{C}^n$ $|Z| = |S| \Leftrightarrow \forall_{i\in\langle 1,n\rangle}\ |Z_i| = |S_i|$. Wtedy:

$$|AW| = |\lambda W| = |\lambda||W| = |W| \qquad *$$

Z nierówności trójkąta mamy: $\forall_{i\in\langle 1,n\rangle} \quad |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j| \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|w_j|$ zatem każdy wiersz wektora $A|W|$ jest większy lub równy wierszowi w $|AW|$. $\qquad **$

$$W \quad szczególności \quad \sum_{i=1}^{n} |(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j)| \le \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|w_j|) \quad \Leftrightarrow \quad \||AW|\|_1 \le \|A|W|\|_1 \qquad ***$$

Korzystając z własności z zadania 1 tzn. dla dowolnego wektora V i macierzy stochastycznej dodatniej A zachodzi $\|AV\|_1 \le \|V\|_1$ wiemy, że

$$\|A|W|\|_1 \le \||W|\|_1$$

Korzystając z (*) oraz (***) otrzymujemy:

$$\||AW|\|_1 \le \|A|W|\|_1 \le \||W|\|_1 = \||AW|\|_1 \quad \Leftrightarrow \quad \|A|W|\|_1 = \||AW|\|_1 \qquad ****$$

Ponieważ (**) każdy wiersz wektora $A|W|$ jest większy lub równy wierszowi w $|AW|$ i z równości (****) otrzymujemy:

$$\forall_{i\in\langle 1,n\rangle}(|AW|)_i = (A|W|)_i \quad czyli:$$

$$|a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + ... + a_{i(n-1)}w_{n-1} + a_{in}w_n| = a_{i1}|w_1| + a_{i2}|w_2| + ... + a_{i(n-1)}|w_{n-1}| + a_{in}|w_n| \quad \#$$

LEMAT 1. Dla $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ jeśli zachodzi $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$ to $\forall_{k\in\langle 1,n\rangle}|z_1 + z_2 + ... + z_k| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_k|$. Dowód:
Z nierówności trójkąta mamy

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \le |z_1 + z_2 + ... + z_{n-1}| + |z_n|$$

$$|z_1 + z_2 + ... + z_{n-1}| + |z_n| \le |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$$

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \le |z_1 + z_2 + ... + z_{n-1}| + |z_n| \le |z_1 + z_2 + ... + z_n|$$

zatem $|z_1 + z_2 + ... + z_{n-1}| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_{n-1}|$. Wykonując powyższy schemat k razy otrzymamy tezę.

LEMAT 2. Dla $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ jeśli zachodzi $|z_1+z_2+...+z_n| = |z_1|+|z_2|+...+|z_n|$ to istnieje $\alpha \in \mathbb{C}$ i $v_i \in \mathbb{R}$, takie że $\forall_{i\in\langle 1,n\rangle} \quad z_i = \alpha * v_i$. Dowód:
Dla $n = 1$ oczywiste, dla $n = 2$ mamy dla $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$:

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{(a_1)^2 + (b_1)^2} + \sqrt{(a_2)^2 + (b_2)^2}$$

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = (a_1)^2 + (b_1)^2 + (a_2)^2 + (b_2)^2 + 2\sqrt{((a_1)^2 + (b_1)^2)((a_2)^2 + (b_2)^2)}$$

$$(a_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2 + 2a_1a_2b_1b_2 = (a_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2 + (a_1b_2)^2 + (b_1a_2)^2$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0 \quad a_1b_2 = a_2b_1$$

Zatem $a_1 = ca_2$, $b_1 = cb_2$ i co za tym idzie $z_1 = cz_2 \quad c \in \mathbb{R}$. Niech $\alpha = z_2$, $v_1 = c$ oraz $v_2 = 1$ wtedy $z_1 = \alpha v_1$ oraz $z_2 = \alpha v_2$ zatem dla $i = 2$ własność zachodzi.
Weźmy $n \ge 2$ i załóżmy, że wzór i własność zachodzi tzn. : $|z_1+z_2+...+z_n| = |z_1|+|z_2|+...+|z_n|$ i istnieje $\alpha \in \mathbb{C}$ i $v_i \in \mathbb{R}$, takie że $\forall_{i\in\langle 1,n\rangle} \quad z_i = \alpha * v_i$.

$$|z_1 + z_2 + ... + z_{n+1}| = |z_1 + z_2 + ... + z_n| + |z_{n+1}| \quad z \quad Lematu \quad 1$$

$$|z_1 + z_2 + ... + z_{n+1}| = |\alpha(v_1 + v_2 + ... + v_n)| + |z_{n+1}| \quad zał. \quad indukcyjne$$

$$|\alpha x z_{n+1}| = |\alpha x| + |z_{n+1}| \quad x = v_1 + v_2 + ... + v_n \quad x \in \mathbb{R}$$

Powtarzając schemat dowodu dla $n = 2$ otrzymamy równość: $z_{n+1} = cx\alpha$ zatem dla $v_{n+1} = xc$ mamy $z_{n+1} = \alpha v_{n+1}$. Na mocy indukcji mamy tezę lematu 2.

Używając lematu 2 do (#) otrzymamy

$$W = \alpha V \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad V \in \mathbb{R}^n$$

$\blacksquare$

2. Załóżmy, że V ma współczynniki róznych znaków:

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| > |\sum_{i=1}^{n} v_i| \quad \alpha\lambda V = \alpha AV$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda v_i| = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j| < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|v_j| = \sum_{j=1}^{n} |v_j| \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |v_j| \quad \textit{sprzeczność}$$

Zatem V ma współczynniki tego samego znaku. V nie ma współrzędnej zerowej, ponieważ:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

Wszystkie a_{ij} są dodatnie oraz conajmniej jeden v_j jest niezerowy. Możemy założyć, że $V > 0$, ponieważ możemy wyciągnąć (-1) przed wektor i pomnożyć przez skalar α. Wektor αV nadal będzie wektorem własnym.

$\blacksquare$

3. Załóżmy, że $|\lambda| = 1$, ale $\lambda \neq 1$ wtedy:

$$A\alpha V = \lambda \alpha V$$

To znaczy, że V jest wektorem własnym dla λ oraz wszystkie wektory postaci aV gdzie $a \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$ są wektorami własnymi tej wartości własnej.

$$|A\alpha V| = |\lambda\alpha V|$$

$$|\alpha|AV = |\alpha|V \quad \textit{ponieważ} \quad A \quad V \quad \textit{mają} \quad \textit{rzeczyiwste} \quad \textit{dodatnie} \quad \textit{współrzedne}$$

Z tego wynika, że 1 jest wartością własną V. Sprzeczność bo $\lambda \neq 1$

$\blacksquare$

Zatem jeśli A jest dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną (na liczbach zespolonych) to jeśli A ma wartość własną o module 1 to musi być ona rzeczyiwsta oraz wektor własny tej wartości jest postaci αV, gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$ oraz $V > 0$.