控制论/强化学习/数学/物理杂记

整理自 ChatGPT

2025 年 11 月 23 日

说明

Chatgpt帮忙整理的，所以文章ai味很浓。。

目录

1 Weyl Tube Law 与 Riccati 方程

1.1 Tube formula

设 M^n 是嵌入欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的一个光滑子流形。
Weyl Tube Law 描述了在 M 周围构造一层厚度为 r 的"管"（tube）时，其体积的展开公式：

$$\mathrm{Vol}(T_r(M)) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_j(r) \int_M P_j(\mathrm{II}) \tag{1}$$

其中：

- $T_r(M)$ 表示测地距离 M 不超过 r 的点集；
- II 是 M 的第二基本形式；
- $P_j(\mathrm{II})$ 称为 generalized 平均曲率， II 的 j 次 tensor power 的缩并，关键是其在 M 上的积分和背景空间无关（from Gauss equation）；
- $c_j(r)$ 是与半径 r 有关的系数，可以精确写出。

Weyl 用此定理轻易证明了著名的 Gauss-Bonnet-Chern 公式，后来 Chern 又在其启发下给出了内蕴证明，一路通向指标定理之康庄大道。

1.2 例一：三维空间中的曲线

设 $\gamma(s)$ 是弧长参数化的空间曲线，曲率为 $\kappa(s)$。
曲线的"r 管"定义为:

$$T_r(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \mathrm{dist}(x, \gamma) \leq r\}.$$

它是沿曲线扫出的半径为 r 的圆柱体。
此时 Weyl tube law 给出:

$$\mathrm{Vol}(T_r(\gamma)) = \pi r^2 L(\gamma),$$

其中 $L(\gamma)$ 是曲线长度。
由于曲线是一维流形，所有曲率效应都隐藏在长度项中； $\kappa(s)$ 作为外蕴量在这里自然消失。

1.3 例二：三维空间中的闭曲面

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为一个光滑紧闭曲面。

Weyl 的结果在该情形下可以写为（r 足够小）：

$$\mathrm{Vol}\big(T_r(S)\big) = 2\pi r \mathbb{A}\smallsetminus\partial(S) + \frac{4\pi}{3}\chi(S) r^3$$

其中 $\chi(S)$ 为 Euler characteristic，注意这里面亦没有任何外蕴曲率项，Euler characteristic 实则来自曲面的 Gauss 定理。

Riccati 方程和 Tube formula 的证明

一般证明 Weyl 管公式时，需要研究沿法线族的变分如何使体积元发生变化。沿法向线的主曲率满足矩阵形式的 **Riccati 方程**（几何版），其迹或行列式的展开会给出体积多项式的系数。为了在局部进行这些展开，常常采用沿子流形构造的 **Fermi 坐标**，它把子流形邻域“局部欧式化”，从而把 Riccati 方程的解和体积展开直接联系起来。

1.4 黎曼几何中的 Riccati 方程

要在一般黎曼流形 $(\mathcal{M}, g)$ 上证明 Weyl tube law，需要理解体积元素沿**法线方向**如何变化。
这一变化由法向变分的 Jacobi 方程控制。

设 $\gamma(t)$ 是法线方向的测地线， $\dot{\gamma}$ 是其速度， $J(t)$ 是一族相邻测地线之间的变分向量场。
Jacobi 方程为：

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^2 J + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0,$$

其中 R 是黎曼曲率张量。

定义形算子（shape operator）：

$$A(t) = -\nabla_J \mathbf{n},$$

其中 $n = \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$ 是法向单位向量。

计算可得 $A(t)$ 满足：

$$A' + A^2 + R = 0, \tag{2}$$

这正是一个矩阵 **Riccati 方程**。

- A 描述法线方向上子流形的“弯曲”；
- A' 表示弯曲率的变化；
- A^2 表示自身的非线性积累；
- R 是 Ricci 曲率张量。

在 Weyl tube law 的证明中，我们需要沿法线方向求解该方程，进而计算体积变分：

$$\det(I - rA)$$

的展开正是各个曲率项的来源。

换句话说，**Weyl tube law 的系数是 Riccati 方程解的行列式展开项**。

1.5 从 Riccati 到 Fermi 坐标

要在黎曼流形中进行这种展开，必须选择一种“正交而不旋转”的局部坐标系，使得法线方向与切空间分离，且度规展开简洁。
这便引出了 **Fermi 坐标（Fermi coordinates）**。

设 M 上一点 p，在其切空间取正交基 $\{e_i\}$，沿法向单位向量 n 定义映射：

$$\exp_p(y^i e_i + sn),$$

其中 y^i 是沿 M 的切向坐标，s 是法线坐标。

在 Fermi 坐标下，度规展开为：

$$g_{ij}(y,s)=\delta_{ij}-\frac{1}{3}R_{ikjl}(p)y^k y^l+O(|y|^3),$$

这使得体积计算大幅简化。顺便提一口对这个式子积分能得到测地球体积的渐近展开，第二项的积分好像还是24年丘赛几何赛道题来着。

因此：

- Riccati 方程刻画了法向曲率的演化；
- Fermi 坐标提供了度规展开的局部框架；
- Weyl tube law 的证明正是这两者的结合。

而在广义相对论中，光线走时空流形的测地线，Riccati 方程就刻画了光线的偏折，下面就来谈谈广相中的几何与 Riccati 方程。

2 广义相对论的几何与 Riccati 方程

2.1 Shape Operator 和 Riccati 方程

考虑一束相邻测地线（光线）形成的二维横截面，定义 **Shape Operator** B^{μ}_{ν}：

$$B^{\mu}{}_{\nu} = \nabla_{\nu} k^{\mu}_{\perp}$$

其中 k^{μ} 是光线切向量，$\perp$ 表示横向正交投影。

Riccati 型方程为：

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\lambda} + B^2 + R_{\perp} = 0 \tag{3}$$

- $B^2 = B^{\mu}_{\rho} B^{\rho}_{\nu}$
- $R^{\mu}_{\perp\nu} = R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} k^{\alpha} k^{\beta}$

2.2 取 trace → Sachs 光学方程

定义光束膨胀率：

$$\hat{\theta} = \mathrm{Tr}(B) = B^{\mu}{}_{\mu}$$

取 Riccati 方程的 trace，得到 **Sachs 光学方程**（弱场、真空 $R_{\mu\nu} = 0$）：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{1}{2}\hat{\theta}^2 + |\hat{\sigma}|^2 = 0 \tag{4}$$

在弱场近似下，剪切 $|\hat{\sigma}|^2$ 可忽略：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\lambda} \approx -\frac{1}{2}\hat{\theta}^2$$

2.3 Schwarzschild 度规与光线轨道

静态球对称 Schwarzschild 度规：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) \tag{5}$$

光线在赤道平面 $(\theta = \pi/2)$ 上，定义冲击参数 $b = L/E$，轨道方程（null geodesic）：

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - r^2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$$

2.4 光束膨胀积分 → 偏折角（变量代换 $u = 1/r$）

2.4.1 轨道方程

定义 $u = 1/r$，则：

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2$$

这是 Schwarzschild 弱场下光线的 Riccati 型轨道方程。

2.4.2 弱场一阶摄动解

零阶近似（直线）：

$$u_0(\phi) = \frac{\sin\phi}{b}$$

一阶修正：

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{3GM}{c^2}u_0^2 = \frac{3GM}{2c^2b^2}(1 - \cos 2\phi)$$

积分得到：

$$u_1(\phi) = \frac{GM}{2c^2b^2}(3 + \cos 2\phi)$$

总轨道：

$$u(\phi) = u_0(\phi) + u_1(\phi) = \frac{\sin\phi}{b} + \frac{GM}{2c^2b^2}(3 + \cos 2\phi)$$

2.4.3 计算偏折角

远离太阳时 $r \to \infty \Rightarrow u \to 0$：

$$0 = u(\phi_\infty) = \frac{\sin\phi_\infty}{b} + \frac{GM}{2c^2b^2}(3 + \cos 2\phi_\infty)$$

展开 $\phi_\infty = \pi/2 + \delta\phi$ 并近似：

$$\delta\phi \approx \frac{2GM}{bc^2}$$

总偏折角（入射 + 出射）：

$$\alpha_{\mathrm{GR}} = 2\delta\phi = \frac{4GM}{bc^2}$$

2.5 数值代入（太阳附近光线）

- $GM_\odot = 1.3271244 \times 10^{20}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$
- $R_\odot = 6.957 \times 10^8\,\mathrm{m}$
- $c = 2.99792458 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

代入公式：

$$\alpha_{\mathrm{GR}} = \frac{4GM_\odot}{R_\odot c^2} \approx 1.751'' \quad \text{(arcseconds)}$$

牛顿理论预测：

$$\alpha_{\mathrm{Newton}} = \frac{2GM_\odot}{R_\odot c^2} \approx 0.876''$$

实验观测（Eddington 1919 日食实验）：

$$\alpha_{\text{obs}} \approx 1.75''$$

2.6 结论

- **Riccati → Sachs 方程**：描述光束膨胀/剪切率演化。
- **Schwarzschild 弱场积分**：得到经典光线偏折公式 $\alpha = 4GM/(bc^2)$。
- **对比结果**：

理论	偏折角	与观测
牛顿	$0.876''$	低约 50%
GR (Sachs)	$1.751''$	完全符合观测

- **物理意义**：光线偏折的一半来源于时间膨胀效应，一半来源于空间弯曲效应；Sachs 方程把光束的收敛/膨胀率与偏折角联系起来。

总结一下，我们通过太阳附近光线偏折的例子，展示了 **Riccati 方程 → Sachs 光学方程 → 光束膨胀率 → 偏折角** 的完整推导，并验证了广义相对论对经典牛顿理论的巨大修正。

Riccati / Sachs 方程的核心地位不仅体现在小尺度太阳系实验上，在现代天体物理和宇宙学中也取得了显著成功：

应用场景	物理对象	Sachs 方程作用	实验/观测验证
强引力透镜	星系团、超大质量黑洞	光束膨胀率 $\hat{\theta}$ 和剪切率 $\hat{\sigma}$ → 放大率、多重像、光束焦散	Hubble 太空望远镜观测的爱因斯坦环、Abell 1689 星系团透镜，模型与观测高度一致
宇宙微透镜 (Microlensing)	银河系恒星或行星	光束收敛率随时间演化 → 光变曲线	OGLE 和 MACHO 项目探测到的暗天体候选体，光变曲线与理论匹配
CMB 弱透镜	宇宙大尺度结构	光束膨胀与剪切 → 弱透镜信号、重建大尺度质量分布	Planck / ACT / SPT 卫星观测的微透镜信号与理论吻合
黑洞阴影	M87*, Sgr A*	光束膨胀/剪切 → 阴影轮廓和光环亮度分布	Event Horizon Telescope (EHT) 观测的光环亮度与 GRMHD + 光束积分预测一致

核心结论

- **Riccati 方程的物理意义：**描述光束横向偏差矩阵的演化，直接控制光束收敛/膨胀和剪切率。
- **Sachs 方程的作用：**trace Riccati 方程，提供光束膨胀率 $\hat{\theta}$ 的演化规律，是分析引力透镜、微透镜、CMB 弱透镜和黑洞阴影的基础工具。
- **实验验证：**从太阳附近光线偏折到星系团强透镜和黑洞阴影观测，Sachs 方程的预测与实际观测高度一致，远超经典牛顿理论。

3 量子力学与 Riccati 方程

3.1 Riccati 方程在半经典近似中的出现

从一维定态薛定谔方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

定义**量子动量函数**：

$$p(x):=-i\hbar\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$$

得到 **Riccati 方程**：

$$p(x)^2+i\hbar p'(x)=2m(E-V(x)) \tag{6}$$

- 将二阶线性微分方程转为一阶非线性方程。
- 在半经典近似 $\hbar \ll 1$ 下展开：

$$p(x)=p_0(x)+i\hbar p_1(x)+(i\hbar)^2p_2(x)+\dots$$

- 零阶 $p_0(x)=\sqrt{2m(E-V(x))}$ 对应经典动量，后续项提供量子修正。
- WKB 波函数一阶近似：

$$\psi(x)\approx\frac{1}{\sqrt{p_0(x)}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int^x p_0(x')\mathrm{d}x'\right)$$

3.1.1 Bohr-Sommerfeld 量子化条件的物理意义

- 对束缚态，波函数在经典允许区来回震荡，回到起点时相位必须单值：

$$\psi(x_{\text{start}})=\psi(x_{\text{start}}+\text{one period})$$

- 对应 **闭合积分的相位累积**：

$$\oint p_0(x)\mathrm{d}x=2\pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

- 物理解释：**波函数沿经典轨道“绕一圈”相位必须是 2π 的整数倍**。
- Maslov 指数修正转折点相位，每个端点贡献 $\pi/2$，总共加 $\pi \Rightarrow 1/2$ 在量子化条件里。

3.1.2 注：Maslov 指数的数学与 WKB / Riccati 方程

Maslov 指数的数学见解 在半经典量子力学中，WKB 波函数可写为：

$$\psi(\mathbf{q},t) \sim A(\mathbf{q},t)\, e^{\frac{i}{\hbar}S(\mathbf{q},t)},$$

其中 $S(\mathbf{q},t)$ 是作用量函数，其梯度给出 Riccati 方程的零阶解：

$$p_0(\mathbf{q}) = \nabla S(\mathbf{q}).$$

将 $p_0(\mathbf{q})$ 的函数图像放入相空间 $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ 中：

$$L(t) = \{(\mathbf{q},\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} = \nabla S(\mathbf{q},t)\},$$

得到一个 **Lagrangian 流形**，它满足辛结构退化：

$$\omega|_{L(t)} = 0, \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i.$$

沿 Hamiltonian 流 Φ_H^t 演化：

$$L(t) = \Phi_H^t(L(0)),$$

流形保持 Lagrangian 性质。对流形的小扰动线性化：

$$\delta\mathbf{z}(t) = M(t)\,\delta\mathbf{z}(0), \quad M(t) \in Sp(2n,\mathbb{R}),$$

于是 Lagrangian 流形演化对应 **辛群上的一条曲线** $M(t)$。

为了定义 Maslov 指数，引入参考 Lagrangian 子空间 L_0（例如 $\mathbf{p}=0$），**Maslov cycle** Σ 定义为：

$$\Sigma = \{L \in \Lambda(n) \mid L \cap L_0 \neq \{0\}\},$$

即所有与参考子空间非平凡相交的 Lagrangian 子空间集合。物理上，Maslov cycle 对应流形折叠或 WKB 振幅发散的位置（caustic）。沿 Hamiltonian 流演化的流形每次穿过 Σ：

- WKB 波函数相位增加 $\pi/2$
- 穿过次数累加得到 **Maslov 指数** μ

在一维束缚态中，两个转折点对应 $\mu = 2$，进入 Bohr-Sommerfeld 修正：

$$\oint p\,\mathrm{d}q = 2\pi\hbar\left(n + \frac{\mu}{4}\right) = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

在高维系统中，Maslov 指数仍然通过流形穿过 Σ 的次数定义，是曲线在 Lagrangian Grassmannian 上的拓扑量。

Arnold 对 Maslov 指数的贡献 V. I. Arnold 在 1960s 系统研究了 Lagrangian 流形的奇异结构，提出利用 **突变理论（Catastrophe Theory）** 分类 WKB 中的 caustic。核心思想：

1. 流形折叠对应函数奇异点（临界点）：

- 一维：fold（折叠）
- 二维：cusp（三次折叠）
- 三维及以上：swallowtail、umbilic 等

2. 对于任意 Lagrangian 流形 $L(t)$ 与参考子空间 L_0 的交点，局部行为可用标准型描述：

$$S(\mathbf{q}) \sim \sum_{i=1}^{k} \pm q_i^m, \quad m = 2, 3, 4, \ldots$$

这对应 Maslov cycle 的局部拓扑结构。

3. Maslov 指数的几何解释：流形沿 Hamiltonian 流演化穿过不同类型奇异点，每个奇异点对应 WKB 相位跳 $\pi/2$，通过奇异点类型可以判断累积相位。形式化上，Arnold 将 Maslov 指数看作 Lagrangian Grassmannian 中曲线穿过 Maslov cycle 的 **拓扑不变量**：

$$\mu = \sum_{\text{穿过奇异点}} \operatorname{sgn}(\det H_{\text{局部}}(S))$$

其中 $H_{局部}(S)$ 是局部 Hessian，用于判断穿越方向。

4. Arnold 的贡献不仅使 Maslov 指数从一维束缚态推广到高维系统，还提供了 **局部奇异点分类 + 拓扑计数的统一数学框架**，解释了半经典量子力学中 WKB 相位跳的规律性和普适性。

这些在他的MMCM里面有详细介绍。

和几何量子化的联系（ref GTM256?） Maslov 指数在几何量子化中扮演了核心角色。在半经典量子化中，WKB 波函数对应相空间中的 Lagrangian 流形 $L \subset (M, \omega)$，Riccati 方程零阶解 $p_0(\mathbf{q}) = \nabla S(\mathbf{q})$ 的函数图像正是 Lagrangian 流形的局部表示。流形沿 Hamiltonian 流演化时，会穿过 caustic（Maslov cycle）位置，使得半经典波函数相位跳 $\pi/2$。在几何量子化框架下，相空间被提升为一个 prequantum line bundle 并配备联络 ∇，其曲率满足

$$F_\nabla = -i\omega/\hbar.$$

沿 Lagrangian 流形平行移动的半经典波函数不仅累积 Hamilton-Jacobi 作用量 S，还要加上 Maslov 相位 $\mu\pi/2$，以保证波函数全局一致。换句话说，Maslov cycle 对应极化方向的折叠或 caustic，而 Maslov 指数就是前量子纤维丛上沿 Lagrangian 回路的拓扑相位修正。在几何量子化中，Lagrangian 流形等价于极化（polarization），Maslov cycle 是极化方向的奇异集，而 Maslov 指数确保几何量子化得到一致的 Hilbert 空间结构。如果忽略 Maslov 指数，波函数在全局将不连续，因此它是 WKB 修正与几何量子化之间的桥梁。

另外 prequantum line bundle 曲率的量子化条件其实是说 F_∇ 就是 prequantum line bundle 的 chern 类，这之后又是另一条到指标定理的路-Geometric Quantization Approach。

3.2 谐振子例子

考虑一维量子谐振子：

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

3.2.1 Riccati 方程

$$p(x)^2 + i\hbar p'(x) = 2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)$$

3.2.2 半经典展开

$$p_0(x) = \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)}, \quad p_1(x) = -\frac{p_0'(x)}{2p_0(x)}$$

WKB 波函数：

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{p_0(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int^x p_0(x')\mathrm{d}x'\right)$$

3.2.3 闭合积分计算

经典允许区 $[-x_{\max}, x_{\max}]$，其中 $x_{\max} = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$：

$$\oint p_0 \mathrm{d}x = 4\int_0^{x_{\max}} \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)}\mathrm{d}x$$

换变量 $x = x_{\max}\sin\theta$：

$$\oint p_0 \mathrm{d}x = \frac{2\pi E}{\omega}$$

3.2.4 Bohr-Sommerfeld 条件 + Maslov 修正

$$\frac{2\pi E}{\omega} = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

- 完全匹配量子谐振子精确能级
- 展示了 **Riccati 方程 → WKB → Bohr-Sommerfeld 条件 → Maslov 修正** 的完整流程

3.3 数学物理对 Riccati 方程解的研究

3.3.1 半经典展开与渐近分析

- 将 Riccati 方程解 $p(x)$ 展开为幂级数
- 研究收敛性与渐近性质，这块一个常见的工具就是震荡积分的渐近展开，鞍点法/稳定相位法那一套，Airy 积分是最经典的例子；数论里面也有用，比如 Stein 的 complex analysis 附录就有一章特意讲这个。
- Maslov 指数和转折点匹配
- Stokes 现象与复平面延拓
- **应用示例**：预测束缚态能级、解释量子隧穿指数衰减因子

3.3.2 Riemann 面与全局解析结构

- Riccati 方程解是多值函数，定义在 Riemann 面上
- 量子极点聚合成经典分支
- 非微扰效应：$\exp(-1/\hbar)$ 或 $\log(1/\hbar)$
- **应用示例**：复杂势下量子态结构、非微扰隧穿

3.3.3 研究方向

- Riemann-Hilbert Problem/Differential Galois theory：通过边界条件确定全局解析解
- Painlevé 方程联系：某些势下 Riccati 解满足非线性 Painlevé 方程
- Quantum Spectral Curve：高能物理、弦理论量子系统谱分析

3.3.4 总结

- Riccati 方程贯穿半经典量子力学的 WKB 方法、Bohr-Sommerfeld 条件及 Maslov 指数修正
- 在谐振子例子中直接得到精确能级
- 现代数学物理关注解的全局 Riemann 面结构、非微扰效应、数值精确计算及高级几何结构

- 是连接经典动力学与量子系统解析结构的重要桥梁

4 几何控制论与 Riccati 方程

4.1 LQR 的辛几何结构

设连续时间 LQR 系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad J[u] = \int_0^T \left(x^\top Qx + u^\top Ru\right) \mathrm{d}t \tag{7}$$

其中 $Q = Q^\top \geq 0$, $R = R^\top > 0$。

通过 Pontryagin 最大值原理，引入共轭变量 p，构建 Hamiltonian（消去最优 u）：

$$u^* = \frac{1}{2}R^{-1}B^\top p$$

$$H_c(x, p) = p^\top (Ax + Bu^*) - \left(x^\top Qx + u^{*\top} Ru^*\right)$$

将 (x, p) 组合成 $z = \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}$，得到线性 Hamilton 系统：

$$\dot{z} = Hz, \quad H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^\top \\ -Q & -A^\top \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \tag{8}$$

- H 满足
$$H^\top J + JH = 0, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow e^{tH} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$$

- 相空间 (x, p) 的辛形式：
$$\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}p$$

- Lagrangian 子空间 $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ 可以写作：
$$L = \{(x, Sx) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \quad S = S^\top$$

- 随时间演化：
$$L_t = e^{tH} L_0$$

仍是 Lagrangian，对应矩阵 S_t 满足 Riccati 方程：

$$\dot{S} = -A^\top S - SA + SBR^{-1}B^\top S - Q$$

4.2 LQR 的求解— Legendre 变换

定义值函数：

$$V(x,t)=\min_{u(\cdot)}\int_t^T\left(x^\top Qx+u^\top Ru\right)\mathrm{d}t',\quad V(x,T)=0$$

HJB 方程：

$$-\partial_t V=\min_u\left[(\partial_x V)^\top(Ax+Bu)+x^\top Qx+u^\top Ru\right]$$

最优 u：

$$0=B^\top\partial_x V+2Ru\quad\Rightarrow\quad u^*=-\frac{1}{2}R^{-1}B^\top\partial_x V$$

假设二次型值函数：

$$V(x,t)=\frac{1}{2}x^\top S(t)x\quad\Rightarrow\quad\partial_x V=Sx$$

代入 HJB，得到连续时间 Riccati 方程：

$$\dot{S}=-A^\top S-SA+SBR^{-1}B^\top S-Q\tag{9}$$

最优反馈律：

$$u^*=-R^{-1}B^\top Sx$$

稳态解 S_∞ 对应闭环矩阵：

$$A_{\mathrm{cl}}=A-BR^{-1}B^\top S_\infty$$

4.3 Riccati 流的稳定性与几何结构

4.3.1 稳定性与谱判据

Riccati 流：

$$\dot{S} = -A^\top S - SA + SBR^{-1}B^\top S - Q$$

对应 Hamilton 矩阵：

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^\top \\ -Q & -A^\top \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$$

- 若 H 在复平面上没有虚轴特征值，则存在稳定不变子空间 E^-，Riccati 流有稳定极限解 S_∞。
- 闭环矩阵
$$A_{\text{cl}} = A - BR^{-1}B^\top S_\infty$$
是 Hurwitz 的，系统指数稳定。

4.3.2 局部线性化与指数收敛

对 S_∞ 做小扰动 ΔS，得到线性化方程：

$$\dot{\Delta S} = -A_{\text{cl}}^\top \Delta S - \Delta S A_{\text{cl}}$$

谱在左半平面 $\Rightarrow \Delta S(t) \to 0$ 指数收敛。

4.3.3 拉格朗日流与 Maslov 指数

Riccati 流对应 Lagrangian 子空间的时间演化：

$$L_t = e^{tH} L_0, \quad L_0 = \{(x, S_0 x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

- 当 $\det X(t_0) = 0$（穿过 Maslov cycle / 奇异集），Riccati 解 S_t 会出现“爆炸”。
- Maslov 指数计数 L_t 穿越奇异集的次数及方向，提供拓扑稳定性信息。
- Maslov 穿越与谱流（spectral flow）紧密相关：谱特征值从左半平面穿过虚轴 $\leftrightarrow$ Riccati 解的奇异事件。

4.3.4 数值与几何方法

- **稳态 Riccati 解求解**：通过 Hamilton 矩阵的稳定不变子空间（Schur 分解 / ordered Schur）
- **Newton-Kleinman 迭代**：利用线性 Lyapunov 方程迭代收敛
- **几何解释**：稳定性分析转化为研究辛群作用下的固定点与 Lagrangian 流的拓扑结构
- **参数敏感性**：通过追踪谱流，预测 Riccati 解可能的爆炸点或穿越事件

4.3.5 小结

- Riccati 流的稳定性可由 Hamilton 矩阵谱判定
- Lagrangian Grassmannian 上的几何结构与 Maslov 指数提供对稳定性和奇异事件的全局理解
- 几何方法比单纯代数求解更直观，也便于分析控制系统参数变化对稳定性的影响

5 卡尔曼滤波与 Riccati 方程

5.1 系统设定

连续时间线性高斯系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + w(t), & w(t) \sim \mathcal{N}(0, Q) \\ y(t) = Cx(t) + v(t), & v(t) \sim \mathcal{N}(0, R) \\ x(0) \sim \mathcal{N}(\hat{x}_0, P_0) \end{cases} \tag{10}$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$：状态向量
- $y(t) \in \mathbb{R}^m$：观测向量
- $w(t)$：过程噪声，协方差 $Q \succ 0$
- $v(t)$：观测噪声，协方差 $R \succ 0$
- $\hat{x}_0, P_0$：初始估计及协方差

目标：求最优估计 $\hat{x}(t)$ 最小化误差协方差：

$$J = \mathbb{E}[(x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t))]$$

5.2 第一部分：卡尔曼滤波器增益 $K(t)$ 的推导

5.2.1 1.1 假设滤波器形式

假设滤波器采用增益形式：

$$\mathrm{d}\hat{x} = A\hat{x}\,\mathrm{d}t + K(t)\big(\mathrm{d}y - C\hat{x}\mathrm{d}t\big)$$

- $K(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为待定增益矩阵
- $\mathrm{d}y - C\hat{x}\mathrm{d}t$ 为观测残差

5.2.2 1.2 误差动力学

定义误差：

$$e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$$

利用系统模型：

$$\mathrm{d}x = Ax\mathrm{d}t + w\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\hat{x} = A\hat{x}\mathrm{d}t + K(\mathrm{d}y - C\hat{x}\mathrm{d}t)$$

误差演化：

$$\mathrm{d}e = \mathrm{d}x - \mathrm{d}\hat{x} = (A - KC)e\,\mathrm{d}t + w\mathrm{d}t - Kv\mathrm{d}t$$

符号说明：

- $e(t)$ 是估计误差
- $A - KC$ 是误差传播矩阵
- w, v 为过程噪声和观测噪声

5.2.3 1.3 协方差演化

定义误差协方差：

$$P(t) := \mathbb{E}[ee^T] \in \mathrm{Sym}^+(n)$$

对 $P(t)$ 求导：

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[ee^T] \\ &= \mathbb{E}[(\mathrm{d}e)e^T + e(\mathrm{d}e)^T + (\mathrm{d}e)(\mathrm{d}e)^T] \\ &= (A - KC)P + P(A - KC)^T + Q + KRK^T \end{aligned} \tag{11}$$

- 最后一项 KRK^T 来源于 $\mathbb{E}[(-Kv)(-Kv)^T] = KRK^T$

5.2.4 1.4 最优增益

最小化 $\mathrm{tr}(P)$：

$$\frac{\partial \dot{P}}{\partial K} = 0 \quad \Rightarrow \quad K = PC^T R^{-1}$$

代入可得连续时间 Riccati 方程：

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP \tag{12}$$

几何解释：

- $P(t)$ 是半正定矩阵，表示误差椭球
- Riccati 流描述椭球在 $\mathrm{Sym}^+(n)$ 流形上的演化

5.3 第二部分：Riccati 方程的严格推导与几何意义

从增益公式：

$$K = PC^T R^{-1}$$

代入误差协方差演化：

$$\dot{P} = (A - PC^T R^{-1} C)P + P(A - PC^T R^{-1} C)^T + Q + PC^T R^{-1} R R^{-1} CP$$

整理：

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP$$

5.3.1 2.1 几何解释

- 流形：$\mathrm{Sym}^+(n)$，半正定矩阵流形
- Riccati 流 = 流形上伴随流
- 各项含义：

- $AP + PA^T$：椭球旋转、拉伸
- Q：过程噪声膨胀
- $-PC^T R^{-1} CP$：观测信息收缩

5.3.2 2.2 与 LQR 对偶性

- LQR 最优反馈律：

$$u = -R^{-1} B^T S x$$

- $S(t)$ 满足同类 Riccati 流（对偶结构）
- Riccati 方程在流形上控制误差椭球或能量椭球演化

5.4 第三部分：状态更新公式与误差椭球

5.4.1 3.1 状态更新

$$\hat{x}(t + \mathrm{d}t) = \hat{x}(t) + A\hat{x}\mathrm{d}t + PC^T R^{-1}(\mathrm{d}y - C\hat{x}\mathrm{d}t)$$

5.4.2 3.2 误差椭球

定义：

$$\mathcal{E}(t) = \{e \in \mathbb{R}^n : e^T P^{-1} e \leq 1\}$$

- Riccati 流 = 椭球演化
- 误差沿椭球主轴修正 $\rightarrow$ 最大化观测信息利用

5.5 第四部分：信息几何视角

5.5.1 4.1 Fisher 信息矩阵

对于高斯分布 $\mathcal{N}(\hat{x}, P)$：

$$\mathcal{I}(\hat{x}) = P^{-1}$$

- Riccati 流在信息几何中 = 信息椭球在 $\mathrm{Sym}^+(n)$ 上的演化

5.5.2 4.2 流形与度量

- 流形：$\mathrm{Sym}^+(n)$，带仿射不变量度量
- Riccati 流向量场：
$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP$$

5.5.3 4.3 对偶性

- 与 LQR 控制律对偶
- Riccati 流 = 半正定矩阵流形上的辛几何伴随流
- 观测更新 = 信息投影到可观测子流形

5.5.4 4.4 总结

- Riccati 流 = 信息椭球在 $\mathrm{Sym}^+(n)$ 上的动力学
- 状态沿信息主轴修正 $\rightarrow$ 最优融合观测
- LQR 控制律与卡尔曼滤波增益统一在同一辛几何框架下