Chương I

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Bài 1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN BÀI TOÁN QHTT.

1.Bài toán lập kế hoạch sản xuất khi tài nguyên hạn chế.

Một xí nghiệp dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III . Số lượng các nguyên liệu I, II, và III mà xí nghiệp có là 8, 24, 12. Số lượng các nguyên liệu cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm A, B được cho ở bảng sau đây.

	I (<=8)	II (<=24)	III (<=12)
A	2	0	4
B	1	6	0

Cần lập một kế hoạch sản xuất,(tức là tính xem nên sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm từng loại) để lãi thu được là nhiều nhất.

Biết sản phẩm A lãi 3 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm, sản phẩm B lãi 5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm .

Lập kế hoạch.

Gọi x, y theo thứ tự là số lượng sản phẩm loại A và B cần sản xuất.

1. Tiền lãi thu được
$f=3x+5y$
2. Số lượng nguyên liệu loại I phải dùng
$2x+y$
3. Số lượng nguyên liệu loại II phải dùng
$6y$
4. Số lượng nguyên liệu loại III phải dùng
$4x$

Các nguyên liệu I, II, III là có hạn, nên các biểu thức $2x+y$, $6y$, $4x$ không phải tùy ý mà có giới hạn.

Ta có bài toán sau

Tìm x, y sao cho $f=3x+5y$ đạt giá trị lớn nhất, trong đó x, y thỏa

$$\begin{cases} 2x+y \le 8 \\ 6y \le 24 \\ 4x \le 12 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Có ba xí nghiệp may I, II, III cùng có thể sản xuất áo vét và quần.

Nếu đầu tư 1000 USD vào XN I thì cuối kỳ sẽ cho 35 áo vét và 45 quần

Nếu đầu tư 1000 USD vào XN II thì cuối kỳ sẽ cho 40 áo vét và 42 quần

Nếu đầu tư 1000 USD vào XN III thì cuối kỳ sẽ cho 43 áo vét và 30 quần

Lượng vải và số giờ công để sx một áo hoặc một quần cho ở bảng sau.

XN / S.P	I	II	III
Áo vét	3.5 m vải 20 giờ công	4 m vải 16 giờ công	3.8 m vải 18 giờ công
Quần	2.8 m vải 10 giờ công	2.6 m vải 12 giờ công	2.5 m vải 15 giờ công

Tổng số vải và giờ công mà công ty có thể có là 10 000m và 52 000 giờ công .

Theo hợp đồng thì cuối kỳ phải có tối thiểu 1500 bộ quần áo, nếu lẻ bộ thì quần dễ bán hơn.

Hãy lập một kế hoạch đầu tư vào mỗi XN bao nhiêu vốn để:

1. Hoàn thành kế hoạch sản phẩm.
2. Không khó khăn về tiêu thụ.
3. Không thiếu vải và giờ công lao động
4. Tổng số vốn đầu tư nhỏ nhất .

Lập kế hoạch.

Giả sử x_j (đơn vị là 1000 USD) là số vốn đầu tư vào các XN I, II, III.

a) Số áo vét thu được ở ba XN là

$$35x_1+40x_2+43x_3$$

b) Số quần thu được ở ba XN là

$$45x_1+42x_2+30x_3$$

c) Tổng số vải cần để may áo vét là

$$3.5m\times 35x_1+4m\times 40x_2+3.8m\times 43x_3$$

d) Tổng số vải cần để may quần là

$$2.8m\times 45x_1+2.6m\times 42x_2+2.5m\times 30x_3$$

e) Tổng số vải mà XN phải dùng là

$$\begin{aligned}&3.5m\times 35x_1+4m\times 40x_2+3.8m\times 43x_3+\\&2.8m\times 45x_1+2.6m\times 42x_2+2.5m\times 30x_3=\\&=248.5x_1+269.2x_2+238.4x_3\ (m)\end{aligned}$$

f) Tương tự như trên tổng số giờ công lao động mà XN phải dùng là

$$\begin{aligned}&20\times 35x_1+16\times 40x_2+18\times 43x_3+\\&10\times 45x_1+12\times 42x_2+15\times 30x_3=\\&=1150x_1+1144x_2+1224x_3\end{aligned}$$

Ta có bài toán như sau

$$\min\left(x_1+x_2+x_3\right)$$

$$\begin{cases}248.5x_1+269.2x_2+238.4x_3\le 10\,000 & (1)\\1150x_1+1144x_2+1224x_3\le 52\,000 & (2)\\45x_1+42x_2+30x_3\ge 35x_1+40x_2+43x_3 & (3)\\35x_1+40x_2+43x_3\ge 1\,500 & (4)\end{cases}$$

(1) điều kiện về lượng vải. (2) điều kiện về giờ công lao động. (3) số quần nhiều hơn số áo. (4) số bộ quần áo tối thiểu.

Có thể viết lại bài toán trên như sau

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 248.5x_1 + 269.2x_2 + 238.4x_3 \le 10\,000 & (1) \\ 1150x_1 + 1144x_2 + 1224x_3 \le 52\,000 & (2) \\ 10x_1 + 2x_2 - 13x_3 \ge 0 & (3) \\ 35x_1 + 40x_2 + 43x_3 \ge 1\,500 & (4) \\ x_j \ge 0, \forall j = 1,2,3 & (5) \end{cases}$$

2. Bài toán vận tải (Dạng tổng quát là bài tóan phân phối).

Bài tóan 1:

Có một loại hàng cần được chuyên chở từ hai kho (trạm phát) P_1 và P_2 tới ba nơi tiêu thụ (trạm thu) T_1, T_2, T_3 .

Lượng hàng có ở hai kho và lượng hàng cần ở ba nơi tiêu thụ cũng như số tiền vận chuyển một đơn vị hàng từ mỗi kho đến các nơi tiêu thụ được cho ở bảng sau.

	T_1 35 tấn hàng	T_2 25 tấn hàng	T_3 45 tấn hàng
P_1 30 tấn hàng	5	2	3
P_2 75 tấn hàng	2	1	1

Bài toán đặt ra là, hãy tìm một phương án vận chuyển thỏa yêu cầu về thu phát sao cho chi phí vận chuyển bé nhất.

Lập phương án.

Gọi x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ kho P_i đến nơi nhận T_j .

Ta có ma trận chi phí vận chuyển là

$$\begin{pmatrix} 5x_{11} & 2x_{12} & 3x_{13} \\ 2x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Tổng chi phí

$$f = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23}$$

Ma trận phương án $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 75$$
$$x_{11} + x_{21} = 35$$
$$x_{12} + x_{22} = 25$$
$$x_{13} + x_{23} = 45$$

Tóm lại ta có bài toán

$$f = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 75 \\ x_{11} + x_{21} = 35 \\ x_{12} + x_{22} = 25 \\ x_{13} + x_{23} = 45 \\ x_{ij} \ge 0 \ \forall i, j \end{cases}$$

Bài tóan 2:
Một nhà máy chế biến thịt, sản xuất ba loại thịt: bò, lợn, cừu, với tổng lượng mỗi ngày là 480 tấn bò; 400 tấn lợn; 230 tấn cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt nấu chín để bán trong giờ làm việc là 420 tấn. Ngoài ra nấu thêm ngoài giờ 250 tấn (với giá cao hơn). Lợi nhuận thu được trên một tấn được cho bằng bảng sau: (với đơn vị là triệu đồng)

	Tươi	Nấu chín	Nấu chín ngoài giờ
Bò	8	11	14
Lợn	4	7	12
Cừu	4	9	13

Mục đích của nhà máy là tìm phương án sản xuất để làm cực đại lợi nhuận. Hãy phát biểu mô hình bài toán.

Giải: Có thể tóm tắt lại bài toán như sau

	Tươi 440 (tấn)	Nấu chín 420 (tấn)	Nấu chín ngoài giờ 250 (tấn)
Bò (480)	8	11	14
Lợn (400)	4	7	12
Cừu (230)	4	9	13

Đây là một dạng của bài toán vận tải, nhưng ta tìm phương án để có "cước phí" vận chuyển lớn nhất.

Ký hiệu $x_{ij},\ i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3}$ theo thứ tự là lượng thịt Bò, Lợn, Cừu dưới dạng Tươi, Nấu chín, Nấu chín ngoài giờ mà nhà máy sẽ sản xuất trong ngày. Ta có bài toán :

$$f = 8x_{11} + 11x_{12} + 14x_{13} + 4x_{21} + 7x_{22} + 12x_{23}$$
$$4x_{31} + 9x_{32} + 13x_{33} \to \max$$

Với các ràng buộc sau đây:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 480 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 230 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 440 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 420 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 250 \end{cases}$$
$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j$$

Bài tóan 3:

Một phân xưởng có 2 công nhân nữ và 3 công nhân nam. Phân xưởng cũng có 1 máy tiện loại I, 2 máy tiện loại II và 2 máy tiện loại III. Năng suất (chi tiết / ngày) của các công nhân đối với mỗi loại máy tiện được cho trong bảng sau:

	Máy loại I (1 máy)	Máy loại II (2 máy)	Máy loại III (2 máy)
Nam (3)	10	8	7
Nữ (2)	8	9	11

1) Hãy lập mô hình bài tóan.

2) Với bài tóan vừa lập ra, bạn hãy cho một phương án phân phối các công nhân đứng ở các máy và tính số chi tiết làm ra được trong một ngày.

3) Liệt kê tất cả các phương án của bài tóan và xác định phương án tối ưu.

Chương I

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Bài 2. BÀI TOÁN QHTT VÀ Ý NGHĨA HÌNH HỌC .

1.Dạng tổng quát của bài toán Quy hoạch tuyến tính.

Bài toán Quy hoạch tuyến tính tổng quát có dạng sau đây

Tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + .. + c_nx_n$$

với các ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + .. + a_{in}x_n \le b_i \;; i \in I_1 & (1) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + .. + a_{in}x_n \ge b_i \;; i \in I_2 & (2) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + .. + a_{in}x_n = b_i \;; i \in I_3 & (3) \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \,;\, j \in J_1,\ x_j \le 0 \,;\, j \in J_2,\ x_j \in R \,;\, j \in J_3.$$

Trong đó I_1, I_2, I_3 rời nhau và $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1,2,..,m\}$, J_1, J_2, J_3 rời nhau và $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1,2,..,n\}$.

Ví dụ 2.1: $f(x) = 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_3 - 4x_4 \le -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 17 \end{cases}$$

$x_1; x_3 \ge 0$

$x_2 \in R$

$x_4 \le 0.$

Ở đây là bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát, và

$$I_1 = \{1,2\}, I_2 = \{3\}, I_3 = \{4\}, J_1 = \{1,3\}, J_2 = \{4\}, J_3 = \{2\}$$

Ví dụ 2.2: $f(x) = 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_5 \le 1 \\ x_1 - x_3 - 4x_4 - 4x_5 \ge -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 16x_5 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 + x_5 = 17 \\ 9x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 \ge 11 \end{cases}$$

$x_1; x_5 \ge 0,\ x_2; x_3 \in R,\ x_4 \le 0.$

Ở đây là bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát, và

$$I_1 = \{1,3\}, I_2 = \{2,5\}, I_3 = \{4\}, J_1 = \{1,5\}, J_2 = \{4\}, J_3 = \{2,3\}$$

2. Một số khái niệm của bài toán Quy hoạch tuyến tính:

Hàm mục tiêu: Là hàm

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle c, x \rangle$$

Phương án: Véctơ $x = (x_1, x_2, .., x_n)$

thỏa tất cả các *ràng buộc* gọi là một phương án.

Tập phương án:

Tập hợp tất cả các véctơ *x* thỏa các ràng buộc gọi là *tập phương án.*

Phương án tối ưu:

Phương án *x* làm cho giá trị hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất (nếu là bài toán min), hoặc hàm mục tiêu lớn nhất (nếu là bài toán max) được gọi là *phương án tối ưu* của bài toán QHTT.

3. Dạng chính tắc của bài toán Quy hoạch tuyến tính:

Bài toán Quy hoạch tuyến tính có dạng sau đây, gọi là dạng chính tắc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle c, x \rangle \to \max \text{ (min)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}.$$

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max \text{ (min)}$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Trong đó $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ là một ma trận cấp $m \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix} \qquad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$Ax = x_1 A^1 + x_2 A^2 + .. + x_n A^n$$

Nhận xét: Mọi bài tóan QHTT đều có thể đưa về bài tóan QHTT dạng chính tắc.

Ví dụ 2.3: Đưa các bài toán sau về dạng chính tắc:

$$f(x) = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 4 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3.$$

$$f(x) = 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, \ x_3 \in R$$

4.**Ý nghĩa hình học và phương pháp đồ thị:**

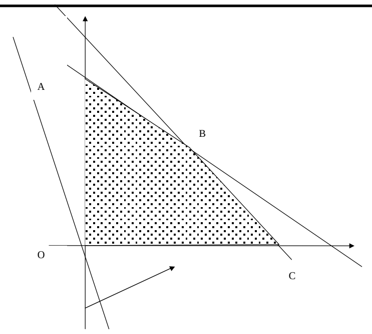
Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 4x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0.$$

Biểu diễn tập phương án trên mặt phẳng *x0y*, ta được tứ giác OABC.



O(0,0); A(0,4); B(3,2); C(5,0). Hàm mục tiêu có dạng của một đường thẳng: $f=4x_1 + x_2$. Cho f=0 ta có đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

Tịnh tiến đường thẳng (d) theo một hướng nào đó sẽ làm cho giá trị hàm mục tiêu tăng, ngược lại sẽ làm hàm mục tiêu giảm. Ở bài toán này ta cần làm cho hàm mục tiêu tăng. Rõ ràng đi theo hướng mũi tên sẽ làm cho hàm mục tiêu tăng.

$$f(O) = f(0;0) = 0;\ f(A) = f(0;4) = 4;$$
$$f(B) = f(3;2) = 14;\ f(C) = f(5;0) = 20$$

Hàm mục tiêu đạt giá trị max là 20 tại điểm C(5;0).

Bài tập. Bằng phương pháp hình học, giải các bài toán sau

1) $$f(x) = -4x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}$$

2) $$f(x) = 3x_1 + 3x_2 \ \to\ \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

3) Một công ty sản xuất hai loại sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng là 6 tấn và 8 tấn tương ứng. Để sản xuất một tấn sơn nội thất cần 2 tấn nguyên liệu A và 1 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn ngoài trời cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn, nhu cầu cực đại của sơn nội thất là 2 tấn.

Giá bán một tấn sơn nội thất là 2000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có doanh thu lớn nhất ?

Chương I

BÀI TOÁN

QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Bài 3.

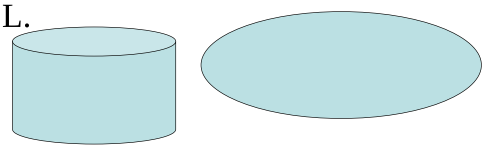
TÍNH CHẤT CỦA TẬP PHƯƠNG ÁN VÀ TẬP PHƯƠNG ÁN TỐI ƯU CỦA BÀI TOÁN

QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa tập hợp lồi: Tập $L \subseteq R^n$ được gọi là tập lồi, nếu:

$$\forall x, y \in L \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in L, \quad \forall \lambda;\ 0 \le \lambda \le 1$$

Nói cách khác, tập L là tập lồi, nếu đoạn thẳng nối hai điểm trong L nằm gọn trong L.



Hình ảnh về hai tập lồi trong R^2, R^3

Ví dụ 3.1: Trong mặt phẳng, đoạn thẳng, đường thẳng, tia, toàn bộ mặt phẳng, nửa mặt phẳng, đa giác lồi, tam giác, hình tròn, hình elip đều là các tập lồi.

Trong không gian, đoạn thẳng, đường thẳng, mặt phẳng, đa diện lồi, hình cầu… là các tập lồi.

2. Điểm cực biên của một tập lồi:

Điểm x_0 được gọi là điểm cực biên của tập lồi L, nếu:

$$x_0 = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2,\ x^1; x^2 \in L \Rightarrow x_0 = x^1 = x^2$$

$$0 < \lambda < 1.$$

Ví dụ 3.2:Trong R, cho đoạn [1, 4]. Hai điểm 1; 4 là hai điểm cực biên.

Giải: Giả sử

$$1 = \lambda x + (1-\lambda) y,\ x, y \in [1;4], 0 < \lambda < 1.$$

Ta sẽ chứng minh x=y=1.

Thật vậy, từ : $x, y \ge 1 \quad \lambda, 1-\lambda > 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda x + (1-\lambda) y \ge \lambda 1 + (1-\lambda) 1 = 1$$

Dấu bằng xảy ra khi x=y=1.

Ví dụ 3.3: Trong mặt phẳng Oxy ta xét tam giác OAB, với O(0;0), A(4;1), B(1,4). Khi đó các điểm O, A, B là các điểm cực biên.

Giải: Có thể thấy phương trình các cạnh OA, AB, BC lần lượt là:

$$4x - y = 0, x - 4y = 0, x + y - 5 = 0$$

Miền trong của tam giác OAB là tập các điểm (x,y) thỏa hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 4x - y \ge 0 \\ x - 4y \le 0 \\ x + y \le 5 \end{cases}$$

Chẳng hạn chứng minh điểm B(4,1) là điểm cực biên

$$B = \lambda X + (1-\lambda) Y,\ X, Y \in \Delta OAB, 0 < \lambda < 1.$$

$$(4,1) = \lambda (x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)$$

Trong đó $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ thỏa hệ phương trình ở trên. Từ trên ta có:

$$\begin{cases} 4 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \\ 1 = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \end{cases}$$

Có thể chứng minh được

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = (4,1)$$

Ví dụ 3.4: Hình đa giác lồi; đa diện lồi, thì các đỉnh là các điểm cực biên.

3. Tính chất của bài toán Quy hoạch tuyến tính:

a) Định lý 1: Tập hợp các phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

b) Định lý 2: Tập hợp các phương án tối ưu của bài toán Quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

Ví dụ 3.5: Bằng phương pháp hình học, tìm tập phương án và phương án tối ưu của bài toán

$$f(x) = 3x_1 + 3x_2 \ \to \ \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

4. Tính chất của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:
$$f(x) \to \min$$
$$Ax = b$$
$$x \ge 0,$$
Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và
$$x_1A^1 + x_2A^2 + .. + x_nA^n = b$$

a) Định nghĩa 1: Giả sử
$$x^0 = (x_{10}, x_{20}, .., x_{n0})$$
là một phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Khi đó
$$x_{10}A^1 + x_{20}A^2 + .. + x_{n0}A^n = b$$
Ứng với những $x_{j0} > 0$ hệ véctơ $\{A^j\}$

được gọi là hệ véctơ liên kết với x^0.

Ví dụ 3.5: Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính
$$f = 4x_1 - x_2 - x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$
Ta có: $x_1A^1 + x_2A^2 + x_3A^3 = b$ trong đó
$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ta có: $x^0 = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ là một phương án của bài toán

và ta có $\frac{7}{3}.A^1 + \frac{1}{3}.A^2 + 0.A^3 = b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vậy hệ véctơ liên kết của x^0 là: A^1, A^2

$x^1 = \left(0, \frac{22}{3}, \frac{7}{3}\right)$ là một phương án của bài toán
$$0.A^1 + \frac{22}{3}.A^2 + \frac{7}{3}.A^3 = b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Vậy hệ véctơ liên kết của x^1 là: A^2, A^3

b) Định lý 3: Giả sử $x^0 = (x_{10}, x_{20}, .., x_{n0})$ là một phương án khác không của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc.

Khi đó nếu x^0 là phương án cực biên của tập phương án thì hệ véctơ liên kết với nó độc lập tuyến tính.

Ngược lại, nếu x^0 là một phương án có hệ véctơ liên kết với nó độc lập tuyến tính thì x^0 là một phương án cực biên.

c) Hệ quả 1: Số phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn.

d) Định nghĩa 2: Một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc được gọi là không suy biến nếu số thành phần dương của nó bằng *m*.

Nếu số thành phần dương ít hơn *m* thì phương án cực biên này gọi là suy biến.

Ví dụ 3.6: Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính $f = 4x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Ta có $x^0 = (0,5,5)$ là một phương án cực biên của bài toán, vì hệ véctơ liên kết với nó là $A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hai véctơ này độc lập tuyến tính

$x^1 = (5,0,0)$ là một phương án cực biên của bài toán, vì hệ véctơ liên kết với nó là $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hệ một véctơ này độc lập tuyến tính.

Nhưng đây không phải là phương án cực biên không suy biến vì số thành phần dương của nó là 1.

$x^2 = (1,4,4)$ là một phương án của bài toán.

Nhưng không phải là phương án cực biên, vì hệ véctơ liên kết với nó là

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hệ véctơ này phụ thuộc tuyến tính.

e) Hệ quả 2: Số thành phần dương của một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc tối đa là bằng *m* (*m* là số dòng của matrận A).

f) Định lý 4: Nếu bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có tập phương án khác rỗng thì nó có ít nhất một phương án cực biên.

Các định lý trên đây đã chỉ ra cho chúng ta cách thành lập một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là:

- Xác định các hệ gồm m véctơ độc lập tuyến tính, của hệ các véctơ cột của A. Hệ này hữu hạn và tối đa là $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ hệ con.

- Biểu diễn véctơ b theo các hệ con ở trên, ta được các hệ số biểu diễn. Thành lập véctơ x có các thành phần là hệ số biểu diễn. Khi đó x là một phương án.

- Loại đi những véctơ x có thành phần âm, các véctơ còn lại là các phương án cực biên.

Ví dụ 3.7: Tìm tất cả các phương án cực biên của tập phương án của bài toán

$$f = 2x_1 + x_3 + 5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 + x_4 \quad = 5 \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Giải: Có tất cả 4 véctơ cột của A là

$$A^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Từ đó lấy được 6 hệ con độc lập tuyến tính là

$$\{A^1;\ A^2\}, \{A^1;\ A^3\}, \{A^1;\ A^4\},$$
$$\{A^2;\ A^3\}, \{A^2;\ A^4\}, \{A^3;\ A^4\}$$

Biểu diễn véctơ $b = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ theo các hệ độc lập tuyến tính này, ta có

$$b = 5A^1 + A^2 \quad b = 6A^1 - A^3 \quad b = \frac{9}{2}A^1 + \frac{1}{2}A^4$$
$$b = 6A^2 + 5A^3 \quad b = -9A^2 + 5A^4 \quad b = 3A^3 + 2A^4$$

Từ đây ta có các véctơ thỏa hệ phương trình trên là

$$x^1 = (5,1,0,0) \quad x^2 = (6,0,-1,0) \quad x^3 = \left(\frac{9}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)$$
$$x^4 = (0,6,5,0) \quad x^5 = (0,-9,0,5) \quad x^6 = (0,0,3,2)$$

Loại bỏ các véctơ có thành phần âm ta được 4 phương án cực biên là

$$x^1 = (5,1,0,0) \quad x^3 = \left(\frac{9}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)$$
$$x^4 = (0,6,5,0) \quad x^6 = (0,0,3,2)$$

g) Định lý 5: Nếu bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì nó sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.

h) Định lý 6: Nếu tập phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính không rỗng và là một đa diện lồi thì bài toán sẽ có ít nhất một phương án tối ưu là phương án cực biên.

i) Định lý 7: Điều kiện cần và đủ để bài toán Quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu là tập phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn dưới (nếu là bài toán *min*) hoặc bị chặn trên (nếu là bài toán *max*).

j) Ghi chú: Từ các định lý 7, định lý 5, định lý 3 ta có thể giải được bài toán QHTT dạng chính tắc như sau:

- Kiểm chứng tập phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn.

- Tìm các phương án cực biên.

- Lần lượt thử các phương án cực biên ta suy ra phương án tối ưu và giá trị tối ưu của hàm mục tiêu.

Ví dụ 3.8: Giải bài toán QHTT

$$f = 2x_1 + x_3 + 5x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 + x_4 = 5 \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Giải: Ví dụ này ta đã xét ở trên.

- Tập phương án không rỗng là hiển nhiên.

- Hàm mục tiêu bị chặn dưới bởi 0, vì

$$f = 2x_1 + x_3 + 5x_4 > 0$$

Theo định lý 7 bài toán có phương án tối ưu. Theo định lý 5 bài toán có phương án cực biên là phương án tối ưu.

Theo ví dụ trên có tất cả các phương án cực biên là:

$x^1 = (5,1,0,0)$ $x^3 = \left(\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ $x^4 = (0,6,5,0)$ $x^6 = (0,0,3,2)$

$$f(x^1) = f(5,1,0,0) = 2.5 + 1.0 + 5.0 = 10$$

$$f(x^3) = f\left(\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right) = 2.\frac{9}{2} + 1.0 + 5.\frac{1}{2} = \frac{23}{2}$$

$$f(x^4) = 2.0 + 5 + 5.0 = 5$$

$$f(x^6) = 3 + 5.2 = 13$$

Vậy x^4 là phương án tối ưu của bài toán, và giá trị tối ưu là 5.

Bài tập**.**

1) Cho bài toán (P) $f(x) = 4x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \ge 0.$$

a) Đưa bài toán (P) về dạng chính tắc; ta gọi bài toán này là (Q).

b) Liệt kê tất cả các phương án cực biên của (Q).

c) Tìm phương án tối ưu của (Q).

2) Tương tự bài 1) với các bài toán:

a) $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 18 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \ge 23 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,3}.$$

b) $f(x) = 5x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 7 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,2}.$$

Chương I

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Bài 4. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

1. Giới thiệu chung: Ta xét bài toán QHTT dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle c, x\rangle \to \min\ (\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,n}.$$

Hoặc viết dưới dạng:

$$f(x) = \langle c, x\rangle \to \min\ (\max)$$

$$Ax = b$$

$$x \ge 0$$

Trong đó:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$$

$$x = (x_1, x_2, .., x_n)^T,\ b = (b_1, b_2, .., b_m)^T$$

$$c = (c_1, c_2, .., c_n)$$

Giả sử bài toán đang xét ta đã biết một phương án cực biên dạng :

$$x = (x_{10}; x_{20}; ..; x_{m0}; 0; 0; ..; 0)$$

trong đó $x_{j0} > 0,\ j = \overline{1,m}$ cơ sở liên kết của x là $A^1, A^2, ..., A^m$

$$x_{10}A^1 + x_{20}A^2 + .. + x_{m0}A^m = b$$

Giá trị hàm mục tiêu là:

$$f(x) = c_1 x_{10} + c_2 x_{20} + .. + c_m x_{m0}$$

Với mỗi j = 1, 2, .., n

$$x_{1j}A^1 + x_{2j}A^2 + .. + x_{mj}A^m = A^j$$

Ký hiệu : $x^j = (x_{1j}; x_{2j}; ..; x_{mj})$

Nếu mà ta đã biết được x là phương án tối ưu nhờ một cách nào đó thì mục đích của ta đã xong.

Nếu x không phải là phương án tối ưu thì ta tìm phương án cực biên khác tốt hơn tức là phương án làm cho giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn.

Muốn vậy ta phải xây dựng một cơ sở mới, đơn giản nhất là thay thế một véctơ trong cơ sở cũ bằng một véctơ nằm ngoài cơ sở cũ.

Từ hai véctơ: $x = (x_{10}; x_{20}; ..; x_{m0}; 0; 0; ..; 0)$

$$x^j = (x_{1j}; x_{2j}; ..; x_{mj})$$

Đặt:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} = \langle c, x^j \rangle,\ j = \overline{1,n}$$

$$\Delta_j = z_j - c_j$$

Tóm lại, chúng ta vừa xây dựng được:

$$\Delta_j = \langle c, x^j \rangle - c_j$$

gọi là ước lượng thứ j của phương án *x*. Giá trị này đóng vai trò vô cùng quan trọng trong việc đánh giá tính tối ưu của một p.án.

2. Định lý 1.(Dấu hiệu tối ưu)

Nếu $x = (x_{10}; x_{20}; ..; x_{m0}; 0; 0; ..; 0)$ là một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sao cho :

$$\Delta_j \le 0, \forall j = \overline{1,n}$$

thì *x* là phương án tối ưu, và ngược lại.

3. Định lý 2: Nếu tồn tại véctơ A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên

$$x = (x_{10}; x_{20}; ..; x_{m0}; 0; 0; ..; 0)$$

sao cho $\Delta_j > 0$ và $x^j \le 0$ thì bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc không có phương án tối ưu. Rõ hơn là hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên tập phương án.

Ví dụ 4.1: Xét bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 + 6x_2 + 9x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + \quad 2x_3 = 6 \\ \quad + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

với phương án cực biên x=(6,8,0).

Xét xem x có phải là phương án tối ưu hay không ?

Giải: Véctơ x có cơ sở liên kết là:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta xác định các véctơ x^j :

$$A^j = x_{1j}A^1 + x_{2j}A^2 + .. + x_{mj}A^m$$

$$x^j = (x_{1j}; x_{2j}; ..; x_{mj})$$

$$A^1 = x_{11}A^1 + x_{21}A^2 = 1.A^1 + 0.A^2 \Rightarrow x^1 = (1,0)$$

$$A^2 = x_{12}A^1 + x_{22}A^2 = 0.A^1 + 1.A^2 \Rightarrow x^2 = (0,1)$$

$$A^3 = x_{13}A^1 + x_{23}A^2 = 2.A^1 + 1.A^2 \Rightarrow x^3 = (2,1)$$

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j = \langle c, x^j \rangle - c_j$$

Lần lượt thay j=1,2,3 ta có :

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = \langle c, x^1 \rangle - c_1 = \langle (1,6),(1,0) \rangle - 1$$
$$= 1.1 + 6.0 - 1 = 0$$
$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = \langle c, x^2 \rangle - c_2 = \langle (1,6),(0,1) \rangle - 6$$
$$= 1.0 + 6.1 - 6 = 0$$
$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = \langle c, x^3 \rangle - c_3 = \langle (1,6),(2,1) \rangle - 9$$
$$= 1.2 + 6.1 - 9 = -1$$

Ta thấy tất cả các $\Delta_j \le 0$ với mọi j. Vậy x là phương án tối ưu và giá trị tối ưu là:

f(x)=1.6+6.8+9.0=54.

Để dễ thấy ta sắp xếp các phép toán lên bảng sau:

Cơ sở	Hệ số	P. án	1 x_1	6 x_2	9 x_3
A^1 A^2	1 6	6 8	1 0	0 1	2 1
	f(x)	54	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 0$	$\Delta_3 = -1$

Bảng gồm 3 dòng, 6 cột. Cột một ghi cơ liên kết của p. án x, cột hai ghi hệ số liên kết của x, cột 3 ghi p. án x, cột 4; 5; 6 ở dòng hai ghi toàn bộ ma trận A…..

Ví dụ 4.2: Xét bài toán QHTT

$$f(x) = 7x_1 - 26x_2 + 9x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad = 5 \\ \quad - x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

với phương án cực biên x=(5,0,7).

Xét xem x có phải là phương án tối ưu hay không ?

Giải: Véctơ x có cơ sở liên kết là:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta xác định các véctơ x^j :

$$A^1 = x_{11}A^1 + x_{31}A^3 = 1.A^1 + 0.A^3 \Rightarrow x^1 = (1,0)$$
$$A^2 = x_{12}A^1 + x_{32}A^3 = -2A^1 - 1.A^3 \Rightarrow x^2 = (-2,-1)$$
$$A^3 = x_{13}A^1 + x_{23}A^2 = 0.A^1 + 1.A^2 \Rightarrow x^3 = (0,1)$$
$$\Delta_j = \langle c, x^j \rangle - c_j$$

Lần lượt thay j=1,2,3 ta có :

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = \langle c, x^1 \rangle - c_1 = \langle (7,9),(1,0) \rangle - 7 = 0$$
$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = \langle c, x^2 \rangle - c_2 =$$
$$= \langle (7,9),(-2,-1) \rangle - (-26) = 3$$
$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = \langle c, x^3 \rangle - c_3 = \langle (7,9),(0,1) \rangle - 9 = 0$$

Ta thấy $\Delta_2 > 0$ và $x^2 = (-2,-1) \le 0$ .Vậy bài toán không có phương án tối ưu. Rõ hơn là hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên tập phương án.

Cơ sở	Hệ số	P. án	7 x_1	-26 x_2	9 x_3
A^1 A^3	7 9	5 7	1 0	-2 -1	0 1
			$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 3$	$\Delta_3 = 0$

Bảng gồm 3 dòng, 6 cột. Cột một ghi cơ liên kết của p. án x, cột hai ghi hệ số liên kết của x, cột 3 ghi p. án x, cột 4; 5; 6 ở dòng hai ghi toàn bộ ma trận A…..

Lưu ý: Việc tính toán mà sắp xếp trên bảng đơn hình chỉ thực hiện được khi phương án cực biên có hệ véc tơ liên kết là đơn vị. Trường hợp hệ véc tơ liên kết không phải là hệ đơn vị thì phải tính trực tiếp từ công thức đã biết.

Chẳng hạn ví dụ sau.

Ví dụ 4.3: Cho bài toán

$$f(x) = -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 21 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Chứng minh $x = (1,2,3,0)$ là phương án cực biên, tối ưu của bài tóan đã cho.

Giải: Phương án này có hệ véctơ liên kết là $A^1 = (3,7,2);\quad A^2 = (3,-1,-1);\quad A^3 = (4,1,5)$

Dễ thấy đây là hệ độc lập tuyến tính nên là phương án cực biên.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -131 \neq 0$$

$$x^1 = (1,0,0), x^2 = (0,1,0), x^3 = (0,0,1)$$

$$x^4 = B^{-1}A^4 = \left(\frac{120}{131}, \frac{73}{131}, \frac{19}{131}\right)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$$

$$\Delta_4 = \langle c, x^4 \rangle - c_4 = \frac{-1176}{131} < 0$$

Vậy x là phương án cực biên, tối ưu.

4. Định lý 3:

Nếu tồn tại véctơ A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên

$$x = (x_{10}; x_{20}; ..; x_{m0}; 0; 0; ..; 0)$$

sao cho $\Delta_j > 0$, và với mỗi j mà $\Delta_j > 0$ ta luôn tìm được ít nhất một $x_{ij} > 0$, thì khi đó ta có thể tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn x, nghĩa là phương án này làm cho hàm mục tiêu nhỏ hơn phương án *x*.

Cách xây dựng phương án mới như sau:

Thay thế một véctơ trong cơ sở cũ bằng một véctơ nằm ngoài cơ sở cũ.

Véctơ đưa vào thay thế ứng với $\Delta_j > 0$ lớn nhất. Giả sử đó là A^k.

Véctơ bị thay ra là A^s, với cách xác định A^s như sau: $\theta = \min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{ik}} : x_{ik} > 0\right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sk}}$

Trong đó x_{ik} là hệ số biểu diễn của A^k theo cơ sở liên kết của p. án x.

Và khi đó phương án mới x' được xác định theo công thức:

$$x' = (x_{10} - \theta x_{1j}; x_{20} - \theta x_{2j}; ..; x_{m0} - \theta x_{mj}; ..; \theta; 0; ..; 0)$$

Hoặc có thể biểu diễn véctơ b theo cơ sở mới này ta có p. án mới x'.

Phương án x' tốt hơn x.

Đến đây ta xem x' như x và kiểm tra x' có thỏa định lý 1, hay định lý 2 không.

Nếu không ta lại xây dựng một phương án mới tốt hơn …

Ví dụ 4.4: Xét bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + 4x_4 = 6 \\ \quad + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$$

Với p. án x=(6,0,8,0) cơ sở liên kết là:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trước tiên ta xem x có phải p. án tối ưu hay không.

Để thuận tiện ta sắp xếp các phần tử lên bảng và tính toán các Δ_j ta có:

Cơ sở	Hệ số	P. án	1 x_1	-2 x_2	2 x_3	0 x_4
A^1 A^3	1 2	6 8	1 0	1 2	0 1	4 5
	f(x)	22	0	7	0	14

Ta thấy p. án này chưa tối ưu, và trong số các $\Delta_j > 0$,các x^j đều có hệ số dương. Do đó có thể tìm p. án mới tốt hơn.

Véctơ đưa vào thay thế đó là A^4 .

$$\theta = \min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{i4}} : x_{i4} > 0\right\} = \min\left\{\frac{x_{10}}{x_{14}}, \frac{x_{30}}{x_{34}}\right\} = \min\left\{\frac{6}{4}, \frac{8}{5}\right\} = \frac{3}{2} = \frac{x_{10}}{x_{14}}$$

Vậy A^1 bị thay ra.

P. Án mới x' được xác định như sau:

Cơ sở mới là A^3, A^4 . Biểu thị véctơ $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ theo cơ sở này ta được

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Từ đó ta có p. án mới là:

$$x' = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Giá trị hàm mục tiêu lúc này là:

$$f(x') = f\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0 - 2.0 + 2.\frac{1}{2} = 1$$

Rõ ràng p. án này tốt hơn x.

Bây giờ xem x' như x. Ta kiểm tra xem x' có phải là p. án tối ưu không.

Ta xác định các véctơ x^j :

$$A^1 = x_{31}A^3 + x_{41}A^4 = \frac{-5}{4}.A^3 + \frac{1}{4}.A^4 \Rightarrow x^1 = \left(\frac{-5}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$A^2 = x_{32}A^3 + x_{42}A^4 = \frac{3}{4}A^3 + \frac{1}{4}A^4 \Rightarrow x^2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$A^3 = x_{33}A^3 + x_{43}A^4 = 1.A^3 + 0.A^4 \Rightarrow x^3 = (1, 0)$$

$$A^4 = x_{34}A^3 + x_{44}A^4 = 0.A^3 + 1.A^4 \Rightarrow x^3 = (0,1)$$

$$\Delta_j = \langle c, x^j \rangle - c_j$$

Lần lượt thay j=1, 2, 3, 4 ta có :

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = \langle c, x^1 \rangle - c_1 = \langle (2,0), \left(\frac{-5}{4}, \frac{1}{4}\right) \rangle - 1 = \frac{-7}{2}$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = \langle c, x^2 \rangle - c_2 = \langle (2,0), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \rangle - (-2) = \frac{7}{2}$$

$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = \langle c, x^3 \rangle - c_3 = \langle (2,0), (1,0) \rangle - 2 = 0$$

$$\Delta_4 = \langle c, x^4 \rangle - c_4 = \langle (2,0), (0,1) \rangle - 0 = 0$$

P. Án này vẫn chưa tối ưu.

Để tiện theo dõi ta sắp xếp lên bảng:

Cơ sở	Hệ số	P. án	1 x_1	-2 x_2	2 x_3	0 x_4
A^4 A^3	0 2	3/2 1/2	1/4 -5/4	1/4 3/4	0 1	1 0
	f(x)	1	-7/2	7/2	0	0

Ta liên hệ hai bảng này với nhau:

Bảng 1

Cơ sở	Hệ số	P. án	1 x_1	-2 x_2	2 x_3	0 x_4
A^1 A^3	1 2	6 8	1 0	1 2	0 1	4 5
	f(x)	22	0	7	0	14

Bảng 2

A^4 A^3	0 2	3/2 1/2	1/4 -5/4	1/4 3/4	0 1	1 0
	f(x)	1	-7/2	7/2	0	0

5. Phương pháp đơn hình cho bài toán chính tắc có sẵn ma trận đơn vị:

Xét bài toán chính tắc:

$$f(x) = \langle c, x\rangle \to \min$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Trong đó A có sẵn một ma trận đơn vị cấp m. Không mất tính tổng quát có thể giả sử đó là m cột đầu $A^1, A^2, .., A^m$, và phương án cực biên x trong bước lặp đầu tiên là:

$$x = (b_1, b_2, .., b_m, 0, 0, .., 0) \geq 0$$

Khi đó các x^j dễ dàng biểu diễn qua các véctơ cơ sở ở trên.

Để thuận tiện cho việc tính toán ta sắp xếp các dữ liệu lên bảng sau mà ta gọi là bảng đơn hình.

Cơ sở	H. số c_j	Ph án	c_1 x_1	c_2 x_2	…	c_m x_m	c_{m+1} x_{m+1}	…	c_k x_k		c_n x_n
A^1 A^2 .. A^s .. A^m	c_1 c_2 .. c_s .. c_m	b_1 b_2 .. b_s .. b_m	1 0 .. 0 .. 0	0 1 .. 0 .. 0		0 0 .. 0 .. 1	x_{1m+1} x_{2m+1} ... x_{sm+1} x_{mm+1}		x_{1k} x_{2k} .. x_{sk} .. x_{mk}		x_{1n} x_{2n} .. x_{sn} .. x_{mn}
	f(x)	f_0	0	0		0	Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n

Trong đó $f_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + .. + c_mx_m$

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j \ , \ j = \overline{1, n}$$

$$\Delta_j = 0 \ , \ j = \overline{1, m}$$

Thuật toán đơn hình được thực hiện một số bước như sau:

Bước 1: Nếu $\Delta_j \leq 0 \ , \forall j = \overline{1, n}$ thì phương án đang xét là tối ưu.

Nếu $\Delta_j > 0$ mà ứng với j này $x_{ij} \leq 0, \forall i = \overline{1, m}$ thì bài toán không có phương án tối ưu.

Nếu không thỏa bước 1 ta sang bước 2.

Bước 2:

i) Xác định $\Delta_k = \max\{\Delta_j / \Delta_j > 0\}$,véctơ A^k đưa vào thay thế .

ii) Xác định véctơ A^s đưa ra khỏi cơ sở như sau: $\min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{ik}} : x_{ik} > 0\right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sk}}$

Bước 3:

Biến đổi bảng đơn hình mới: Dùng phép biến đổi *như* sơ cấp trên ma trận, biến đổi cột k trở thành véctơ đơn vị thứ s.

Bước 4: Tính toán các phần tử trên dòng cuối cùng và quay lại bước 1.

Ví dụ 4.5: Giải bài toán

$$f(x) = -5x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 2x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_4 + x_5 = 10 \\ x_2 \quad + x_4 + 3x_5 = 12 \\ \quad + x_3 + 3x_4 + x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Giải: Đây là bài toán QHTT dạng chính tắc mà ma trận A có sẵn ma trận đơn vị.

			-5	-4	0	0	2
Cơ sở	Hệ số cj	Ph. án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A^1	-5	10	1	0	0	2	1
A^2	-4	12	0	1	0	1	3
A^3	0	15	0	0	1	3	1
	f(x)	-98	0	0	0	-14	-19

Bài toán đã có dấu hiệu tối ưu, phương án tối ưu là $x = (10,12,15,0,0)$, giá trị tối ưu -98.

Ví dụ 4.6: Giải bài toán

$$f(x) = -2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \quad + x_5 \quad = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_6 = 3 \\ \quad x_2 + 4x_3 + x_4 \quad = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Giải:Đây là bài toán QHTT dạng chính tắc mà ma trận A có sẵn ma trận đơn vị.

Ma trận đơn vị này không theo thứ tự mà đó là A^5, A^6, A^4 .

			-2	-4	1	-1	0	0
cs	Hs	Pa	x1	x2	x3	x4	x5	x6
A5	0	4	1	3	0	0	1	0
A6	0	3	2	1	-1	0	0	1
A4	-1	3	0	1	4	1	0	0
	f(x)	-3	2	3	-5	0	0	0
A2	-4	4/3	1/3	1	0	0	1/3	0
A6	0	5/3	5/3	0	-1	0	-1/3	1
A4	-1	5/3	-1/3	0	4	1	-1/3	0
	f(x)	-7	1	0	-5	0	-1	0
A2	-4	1	0	1	1/5	0	2/5	-1/5
A1	-2	1	1	0	-3/5	0	-1/5	3/5
A4	-1	2	0	0	19/5	1	-2/5	1/5
	f(x)	-8	0	0	-22/5	0	-4/5	-3/5

Ví dụ 4.7: Giải bài toán

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20 \\ 4x_1 \quad + x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Giải: Đây không phải là bài toán chính tắc, ta sẽ đưa về bài toán chính tắc bằng cách thêm vào các ẩn phụ $x_4, x_5, x_6 \geq 0$, bài toán trở thành

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 20 \\ 4x_1 + x_3 + x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Lúc này ma trận A đã có sẵn một ma trận đơn vị, cho nên sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			-2	3	-1	0	0	0
cs	Hs	Pa	x1	x2	x3	x4	x5	x6
A4	0	15	1	-5	1	1	0	0
A5	0	20	3	2	-2	0	1	0
A6	0	10	4	0	1	0	0	1
	f(x)	0	2	-3	1	0	0	0
A4	0	25/2	0	-5	3/4	1	0	-1/4
A5	0	25/2	0	2	-11/4	0	1	-3/4
A1	-2	5/2	1	0	1/4	0	0	1/4
	f(x)	-5	0	-3	1/2	0	0	-1/2
A4	0	5	-3	-5	0	1	0	-1
A5	0	40	11	2	0	0	1	2
A3	-1	10	4	0	1	0	0	1
	f(x)	-10	-2	-3	0	0	0	-1

Đối với bài toán max ta có các kết qủa sau:

Định lý 1'.(Dấu hiệu tối ưu)

Nếu $x = (x_{10}; x_{20}; ..; x_{m0}; 0; 0; ..; 0)$ là một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$f(x) \to \max$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

sao cho $\Delta_j \geq 0, \forall j = \overline{1,n}$ thì x là phương án tối ưu.

Định lý 2': Nếu tồn tại véctơ A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên *x=(x₁₀,x₂₀,…,xₘ₀,0,0,..0)* sao cho $\Delta_j < 0$ và $x^j \leq 0$ thì bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc không có phương án tối ưu. Rõ hơn là hàm mục tiêu không bị chặn trên, trên tập phương án.

Định lý 3' :Nếu tồn tại véctơ A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên $x = (x_{10}; x_{20}; ..; x_{m0}; 0; 0; ..; 0)$ sao cho $\Delta_j < 0$, và với mỗi j mà $\Delta_j < 0$ ta luôn tìm được ít nhất một $x_{ij} > 0$, thì khi đó ta có thể tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn x, nghĩa là phương án này làm cho hàm mục tiêu lớn hơn phương án x.

Khi chọn véctơ cơ sở đưa vào ta chọn $\Delta_k = \min\{\Delta_j / \Delta_j < 0\}$, chọn véctơ đưa ra như trường hợp min.

Ví dụ 4.8: Giải bài toán

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Giải: Đây không phải là bài toán chính tắc, ta sẽ đưa về bài toán chính tắc bằng cách thêm vào các ẩn phụ $x_4, x_5 \geq 0$ vào các bất phương trình thứ hai và thứ ba, bài toán trở thành

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Lúc này ma trận A đã có sẵn một ma trận đơn vị, cho nên sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			2	3	1	0	0
cs	Hs	Pa	x1	x2	x3	x4	x5
A3	1	6	1	-5	1	0	0
A4	0	7	2	2	0	1	0
A5	0	5	-1	2	0	0	1
	f(x)	6	-1	-8	0	0	0
A3	1	37/2	-3/2	0	1	0	5/2
A4	0	2	3	0	0	1	-1
A2	3	5/2	-1/2	1	0	0	1/2
	f(x)	26	-5	0	0	0	4
A3	1	39/2	0	0	1	1/2	2
A1	2	2/3	1	0	0	1/3	-1/3
A2	3	17/6	0	1	0	1/6	1/3
	f(x)	88/3	0	0	0	5/3	7/3

Ví dụ 4.9: Cho bài tóan Quy hoạch tuyến tính mà ta gọi là bài tóan (P)

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 8x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 20 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Chứng minh $x = \left(0, \frac{61}{60}, \frac{163}{60}, \frac{73}{60}\right)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu của bài tóan (P). Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phương án *x* nói ở trên, và kiểm tra tính tối ưu của phương án này

6. Thuật toán đơn hình cho bài toán chính tắc không có sẵn ma trận đơn vị:

Giả sử bài toán chính tắc

$$f(x) \to \min$$
$$Ax = b \qquad (*)$$
$$x \ge 0$$

trong đó A không có ma trận đơn vị. Chẳng hạn bài toán sau đây

$$f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Giả sử ma trận A còn thiếu m véctơ đơn vị. Ta thêm vào m ẩn giả $x_{m+1}, x_{m+2},..,x_{m+n}$. Khi đó bài toán có dạng như sau:

$$f(x) + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + .. + Mx_{n+m} \to \min$$
$$Bx = b \qquad (M)$$
$$x \ge 0$$

Trong đó B là ma trận cấp mx(m+n) với n cột đầu là ma trận A, m cột sau là m véctơ đơn vị. x là véctơ có n+m thành phần . M là một số dương rất lớn; lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh. Ta có các kết qủa sau.

Định lý 4:

a) Nếu bài toán (*) có phương án thì mọi phương án cực biên tối ưu

$$x = (x_1, x_2, .., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, .., x_{n+m})$$

của bài toán (M) phải có

$$(x_{n+1}, x_{n+2}, .., x_{n+m}) = (0, 0, .., 0)$$

b) Nếu bài toán (*) có phương án tối ưu $x = (x_1, x_2, .., x_n)$ thì bài toán (M) có phương án tối ưu $x = (x_1, x_2, .., x_n, 0, 0, .., 0)$ và ngược lại.

Nhận xét: Định lý 4 phần a) chỉ có một chiều. *Phản đảo* của phần a) là: Có phương án cực biên tối ưu của bài toán (M) mà có những ẩn giả khác không thì bài toán (*) vô nghiệm (không có phương án).

Mục b) là hai chiều và chúng ta hay áp dụng chiều ngược lại: bài toán (M) có phương án tối ưu $x = (x_1, x_2, .., x_n, 0, 0, .., 0)$ thì bài toán (*) có phương án tối ưu

$$x = (x_1, x_2, .., x_n)$$

Khi giải bài toán (M) bằng phương pháp đơn hình thì các biểu thức f và Δ có chứa tham số M . Ở dòng cuối của bảng đơn hình ta chia làm hai dòng, dòng trên ghi các hệ số đứng trước M, dòng cuối ghi các hệ số tự do. $\Delta_j = \delta_j M + \gamma_j$, vì M là số dương rất lớn nên khi so sánh các số Δ ta có quy ước sau:

$$\Delta_j = \delta_j M + \gamma_j < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \delta_j < 0, \forall \gamma_j \\ \delta_j = 0, \gamma_j < 0 \end{array}\right.$$

$$\Delta_j = \delta_j M + \gamma_j > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \delta_j > 0, \forall \gamma_j \\ \delta_j = 0, \gamma_j > 0 \end{array}\right.$$

$$\Delta_k = \delta_k M + \gamma_k > \Delta_j = \delta_j M + \gamma_j \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \delta_k > \delta_j \ \forall \gamma_k ; \gamma_j \\ \delta_k = \delta_j \ \gamma_k > \gamma_j . \end{array}\right.$$

Ví dụ 4.10: Xét lại bài toán ở trên

$$f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,4}.$$

Giải: Đưa vào các ẩn giả x_5, x_6, x_7 ta có bài toán (M) :

$$f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_6 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,7}.$$

Lúc này ma trận A đã có sẵn một ma trận đơn vị, cho nên sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			-3	1	3	-1	M	M	M
CS	HS	Pa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
A5	M	2	1	2	-1	1	1	0	0
A6	M	9	2	-6	3	3	0	1	0
A7	M	6	1	-1	1	-1	0	0	1
	f(x)	17	4	-5	3	3	0	0	0
		0	3	-1	-3	1	0	0	0
A1	-3	2	1	2	-1	1	1	0	0
A6	M	5	0	-10	5	1	-2	1	0
A7	M	4	0	3	2	-2	-1	0	1
	f(x)	9	0	-13	7	-1	-4	0	0
		-6	0	-7	0	-2	-3	0	0

			-3	1	3	-1	M	M	M
A1	-3	3	1	0	0	6/5	3/5	1/5	0
A3	3	1	0	-2	1	1/5	-2/5	1/5	0
A7	M	2	0	1	0	-12/5	-1/5	-2/5	1
	f(x)	2	0	1	0	-12/5	-6/5	-7/5	0
		-6	0	-7	0	-2	-3	0	0
A1	-3	3	1	0	0	6/5	3/5	1/5	0
A3	3	5	0	0	1	-23/5	-4/5	-3/5	2
A2	1	2	0	1	0	12/5	-1/5	-2/5	1
	f(x)	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
		8	0	0	0	-94/5	-22/5	-14/5	7

Bài tập: Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

1)

$$f(x) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 - 7x_5 + 4x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_6 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 10 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$

3)

$$f(x) = 3x_1 - 5x_2 - 12x_3 - 30x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \\ x_1 + 4x_3 + 5x_4 \leq 33 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 \leq 12 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

4) Chứng minh $x = (4,3,0,7)$ là p.a tối ưu của bài tóan Quy hoạch tuyến tính

$$\mathbf{f(x) = 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 \to \min}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + x_2 + 13x_3 + x_4 = 14} \\ \mathbf{2x_1 + x_2 + 14x_3 = 11} \\ \mathbf{3x_2 + 14x_3 + x_4 = 16} \end{cases}$$

$\mathbf{x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.}$

5) $f(x) = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 22 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_4 = 23 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}$.

6) $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

7) Bài tập 16; 17 trang 66; 67 Giáo trình.

8) Một xí nghiệp dự định sản xuất ba loại sản phẩm A, B và C. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III . Số lượng các nguyên liệu I, II và III mà xí nghiệp có lần lượt là 57, 88, 30 đơn vị nguyên liệu. Số đơn vị nguyên liệu cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm A, B, C được cho ở bảng sau đây

	I	II	III
A	4	1	3
B	2	6	1
C	3	5	1

Hỏi Xí nghiệp nên sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm A, B, C để thu được tổng số lãi nhiều nhất (với giả thiết các sản phẩm làm ra đều bán hết), nếu biết rằng lãi 35 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại A, lãi 40 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại B, lãi 40 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại C.

9) Một gia đình cần ít nhất 1800 đơn vị prôtêin và 1500 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Một kilôgam thịt bò chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit, một kilôgam thịt heo chứa 600 đơn vị prôtêin và 300 đơn vị lipit, một kilôgam thịt gà chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit. Giá một kilôgam thịt bò là 82 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt heo là 73 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt gà là 90 ngàn đồng.
Hỏi một gia đình nên mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để: bảo đảm tốt khẩu phần ăn trong một ngày và tổng số tiền phải mua là nhỏ nhất?

10) Một công ty sản xuất hai loại sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng tương ứng là 16 tấn và 18 tấn . Để sản xuất 1 tấn sơn nội thất cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời cần 2 tấn nguyên liệu A và 3 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn. Giá bán một tấn sơn nội thất là 4000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD. Khi sản xuất 1 tấn sơn nội thất phải bỏ ra một chi phí là 1300 USD, khi sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời phải bỏ ra một chi phí là 1000 USD.
Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có lợi nhuận lớn nhất?

Chương II

LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU

Bài 1. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa bài toán đối ngẫu:

Cho bài toán Quy hoạch tuyến tính, ta gọi là bài toán (P), đối ngẫu của bài toán (P) là bài toán mà ta gọi là (Q), cho tương ứng ở bảng sau :

Bài toán gốc $f(x)=\langle c,x\rangle \to \min$	Chỉ số	Bài toán đối ngẫu $g(y)=\langle b,y\rangle \to \max$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$	$i \in I_1$	$y_i \le 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$	$i \in I_2$	$y_i \ge 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$i \in I_3$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \ge 0$	$j \in J_1$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \le c_j$
$x_j \le 0$	$j \in J_2$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$j \in J_3$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$

Bài toán gốc $f(x)=\langle c,x\rangle \to \max$	Chỉ số	Bài toán đối ngẫu $g(y)=\langle b,y\rangle \to \min$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$	$i \in I_1$	$y_i \ge 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$	$i \in I_2$	$y_i \le 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$i \in I_3$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \ge 0$	$j \in J_1$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j$
$x_j \le 0$	$j \in J_2$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \le c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$j \in J_3$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$

Ví dụ 1.1: Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau đây:

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 7x_2 + 17x_3 - x_4 + 4x_5 + 9x_6 \le 23 \\ 4x_1 + x_2 + 10x_3 + 2x_4 - x_5 + 11x_6 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 12x_4 + 5x_5 - 8x_6 \ge 19 \\ 14x_1 + 7x_2 + 17x_3 - x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 71 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 4x_6 \le 23 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \in R,\ x_4 \ge 0\ ,\ x_5 \in R, x_6 \le 0$$

Ví dụ 1.2: Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau đây:

$$f(x) = 23x_1 + 9x_2 + 19x_3 + 71x_4 + 23x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 4x_2 + x_3 + 14x_4 + 3x_5 \le 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \ge 3 \\ 17x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 17x_4 + 6x_5 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + 12x_3 - x_4 + 3x_5 \le -3 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 9x_1 + 11x_2 - 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_1 \le 0,\ x_2 \in R,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \in R,\ x_5 \le 0$$

2. Mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu:

Trong phần này ta chỉ xét bài toán gốc dạng min.

2.1. Định lý 1: Cho x, y theo thứ tự là phương án của bài toán gốc và đối ngẫu ta có $f(x) \ge g(y)$ hay tương đương $\langle c, x\rangle \ge \langle b, y\rangle$.

2.2. Định lý 2: Nếu cả hai bài toán gốc và đối ngẫu đều có tập phương án không rỗng thì cả hai bài toán đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của các hàm mục tiêu là bằng nhau.

2.5. Định lý 5: (Định lý độ lệch bù) Các phương án $\overline{x}, \overline{y}$ của bài toán gốc và đối ngẫu đều là phương án tối ưu điều kiện cần và đủ là

$$\left\langle b - A\overline{x}, \overline{y}\right\rangle = \left\langle c - \overline{y}A, \overline{x}\right\rangle = 0$$

$$\begin{cases} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j}\right)\overline{y_i} = 0 & i = \overline{1,m} \\ \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y_i}\right)\overline{x_j} = 0 & j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Ví dụ 1.3: Bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases} \qquad (P)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4;$$

có phương án tối ưu là $\overline{x} = (2,4,0,0)$ và giá trị tối ưu là -6. (Kết qủa này đã biết ở Ch. I)

Bài toán đối ngẫu (Q) là:

$$g(y) = 6y_1 + 8y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 \le 1 \\ y_1 + 2y_2 \le -2 \\ y_2 \le 2 \\ 4y_1 + 5y_2 \le 0 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

Phương án tối ưu của bài toán (Q) được tìm từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(6 - (\overline{x_1} + \overline{x_2} + 4\overline{x_4})\right)\overline{y_1} = 0 \\ \left(8 - (2\overline{x_2} + \overline{x_3} + 5\overline{x_4})\right)\overline{y_2} = 0 \\ \left(1 - (\overline{y_1} + 0.\overline{y_2})\right)\overline{x_1} = 0 \\ \left(-2 - (\overline{y_1} + 2\overline{y_2})\right)\overline{x_2} = 0 \\ \left(2 - (0.\overline{y_1} + \overline{y_2})\right)\overline{x_3} = 0 \\ \left(0 - (4\overline{y_1} + 5\overline{y_2})\right)\overline{x_4} = 0 \end{cases}$$

Thế các giá trị của $\overline{x} = (2,4,0,0)$ đã biết vào hệ phương trình ta được

$$\begin{cases}\left(6-(\overline{x_1}+\overline{x_2}+4\overline{x_4})\right)\overline{y_1}=0\\ \left(8-(2\overline{x_2}+\overline{x_3}+5\overline{x_4})\right)\overline{y_2}=0\\ \left(1-(\overline{y_1}+0.\overline{y_2})\right)\overline{x_1}=0\\ \left(-2-(\overline{y_1}+2\overline{y_2})\right)\overline{x_2}=0\\ \left(2-(0.\overline{y_1}+\overline{y_2})\right)\overline{x_3}=0\\ \left(0-(4\overline{y_1}+5\overline{y_2})\right)\overline{x_4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(6-(2+4+4.0)\right)\overline{y_1}=0\\ \left(8-(2.4+0+5.0)\right)\overline{y_2}=0\\ \left(1-(\overline{y_1}+0.\overline{y_2}\right)2=0\\ \left(-2-(\overline{y_1}+2\overline{y_2}\right)4=0\\ \left(2-(0.\overline{y_1}+\overline{y_2}\right)0=0\\ \left(0-(4\overline{y_1}+5\overline{y_2}\right)0=0\end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases}1-\left(\overline{y_1}+0.\overline{y_2}\right)=0\\ -2-\left(\overline{y_1}+2\overline{y_2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{y_1}=1\\ \overline{y_2}=\dfrac{-3}{2}.\end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là: $\overline{y}=\left(\overline{y_1},\overline{y_2}\right)=\left(1,\frac{-3}{2}\right)$ và giá trị tối ưu là:

$$g(\overline{y})=6\overline{y_1}+8\overline{y_2}=6.1+8.\left(\frac{-3}{2}\right)=-6$$

Ví dụ 1.4: Cho bài toán

$$f(x)=15x_1+19x_2\to\min$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2\geq 3\\ x_1+x_2\geq 2\\ 3x_1+4x_2\geq 7\end{cases}$$

$$x_j\geq 0;\ j=\overline{1,2}.$$

Đối ngẫu của bài toán trên là bài toán

$$g(y)=3y_1+2y_2+7y_3\to\max$$

$$\begin{cases}3y_1+y_2+3y_3\leq 15\\ y_1+y_2+4y_3\leq 19\end{cases}$$

$$y_1,y_2,y_3\geq 0$$

Nhận thấy bài toán này dễ hơn. Ta giải bài toán đối ngẫu.

$$g(y)=3y_1+2y_2+7y_3+0y_4+0y_5\to\max$$

$$\begin{cases}3y_1+y_2+3y_3+y_4 \quad =15\\ y_1+y_2+4y_3 \qquad +y_5=19\end{cases}$$

$$y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\geq 0$$

			3	2	7	0	0
Co So	CJ	Ph.An	y1	y2	y3	y4	y5
A4	0	15	3	1	3	1	0
A5	0	19	1	1	4	0	1
			-3	-2	-7	0	0

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là:
y =…………
Giá trị tối ưu của bài toán đối ngẫu là:
g_{max} =………. .

Ta sẽ tìm phương án tối ưu của bài toán gốc. Dùng định lý độ lệch bù.

Bây giờ ta giải bài toán gốc và làm cách như trên để tìm lại phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Thêm vào hai ẩn phụ và ba ẩn giả, sau đó sắp xếp các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta được.

Co So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
			15	19	0	0	0	M	M	M
A6	M	3	3	1	-1	0	0	1	0	0
A7	M	2	1	1	0	-1	0	0	1	0
A8	M	7	3	4	0	0	-1	0	0	1
		(M)	7	6	-1	-1	-1	0	0	0
			-15	-19	0	0	0	0	0	0
A1	15	1	1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0
A7	M	1	0	2/3	1/3	-1	0	-1/3	1	0
A8	M	4	0	3	1	0	-1	-1	0	1
		(M)	0	11/3	4/3	-1	-1	-7/3	0	0
			0	-14	-5	0	0	5	0	0
A1	15	5/9	1	0	-4/9	0	1/9	4/9	0	-1/9
A7	M	1/9	0	0	1/9	-1	2/9	-1/9	1	-2/9
A2	19	4/3	0	1	1/3	0	-1/3	-1/3	0	1/3
		(M)	0	0	1/9	-1	2/9	-10/9	0	-11/9
			0	0	-1/3	0	-14/3	1/3	0	14/3

A1	15	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	0
A5	0	1/2	0	0	1/2	-9/2	1	-1/2	9/2	-1
A2	19	3/2	0	1	1/2	-3/2	0	-1/2	3/2	0
		(M)	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
			0	0	2	-21	0	-2	21	0
A1	15	1	1	0	0	-4	1	0	4	-1
A3	0	1	0	0	1	-9	2	-1	9	-2
A2	19	1	0	1	0	3	-1	0	-3	1
(M)			0	0	0	0	0	-1	-1	-1
			0	0	0	-3	-4	0	3	4

Phương án tối ưu

X = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0,)

Giá trị tối ưu f = 34.

$$\begin{cases}\left(15-\left(3\overline{y_1}+\overline{y_2}+3\overline{y_3}\right)\right)\overline{x_1}=0\\ \left(19-\left(\overline{y_1}+\overline{y_2}+4\overline{y_3}\right)\right)\overline{x_2}=0\\ \left(3-\left(3x_1+x_2\right)\right)\overline{y_1}=0\\ \left(2-\left(x_1+x_2\right)\right)\overline{y_2}=0\\ \left(7-\left(3x_1+4x_2\right)\right)\overline{y_3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(15-\left(3\overline{y_1}+\overline{y_2}+3\overline{y_3}\right)\right)1=0\ (1)\\ \left(19-\left(\overline{y_1}+\overline{y_2}+4\overline{y_3}\right)\right)1=0\ (2)\\ \left(3-\left(3.1+1\right)\right)\overline{y_1}=0\quad (3)\\ \left(2-\left(1+1\right)\right)\overline{y_2}=0\quad (4)\\ \left(7-\left(3.1+4.1\right)\right)\overline{y_3}=0\quad (5)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(15-\left(3\overline{y_1}+\overline{y_2}+3\overline{y_3}\right)\right)1=0\ (1)\\ \left(19-\left(\overline{y_1}+\overline{y_2}+4\overline{y_3}\right)\right)1=0\ (2)\\ \left(3-\left(3.1+1\right)\right)\overline{y_1}=0\ (3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\overline{y_1}+\overline{y_2}+3\overline{y_3}=15\\ \overline{y_1}+\overline{y_2}+4\overline{y_3}=19\\ -\overline{y_1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{y_1}=0\\ \overline{y_2}=3\\ \overline{y_3}=4.\end{cases}$$

2.6. Định lý 6: Cho bài toán gốc dạng chính tắc (P). Bài toán gốc (P) đã giải bằng phương pháp đơn hình và đã xuất hiện dấu hiệu tối ưu . Phương án tối ưu $\overline{x}$ tìm được có cơ sở liên kết gồm m véctơ $A^1, A^2, .., A^m$ Khi đó phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu được tính theo công thức $\overline{y}=cB^{-1}$

Trong đó c là véctơ có các thành phần c_j tương ứng của phương án tối ưu $\overline{x}$,B là ma trận có các cột là các véctơ đã nói trên.

Ví dụ 1.5:Xét lại bài toán Quy hoạch tuyến tính $f(x)=x_1-2x_2+2x_3+0x_4\rightarrow\min$

$$\begin{cases}x_1+x_2\qquad\quad +4x_4=6\\ \quad +2x_2+x_3+5x_4=8\end{cases}\qquad (P)$$

$x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4;$

Bài toán (P) có ph. án tối ưu là $\overline{x}=(2,4,0,0)$

Cơ sở liên kết là hai véctơ A^1,A^2 Vậy ph. án tối ưu của bài toán đối ngẫu là:

$$\overline{y}=cB^{-1}=(1,-2)\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}^{-1}=(1,-2)\begin{pmatrix}1&-0.5\\0&0.5\end{pmatrix}=\left(1,\frac{-3}{2}\right)$$

Ví dụ 1.6: Ta xét bài tập 11 ở bài 4 chương 1, giáo trình. $f=x_1+x_2+x_3\rightarrow\min$

$$\begin{cases}6x_1+2x_2+x_3\ge 20\\ x_1+7x_2+3x_3\ge 25\\ 3x_1+x_2+8x_3\ge 30\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

Đối ngẫu của bài toán này là bài toán

$g(y)=20y_1+25y_2+30y_3\rightarrow\max$

$$\begin{cases}6y_1+y_2+3y_3\le 1\\ 2y_1+7y_2+y_3\le 1\\ y_1+3y_2+8y_3\le 1\end{cases}$$

$y_i\ge 0, i=\overline{1,3}$

Co So	CJ	Ph.An	y1	y2	y3	y4	y5	y6
			20	25	30	0	0	0
A4	0	1	6	1	3	1	0	0
A5	0	1	2	7	1	0	1	0
A6	0	1	1	3	8	0	0	1
			-20	-25	-30	0	0	0
A4	0	5/8	45/8	-1/8	0	1	0	-3/8
A5	0	7/8	15/8	53/8	0	0	1	-1/8
A3	30	1/8	1/8	3/8	1	0	0	1/8
			-65/4	-55/4	0	0	0	15/4
A1	20	1/9	1	-1/45	0	8/45	0	-1/15
A5	0	2/3	0	20/3	0	-1/3	1	0
A3	30	1/9	0	17/45	1	-1/45	0	2/15
			0	-127/9	0	26/9	0	8/3
A1	20	17/150	1	0	0	53/300	1/300	-1/15
A2	25	1/10	0	1	0	-1/20	3/20	0
A3	30	11/150	0	0	1	-1/300	-17/300	2/15
			0	0	0	131/60	127/60	8/3

Phương án tối ưu là $\overline{y}$
= (17/150, 1/10, 11/150, 0, 0, 0,)
Giá trị tối ưu g = 209/30.

từ đây ta suy ra ph. Án tối ưu của bài toán gốc như sau $\overline{x} = cB^{-1}$

$$\overline{x} = (20, 25, 30)\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{300}(20, 25, 30)\begin{pmatrix} 53 & 1 & -20 \\ -15 & 45 & 0 \\ -1 & -17 & 40 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{300}(655, 635, 800)$$

$$= \left(\frac{131}{60}, \frac{127}{60}, \frac{8}{3}\right)$$

Bài toán gốc giải sẽ tính toán nhiều hơn

2.7 Mệnh đề: Giả sử $A^{j_1}, A^{j_2}, .., A^{j_m}$ là cơ sở đơn vị liên kết của phương án cực biên xất phát của bài toán gốc dạng chính tắc. Khi đó phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu có thể tính theo công thức:

$$\overline{y} = \left(\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, .., \Delta_{j_m} + c_{j_m}\right)$$

Trong đó $\Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}, .., \Delta_{j_m}$ là các ước lượng ứng với các cột $A^{j_1}, A^{j_2}, .., A^{j_m}$ xuất hiện ở bảng đơn hình cuối cùng và $c_{j_1}, c_{j_2}, .., c_{j_m}$ là các hệ số của $x_{j_1}, x_{j_2}, .., x_{j_m}$.

Ví dụ 1.7: Xét lại bài toán trên

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + 4x_4 = 6 \\ \qquad + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases} \qquad (P)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4;$$

Bài toán trên nếu giải bằng phương pháp đơn hình, ta có kết quả sau:

Co So	CJ	Ph.An	x1	x2	x3	x4
			1	-2	2	0
A1	1	6	1	1	0	4
A3	2	8	0	2	1	5
			0	7	0	14
A4	0	3/2	1/4	1/4	0	1
A3	2	1/2	-5/4	3/4	1	0
			-7/2	7/2	0	0
A4	0	4/3	2/3	0	-1/3	1
A2	-2	2/3	-5/3	1	4/3	0
			7/3	0	-14/3	0
A1	1	2	1	0	-1/2	3/2
A2	-2	4	0	1	1/2	5/2
			0	0	-7/2	-7/2

Ta có cơ sở đơn vị liên kết của phương án cực biên xuất phát trong bảng đơn hình đầu là $A^1 = A^{j_1} = E^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ A^3 = A^{j_2} = E^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Hệ số đứng trước x_1, x_3 là $c_1 = c_{j_1} = 1, c_3 = c_{j_2} = 2$

Các ước lượng Δ_j ở bảng đơn hình cuối là :

$$\Delta_{j_1} = \Delta_1 = 0, \Delta_{j_2} = \Delta_3 = \frac{-7}{2}$$

Vậy ph. Án tối ưu của bài toán đối ngẫu là:

$$\overline{y} = \left(\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, .., \Delta_{j_m} + c_{j_m}\right) = \left(0+1, \frac{-7}{2}+2\right) = \left(1, \frac{-3}{2}\right)$$

Ví dụ 1.8: Ta xét bài tập 11 ở bài 4 chương 1, giáo trình $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 20 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \ge 25 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \ge 30 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

Đối ngẫu của bài toán này là bài toán

$$g(y) = 20y_1 + 25y_2 + 30y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 6y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 \le 1 \\ y_1 + 3y_2 + 8y_3 \le 1 \end{cases}$$

$y_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

Co So	CJ	Ph.An	y1	y2	y3	y4	y5	y6
			20	25	30	0	0	0
A4	0	1	6	1	3	1	0	0
A5	0	1	2	7	1	0	1	0
A6	0	1	1	3	8	0	0	1
			-20	-25	-30	0	0	0
A4	0	5/8	45/8	-1/8	0	1	0	-3/8
A5	0	7/8	15/8	53/8	0	0	1	-1/8
A3	30	1/8	1/8	3/8	1	0	0	1/8
			-65/4	-55/4	0	0	0	15/4
A1	20	1/9	1	-1/45	0	8/45	0	-1/15
A5	0	2/3	0	20/3	0	-1/3	1	0
A3	30	1/9	0	17/45	1	-1/45	0	2/15
			0	-127/9	0	26/9	0	8/3
A1	20	17/150	1	0	0	53/300	1/300	-1/15
A2	25	1/10	0	1	0	-1/20	3/20	0
A3	30	11/150	0	0	1	-1/300	-17/300	2/15
			0	0	0	131/60	127/60	8/3

Phương án tối ưu là $\overline{y}$
= (17/150, 1/10, 11/150, 0, 0, 0,)
Giá trị tối ưu g = 209/30.

từ đây ta suy ra ph. Án tối ưu của bài toán gốc như sau

$$\overline{x} = \left(\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, .., \Delta_{j_m} + c_{j_m}\right)$$

Ta có cơ sở liên kết của phương án cực biên xuất phát trong bảng đơn hình đầu là

A^4, A^5, A^6

$$A^4 = A^{j_1} = E^1, A^5 = A^{j_2} = E^2, A^6 = A^{j_3} = E^3$$

Ba hệ số đứng trước x_4, x_5, x_6

$$c_4 = c_{j_1} = 0, c_5 = c_{j_2} = 0, c_6 = c_{j_3} = 0$$

Các ước lượng Δ_j ở bảng đơn hình cuối là:

$$\Delta_{j_1} = \Delta_4 = 131/60, \Delta_{j_2} = \Delta_5 = 127/60, \Delta_{j3} = \Delta_6 = 8/3$$

Vậy ta có phương án tối ưu của bài toán gốc là $\overline{x} = \left(\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, .., \Delta_{j_m} + c_{j_m}\right)$

$$= \left(131/60+0, 127/60+0, 8/3+0\right)$$

$$\overline{x} = \left(131/60, \quad 127/60, \quad 8/3\right)$$

Tóm lại, giữa bài toán gốc và đối ngẫu ta có các kết qủa sau:

i) Nếu bài toán gốc (đối ngẫu) có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu (gốc) cũng có phương án tối ưu. Phương án tối ưu có thể tìm bằng ba phương pháp. Giá trị tối ưu của hai bài toán là bằng nhau

ii) Nếu cả hai bài toán gốc và đối ngẫu đều có tập phương án không rỗng thì cả hai bài toán đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của các hàm mục tiêu là bằng nhau. (Định lý 2)

iii) Từ đó nếu bài toán gốc (hoặc đối ngẫu) có tập phương án khác rỗng và hàm mục tiêu không bị chặn (không bị chặn dưới nếu là bài toán min, không bị chặn trên nếu là bài toán max) thì bài toán còn lại có tập phương án bằng rỗng.

Nếu bài toán gốc (hoặc đối ngẫu) có tập phương án bằng rỗng thì bài toán đối ngẫu (hoặc gốc) có tập phương án bằng rỗng, hoặc có hàm mục tiêu không bị chặn.

Bài tập

1) Chứng minh bài toán sau không có phương án tối ưu.

$$f(x) = x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \ge 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 15 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}\ .$$

2) Cho bài toán (P)

$$f(x) = 14x_1 + 16x_2 + 15x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 \ge 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 7 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,3}.$$

a)Phát biểu bài toán đối ngẫu (Q) của bài toán (P).

b) Giải bài toán Q và suy ra phương án tối ưu của bài toán (P) bằng ba cách.

3) Một Xí nghiệp xử lý giấy , có ba phân xưởng I, II, III cùng xử lý ba loại giấy A, B, C. Do ba phân xưởng có nhiều sự khác nhau, nên nếu cùng đầu tư 10 triệu đồng vào mỗi phân xưởng thì cuối kỳ phân xưởng I xử lý được 4 tạ giấy loại A, 1 tạ giấy loại B, 3 tạ giấy loại C. Trong khi đó phân xưởng II xử lý được 2 tạ giấy loại A, 3 tạ giấy loại B, 2 tạ giấy loại C. Phân xưởng III xử lý được 2 tạ giấy loại A, 3 tạ giấy loại B, 5 tạ giấy loại C. Theo yêu cầu lao động thì cuối kỳ Xí nghiệp phải xử lý ít nhất 2.6 tấn giấy loại A, 2.4 tấn giấy loại B, 2.9 tấn giấy loại C. Hỏi cần đầu tư vào mỗi phân xưởng bao nhiêu tiền để xí nghiệp thỏa: hoàn thành công việc và giá tiền đầu tư là nhỏ nhất.

Chương III

BÀI TOÁN VẬN TẢI

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT

1.Định nghĩa 1:

Trong §1, chương 1 ta đã giới thiệu về bài toán vận tải. Dạng tổng quát có thể định nghĩa như sau:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (4)$$

Đây chính là bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc $m \times n$ ẩn x_{ij} và m+n ràng buộc.

3. Định lý 2: Điều kiện cân bằng thu phát

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

là điều kiện cần và đủ để bài toán vận tải có tập phương án khác rỗng.

Hơn nữa, nếu bài toán vận tải có điều kiện cân bằng thu phát thì có phương án tối ưu.

Tổng lượng hàng thu bằng tổng lượng hàng phát.

Ví dụ 1.1: Xét lại bài toán vận tải đã biết ở chương 1.

$$f = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 75 \\ x_{11} + x_{21} = 35 \\ x_{12} + x_{22} = 25 \\ x_{13} + x_{23} = 45 \\ x_{ij} \geq 0, \forall i, j \end{cases}$$

Đây là bài toán vận tải cân bằng thu phát.

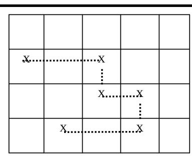
§2. DẠNG BẢNG CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

Thu / Phát	b_1	b_2	...	b_j	....	b_n
c_1	c_{11}	c_{12}		c_{1j}		c_{1n}
c_2	c_{21}	c_{22}		c_{2j}		c_{2n}
....						
c_i	c_{i1}	c_{i2}		c_{ij}		c_{in}
....						
c_m	c_{m1}	c_{m2}		C_{mj}		c_{mn}

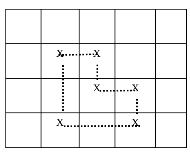
Thu / Phát	T_1 35 tấn hàng	T_2 25 tấn hàng	T_3 45 tấn hàng
P_1 30 tấn hàng	5	2	3
P_2 75 tấn hàng	2	1	1

1. Định nghĩa 1: Ta gọi một đường đi là tập hợp các ô của bảng sao cho cứ hai ô liên tiếp thì nằm trên cùng một dòng hay một cột, và một dòng hay một cột không chứa quá hai ô.

Một đường đi khép kín được gọi là một chu trình.



(Đường đi)

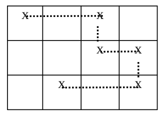


(Chu trình)

3. Hệ qủa: Một bảng vận tải có m dòng, n cột thì tập ô không chứa chu trình có tối đa là *m+n-1* ô.

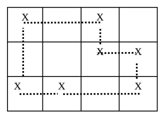
4. Định lý 2: Một bảng vận tải có m dòng, n cột . Cho E là tập gồm *m+n-1* ô không chứa chu trình, ô $(i,j)\notin E$. Khi đó tập hợp $F=E\cup\{(i,j)\}$ có chứa duy nhất một chu trình đi qua ô (i,j) .

Ví dụ 2.1: Xét bảng gồm 3 dòng, 4 cột và tập hợp các ô (1,1); (1,3); (2,3); (2,4); (3,4); (3,2). Tập hợp này có 6 ô. *6=3+4-1=m+n-1* và các ô này không chứa chu trình. Khi đó xét bất kỳ một ô thuộc bảng vận tải ta đều có duy nhất một chu trình đi qua ô này.

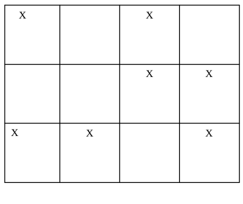


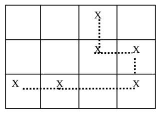
Chẳng hạn, xét ô (2,1) ta có chu trình là các ô (2,1); (2,3); (1,3); (1,1), và đây là chu trình duy nhất. Chú ý, ta không quan tâm đến ô (2,4), và ta nói ô (2,4) không thuộc chu trình.
Xét ô (3,1) ta có chu trình là các ô (3,1); (3,4); (2,4); (2,3); (1,3); (1,1) , và đây là chu trình duy nhất đi qua ô (3,1). Và ta cũng không quan tâm đến ô (3,2), và ta nói ô (3,2) không thuộc chu trình.

5. Định lý 3: Một bảng vận tải có m dòng, n cột. Nếu tập F gồm *m+n* ô có chứa duy nhất một chu trình đi qua ô *(i,j)*. Khi đó nếu ta loại ô *(i,j)* này ra khỏi tập F thì tập các ô còn lại sẽ không chứa chu trình.



Bảng vận tải trên gồm 3+4=7 ô có đánh dấu X . Bảng này có chứa duy nhất một chu trình (3,1); (3,4); (2,4); (2,3); (1,3); (1,1). Nếu ta loại bất kỳ một ô chẳng hạn ô (1,1) thì các ô còn lại sẽ không chứa chu trình





6. Định nghĩa 2: Giả sử

$$x=\left(x_{11},x_{12},..,x_{1n},x_{21},x_{22},..,x_{2n},..,x_{m1},x_{m2},..,x_{mn}\right)$$

là một phương án của bài toán vận tải. Khi đó nếu $x_{ij}>0$ thì ta nói ô *(i,j)* là ô chọn.

Ngược lại ta gọi là ô loại.

7. Định lý 4: Phương án *x* là một phương án cực biên của bài toán vận tải khi và chỉ khi tập các ô chọn tương ứng với nó không chứa chu trình.

Ví dụ 2.2: Xét bài toán vận tải cho bởi bảng sau đây

	30	40	50	60
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Khi đó *x=(30, 0, 0, 50, 0, 0, 35, 10, 0, 40, 15,0)* là một phương án.

	30	40	50	60
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

x			x
		x	x
	x	x	

Các ô chọn là các ô đánh dấu x không chứa chu trình .

7.2. Định lý 6: Cho bài toán vận tải có ma trận cước phí $c=\left(c_{ij}\right)_{\substack{i=1,m\\ j=1,n}}$. Nếu ta thay ma trận cước phí này bằng ma trận cước phí

$$c'=\left(c'_{ij}\right)_{\substack{i=1,m\\ j=1,n}},\ c'_{ij}=c_{ij}+r_i+s_j$$

(lượng hàng ở các kho thu, phát vẫn giữ nguyên) thì hai bài toán vận tải này có cùng phương án tối ưu.

Ở đây ta sẽ chọn các số r_i , s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0.

(gọi là p. pháp Quy 0 cước phí các ô chọn)

7.3. Định lý 7: Giả sử $x=\left(x_{ij}\right)$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải với tập các ô chọn là E, và $c'_{ij}=0, \forall(i,j)\in E$ (nghĩa là sau khi đã quy không cước phí các ô chọn). Ta có

a) Nếu $c'_{ij}\ge 0, \forall(i,j)\notin E$ thì phương án đã cho là phương án tối ưu.

b) Nếu tồn tại $(i,j)\notin E: c'_{ij}<0$ thì ta có thể tìm được một phương án mới là $x'=\left(x'_{ij}\right)$ tốt hơn phương án *x*.

Ví dụ 2.3: Giải bài toán vận tải cho bởi bảng vận tải sau:

j *i*	30	40	50	60
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Kiểm chứng phương án sau đây là phương án tối ưu.

j *i*	30	40	50	60
80	1 **20**	5	7	2 **60**
45	5 **10**	7	4 **35**	9
55	12	2 **40**	3 **15**	6

1 x	5	7	2 x
5 x	7	4 x	9
12	2 x	3 x	6

Ta cộng vào dòng *i* số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0.

1 x	5	7	2 x	r1=0
5 x	7	4 x	9	r2=-4
12	2 x	3 x	6	r3=-3
s1= -1	s2 = 1	s3 = 0	s4= -2	

0 x	6	7	0 x
0 x	4	0 x	3
8	0 x	0 x	1

Ví dụ 2.4: Cũng bài toán như trên, kiểm chứng phương án sau đây không phải là phương án tối ưu

	30	40	50	60
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

1 x	5	7	2 x	r_1=0
5	7	4 x	9 x	r_2=-7
12	2 x	3 x	6	r_3 =-6
s_1=-1	s_2=4	s_3=3	s_4=-2	

0 x	9	10	0 x	r_1=0
-3	4	0 x	0 x	r_2=-7
5	0 x	0 x	-2	r_3 =-6
s_1=-1	s_2=4	s_3=3	s_4=-2	

Vậy p. án đã cho chưa tối ưu.

Trở lại Định lý 7: Giả sử $x=\left(x_{ij}\right)$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải với tập các ô chọn là E, và $c'_{ij}=0, \forall(i, j)\in E$ (nghĩa là sau khi đã quy không cước phí các ô chọn). Ta có

b) Nếu tồn tại $(i, j)\notin E : c'_{ij}<0$ thì ta có thể tìm được một phương án mới là $x'=\left(x'_{ij}\right)$ tốt hơn phương án *x*.

Cách xây dựng phương án x' như sau:

1)Tìm một ô $(i, j) \notin E$ sao cho cước phí $c'_{ij} < 0$ nhỏ nhất.

2) Vì E không chứa chu trình (định lý 4). Theo định lý 2 tập các ô $F = E \cup (i, j)$ có chứa một chu trình V duy nhất qua ô (i, j). Đánh số thứ tự các ô thuộc V, bắt đầu từ ô *(i,j)* theo một chiều nào đó.

Ký hiệu V^L, V^C lần lượt là tập hợp các ô thuộc V có số thứ tự lẻ và số thứ tự chẵn.

3) Đặt $x_{i^* j^*} = \min\left\{x_{ij} : (i, j) \in V^C\right\}$

Gọi $x_{i^* j^*}$ là lượng hàng điều chỉnh.

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + x_{i^* j^*} & (i, j) \in V^L \\ x_{ij} - x_{i^* j^*} & (i, j) \in V^C \\ x_{ij} & (i, j) \notin V \end{cases}$$

Vậy ta đã xây dựng xong phương án mới. Phương án này tốt hơn phương án *x*.

Ví dụ 2.5: Xét lại ví dụ và phương án cực biên đã biết

	30	40	50	60
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Ta biết đây chưa phải là phương án tối ưu vì còn c'_{ij} <0 một (ví dụ 3) . Cước phí phải trả là *f=1.30+2.50+9.10+4.35+2.40+3.15=485.* Ta xây dựng phương án cực biên mới.

Các ô chọn là các ô có đánh dấu x

1 **x**	5	7	2 **x**
5	7	4 **x**	9 **x**
12	2 **x**	3 **x**	6

Sau khi đã quy không cước phí các ô chọn

0 **x**	9	10	0 **x**
-3	4	0 **x**	0 **x**
5	0 **x**	0 **x**	-2

Bổ sung ô (2,1) có cước phí âm nhỏ nhất vào tập các ô chọn E, ta được một chu trình V duy nhất (2,1); (2,4); (1,4); (1,1). (Đánh dấu * ô (2,1))

0 **x**	9	10	**x**
-3 *	4	**x**	0 **x**
5	0 **x**	0 **x**	-2

chu trình V duy nhất (2,1); (2,4); (1,4); (1,1).

Đánh số thứ tự các ô thuộc chu trình V, bắt đầu từ ô (2,1). (Số thứ tự trong mgoặc)

(4) x	9	10	(3) x
* (1)	4	x	0 X (2)
5	0 x	0 x	3

$V^L = \{(2,1); (1,4)\}, V^C = \{(2,4); (1,1)\}$

Lượng hàng ở các ô lẻ $\{x_{21} = 0, x_{14} = 50\}$

Lượng hàng ở các ô chẵn $\{x_{24} = 10, x_{11} = 30\}$

$x_{i^* j^*} = \min\{x_{ij} : (i, j) \in V^C\} = \min\{10, 30\} = 10$

$x'_{21} = 0 + 10 = 10$

$x'_{14} = 50 + 10 = 60$ (Vì hai ô này có số thứ tự lẻ)

$x'_{24} = x_{24} - x_{i^* j^*} = 10 - 10 = 0,$

$x'_{11} = x_{11} - x_{i^* j^*} = 30 - 10 = 20,$ (Vì hai ô này có số thứ tự chẵn)

$x'_{23} = x_{23} = 35,$

$x'_{32} = x_{32} = 40,$

$x'_{33} = x_{33} = 15,$ (Vì các ô này không thuộc chu trình)

Phương án mới là các số in đậm trong bảng sau (các số nhỏ ở trên là cước phí)

1 (IV) **30**	5	7	2 (III) **50**
5 (I)	7	4 **35**	9 (II) **10**
12	2 **40**	3 **15**	6

1 **20**	5	7	2 **60**
5 **10**	7	4 **35**	9
12	2 **40**	3 **15**	6

Với phương án này thì cước phí phải trả là:

f=1.20+2.60+5.10+4.35+2.40+3.15=455

Bài tập: Hãy cho một phương án và kiểm tra xem phương án này có phải là phương án tối ưu hay không, đối với bài toán vận tải sau:

	35	25	45
30	5	2	3
75	2	1	1

7.4. Thuật toán quy không cước phí giải bài toán vận tải:

Bước 1: Thành lập một phương án ban đầu, số ô chọn là *m+n-1*, cũng có thể có ô chọn không. (Ta sẽ nói một số cách thành lập phương án ban đầu sau)

Bước 2: Quy không cước phí các ô chọn . Nếu các ô loại có cước phí dương thì phương án đang xét là phương án tối ưu. Kết thúc thuật toán . Ngược lại có ô loại có cước phí âm ta qua bước 3.

Bước 3: Xây dựng phương án mới như định lý 7.

Bước 4: Quay về bước 2.

Cách thành lập phương án ban đầu: *Có nhiều phương pháp thành lập phương án ban đầu, trước tiên ta giới thiệu một phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí. Phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí thấp nhất. Khi đó sẽ xảy ra hai trường hợp sau:*

Nơi nhận nào đã đủ hàng thì ta xoá cột có nơi nhận đó đi và ghi nhớ lượng hàng thừa ở nơi phát.

Nơi nào phát hết hàng thì ta xóa dòng có nơi phát đó đi.

Sau đó lặp lại: phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí thấp nhất với những ô còn lại trên bảng cước phí vận tải.

Phương pháp góc Tây Bắc:

Chúng ta ưu tiên phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô ở góc Tây Bắc.

Nếu nơi nào đủ hàng thì ta xóa cột chứa nơi nhận đó; nếu nơi phát nào hết hàng thì ta xóa dòng chứa nơi phát đó.

Phương pháp góc Tây Bắc dễ thực hiện nhưng từ phương án này để đi đến phương án tối ưu thì rất lâu.

	40	70	50	80
90	4 **40**	1 **50**	9	3
65	1	7 **20**	9 **45**	6
85	8	7	7 **5**	7 **80**

Phương pháp Fogel .

Phương pháp Fogel cho ta một phương án cực biên khá tốt, theo nghĩa nó rất gần với phương án tối ưu.

i) Trên mỗi dòng và mỗi cột của ma trận cước phí ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất.

ii) Chọn dòng hay cột có hiệu số này lớn nhất (nếu có nhiều dòng hay cột thỏa điều kiện này thì ta chọn một dòng hay cột nào cũng được)

iii) Phân lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất trên dòng hay cột vừa chọn được. (Khi đó nếu nơi nào đã phát hết hàng thì chúng ta xóa dòng chứa nơi phát đó. Nếu nơi nào nhận đủ hàng thì chúng ta xóa cột chứa nơi nhận đó. Lúc đó cột (dòng) hiệu số không tính cho bước sau.

iv) Lặp lại ba bước nói trên với những ô còn lại cho đến hết. Lúc đó ta thu được phương án cực biên.

	30	40	50	60	Hiệu số
80	1 **30**	5	7	2 **50**	1 3 K K
45	5	7	4 **45**	9	1 3 3 **(5)**
55	12	2 **40**	3 **5**	6 **10**	1 1 1 3
Hiệu số	**(4)** K K K	3 3 **(5)** K	1 1 1 1	4 **(4)** 3 3	

Với phương pháp Fogel cước phí vận chuyển là f = 465. Trong khi đó nếu dùng phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí, ta có cước phí vận chuyển chỉ là 485. Phương pháp này *trong nhiều trường hợp* tốt hơn phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí. Tuy nhiên, người ta hay dùng phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí nhiều hơn vì tính đơn giản mà cũng không kém hiệu qủa của nó.

7.4. Thuật toán quy không cước phí giải bài toán vận tải:

Bước 1: Thành lập một phương án ban đầu, số ô chọn là *m+n-1*, cũng có thể có ô chọn không.

Bước 2: Quy không cước phí các ô chọn . Nếu các ô loại có cước phí không âm thì phương án đang xét là phương án tối ưu. Kết thúc thuật toán . Ngược lại có ô loại có cước phí âm ta qua bước 3.

Bước 3: Xây dựng phương án mới như định lý 7.
Bước 4: Quay về bước 2.
Sau đây là các ví dụ và bài tập.
Ví dụ 2.6: Giải bài toán vận tải cho bởi bảng vận tải sau:

i \ *j*	30	40	50	60
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Bước 1: Thành lập một phương án ban đầu.

i \ *j*	30	40	50	60
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Đây là một phương án được thành lập theo pp cực tiểu theo bảng cước phí có số ô chọn là *6=3+4-1=m+n-1*. Và đây là một phương án cực biên không suy biến.

Bước 2: Quy không cước phí các ô chọn.

1 **x**	5	7	2 **x**
5	7	4 **x**	9 **x**
12	2 **x**	3 **x**	6

Các ô chọn là các ô có đánh dấu x .

Ta cộng vào dòng *i* số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0.

Khi đó ta có hệ phương trình

1 **x**	5	7	2 **x**
5	7	4 **x**	9 **x**
12	2 **x**	3 **x**	6

$$\begin{cases} 1+r_1+s_1=0 \\ 2+r_1+s_4=0 \\ 4+r_2+s_3=0 \\ 9+r_2+s_4=0 \\ 2+r_3+s_2=0 \\ 3+r_3+s_3=0 \end{cases}$$

Hệ này có vô số nghiệm, tuy nhiên ta có thể chọn một bộ nghiệm là:

$$r_1=0, s_1=-1, s_4=-2, r_2=-7, s_3=3, r_3=-6, s_2=4$$

1 x	5	7	2 x	$r_1=0$
5	7	4 x	9 x	$r_2=-7$
12	2 x	3 x	6	$r_3=-6$

$s_1=-1$ $s_2=4$ $s_3=3$ $s_4=-2$

0 x	9	10	0 x
-3	4	0 x	0 x
5	0 x	0 x	-2

Chứng tỏ phương án này chưa tối ưu, vì còn ô có cước phí âm.

Bước 3: Xây dựng phương án mới.

Bổ sung ô (2,1) có cước phí âm nhỏ nhất vào tập các ô chọn E, ta được một chu trình V duy nhất (2,1); (2,4); (1,4); (1,1). (Đánh dấu * ô (2,1))

0 x	9	10	x
-3 *	4	x	0 x
5	0 x	0 x	-2

Đánh số thứ tự các ô thuộc chu trình V, bắt đầu từ ô (2,1). (Số thứ tự trong mgoặc)

0 (4) x	9	10	(3) x
-3 * (1)	4	x	0 x (2)
5	0 x	0 x	-2

$V^L = \{(2,1); (1,4)\}$,

$V^C = \{(2,4); (1,1)\}$

Lượng hàng ở các ô lẻ là $\{x_{21}=0, x_{14}=50\}$

ở các ô chẵn là $\{x_{24}=10, x_{11}=30\}$

Lượng hàng ở các ô không thuộc chu trình là $x_{32}=40, x_{33}=15, x_{23}=35$

$$x_{i^*j^*} = \min\{x_{ij} : (i,j)\in V^C\} = \min\{10,30\} = 10$$

P. Án mới x'_{ij} theo công thức

$x'_{21} = 0+10 = 10$
$x'_{14} = 50+10 = 60$ (Vì hai ô này có số thứ tự lẻ)

$x'_{24} = x_{24} - x_{i^*j^*} = 10-10 = 0,$
$x'_{11} = x_{11} - x_{i^*j^*} = 30-10 = 20,$ (Vì hai ô này có số thứ tự chẵn)

$x'_{23} = x_{23} = 35,$
$x'_{32} = x_{32} = 40,$
$x'_{33} = x_{33} = 15,$ (Vì các ô này không thuộc chu trình).

0 (4) x 30	9	10	(3) X 50
-3 * (1)	4	35 x	0 10 x (2)
5	0 x 40	0 x 15	-2

0 (4) x 20	9	10	(3) x 60
-3 * 10	4	x 35	0 x
5	0 x 40	0 x 15	-2

Các ô có thứ tự chẵn thì trừ đi lượng hàng điều chỉnh. Các ô có thứ tự lẻ thì cộng thêm lượng hàng điều chỉnh. Các ô không thuộc chu trình thì giữ nguyên.

Phương án mới là các số in đậm trong bảng sau (các số nhỏ ở trên là cước phí).

1 **20**	5	7	2 **60**
5 **10**	7	4 **35**	9
12	2 **40**	3 **15**	6

Bước 4: Xem đây là một phương án ban đầu, ta quay lại bước 2, quy không cước phí các ô chọn.

1 x	5	7	2 x
5 x	7	4 x	9
12	2 x	3 x	6

$r_1 = 0$

$r_2 = -4$

$r_3 = -3$

s_1	s_2	s_3	s_4
-1	1	0	-2

1 x	5	7	2 x
5 x	7	4 x	9
12	2 x	3 x	6

$r_1 = 0$

$r_2 = -4$

$r_3 = -3$

s_1	s_2	s_3	s_4
-1	1	0	-2

0 x	6	7	0 x
0 x	4	0 x	3
8	0 x	0 x	1

Đến đây ta thấy tất cả các ô đều có cước phí không âm. Vậy có phương án tối ưu

Nghĩa là từ nơi phát 1 phân đến nơi nhận 1 **20** đơn vị hàng, từ nơi phát 1 phân đến nơi nhận 4 **60** đơn vị hàng, từ nơi phát 2 phân đến nơi nhận 1 **10** đơn vị hàng, từ nơi phát 2 phân đến nơi nhận 3 **35** đơn vị hàng, từ nơi phát 3 phân đến nơi nhận 2 **40** đơn vị hàng, từ nơi phát 2 phân đến nơi nhận 3 **15** đơn vị hàng. Cước phí phải trả là $f=1.20+2.60+5.10+4.35+2.40+3.15=455$. Đây là cước phí nhỏ nhất.

Ví dụ 2: Giải bài toán vận tải cho bởi bảng vận tải sau:

i \ *j*	50	40	70
80	5	5	12
20	7	9	11
60	4	2	3

4. Bài tóan vận tải cực đại cước phí.

Xét bài toán: Một nhà máy chế biến thịt, sản xuất ba loại thịt: bò, lợn, cừu, với tổng lượng mỗi ngày là 480 tấn bò; 400 tấn lợn; 230 tấn cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt nấu chín để bán trong giờ làm việc là 420 tấn. Ngoài ra nấu thêm ngoài giờ 250 tấn (với giá cao hơn). Lợi nhuận thu được trên một tấn được cho bằng bảng sau: (với đơn vị là triệu đồng)

	Tươi	Nấu chín	Nấu chín ngoài giờ
Bò	8	11	14
Lợn	4	7	12
Cừu	4	9	13

Mục đích của nhà máy là tìm phương án chế biến để làm cực đại lợi nhuận. Hãy tìm phương án chế biến đó. (Giáo trình)