Chương 5

QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1. GIỚI THIỆU BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH :

Quy hoạch tuyết tính (QHTT) là một kỹ thuật toán học nhằm xác định giá trị của các biến $x_1, x_2,...x_i...,...x_n$ sao cho :

- Làm cực đại hay cực tiểu giá trị của hàm mục tiêu (Objection function)

  $\mathbf{Z = f(x_1, x_2,..., x_n)}$

- Thỏa mãn các ràng buộc (Constraint).

  $\mathbf{R_i = r_i(x_1, x_2,..., x_n)}$

Trong QHTT : Hàm mục tiêu f và các ràng buộc r_i là những biểu thức tuyến tính (bậc nhất) đối với các biến $x_1, x_2,..., x_n$. $x_1, x_2,..., x_n$ là các biến quyết định.

Ví dụ :

a. Bài toán cực đại :

Một nhà quản lý dự án nông nghiệp ứng dụng QHTT để làm cực đại lợi nhuận của dự án dựa trên các số liệu sau :

Số liệu đầu vào đối với một đơn vị sản phẩm	Loại sản phẩm		Khả năng lớn nhất của các nguồn tài nguyên sẵn có
	Lúa gạo	Lúa mì	
Diện tích [Ha/tấn]	2	3	50 Ha
Lượng nước [10^3m^3/tấn]	6	4	90 x 10^3m^3
Nhân lực [công/tấn]	20	5	250 công
Lợi nhuận [USD/tấn]	18	21	

Giải :

Các bước thành lập bài toán QHTT :

Bước 1 : Xác định biến quyết định (Decision Variable)

Gọi x_1 là số tấn lúa gạo cần được sản xuất.

x_2 là số tấn lúa mì cần được sản xuất.

Bước 2 : Xác định hàm mục tiêu (Objective Function).

Hàm mục tiêu trong bài toán này là cực đại lợi nhuận Z.

$$\text{Max } Z = 18x_1 + 21x_2$$

Bước 3 : Xác định các ràng buộc (Constraints)

- Ràng buộc về diện tích : $2x_1 + 3x_2 \leq 50$
- Ràng buộc về lượng nước: $6x_1 + 4x_2 \leq 90$
- Ràng buộc về nhân lực: $20x_1 + 5x_2 \leq 250$
- Giá trị của các biến phải dương $x_2 \geq 50$ với $i = 1, 2$

b. Bài toán cực tiểu :

Một nhà quản lý trại gà dự định mua 2 loại thức ăn để trộn ra khẩu phần tốt và giá rẻ.

Mỗi đơn vị thức ăn loại 1 giá 2 đồng có chứa	5g thành phần A
	4g thành phần B
	0,5g thành phần C
Mỗi đơn vị thức ăn loại 2 giá 3 đồng có chứa	10g thành phần A
	3g thành phần B
	không có chứa thành phần C.

Trong 1 tháng, 1 con gà cần tối thiểu 90g thành phần A, 48g thành phần B và 1,5g thành phần C.

Hãy tìm số lượng mỗi loại thức ăn cần mua để có đảm bảo đủ nhu cầu tối thiểu về dinh dưỡng cho 1 con gà với giá rẻ nhất.

Giải:

Bước 1 : Xác định biến quyết định

Gọi x_1, x_2 lần lượt là số lượng đơn vị thực phẩm loại 1 và loại 2 cần cho 1 con gà trong 1 tháng.

Bước 2 : Xác định hàm mục tiêu

Hàm mục tiêu của bài toán này là cực tiểu giá mua

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2$$

Bước 3 : Xác định các ràng buộc

- Thành phần A : $5x_1 + 10x_2 \geq 90$
- Thành phần B : $4x_1 + 3x_2 \geq 48$
- Thành phần C : $0.5x_1 \geq 1,5$

- Các biến dương : $x_1, x_2 \geq 0$

2. MÔ HÌNH TỔNG QUÁT CỦA BÀI TÓAN QHTT

a. Bài toán cực đại :

- Hàm mục tiêu $\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ - Ràng buộc $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$ - $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$ $x_j \geq 0 \ , \ j = \overline{1,n}$

Mô hình có thể viết gọn lại :

- Hàm mục tiêu $\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ - Ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \leq b_i \qquad j = \overline{1,n} \qquad$ m hàng $\qquad i = \overline{1,m} \qquad$ n cột $x_j \geq 0$

Có thể viết dưới dạng ma trận

- Hàm mục tiêu $\text{Max } Z = C.X$ - Ràng buộc $AX \leq B$ $X \geq 0$

Với : $C = [c_1 \ c_2 \ ....c_n]$ ma trận hàng

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ý nghĩa các hệ số trong mô hình bài toán cực đại

- C_j; với $j = \overline{1,n}$ là số là lợi nhuận do 1 đơn vị sản phẩm thứ j đem lại.
- a_{ij}; với $j = \overline{1,n}$ là số lượng tài nguyên thứ i cần cho 1 đơn vị sản phẩm thứ $i = \overline{1,n}$
- b_i với $i = \overline{1,m}$ là tổng số lượng tài nguyên thứ i sẵn có.
- x_j số đơn vị sản phẩm thứ j

b. Bài toán cực tiểu

Hàm mục tiêu
Min Z = CX
Ràng buộc
AX > B
X > 0

Ghi chú

- Trong bài toán Min, chữ j là ghi chú cho 1 đơn vị sản phẩm thứ j
- Ta có thể giải bài toán Min theo các cách:

  + Giải trực tiếp bài toán Min

  + Đổi ra bài toán Max

  Min Z = Max (-Z)

  Đặt W = - Z $\Rightarrow$ Min Z = Max W

  $\Rightarrow$ Bài toán Min Z được giải thông qua bài toán Max W

c. Quá trình giải quyết bài toán QHTT

Thông thường quá trình giải bài toán QHTT bao gồm 5 bước:

Bước 1: Nhận dạng các biến quyết định và hàm mục tiêu

Bước 2: Diễn tả hàm mục tiêu và các ràng buộc theo các biến quyết định

Bước 3: Kiểm tra xem có phải tất cả các quan hệ trong hàm mục tiêu và trong các ràng buộc có phải là quan hệ tuyến tính không. Nếu không, phải tìm mô hình phi tuyến khác để giải.

Bước 4: Kiểm tra vùng khong gian lời giải để xem xét điều kiện nghiệm của bài toán. Các khả năng có thể xảy ra là:

a) Không có vùng khả thi (vô nghiệm)
b) Vùng khả thi vô hạn và không có điểm cực trị
c) Vùng khả thi vô hạn và có điểm cực trị
d) Vùng khả thi có giới hạn

Nếu:

- a xảy ra thì phải nới lỏng các ràng buộc
- b xảy ra thì phải cấu trúc lại mô hình, có thể đưa thêm ràng buộc vào mô hình
- c,d xảy ra thì sang bước 5

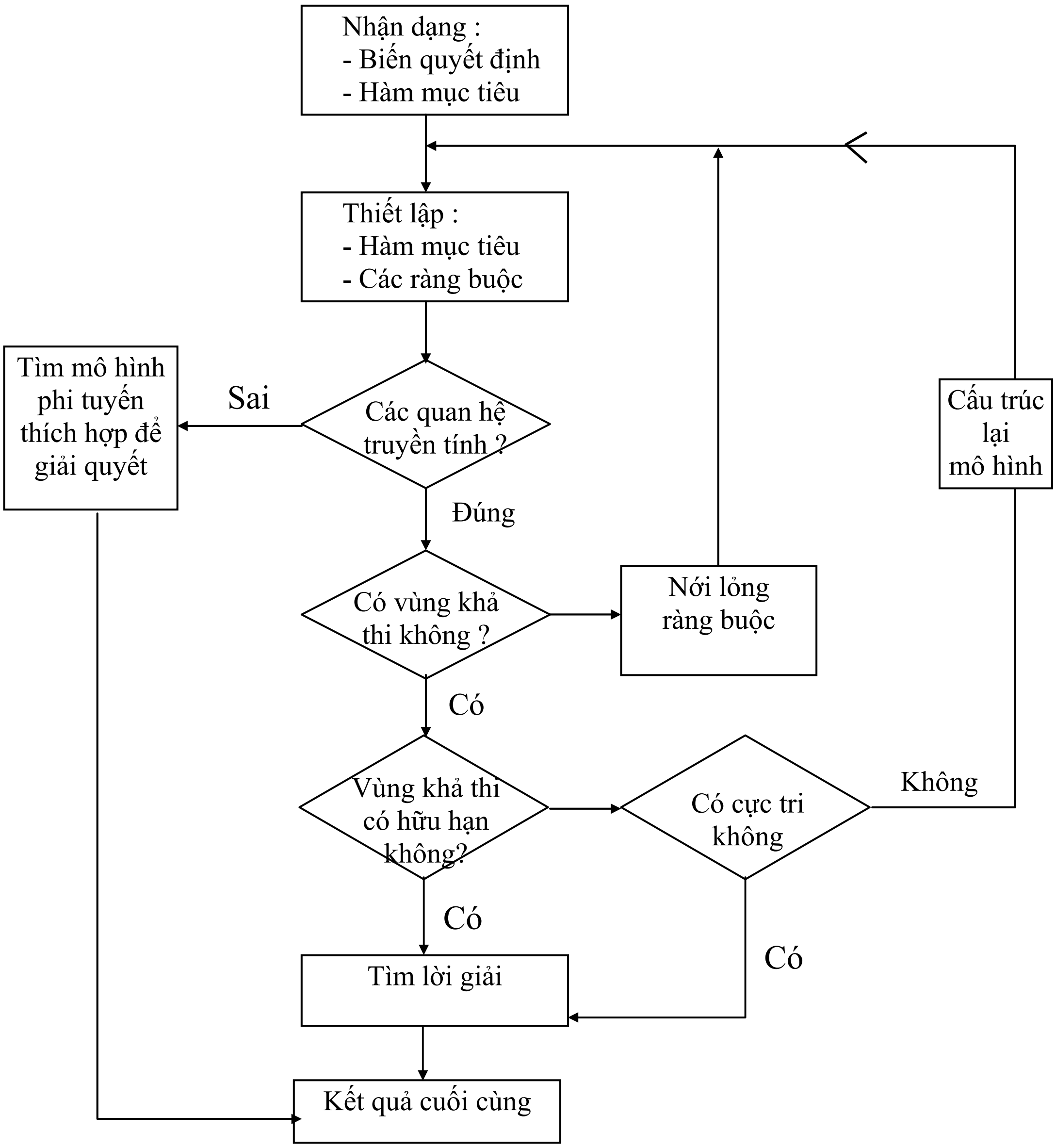
Bước 5: Tìm ra các lời giải tối ưu có thể có. Việc tìm lời giải này có thể dùng:

- Phương pháp đồ thị (Graphical method)
- Phương pháp đơn hình (Simplex method)

d. Lịch sử qui hoạch tuyến tính

Ông A.N Kolmogorov nhà toán học xác suất nổi tiếng thế giới người Liên Xô, là người đầu tiên nhận thức được mô hình qui hoạch tuyến tính trước thế chiến thứ hai.

Vào năm 1945, một áp dụng đầu tiên của QHTT do Stigler thực hiện vào bài toán khẩu phần. Năm 1947, một bước tiến chủ yếu trong QHTT được thực hiện do Geogre D. Dantzig (nhà toán học làm việc cho cơ quan không lực Mỹ) khám phá ra phép đơn hình (Simplex Method). Từ đó Dantzig cùng các nhà toán học khác đã bổ sung, cải tiến phép đơn hình để phép đơn hình trở thành 1 công cụ chủ yếu để tìm lời giải tối ưu của bài toán QHTT. Ngày nay với sự hỗ trợ của máy tính việc giải bài toán QHTT trở nên đơn giản. Vì vậy việc áp dụng bài toán QHTT trong thực tế ngày càng trở nên rộng rãi.



Lưu đồ tiến trình giải quyết bài toán QHTT

3. GIẢI BÀI TÓAN QHTT BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ (graphical method)

Phương pháp đồ thị được dùng khi số biến quyết định là 2 hay 3.

a) Phương pháp dùng đường đẳng lợi (iso - profit line) hay đường đẳng phí (iso - cost line). Giải bài toán cực đại ở ví dụ trên:

Hàm mục tiêu: Max $Z = 18x_1 + 21x_2$

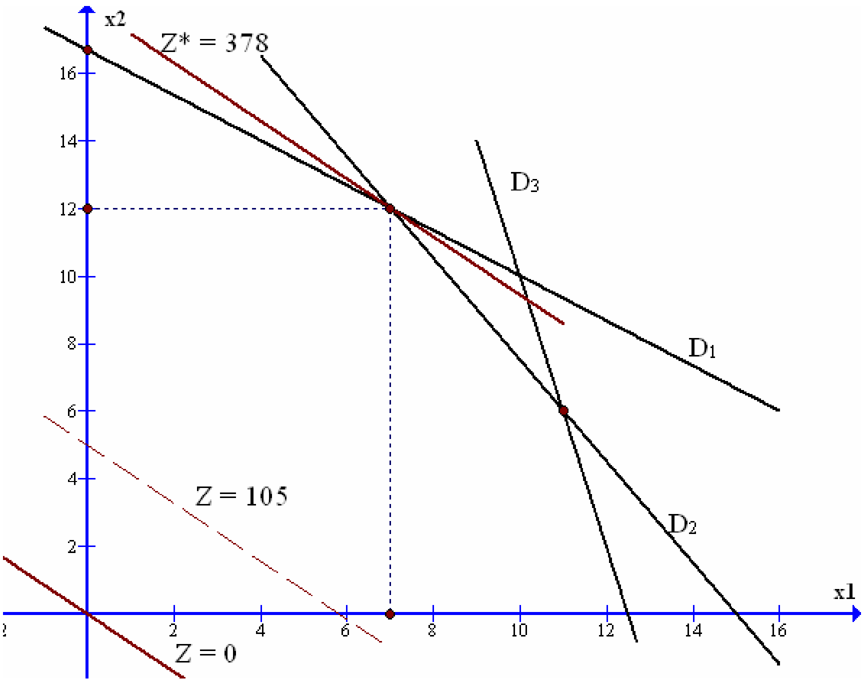
Ràng buộc

$$
\begin{array}{lllll}
2x_1 & + & 3x_2 & \leq 50 & (1) \\
6x_1 & + & 4x_2 & \leq 90 & (2) \\
20x_1 & + & 5x_2 & \leq 250 & (3) \\
 & & x_1 & \geq 0 & (4) \\
 & & x_2 & \geq 0 & (5)
\end{array}
$$

Giải

Trong mặt phẳng tọa độ $0x_1x_2$ ta vẽ các đường thẳng

$$
\begin{array}{llllll}
(D_1) & 2x_1 & + & 3x_2 & = & 50 \\
(D_2) & 6x_1 & + & 4x_2 & = & 90 \\
(D_3) & 20x_1 & + & 5x_2 & = & 250 \\
(D_4) & & & x_1 & = & 0 \\
(D_5) & & & x_2 & = & 0
\end{array}
$$



Miền OABCD chứa tất cả các điểm $M(x_1,x_2)$ thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán:

- Một điểm M(x1, x2) ∈ miền OABCD được gọi là 1 lời giải chấp nhận được (feasible solution)
- Miền OABCD được gọi là không gian lời giải hay không gian sách lược (feaible region or solution space)

- Vấn đề giải bài toán QHTT nghĩa là tìm 1 điểm M (x_1, x_2) trong không gian lời giải sao cho làm cực đại giá trị hàm mục tiêu Z.

- ***<u>Đường đẳng lợi</u>***

Xét hàm mục tiêu $Z = 18x_1 + 21x_2$. Ứng với mỗi giá trị $Z = Z_0$ thì đường thẳng có phương trình $18x_1 + 21x_2 = Zo$ gọi là đường đẳng lợi. Các đường đẳng lợi song song nhau.

Giải bài toán QHTT theo phương pháp đồ thị là đi tìm đường đẳng lợi ứng với giá trị của hàm mục tiêu Z lớn nhất và đường đẳng lợi phải cắt không gian lời giải. Đường đẳng lợi càng cách xa gốc) thì giá trị Z càng lớn.

Ở bài toán này Z = Zmax = 378 khi đường đảng lợi đi qua điểm C (7, 12). Vậy tọa độ của điểm C chính là nghiệm tối ưu của bài toán.

$$\begin{cases} x_1{}^* = 7 \\ x_2{}^* = 12 \end{cases}$$

Giá trị của hàm mục tiêu $Z_{max} = 378$

- ***<u>Ghi chú :</u>***

Tọa độ của điểm C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 50 \\ 6x_1 + 4x_2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1{}^* = 7 \\ x_2{}^* = 12 \end{cases}$$

Giá trị của hàm mục tiêu

$$Z = Z_{max} = 18x_1 + 21x_2 = 18 \times 7 + 21 \times 12$$
$$Z_{max} = 378$$

Ràng buộc (1)&(2) là ràng buộc tích cực (Active Constraint) vì với giá trị $x_1^* = 7$; $x_2^* = 12$, ta có :

- o Diện tích = $2 \times 7 + 3 \times 12$ = 50 (ha)
- o Lượng nước = $6 \times 7 + 4 \times 12$ = 90 (10^3m^3)
- o Nhân lực = $20 \times 7 + 5 \times 12$ = 200 công < 250 công

Số ràng buộc tích cực = số biến quyết định

<u>Giải bài toán cực tiểu ở ví dụ trên</u>

Hàm mục tiêu Min $Z = 2x_1 + 3x_2$
Ràng buộc

$$5x_1 + 10x_2 \geq 90 \quad (1)$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 48 \quad (2)$$

$0.5x_1 \geq 1,5$ (3)

$x_1 \geq 0$ (4)

$x_2 \geq 0$ (5)

Trong mặt phẳng tọa độ Ox_1x_2, ta vẽ các đường thẳng:

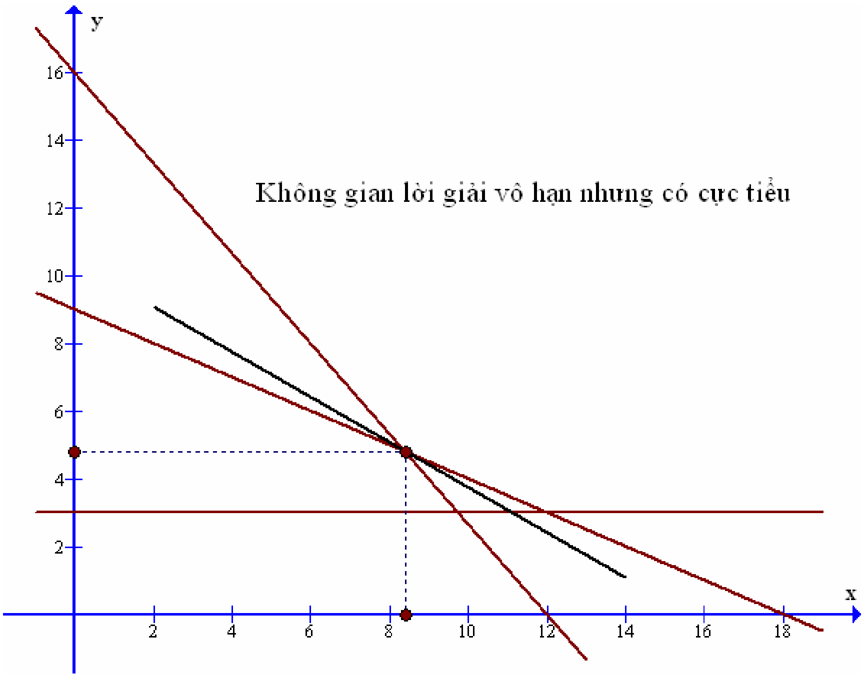
$(D_1): 5x_1 + 10x_2 = 90$

$(D_2): 4x_1 + 3x_2 = 48$

$(D_3): 0.5x_1 = 1.5$

$(D_4): x_1 = 0$

$(D_5): x_2 = 0$



Dùng đường thẳng phí để xác định Zmin. Đường thẳng phí càng gần gốc O, Z càng nhỏ. Đường thẳng phí qua điểm B cho ta Zmin. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = \\ 4x_1 + 3x_2 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1{}^* = 8,4 \\ x_2{}^* = 4,8 \end{cases}$$

Z = Zmin = 2×1 + 3×2 = 2 × 8,4 + 3,48 = 31,2

Vậy lời giải tối ưu là : $\begin{cases} x_1{}^* = 8,4 \\ x_2{}^* = 4,8 \end{cases}$

b) Phương pháp dùng điểm đỉnh (Corner Point, Extreme Point)

- Các điểm đỉnh là giao điểm của các ràng buộc nằm trong không gian lời giải gọi là các đỉnh của không gian lời giải.
- Một kết quả quan trọng trong lý thuyết qui hoạch tuyến tính là : Nếu bài toán QHTT có lời giải tối ưu thì lời giải sẽ nằm trên các đình của không gian lời giải.
- Áp dụng kết quả này điểm tìm giá trị của hàm mục tiêu bằng cách so sánh giá trị của các đỉnh của không gian lời giải.

Giải bài toán cực đại ở ví dụ trên

So sánh giá trị tại 5 đỉnh O, A, B, C, D

Đỉnh O (0, 0)	$\Rightarrow Z_O$	= 0		
Đỉnh A (12,5,)	$\Rightarrow$ ZA	= 18 x 15,5 + 21 x 0	=	225
Đỉnh B (11, 6)	$\Rightarrow Z_B$	= 8 x 11 + 21 x 6	=	324
Đỉnh C (7, 12)	$\Rightarrow Z_C$	= 18 x 7 + 21 x 12	=	378
Đỉnh D (0, 16,67)	$\Rightarrow Z_D$	= 18 x 0 + 21 x 16,67	=	350,07

$$\Rightarrow Zmax = Z_C = 378 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 7 \\ x_2^* = 12 \end{cases}$$

Giải bài toán cực tiểu ở ví dụ trên

So sánh giá trị tại 3 đỉnh A, B, C :

Đỉnh A (18, 0)	$\Rightarrow$ ZA	= 2 x 18 + 3 x 0	=	36
Đỉnh B (8,4 , 4,8)	$\Rightarrow Z_B$	= 2 x 8,4 + 3 x 4,8	=	31,2
Đỉnh C (3, 12)	$\Rightarrow Z_C$	= 2 x 3 + 3 x 12	=	42

$$\Rightarrow Zmin = Z_C = 31,2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 8,4 \\ x_2^* = 4,8 \end{cases}$$