定义. Jacobson radical $J(R)=R$ 全部极大理想之交

命题. $a\in J(R) \iff \forall r\in R$, $1-ar$ 可逆

pf. $\Rightarrow$: 若 $\exists r$, $(1-ar)$ 不可逆, $\exists$ 极大理想 M, $1-ar\in M$.

又 $ar\in J(R)\subseteq M \Rightarrow 1\in M \Rightarrow$ 矛盾.

$\Leftarrow$: 若存在极大理想 M, $a\notin M$.

$\Rightarrow R=(a)+M \Rightarrow 1=m+ra$, $\exists m\in M, r\in R$.

$\Rightarrow m=1-ra\in M$ 不可逆, 否则 $M=(1)$

例. $\overset{PID}{\mathbb{Z}}$ 中 (m) 是素理想 $\iff m$ 是素数 $\iff (m)$ 是极大理想.

$\mathbb{F}$ 是域, $\overset{PID}{\mathbb{F}[x]}$ $(f(x))$ 是素理想 $\iff f(x)$ 不可约

$\iff (f(x))$ 是极大理想

命题. R 是 PID, (a) 是素理想 $\iff a$ 是素元

$\iff R/(a)$ 是域

$\iff (a)$ 是极大理想.

命题. (1) $p_1,\cdots,p_n$ 是素理想, $I\lhd R$ 是理想.

若 $I\subseteq\bigcup_{i=1}^n p_i$, 则 $\exists i$, $I\subseteq p_i$.

pf. 对 n 归纳. $n=1$ 显然.

$(n-1\to n)$: 反证. 若 $I\nsubseteq P_i, \forall i$.

由归假. $I\nsubseteq \bigcup_{i\in[n]\setminus\{j\}} P_i$, $\forall j$.

$\Rightarrow \forall i$, $\exists a_i\in I\cap P_i\setminus\bigcup_{j\neq i}P_j$.

取 $b=\sum_{i=1}^n a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$

$\notin \bigcup_{i=1}^n P_i$, 但 $b\in I$, 矛盾.

(2) $I_1,\cdots,I_n$ 是 R 的理想, P 是素理想, $P\supseteq\bigcap_{i=1}^n I_i$, 则

$\exists i$, $I_i\subseteq P$. 特别地, $P=\bigcap_{i=1}^n I_i$, 则 $\exists i$ s.t. $P=I_i$.

pf. 假设 $\forall i$, $I_i\nsubseteq P$. $\exists a_i\in I_i$, $a_i\notin P$.

$a_1\cdots a_n\notin P$, 但 $a_1\cdots a_n\in\bigcap I_i$, 矛盾.

模

M

- M关于加法 $+$ 构成交换群
- $\mathrm{End}(M)=\{M$ 的自同态$\}$ 关于 $\circ$ 构成含幺半群

$\mathrm{End}(M)$ 中加法定义为 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

$\mathrm{End}(M)$ 关于加法构成交换群.

$\mathrm{End}(M)$ 关于 $+$, $\circ$ 构成含幺环.

例. $M=\langle a\rangle=\{na \mid n\in\mathbb{Z}\}$ 无限交换群

$\eta\in\mathrm{End}\,M$ 可表为 $\eta(a)=za$. 记作 η_z.

$\eta_{z_1}+\eta_{z_2}=\eta_{(z_1+z_2)}$, $\eta_{z_1}\circ\eta_{z_2}=\eta_{z_1z_2}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}&\to\mathrm{End}\,M\\ z&\mapsto\eta_z\end{aligned}$$

既单又满

$\mathrm{End}\,\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$.

例. $\mathbb{Z}_n\cong\mathrm{End}(\mathbb{Z}_n)$

R 是含幺环, $\mathrm{End}(R,+)$.

对 $a\in R$, 定义 a_l: $\begin{aligned}R&\to R\\ x&\mapsto ax\end{aligned}$ $\in\mathrm{End}(R,+)$ (左乘)

$R_l:=\{a_l \mid a\in R\}\underset{\text{子环}}{<}\mathrm{End}(R,+)$

$$\begin{aligned}R&\longrightarrow R_l=\{a_l \mid a\in R\}\\ a&\longmapsto a_l\end{aligned}\quad\Rightarrow R\cong R_l.$$

同样, R_r. 注意 $a_r\circ b_r=(ba)_r$.

$R^{op}\cong R_r$