



MATEMATIKA TEKNIK JTE UNTIRTA



Transformasi Z

- Transformasi z : mengubah persoalan sinyal dan sistem menjadi persoalan aljabar dan geometri.
- Transformasi $z \rightarrow$ representasi sinyal dan sistem dinyatakan dalam polinom z .

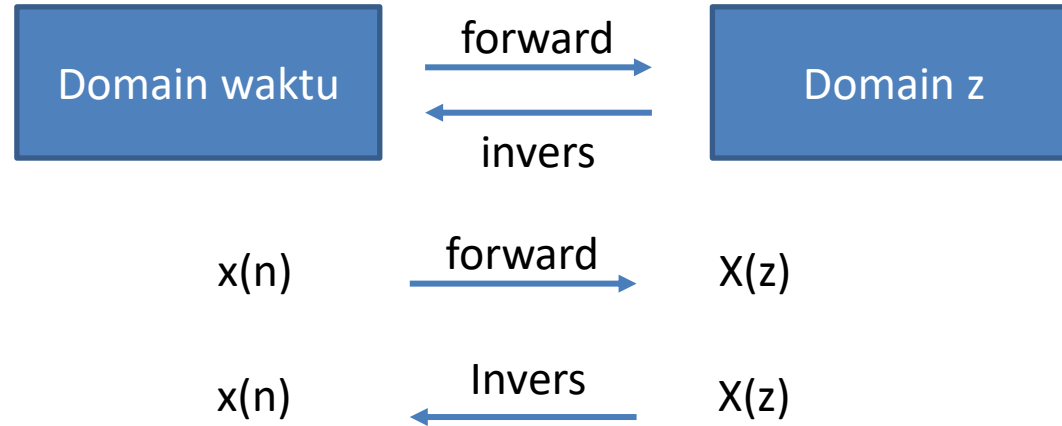


Fungsi transformasi z

- Mengurangi perhitungan dalam operasi konvolusi dua sinyal
- Solusi persamaan beda dapat ditemukan dengan perhitungan aljabar yang lebih mudah
- Fungsi transfer pada sistem LTI



Transformasi z



Sequence

$x(n)$

Polinomial

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Dimana $z \rightarrow$ variabel kompleks, $z = re^{j\omega}$
 $n \rightarrow$ integer



Sinyal dan sistem waktu diskrit
Ingat persamaan konvolusi sebelumnya?

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n - k] \rightarrow \text{sifat komutatif}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$



Mari kita lihat bila inputnya adalah z^n

$$x[n] = z^n$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^n z^{-k}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} z^n$$

$$y[n] = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \right] z^n \rightarrow H(z) \cdot z^n$$

$H(z)$ merupakan transformasi dari $h[n]$



Transformasi z dari barisan $x[n]$

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

→ Bi-directional ZT

Karena transformasi z adalah deret pangkat tak berhingga, maka terdefinisi hanya pada nilai z yang menyebabkan deret ini konvergen. Region of Convergen (RoC) dari $X(z)$ adalah kumpulan semua nilai z sehingga $X(z)$ bernilai terbatas.



Contoh :

Temukan transformasi z dari deret berhingga hanya sampel bukan nol yang ditentukan sebagai : $\{x(0) = 5, x(2) = 4, x(5) = -2\}$



Jawab :

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{n=0}^5 x[n]z^{-n} \\&= x[0]z^0 + x[1]z^1 + x[2]z^2 + x[3]z^3 + x[4]z^4 + x[5]z^5 \\&= 5z^0 + 0z^{-1} + 4z^{-2} + 0z^{-3} + 0z^{-4} + (-2)z^{-5} \\&= 5 \cdot 1 + 0 \cdot z + 4 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} + 0 \cdot z^{-4} + (-2) \cdot z^{-5} \\&= 5 + 0 + 4z^{-2} + 0 + 0(-2)z^{-5} \\&= 5 + 4z^{-2} - 2z^{-5} \rightarrow \text{untuk mendapatkan pangkat} \\&\text{positif, bagikan semua suku dengan } z^{-5} \text{ (suku yang} \\&\text{memiliki pangkat terbesar)} \\&= \frac{5z^5 + 4z^3 - 2}{z^5} \quad |z| > 0\end{aligned}$$



Contoh 2 :

Tentukan transformasi z deret geometri $a^n u(n)$

Jawab :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Coba mulai dengan batas bawah, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ maka

$$X(z) = 1 + az^{-1} + (az^{-1})^{-2} + (az^{-1})^{-3} + \dots$$



Perhatikan hal berikut :

Jumlah deret tak hingga Geometric Progression dari a , ar^1 , ar^2 , ar^3 , ... adalah $\frac{\text{First Term}}{1 - \text{Common Ratio}}$

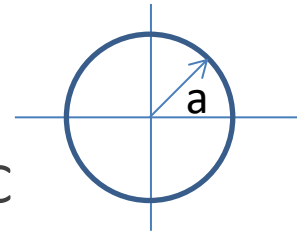
Dimana First Term adalah angka pertama dari deret penjumlahan (dalam hal ini adalah 1), dan common ratio adalah az^{-1} dengan $|CR| < 1$

Jadi :

$$X(z) = 1 + az^{-1} + (az^{-1})^{-2} + (az^{-1})^{-3} + \dots$$
$$= \frac{1}{1 - az^{-1}}, |az^{-1}| < 1$$

$$\left| \frac{a}{z} \right| < 1$$

$$|z| > a \rightarrow \text{ROC}$$





Tentukan transformasi z untuk finite sequence berikut :

$$x[n] = \{2, -3, 4, 0, 2, -4\}$$



Invers transformasi z

Invers transformasi z merupakan proses kebalikan dari transformasi z, artinya terjadi transformasi dari domain z ke domain waktu.





Contoh

Tentukan sinyal $x(n)$ dari transformasi z berikut :

$$X(z) : 4z^4 - z^3 - 2z + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

Jawab :

$$x(n) = z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \int x(z) z^{n-1} dz$$

$$\begin{aligned} X(z) &= 4z^4 - z^3 - 2z + 2z^{-1} + 3z^{-2} \\ &= 4z^4 - 1.Z^3 + 0.z^2 - 2z^1 + 0.z^0 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{-4}^2 x(n) z^{-n} \end{aligned}$$

$$x(n) = \{4, -1, 0, -2, \vec{0}, 2, 3\}$$



Soal :

Temukan transformasi z berikut :

$$x(n) = 7 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$