

# 二次型大题视频时间节点和听课指南

“基础好可不听”的内容，指的是所讲内容相对于辅导书常规方法没有补充，平时如果复习到位就自己能够掌握的内容，这些内容自己看看手稿蓝字部分，确保掌握了的话可不听。

“基础不好可不听”的内容，指的是所讲内容是深层次的理解或必要性不强的方法，对于基础内容还没复习到位的同学或者复习时间紧张的同学来说，听这些的意义不大，可不听。

二次型大题视频总时长六个多小时，视频比去年长很多是因为今年把每个题都带着写了一遍，说明做题步骤和答题卡书写格式，实质讲方法的内容没有看起来这么长。

具体视频当中会说哪些地方可以倍速快进，大家自己先看手稿，重点听没掌握的以及我有补充技巧的内容，其余内容快速过一遍就好。

视频	时间段	内容	听不听
题型一 对角化和化标准形的基本操作	00:00:00-00:24:52	求特征值	有技巧，建议听
	00:24:52-00:33:32	非对称矩阵求特征向量	基础好可不听
	00:33:32-01:01:13	对称矩阵求特征向量 (避免施密特正交化)	有技巧，必听
	01:01:13-01:14:57	$f(A)$ 对角化 化规范形的步骤	基础好可不听
	01:14:57-01:35:11	配方法(含平方项)	基础好可不听
	01:35:11-01:47:30	配方法(不含平方项)	基础好可不听
	01:47:30-01:59:55	不含平方项的另一种 配方法	非必要的方法补充 基础不好可不听
	01:59:55-2:14:55	实用结论补充	建议听
题型二 反求 A	00:00:00-00:11:43	非对称矩阵反求 A 常规解法	基础好可不听
	00:11:43-00:17:57	非对称矩阵反求 A 补充解法	非必要的方法补充 基础不好可不听
	00:17:57-00:24:54	对称矩阵反求 A 常规解法	基础好可不听
	00:24:54-01:04:02	谱分解公式升级版	有技巧，必听
	01:04:02-01:10:31	谈谈是否需要背 施密特正交化公式	讲数一 2021 年真题 建议听
	01:10:31-01:24:59	深入理解根据正交性 求其余特征向量	选听



题型三 求 $A''$ 、 $A''\beta$	00:00:00-00:11:30	求 $A''$	基础好可不听
	00:11:30-00:19:31	求 $A''\beta$	
题型四 相似、合同的传递性	00:00:00-00:13:33	求可逆矩阵 $P$ 使 $P^{-1}AP = B$	相似传递性 讲 2019 年真题 基础好可不听
	00:13:33-00:34:15	求可逆矩阵 $P$ 使 $P^TAP = B$	合同传递性 讲 2020 年真题 基础好可不听
	00:34:15-00:43:28	求可逆矩阵 $P$ 使 $P^{-1}AP = A^T$	研究 $A$ 和 $A^T$ 相似 真题尚未考过 建议听
	00:43:28-00:49:09	不可对角化矩阵的 相似问题	基础不好可不听
	00:49:09-01:02:24	相似与方程组结合	建议听
题型五 $x^T Ax$ 的最值	00:00:00-00:07:04	近十年真题 线代大题题型梳理	建议听
	00:07:04-00:25:39	$x^T Ax$ 的最值	内容是重要也不难 数一没考过 数二数三去年考了 听不听自己斟酌 赌他不考那可不听
题型六 $x^T Ax = 0$ 的解	00:00:00-00:49:45	$x^T Ax = 0$ 的解	有补充技巧 数二数三没考过 数二数三同学必听 数一去年考了 数一同学自己斟酌
题型七 正定	00:00:00-00:10:16	求可逆矩阵 $B$ 使 $A = B^T B$	必听
	00:10:16-00:25:11	求正定矩阵 $B$ 使 $A = B^2$	2021 年数一考了 数二数三没考过 数二数三同学必听 数一同学自己斟酌





# 线代大题 题型与方法总结

## 题型一. 相似对角化、二次型化标准形

例1. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角矩阵. 非对称矩阵对角化

求  $|\lambda E - A|$ , 先考虑加加或减凑公因式.

若观察不出怎么凑, 则套公式:  $|\lambda E - A| = \lambda^3 - \sum_{i=1}^3 a_{ii}\lambda^2 + \sum_{i=1}^3 A_{ii}\lambda - |A|$

求单根的特征向量, 可将  $\lambda_i E - A$  划去一行再解方程, 保证剩下两行不成比例即可

练习: 求  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  的特征值.

例2. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  正交矩阵对角化/正交变换化标准形

(1) 求正交变换  $x = Qy$ , 将  $x^T A x$  化为标准形

实对称矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , 将  $A$  正交对角化.

求二重根的特征向量时, 应直接写出两个正交的特征向量, 省去正交化的步骤.

$\lambda_1 E - A$  的非零行向量, 就是  $\lambda_3$  的特征向量.

$\lambda_3 E - A$  的非零行向量, 就是  $\lambda_1$  的特征向量.

(2) 求可逆线性变换  $x = Pz$ , 将  $x^T (A^T + A^*) x$  化为规范形.

因为  $A$  的特征向量也是  $A^T, A^*, f(A)$  的特征向量.

所以, 能将  $A$  对角化的可逆矩阵  $Q$ , 也能将  $A^T, A^*, f(A)$  的特征向量.

正交变换一般只能将二次型化为标准形, 若要化为规范形, 需再作一次变换  $y = Pz$ .

由于  $x = Qy = QPz$ , 令  $P = QP$ , 则  $x = Pz$  可将二次型化为规范形. ( $x = Pz$  已不是正交变换)





例3. (1) 用配方法将  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3$  化为标准形

一次配方法要将一个变量全部配完, 先配容易配的变量. 若无差别, 则按  $x_1, x_2, x_3$  顺序求变换矩阵  $P$ , 必须反解为  $X = PY$  的形式.  $P$  不唯一, 但要保证可逆, 否则不合法

(2) 用配方法将  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$  化为规范形.

若无平方项, 可利用平方差公式创造平方项再配方

也可利用因式分解直接配方

配方法化标准形

## 题型二: 反求A

例4. 设3阶矩阵A的特征值为3, 3, 0, 且  $(1, 0, 0)^T$  和  $(0, 1, 1)^T$  为  $\lambda = 3$  对应的特征向量,

$(1, 0, 3)^T$  为  $\lambda = 0$  对应的特征向量求矩阵A.

非对称矩阵

常规解法: 先求  $P^{-1}$ , 再用  $A = P\Lambda P^{-1}$  求.

补充解法:  $P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda \Leftrightarrow P^T A^T = \Lambda^T P^T$ , 作初等行变换  $(P^T : \Lambda^T P^T) \xrightarrow{\text{行}} (E : A^T)$  可求得  $A^T$ .

此法的优越性在于初等行变换后直接得到  $A^T$ , 省去了矩阵乘法的计算量

例5. 设3阶实对称矩阵A的特征值为-3, 3, 0, 且  $(-1, 1, 0)^T$  为  $\lambda = -3$  对应的特征向量,

$(1, 1, -2)^T$  为  $\lambda = 3$  对应的特征向量, 求矩阵A.

对称矩阵, 无重根

常规解法: 可用  $A = P\Lambda P^{-1}$  求, 也可用  $A = P\Lambda P^T$  求.

$A = P\Lambda P^{-1}$  的计算量在于求逆,  $A = P\Lambda P^T$  的计算量在于正交单位化, 各有利弊.

补充解法: 谱分解公式:  $A = P\Lambda P^T = (p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ p_3^T \end{pmatrix} = \lambda_1 p_1 p_1^T + \lambda_2 p_2 p_2^T + \lambda_3 p_3 p_3^T$  ( $p_1, p_2, p_3$  为单位向量)

升级版反:  $A = \frac{\lambda_1}{\alpha_1^T \alpha_1} \alpha_1 \alpha_1^T + \frac{\lambda_2}{\alpha_2^T \alpha_2} \alpha_2 \alpha_2^T + \frac{\lambda_3}{\alpha_3^T \alpha_3} \alpha_3 \alpha_3^T$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不需要单位化)

例6. 设3阶实对称矩阵A的特征值为3, 3, 0, 且  $(1, 1, 1)^T$  为  $\lambda = 0$  对应的特征向量, 求矩阵A.

常规解法: 直接写出二重根的两个已正交的特征向量, 再用  $A = P\Lambda P^T$  求

补充解法:  $A - \lambda_1 E$  的特征值为0, 0,  $\lambda_3 - \lambda_1$ ,  $A - \lambda_1 E$  为秩为1的实对称矩阵

则  $A - \lambda_1 E = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\alpha_3^T \alpha_3} \alpha_3 \alpha_3^T$ , 则  $A = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\alpha_3^T \alpha_3} \alpha_3 \alpha_3^T + \lambda_1 E$

对称矩阵  
有二重根  
已知单根的特征向量





例7. 设3阶实对称矩阵A的特征值为3, 3, 0, 且 $(-1, 1, 0)^T$ 和 $(-1, 0, 1)^T$ 为 $\lambda=3$ 对应的特征向量.  
求矩阵A.

对称矩阵有二重根, 已知重根的特征向量

常规解法: 先求出单根的特征向量, 再重新求一个二重根的特征向量, 即可得到3个两两正交的特征向量, 再用 $A = P\Lambda P^T$ 求 (不必对题目给的特征向量正交化)

补充解法: 先求出单根的特征向量, 再用 $A = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\alpha_3^T \alpha_3} \alpha_3 \alpha_3^T + \lambda_1 E$ 求

### 题型三: 求 $A^n, A^n \beta$

例8. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 求 $A^n$ .

若不能用归纳法等简单方法求 $A^n$ , 则可将A对角化, 由 $A = P\Lambda P^{-1}$ , 得 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ .

(2) 设 $\beta = (1, 1, -5)^T$ , 求 $A^n \beta$ .

若无第(1)问求 $A^n$ 的铺垫, 则应先用特征向量将 $\beta$ 线性表示出来,  $\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$

则 $A^n \beta = k_1 A^n \alpha_1 + k_2 A^n \alpha_2 + k_3 A^n \alpha_3 = k_1 \lambda_1^n \alpha_1 + k_2 \lambda_2^n \alpha_2 + k_3 \lambda_3^n \alpha_3$

### 题型四: 相似、合同的传递性

例9. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ , 求可逆矩阵P, 使 $P^{-1}AP = B$ . 相似性的传递性

求可逆矩阵 $P_1, P_2$ , 使 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda$ ,  $P_2^{-1}BP_2 = \Lambda$ . 则 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$ , 则 $(P_1 P_2^{-1})^{-1} A (P_1 P_2^{-1}) = B$

令 $P = P_1 P_2^{-1}$ , 则 $P^{-1}AP = B$ .

例10. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3$ 经可逆线性变换 $X = PY$ 化为二次型 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 y_2$ . 求可逆矩阵P. 合同的传递性

用正交变换法或配方法求可逆矩阵 $P_1, P_2$ , 使 $X^T A X \xrightarrow{X=P_1 Z} Z^T \Lambda Z$ ,  $Y^T B Y \xrightarrow{Y=P_2 Z} Z^T \Lambda Z$

则 $X = P_1 Z = P_1 P_2^{-1} Y$ , 令 $P = P_1 P_2^{-1}$ , 则 $X^T A X \xrightarrow{X=PY} Y^T B Y$





例11. 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ , 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = A^T$ . A与 $A^T$ 相似

求可逆矩阵  $P_1$ , 使  $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda$ . 两边取转置得  $P_1^T A (P_1^T)^{-1} = \Lambda$ .

则  $P_1^{-1}AP_1 = P_1^T A^T (P_1^T)^{-1}$ , 则  $(P_1 P_1^T)^{-1} A (P_1 P_1^T) = A^T$ . 令  $P = P_1 P_1^T$ , 则  $P^{-1}AP = A^T$ .

### 题型五. 求 $x^T A x$ 的最值

例12. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  证明:  $\min_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 0, \max_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 3$

求正交矩阵  $Q$ , 使  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x \xrightarrow{x=QY} y^T (Q^T A Q) y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$

不妨设  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ , 则  $\lambda_{\min} = \lambda_1, \lambda_{\max} = \lambda_3$ .

则  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \lambda_1 y_3^2 \leq \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 \leq \lambda_3 y_1^2 + \lambda_3 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ , 即  $\lambda_1 y^T y \leq f(x) \leq \lambda_3 y^T y$ , 即  $\lambda_{\min} \leq \frac{f(x)}{y^T y} \leq \lambda_{\max}$

取  $y_{\min} = (y_1, 0, 0)$ , 则  $\frac{f(x)}{y^T y} = \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 \cdot 0^2 + \lambda_3 \cdot 0^2}{y_1^2 + 0^2 + 0^2} = \lambda_1$ , 故  $\min_{x \neq 0} \frac{f(x)}{y^T y} = \lambda_1 = \lambda_{\min}$

取  $y_{\max} = (0, 0, y_3)$ , 则  $\frac{f(x)}{y^T y} = \frac{\lambda_1 \cdot 0^2 + \lambda_2 \cdot 0^2 + \lambda_3 y_3^2}{0^2 + 0^2 + y_3^2} = \lambda_3$ , 故  $\max_{x \neq 0} \frac{f(x)}{y^T y} = \lambda_3 = \lambda_{\max}$

又  $x^T x = (QY)^T (QY) = Y^T (Q^T Q) Y = Y^T Y$ , 故  $\min_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = \lambda_{\min}, \max_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = \lambda_{\max}$

### 题型六. 求 $x^T A x = 0$ 的解

例13. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + ax_3)^2$ , 其中  $a$  是参数. 二次型是平方和形式

(1) 求  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解.

(2) 求  $f(x_1, x_2, x_3)$  的规范形.

若  $f = x^T A x = \text{平方和}$ , 则  $\begin{cases} x^T A x = \|Bx\|^2 = x^T B^T B x \\ \text{对 } \forall x \neq 0, \text{ 有 } x^T A x \geq 0, A \text{ 半正定}, \lambda_i \geq 0 \\ x^T A x = 0 \Leftrightarrow Bx = 0 \Leftrightarrow B^T B x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ 的特征向量} \\ x^T A x \text{ 正定} \Leftrightarrow Bx = 0 \text{ 只有零解} \Leftrightarrow B \text{ 列满秩.} \end{cases}$





例14. 设A为3阶实对称矩阵, 正交矩阵Q的前2列为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T, (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T$ ,  
且 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$ , 求 $X^T A X = 0$ 的解. 二次型不是平方和形式, 但已知特征值符号

研究 $X^T A X$ 的性质时(如求最值、解方程), 可通过可逆变换 $X = PY$ 化为 $Y^T B Y$

先研究 $Y^T B Y$ 的相应性质, 再将结论通过 $X = PY$ 变换回来.

例15. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ , 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

二次型不是平方和形式, 也不知特征值符号

先化为标准形(一般用配方法), 再见机行事.

### 题型七. 正定

例16. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(1) 求可逆矩阵B, 使 $A = B^T B$ .

若A半正定, 则存在同阶矩阵B, 使 $A = B^T B$

若特征值全大于0(即正定), 则B为可逆矩阵. 若有特征值0, 则B为不可逆矩阵.

求可逆矩阵P, 使 $P^T A P = \Lambda$ , 令 $\Lambda = \Lambda_1^2$ , 则 $A = (P^{-1})^T \Lambda P^{-1} = (P^{-1})^T \Lambda_1^T \Lambda_1 P^{-1} = (\Lambda_1 P^{-1})^T (\Lambda_1 P^{-1})$

令 $B = \Lambda_1 P^{-1}$ , 则 $A = B^T B$

(2) 求正定矩阵B, 使 $A = B^2$ .

若A正定, 则存在正定矩阵B, 使 $A = B^2$

求正交矩阵Q, 使 $Q^T A Q = \Lambda$ , 令 $\Lambda = \Lambda_1^2$ , 则 $A = Q \Lambda_1 \Lambda_1 Q^T = Q \Lambda_1 Q^T Q \Lambda_1 Q^T = (Q \Lambda_1 Q^T)^2$

令 $B = Q \Lambda_1 Q^T$ , 则 $A = B^2$ .

同理可证, 存在正定矩阵B, 使 $A = B^k$  (k为正整数)



### 不含平方项的二次型结论总结.

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2ax_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3$ , 对应的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$

则  $|A| = 2abc$ ,  $\text{tr}(A) = 0$

若  $abc > 0$ , 则  $A$  的特征值符号为 1 正 2 负.

若  $abc < 0$ , 则  $A$  的特征值符号为 2 正 1 负.

若  $abc = 0$ , 则  $A$  的特征值符号为 1 正 1 负 1 零:  $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$ .

(2021 数一)

已知  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 记  $\beta_1 = \alpha_1$ ,  $\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$ ,  $\beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$ .

若  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  两两正交, 则  $l_1, l_2$  依次为 (A).

A.  $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

B.  $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

C.  $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

D.  $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$





# 二次型大题答案

例1.  $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 17 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ .

练习:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ .

所有求变换矩阵P的题  
答案都不唯一, 正确即得分

例2. (1)  $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ,  $x^T A x \xrightarrow{x=QY} 3y_1^2 + 3y_2^2$

(2)  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ,  $x^T (A^3 + A^*) x \xrightarrow{x=Pz} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

例3. (1)  $f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_2 + \frac{1}{2}x_1 - x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2 - \frac{1}{2}x_1^2$ , 令  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $f \xrightarrow{x=PY} -\frac{1}{2}y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$

(2)  $f(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{x=PY} 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 = [\sqrt{2}(y_1 - y_3)]^2 - [\sqrt{2}(y_2 - 2y_3)]^2 + (\sqrt{6}y_3)^2$

令  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ ,  $f \xrightarrow{x=Pz} z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$

例4.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ . 例5.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . 例6.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . 例7.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

反求A的答案唯一.





例8. (1)  $A^n = 3^{n-1}A$ . (2)  $A^n \beta = (2 \cdot 3^n, 2 \cdot 3^n, -4 \cdot 3^n)^T$ .

例9.  $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ , 例10.  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  例11.  $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

例12. 证明略. 例13. (1) 若  $a \neq -1$ , 则只有零解. 若  $a = -1$ , 通解为  $k(1, 1, 1)^T$ . ( $k \in \mathbb{R}$ ).

(2) 若  $a \neq -1$ , 则  $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ . 若  $a = -1$ , 则  $f = y_1^2 + y_2^2$ .

例14.  $k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ . ( $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ) 例15.  $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . ( $k \in \mathbb{R}$ ).

例16. (1)  $B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$  (2)  $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ .

