线性代数基础计算

一.求行列式.

行列变换消0+行列式展开定理.

例1.求 $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

例2.求n阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$

二.求逆矩阵,求伴随矩阵.

初等行变换求逆:$(A\vdots E) \xrightarrow{\text{行}} (E\vdots A^{-1})$. 若出现分数,可考虑化为$(kE\vdots kA^{-1})$

定义法求伴随: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

余子式,竖着算,横着排

对角线旁负号来

行列式内积,算出来.

$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ 划去外围一圈

竖着算,横看排,不添负号

求逆思路 $\begin{cases} \text{直接求逆} \\ \text{先求伴随,再由} A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|} \text{求逆.} \end{cases}$

求伴随思路 $\begin{cases} \text{直接求伴随} \\ \text{先求逆,再由} A^* = |A|A^{-1} \text{求伴随} \end{cases}$

做题思路推荐
- 二阶矩阵:主对调,副变号,得伴随.
- 三阶矩阵:
  - 若矩阵简单,有较多的0,则考虑初等行变换求逆.
  - 若$|A| \neq \pm 1$,初等行变换易出现分数,则考虑定义法求伴随
- 四阶矩阵:先考虑分块矩阵.

例3.求 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

例4.求 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{*}$.

例5.求 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

三、求秩,解方程组.

化阶梯形“ ”,秩=非零行数.

选台角所在列为主元,其余列为自由变量

基础解系向量个数=自由变量个数.

写基础解系,自由变量赋单位阵,解向量与行向量内积等于0.

写非齐次特解,自由变量赋0,解向量与行向量内积等于自由项.

注:解方程组答案不唯一,以上只是习惯性操作.

做题时以方便做题为原则,可根据实际情况灵活化阶梯和赋值

若不易化为“ ”,可考虑其他化法,如:“ ”.

若写基础解系时出现分数,可给自由变量赋台角数的最小公倍数.

例6.求
$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_4-x_5=1 \\ x_1+2x_2+x_3+5x_4=2 \\ x_1-x_3+x_4-2x_5=0 \\ -2x_1-4x_2-2x_3-9x_4+3x_5=-2 \end{cases}$$
的通解

例7.求
$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_3-x_4+x_5=1 \\ 3x_1+5x_2-x_3-3x_4-x_5=1 \\ 5x_1+3x_2+x_3-5x_4+5x_5=3 \end{cases}$$
的通解.

例8.设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,求 $Ax=b$ 的通解.