二 次 型

一、特征值和特征向量(以下默认A为方阵)

若$A\alpha=\lambda\alpha$,且$\alpha\neq0$,则称λ为A的特征值,α为A的对应于特征值λ的特征向量.

$\exists\alpha\neq0$,使$A\alpha=\lambda\alpha \Leftrightarrow (\lambda E-A)X=0$有非零解$\Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$.

$|\lambda E-A|=\lambda^3-\sum_{i=1}^{3}a_{ii}\lambda^2+\sum_{i=1}^{3}A_{ii}\lambda-|A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$. 故$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}$, $\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=|A|$

结论:

①设A的特征值为λ,对应的特征向量为α,其相关矩阵的特征值和特征向量见下表

A	A^T	A^{-1}	A^*	$f(A)$	$P^{-1}AP$	PAP^{-1}
λ	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	$f(\lambda)$	λ	λ
α		α	α	α	$P^{-1}\alpha$	$P\alpha$

无论A是否可逆,λ为A的一个特征值,将A除λ外的特征值相乘,即得A^*对应的特征值

若A可逆,则A、A^{-1}、A^*的特征向量完全相同.

若A不可逆,A的特征向量一定是A^*的特征向量,反之未必成立.

无论A是否可逆,A的特征向量一定是$f(A)$的特征向量,反之未必成立.

②若A满足$f(A)=0$,则A的任一特征值λ满足$f(\lambda)=0$.

若A的特征方程为$f(\lambda)=0$,则A满足$f(A)=0$.(哈密顿-凯莱定理,超纲)

③若$AX=0$有非零解,则0是A的特征值,非零解是特征值0对应的特征向量

若$AB=kB$,则k是A的特征值,B的非零列向量是特征值k对应的特征向量

④若A的每行元素之和为k,则k是A的特征值,$(1,1,\cdots,1)^T$是A的特征值k对应的特征向量

若A的每列元素之和为k,则k是A的特征值,$(1,1,\cdots,1)^T$是A^T的特征值k对应的特征向量

⑤若α_1,α_2是相同特征值对应的特征向量,则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$仍是该特征值对应的特征向量(k_1,k_2不全为0)

若α_1,α_2是不同特征值对应的特征向量,则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$不是特征向量($k_1\neq0,k_2\neq0$)

扫描全能王 创建

二次型例题

例1. 设$\alpha=(1,0,0,1)^T$，$A=\alpha\alpha^T$，求$|A^2+A+E|$

例2. 设$\alpha=(1,0,0,1)^T$，则（ ）.

A. $\alpha\alpha^T+2E$不可逆　　B. $2\alpha\alpha^T+E$不可逆

C. $\alpha\alpha^T-2E$不可逆　　D. $2\alpha\alpha^T-E$不可逆.

例3. 设2阶矩阵A有两个不同特征值，α_1,α_2是A的线性无关的特征向量，且满足$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，求$|A|$.

例4. 设A为n阶矩阵，则下列命题正确的是（ ）.

A. 若α是A的特征向量且A不可逆，则α不一定是A^*的特征向量.

B. 若α是A^*的特征向量且A不可逆，则α不一定是A的特征向量.

C. 若α是A^2的特征向量且A不可逆，则α一定是A的特征向量.

D. 若α是A^2的特征向量且A可逆，则α一定是A^2的特征向量.

例5. 设3阶矩阵A满足$A^2-2A-3E=O$，且$tr(A)=1$，求$|A^2-A^*|$

例6. 设A为3阶矩阵，$b=(2,-2,4)^T$.

(1) 已知$Ax=b$的通解为$k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(-1,1,-2)^T$，求A的特征值和特征向量

(2) 已知$Ax=b$的通解为$k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,1,1)^T$，求A的特征值和特征向量.

例7. 设A，B为可逆矩阵，且A与B相似，则下列结论错误的是（ ）

A. $A+A^2$与$B+B^2$相似　　B. $A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似

C. $A+A^*$与$B+B^*$相似　　D. $A+A^T$与$B+B^T$相似.

例8. 设A为n阶矩阵，则下列结论正确的是（ ）.

A. 任意矩阵A均满足非零特征值个数$\geq r(A)$.　　B. 若A可对角化，则非零特征值个数$=r(A)$.

C. 若A不可对角化，则非零特征值个数$<r(A)$　　D. 若A不可逆且非零特征值个数$=r(A)$，则A可对角化

扫描全能王 创建

二次型例题答案

例1. 7　例2. C　例3. -1　例4. B　例5. 12或8

例6. (1) $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的特征向量为 $k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T$，($k_1,k_2$ 不全为0)

$\lambda_3=-2$ 对应的特征向量为 $k_3(-1,1,-2)^T$ ($k_3\neq 0$)

(2) $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的特征向量为 $k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T$，($k_1,k_2$ 不全为0)

$\lambda_3=2$ 对应的特征向量为 $k_3(1,-1,2)^T$ ($k_3\neq 0$)

扫描全能王 创建