方程组

一、方程组理论

1.方程组的三种形式.

	齐次方程组	非齐次方程组
方程组形式	$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$	$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$
向量组形式	$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$	$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$
矩阵形式	$Ax=0$	$Ax=b$

2.解的判定.

列数. n=未知数个数.

秩. $r(A)$=有效方程个数(约束条件个数)

自由变量个数. $n-r(A)$=未知数个数−约束条件个数.

齐次 $\begin{cases} r(A)=n \Leftrightarrow \text{唯一零解(只有零解)} \\ r(A)<n \Leftrightarrow \text{无穷多解(有非零解)} \end{cases}$

非齐次 $\begin{cases} r(A)=r(A,b)=n \Leftrightarrow \text{唯一解} \\ r(A)=r(A,b)<n \Leftrightarrow \text{无穷多解} \\ r(A)<r(A,b) \Leftrightarrow \text{无解} \\ r(A)=m \Rightarrow \text{有解} \end{cases}$

注:①方程组加减消元⇔矩阵初等行变换.

若A经过初等行变换化为B,则(或A左乘行满秩矩阵得到B) $\begin{cases} Ax=0\text{和}Bx=0\text{同解} \\ A\text{和}B\text{的行向量组等价} \\ A\text{和}B\text{的列向量组线性关系相同} \end{cases}$

②若A为$m\times n$矩阵且$m<n$,则$Ax=0$必有非零解.

若$Ax=b$为非齐次方程组,则$b\neq 0$, $r(A)>0$

若非齐次方程组有不止一个解,则必有无穷多解.

3 解的结构.

基础解系：解向量组的极大无关组.

基础解系满足的条件：①是解. ②线性无关. ③个数 $=n-r(A)$.

齐次通解：基础解系中向量的线性组合，即 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r$.

非齐次通解：齐次通解＋非齐次特解，即 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r+\eta$.

解空间：基础解系中向量生成的向量空间，即全体解向量的集合.

注：①只有齐次方程组才有基础解系. 基础解系是一个向量组，而不是一个向量.

齐次方程组有无数个基础解系. 每个基础解系中的向量个数为 $n-r(A)$.

不能说齐次方程组有 $n-r(A)$ 个基础解系. 当 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是基础解系时，不能说 ξ_1 是一个基础解系.

② ξ_1 是 $Ax=0$ 的一个基础解系 $\Rightarrow n-r(A)=1$

ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 的三个线性无关的解 $\Rightarrow n-r(A)\geq 3$

ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 的三个两两无关的解 $\Rightarrow n-r(A)\geq 2$

η_1,η_2,η_3 是 $Ax=b$ 的三个线性无关的解 $\Rightarrow n-r(A)+1\geq 3$

η_1,η_2,η_3 是 $Ax=b$ 的三个互不相等的解 $\Rightarrow n-r(A)+1\geq 2$

③齐次方程组中，

线性无关的解向量个数＝基础解系中的向量个数＝解空间的维数＝自由变量的个数 $=n-r(A)$

4. 解的性质.

齐±齐＝齐　　非齐±齐＝非齐　　非齐－非齐＝齐　　是齐解±不是齐解＝不是齐解.

若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是齐次解，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$ 是齐次解.

若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是非齐次解，则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ $\begin{cases}\text{是齐次解，当 } k_1+k_2+\cdots+k_s=0 \text{ 时.}\\ \text{是非齐次解，当 } k_1+k_2+\cdots+k_s=1 \text{ 时.}\end{cases}$

若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是线性无关的非齐次解，则 $\eta_1-\eta_2,\eta_2-\eta_3,\cdots,\eta_{s-1}-\eta_s$ 是线性无关的齐次解.

若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是线性无关的齐次解，η 是非齐次解，则 $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_s$ 为线性无关的非齐次解.

齐次方程组线性无关解的个数为 $n-r(A)$.

非齐次方程组线性无关解的个数为 $n-r(A)+1$.

重要思维：向量组和方程组转化.

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，$C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)$.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 有非零解

b 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ $Ax=b$ 有解.（若表示方法不唯一，则有无穷多解.
若表示方法唯一，则有唯一解）

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}\text{为 } Ax=0 \text{ 的解.}$$

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=b \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}\text{为 } Ax=b \text{ 的解.}$$

$AB=0 \Leftrightarrow B$ 的每个列向量 β_i 均为 $Ax=0$ 的解.

$AB=C \Leftrightarrow B$ 的每个列向量 β_i 均为 $Ax=\gamma_i$ 的解.

方程组理论与A^*结合

若$r(A)<n$，则
- $AA^*=A^*A=O$
- A^*的列向量为$AX=0$的解
- A的列向量为$A^*X=0$的解
- $AX=\beta$有无穷多解$\Rightarrow A^*\beta=0$.
- A的行(列)向量与A^*的列(行)向量正交.

若$r(A)=n-1$，则
- $r(A^*)=1$，$r(A)+r(A^*)=n$
- A^*的非零列向量为$AX=0$的基础解系
- A的$n-1$个无关列向量为$A^*X=0$的基础解系
- $AX=\beta$有无穷多解$\Leftrightarrow A^*\beta=0$.（$\beta\neq 0$）

相似理论与A^*结合

若$r(A)=n-1$，即$r(A^*)=1$，则

① A^*的每行(列)成比例$\Leftrightarrow$存在非零向量α,β，使$A^*=\alpha\beta^T$.

② $\beta^T\alpha=tr(A^*)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\xlongequal{\text{记作}}k$

③ $(A^*)^n=k^{n-1}A^*$

④ A^*的特征值：$\lambda_1^*=\lambda_2^*=\cdots=\lambda_{n-1}^*=0$，$\lambda_n^*=tr(A^*)$

将A除λ_i外的特征值相乘，即得A^*的特征值λ_i^*

若A只有一个特征值为0，则A^*的特征值$tr(A^*)$不为0

若A有一个以上的特征值为0，则A^*的特征值不为0.

A的非零特征值对应的特征向量，是A^*特征值0的特征向量

A的特征值0对应的特征向量，是A^*特征值$tr(A^*)$的特征向量

且与A^*的列向量成比例

⑤ A^*可对角化$\Leftrightarrow tr(A^*)\neq 0\Leftrightarrow A^*$有非零特征值$\Leftrightarrow A$只有一个特征值为0

$\nRightarrow A$可对角化.

方程组例题

例1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，b 为 m 维列向量，则下列命题正确的是（ ）.

A. 若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解.

B. 若 $m<n$，则 $Ax=b$ 有无穷多解.

C. 若 $Ax=b$ 有唯一解，则 $|A|\neq 0$.

D. 若 $Ax=b$ 有两个不同的解，则 $Ax=0$ 有无穷多解.

例2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵 $(m<n)$，且 A 的行向量组线性无关，b_1 为 m 维列向量，b_2 为 n 维列向量，则下列命题错误的是（ ）.

A. $A^TAx=0$ 有非零解

B. $AA^Tx=0$ 只有零解.

C. $Ax=b_1$ 有无穷多解.

D. $A^Tx=b_2$ 有唯一解.

例3. 设 A 为 n 阶矩阵，α 为 n 维列向量，若 $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=r(A)$，则（ ）.

A. $Ax=\alpha$ 有无穷多解.

B. $Ax=\alpha$ 有唯一解.

C. $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 只有零解.

D. $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 有非零解.

例5. 设齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 ξ_1,ξ_2,ξ_3，则此方程组的基础解系还可表示为（ ）

A. ξ_1,ξ_2,ξ_3 的等秩向量组

B. ξ_1,ξ_2,ξ_3 的等价向量组.

C. $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

D. $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$.

例6. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，b 为 m 维列向量，ξ_1,ξ_2 为 $Ax=0$ 的两个不同解，η_1,η_2 为 $Ax=0$ 的两个不同解，k_1,k_2 为任意常数，下列命题正确的是（ ）

A. 若 $r(A)=n-1$，则 $Ax=b$ 的通解为 $k_1(\xi_1-\xi_2)+\frac{\eta_1-\eta_2}{2}$

B. 若 $r(A)=n-1$，则 $Ax=b$ 的通解为 $(k_1-1)\eta_1+(2-k_1)\eta_2$

C. 若 $r(A)=n-2$，则 $Ax=b$ 的通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\frac{\eta_1+\eta_2}{2}$

D. 若 $r(A)=n-2$，则 $Ax=b$ 的通解为 $k_1(\xi_1-\xi_2)+k_2(\eta_1-\eta_2)+\frac{\eta_1+2\eta_2}{3}$

例7. 设η_1,η_2,η_3为$\begin{cases} x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1 \\ b_1x_1+x_2+b_3x_3+2x_4=d_2 \\ c_1x_1-2x_2+c_3x_3+3x_4=d_3 \end{cases}$的三个解，且$\eta_1+\eta_2=(1,0,1,-1)^T$，

$\eta_2+3\eta_3=(2,1,-1,3)^T$，$\eta_3-2\eta_1=(-1,2,1,0)^T$，求该非齐次方程组的通解.

例9、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$为4维列向量，其中$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\alpha_1+2\alpha_2=\alpha_3-\alpha_4$

$\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$. 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，求$Ax=\beta$的通解.

例10. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$为4维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha_1)$. 已知非齐次方程组$Ax=\beta$的通解为$(0,2,-1)^T+k(1,2,3)^T$，求$By=\alpha_2+\alpha_3$的通解.

例11. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$为4维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta+\alpha_1)$，$C=(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\beta-\alpha_1)$.

已知非齐次方程组$Ax=\beta$的通解为$k(0,1,2,-1)^T+(1,1,-2,3)^T$，求$By=\alpha_3-\alpha_1$和$Cz=\alpha_2-\alpha_4$的通解.

例12. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$为4维列向量，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$.

记$A=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+t\alpha_2-\alpha_3,\ \beta+\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$. 若$Ax=\beta$有无穷多解，求$Ax=\beta$的通解.

例13. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为4维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. 若$(1,2,3,4)^T$是$Ax=0$的一个基础解系，则下列结论正确的个数为( ).

①$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.　　②$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价

③$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$两两无关　　④$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$中任意三个向量均线性无关

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

例14. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为4维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. 若$(1,2,3,0)^T$是$Ax=0$的一个基础解系，则下列结论正确的个数为( ).

①$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.　　②$\alpha_4$不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

③$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$两两无关.　　④$\alpha_1,\alpha_2$和$\alpha_1,\alpha_3$等价.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

例8. 设A为4阶矩阵，ξ_1为$(A-E)x=0$的一个基础解系，ξ_2,ξ_3为$(A-2E)x=0$的一个基础解系，则$(A^2-3A+2E)x=0$的通解为( ).

A. $k_1\xi_1+k_2\xi_2$　　B. $k_1\xi_1+k_2\xi_3$　　C. $k_1\xi_2+k_2\xi_3$　　D. $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$

例15. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为4维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. 若$AX=0$的通解为$k_1(1,1,2,3)^T+k_2(1,2,3,4)^T$，则下列结论正确的个数为（ ）.

①$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$中任意三个向量线性相关. ②$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$两两无关

③$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$中任意两个向量均为极大无关组. ④$\alpha_1,\alpha_2$和$\alpha_3,\alpha_4$等价

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4.

例16. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为4维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. 若$AX=0$的通解为$k_1(1,1,2,3)^T+k_2(2,2,3,4)^T$，则下列结论正确的个数为（ ）.

①α_3,α_4线性相关 ②$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两无关

③α_1可由α_2,α_4线性表示. ④α_1,α_3和α_2,α_4等价.

例17. 设$A=(a_{ij})$为4阶矩阵，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，且$A_{11}\neq0$，$|A|=0$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为$A$的列向量组，$\beta$为4维非零列向量. 下列结论错误的是（ ）.

A. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$A^*X=0$的基础解系 B. $Ax=\beta$有无穷多解是$A^*\beta=0$的充分必要条件.

C. $A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}$是$A^*$的特征值. D. A^*相似于对角矩阵.

例4. 若矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$经过初等行变换化为$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则下列结论正确的个数为（ ）

①存在可逆矩阵P，使$PB=A$. ②$Ax=0$和$Bx=0$同解.

③A和B的行向量组等价 ④若$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$，则$\beta_1=\beta_2+\beta_3$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

方程组例题答案

例1. D　例2. D　例3. D　例4. D　例5. C　例6. B

例7. $k_1(0,1,-3,5)^T+k_2(-1,4,3,-1)^T+(1,-2,-1,0)^T$　例8. D

例9. $k_1(1,2,-1,1)^T+k_2(1,-2,0,-1)^T+(1,1,1,1)^T$

例10. $k_1(1,2,3,0)^T+k_2(-1,-2,1,1)^T+(0,1,1,0)^T$

例11. $k(1,2,-1,0)^T+(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2},-\frac{1}{2})^T$　$k_1(-1,2,1,0)^T+k_2(-3,2,-1,1)^T+(-1,0,1,0)^T$