行列式

一、理论

1.定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$(所有取自不同行不同列元素的乘积的代数和)

(逆序数:左大于右的个数)

共有$n!$项乘积,每个乘积由不同行不同列的n个数相乘,根据逆序数冠以正负号

2.几何意义:以n个n维向量为邻边的图形的有向n维体积.

3.性质

①转置后行列式值不变.(行列式中行和列的地位相同)

②互换两行,行列式变号.(必须是对调两行,不能是移动一行)

③某行加上另一行的k倍并写在本行,行列式值不变.(必须写在本行,不能写在另一行)

④可将某行的公因数提行列式外.(一次只能提一行).

⑤可将某行拆成两个数,其余行不变,拆成两个行列式.(一次只能拆一行).

4.行列式展开定理

某行元素与本行代数余子式的乘积之和=行列式.

某行元素与另一行代数余子式的乘积之和$=0$.

5.公式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

$$\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & ⋰ & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & \lambda_1 \\ & ⋰ & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & ⋰ & \\ \lambda_n & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|.$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

(所有大标减小标的乘积)

$|A^T| = |A|$　$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$　$|A^*| = |A|^{n-1}$

$|kA| = k^n |A|$　$|A^n| = |A|^n$　$|AB| = |A||B|$

二、具体型行列式计算.

1.爪形行列式.("↖","↙","↗","↘").

斜爪消平爪

2.异爪形行列式.("↖","↖","↘","↘")

①从相距较远的爪边展开,得到递推式,再用递推法.

②从平爪展开,余子式是分块行列式.

3.三对角行列式.

展开得到递推式 → 小题:用差分方程

展开得到递推式 → 大题 $\begin{cases}\text{通项未知:用递推法}\\ \text{通项已知:用数学归纳法}\end{cases}$

$$D_n=\begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ c & b & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & c & b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & b \end{vmatrix}$$

按第一行展开,得 $D_n=bD_{n-1}-acD_{n-2}$,即 $D_n-bD_{n-1}+acD_{n-2}=0$.

①差分方程法:解特征方程 $\lambda^2-b\lambda+ac=0$,得 λ_1,λ_2

若 $\lambda_1\neq\lambda_2$,则 $D_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$,代入 D_1、D_2 得 $D_n=\dfrac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}$

若 $\lambda_1=\lambda_2$,则 $D_n=(C_1+C_2n)\lambda^n$,代入 D_1、D_2 得 $D_n=(n+1)\lambda^n$

②递推法:解特征方程 $\lambda^2-b\lambda+ac=0$,得 λ_1,λ_2,则 $D_n-\lambda_1D_{n-1}=\lambda_2(D_{n-1}-\lambda_1D_{n-2})$

③第二数学归纳法:验证 $n=1$ 和 $n=2$ 时成立,假设 $n<k$ 时成立,证明 $n=k$ 时成立

4.其他行列式.

观察元素特征,加减消0.常用手法:各行加至第一行;用第一行消各行;逐行相消

①行和相同:各列加至第一列,提取第一列公因数,用第一列消其余各列

②加边法:若每行含公共元素的倍数,则可添加一行一列,方便消元.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \text{公} & \text{共元} & \text{素}\\ 0 & a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

三、抽象型行列式计算

1. 用行列式性质
2. 用矩阵性质
3. 用相似理论

四、代数余子式求和

见代数余子式,想到 $\begin{cases}\text{行列式展开定理}\\ \text{伴随矩阵的元素.}\end{cases}$

理解:①代数余子式与位置有关,与该位置上的元素无关.

②对行列式倍加变形,行列式的值不变,但代数余子式可能改变

③若行列式的某个元素 a_{ij} 增加1,则行列式的值增加 A_{ij}.

若行列式的每个元素都增加1,则行列式的值增加 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$

1. 求某行(列)的(代数)余子式的线性组合. $\sum_{j=1}^{n}k_jA_{ij}$

第i行 $\sum_{j=1}^{n}k_jA_{ij}=k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix} & * & \\ k_1 & k_2\ \cdots & k_n \\ & * & \end{vmatrix}$

第j列 $\sum_{i=1}^{n}k_iA_{ij}=k_1A_{1j}+k_2A_{2j}+\cdots+k_nA_{nj}=\begin{vmatrix} & k_1 & \\ * & k_2 & * \\ & \vdots & \\ & k_n & \end{vmatrix}$

若求余子式 M_{ij},则先用 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 转为代数余子式.

2. 求主对角元素的代数余子式之和. $\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$

$\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=tr(A^*)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*$

3. 求全部的代数余子式之和. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$

①求出 A^*,计算 A^* 所有元素之和.

②求出每一行(列)的代数余子式之和,再相加.

③ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=det(a_{ij}+1)-det(a_{ij})=det(a_{ij})-det(a_{ij}-1)$.

行列式例题

例1. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} -1 & -x & 1 & x \\ x & 1 & x & 2 \\ 1 & 2x & 2 & -1 \\ -x & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为_____.

例2. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 2x & 1 \\ 1 & 2 & x-1 & x \\ -1 & x & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为_____.

例3. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=$_____.

例4. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}=$_____.

例5. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -x & x & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -x & x+a_1 \end{vmatrix}=$_____.

例6. n阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 3 \end{vmatrix} =$______.

例7. 证明: n阶行列式 $\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{vmatrix} = (n+1)a^n$

例8. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$______.

例9. n阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix} =$______

例10. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$, 则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为______.

例11. 设 $a_{ij}=|i-j|$, 求 $D_n=\det(a_{ij})$.

例12. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ x+1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$_____.

例13. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x-1 \\ 1 & 0 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 0 & 1 \\ x+1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$_____.

例14. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=$_____.

例15. 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_2+a_3+a_4 & a_1+a_3+a_4 & a_1+a_2+a_4 & a_1+a_2+a_3 \end{vmatrix}=$_____.

例16. $n+1$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}=$_____.

例17. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(2\alpha_3-\alpha_1,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_2-\alpha_1)$，且$|B|=1$，求$|(2A)^*|$

例18. 设$\alpha_1,\alpha_2,\beta,\gamma$均为3维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$，$B=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\gamma)$，且$|A|=1,|B|=-1$，求$|A+2B|$

例19. 设A,B为3阶矩阵，且$|A|=|B|=|A-B^*|=2$，求$|A^*-B|$.

例20. 设A为4阶矩阵，且$|A|=2$，求$|(A^*)^*-(\frac{1}{4}A^*)^{-1}|$.

例21. 设$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\2&3&0&2\\0&2&3&4\\2&1&4&0\end{vmatrix}$，求$A_{21}-A_{22}+2A_{24}$和$M_{14}+M_{24}-2M_{34}$

例22. 设4阶矩阵A的第1行为$(1,1,1,2)$，第2行为$(2,2,3,6)$，且$|A|=1$，
求$3A_{21}+3A_{22}-2A_{23}-4A_{24}$和$-3M_{21}+3M_{22}+2M_{23}-4M_{24}$

例23. 设$\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\3&2&0&4\\0&2&3&a\\2&1&4&0\end{vmatrix}=A_{21}-A_{22}+2A_{24}+6$，求$a$.

例24. 设4阶矩阵A的特征值为$-1,1,-2,3$，求$A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}$.

例25. 设$A=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&1\\2&0&0&\cdots&0&0\\0&3&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n&0\end{pmatrix}_{n\times n}$，求$\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ij}$和$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$

例26. 设n阶矩阵A的各列元素之和均为2，且$|A|=1$，求$\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$和$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$. $(n>1)$

例27. 设$A=\begin{pmatrix}x+a&a&\cdots&a\\a&x+a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x+a\end{pmatrix}_{n\times n}$，求$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$

例28. 设3阶矩阵A的第2列为$(1,1,1)^T$，且$|A|=-2$，求$A_{11}A_{23}-A_{21}A_{13}$.