二次型

一、特征值和特征向量(以下默认A为方阵)

若$A\alpha=\lambda\alpha$，且$\alpha\neq0$，则称λ为A的特征值，α为A的对应于特征值λ的特征向量.

$\exists\alpha\neq0$，使$A\alpha=\lambda\alpha \Leftrightarrow (\lambda E-A)x=0$有非零解$\Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$.

$|\lambda E-A|=\lambda^3-\sum_{i=1}^{3}a_{ii}\lambda^2+\sum_{i=1}^{3}A_{ii}\lambda-|A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$. 故$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}$，$\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=|A|$

结论:

①设A的特征值为λ，对应的特征向量为α，其相关矩阵的特征值和特征向量见下表

A	A^T	A^{-1}	A^*	$f(A)$	$P^{-1}AP$	PAP^{-1}
λ	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	$f(\lambda)$	λ	λ
α		α	α	α	$P^{-1}\alpha$	$P\alpha$

无论A是否可逆，将A除λ_i外的特征值相乘，即得A^*的特征值λ_i^*.

若A可逆，则A、A^{-1}、A^*的特征向量完全相同.

若A不可逆，A的特征向量一定是A^*的特征向量，反之未必成立.

无论A是否可逆，A的特征向是一定是$f(A)$的特征向量，反之未必成立.

②若A满足$f(A)=0$，则A的任一特征值λ满足$f(\lambda)=0$.

若A的特征方程为$f(\lambda)=0$，则A满足$f(A)=0$.(哈密顿-凯莱定理，超纲)

③若$Ax=0$有非零解，则0是A的特征值，非零解是特征值0对应的特征向量

若$AB=kB$，则k是A的特征值，B的非零列向量是特征值k对应的特征向量

④若A的每行元素之和为k，则k是A的特征值，$(1,1,\cdots,1)^T$是A的特征值k对应的特征向量

若A的每列元素之和为k，则k是A的特征值，$(1,1,\cdots,1)^T$是A^T的特征值k对应的特征向量

⑤若α_1,α_2是相同特征值对应的特征向量，则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$仍是该特征值对应的特征向量(k_1,k_2不全为0)

若α_1,α_2是不同特征值对应的特征向量，则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$不是特征向量($k_1\neq0,k_2\neq0$)

二、相似和合同

若存在可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$，则称A与B相似，若B为对角矩阵，则称A可相似对角化

若存在可逆矩阵P，使$P^{T}AP=B$，则称A与B合同，若B为对角矩阵，则称A可合同对角化

若存在正交矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$（即$P^{T}AP=\Lambda$），则可同时将A相似对角化和合同对角化

结论：

①若$A\sim B$，则$A^{T}\sim B^{T}$，$A^{-1}\sim B^{-1}$，$A^{*}\sim B^{*}$，$f(A)\sim f(B)$

若A可对角化，则A^{T}，A^{-1}，A^{*}，$f(A)$，$P^{-1}AP$均可对角化.

②$1\le$矩阵的线性无关特征向量个数$\le n$.（几何重数$\le$代数重数）

$1\le\lambda_i$对应的线性无关特征向量个数$\le\lambda_i$的重数.（单重根对应的无关特征向量个数$=1$）

③A可对角化的充分必要条件：A有n个无关的特征向量$\Longleftrightarrow n-r(\lambda_iE-A)=\lambda_i$的重数.

④A可对角化的充分不必要条件：①A有n个不同的特征值. ②A为实对称矩阵.

⑤若A可对角化，则非零特征值个数$=r(A)$

⑥若$(A-k_1E)(A-k_2E)=0$，则A的特征值只能取k_1或k_2，且A必可对角化$(k_1\ne k_2)$

⑦若A的特征值全为k，则当且仅当$A=kE$时，A可对角化.

特殊地，若$A^{k}=0$，则A的特征值全为0，当且仅当$A=0$时，A可对角化.

数量矩阵仅与自身相似，任一非零向量均为数量矩阵的特征向量

⑧若$r(A)=1$，则A的特征值为$tr(A)$和0（$n-1$重），当且仅当$tr(A)\ne0$时，A可对角化.

⑨实对称矩阵
- 不同特征值对应的特征向量正交
- 同一特征值的无关特征向量个数=特征值的重数

必可正交对角化

非对称矩阵
- 不同特征值对应的特征向量无关
- 同一特征值的无关特征向量个数$\le$特征值的重数

最多普通对角化
不可正交对角化

⑩A与B相似的判定
- 若A，B均可对角化，则A与B相似的充分必要条件为$\lambda_A=\lambda_B$
- 若A可对角化，B不可对角化，则A与B不相似
- 若A，B均不可对角化，则A与B相似的必要条件：$\lambda_A=\lambda_B$，$r(\lambda_iE-A)=r(\lambda_iE-B)$

⑪A与B相似的必要条件：$\lambda_A=\lambda_B$，$tr(A)=tr(B)$，$|A|=|B|$，$r(A)=r(B)$

方程组理论与A^*结合

若$r(A)<n$，则
- $AA^*=A^*A=O$
- A^*的列向量为$Ax=0$的解.
- A的列向量为$A^*x=0$的解.
- $Ax=\beta$有无穷多解$\Rightarrow A^*\beta=0$.
- A的行(列)向量与A^*的列(行)向量正交.

若$r(A)=n-1$，则
- $r(A^*)=1$, $r(A)+r(A^*)=n$
- A^*的非零列向量为$Ax=0$的基础解系.
- A的$n-1$个无关列向量为$A^*x=0$的基础解系
- $Ax=\beta$有无穷多解$\Leftrightarrow A^*\beta=0$. $(\beta\neq 0)$

相似理论与A^*结合

若$r(A)=n-1$，即$r(A^*)=1$，则
1. A^*的每行(列)成比例$\Leftrightarrow$存在非零向量α,β，使$A^*=\alpha\beta^T$.
2. $\beta^T\alpha=tr(A^*)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\xlongequal{记作}k$
3. $(A^*)^n=k^{n-1}A^*$
4. A^*的特征值：$\lambda_1^*=\lambda_2^*=\cdots=\lambda_{n-1}^*=0$，$\lambda_n^*=tr(A^*)$

   将A除λ_i外的特征值相乘，即得A^*的特征值λ_i^*

   若A只有一个特征值为0，则A^*的特征值$tr(A^*)$不为0

   若A有一个以上的特征值为0，则A^*的特征值不为0.

   A的非零特征值对应的特征向量，是A^*特征值0的特征向量

   A的特征值0对应的特征向量，是A^*特征值$tr(A^*)$的特征向量

   且与A^*的列向量成比例
5. A^*可对角化$\Leftrightarrow tr(A^*)\neq 0\Leftrightarrow A^*$有非零特征值$\Leftrightarrow A$只有一个特征值为0

   $\nRightarrow A$可对角化.

二次型例题

例1. 设$\alpha=(1,0,0,1)^T$，$A=\alpha\alpha^T$，求$|A^2+A+E|$，$r(A^2-A-2E)$

例2. 设$\alpha=(1,0,0,1)^T$，则(　).

A. $\alpha\alpha^T+2E$不可逆　　B. $2\alpha\alpha^T+E$不可逆

C. $\alpha\alpha^T-2E$不可逆　　D. $2\alpha\alpha^T-E$不可逆.

例3. 设2阶矩阵A有两个不同特征值，α_1. α_2是A的线性无关的特征向量，且满足$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，求$|A|$.

例4. 设A为n阶矩阵，则下列命题正确的是(　).

A. 若α是A的特征向量且A不可逆，则α不一定是A^*的特征向量.

B. 若α是A^*的特征向量且A不可逆，则α不一定是A的特征向量.

C. 若α是A^2的特征向量且A不可逆，则α一定是A的特征向量.

D. 若α是A^2的特征向量且A可逆，则α一定是A^2的特征向量.

例5. 设3阶矩阵A满足$A^2-2A-3E=0$，且$tr(A)=1$，求$|A^2-A^*|$，$r(A^*-3A)$.

例6. 设A为3阶矩阵，$b=(2,-2,4)^T$.

(1)已知$Ax=b$的通解为$k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(-1,1,-2)^T$，求A的特征值和特征向量

(2)已知$Ax=b$的通解为$k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,1,1)^T$，求A的特征值和特征向量.

例7. 设A，B为可逆矩阵，且A与B相似，则下列结论错误的是(　)

A. $A+A^2$与$B+B^2$相似　　B. $A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似

C. $A+A^*$与$B+B^*$相似　　D. $A+A^T$与$B+B^T$相似.

例10. 设A为n阶矩阵，则下列结论正确的是(　).

A. 任意矩阵A均满足非零特征值个数$\geq r(A)$.　　B. 若A可对角化，则非零特征值个数$=r(A)$.

C. 若A不可对角化，则非零特征值个数$<r(A)$.　　D. 若A不可逆且非零特征值个数$=r(A)$，则A可对角化

例18. 设3阶矩阵A的特征值为$-1,0,1$，对应的特征向量为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，则下列命题错误的是（ ）.

A. 若$P=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$ B. 若$P=(\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1)$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$

C. 若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3)$，则$P^{-1}A^2P=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$ D. 若$P=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3)$，则$P^{-1}A^2P=\begin{pmatrix}1&1&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$

例19. 下列矩阵不可相似对角化的是（ ）.

A. $\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

例11、设A为3阶非零矩阵，α为3维非零列向量，则下列命题错误的是（ ）.

A. 若$A^2=E$，且$r(A+E)=1$，则A相似于$\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$. B. 若$A$的特征值为$-1,-1,1$，且$r(A+E)=1$，则$A^2=E$

C. 若$A^2=O$，则A不可相似对角化 D. 若$A=\alpha\alpha^T$，则A不可相似对角化

例12. 设3阶实矩阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，$(\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3)$，对应的特征向量为$p_1,p_2,p_3$，$\alpha$为3维非零列向量，则下列命题错误的是（ ）.

A. 若p_1,p_3正交，则A为对称矩阵. B. 若p_1,p_2,p_3两两正交，则A为对称矩阵.

C. 若p_1,p_2无关，p_1,p_3正交，则A为对称矩阵. D. 若α,p_1,p_2两两正交，则α为λ_3对应的特征向量

例13. 设3阶实对称矩阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，对应的两两正交的单位特征向量为$p_1,p_2,p_3$.

(1) 证明：$A=\lambda_1p_1p_1^T+\lambda_2p_2p_2^T+\lambda_3p_3p_3^T$.

(2) 求正交矩阵Q，使$Q^{-1}(A+p_1p_1^T)Q$为对角矩阵.

例14. 设λ_1,λ_2为n阶矩阵A的两个不同的特征值,α_1,α_2为A对应于特征值λ_1,λ_2的特征向量,β_1,β_2为A^T对应于特征值λ_1,λ_2的特征向量,则下列结论正确的是( )

A. α_1,β_1线性相关　　B. α_1,β_1线性无关

C. α_1,α_2正交　　D. α_1,β_2正交.

例15. 设3阶实对称矩阵的每列元素之和为2,且$r(A)=1$,求$AX=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$的通解.

例16. 设3阶矩阵A的特征值为$-1,0,1$. A的三个线性无关的特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$满足$A(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=\alpha_1-\alpha_2$.求$(E-A)X=\alpha_2-\alpha_3$的通解.

例17. 设$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,则( )

A. A与B相似,B与C相似　　B. A与B相似,C与D相似

C. A与B不相似,C与D相似　　D. A与B不相似,B与D不相似.

例18. 设A,B为3阶不可逆矩阵,且$|A+E|=0$, $|E-B|=0$, A与B相似.求$|AB+2A-2B-4E|$

例19. 设A为3阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的3维列向量,且$A\alpha_1=2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$, $A\alpha_2=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$, $A\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.求$|A|$, A^{100}

例20. 设A为3阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3维列向量,$\alpha_1\neq 0$.且$A\alpha_1=\alpha_1$, $A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$, $A\alpha_3=\alpha_3-\alpha_1$.
证明:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,且$A$不可相似对角化.

例21. 设3阶矩阵A有三个不同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,对应的特征向量为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,
$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $A^3\beta=A\beta$.

(1) 证明:$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

(2) 求$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

(3) 求$AX=0$和$(A^2-E)X=0$的基础解系.

二次型例题答案

例1. 7, 3. 例2. C 例3. −1 例4. B 例5. 128, 1

例6. (1) $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的特征向量为 $k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T$. ($k_1,k_2$ 不全为0)

$\lambda_3=-2$ 对应的特征向量为 $k_3(-1,1,-2)^T$ ($k_3\neq0$)

(2) $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的特征向量为 $k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T$. ($k_1,k_2$ 不全为0)

$\lambda_3=2$ 对应的特征向量为 $k_3(1,-1,2)^T$ ($k_3\neq0$)

例7. D. 例8. B 例9. C 例10. B 例11. D. 例12. A

例13. (2) $Q=(p_1,p_2,p_3)$. $Q^{-1}(A+p_1p_1^T)Q=\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

例14. D. 例15. $k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T+(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$. ($k_1,k_2\in R$). 例16. $k\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2-\alpha_3$ ($k\in R$)

例17. B. 例18. −36. 例19. −1, E

例21. (2) −1, 0, 1. (3). A^2B-B. AB, A^2B