Adjacency metric dimension

Sara Hardi, Mia Čakarova

13. december 2024

1 Uvod

Najina naloga je bila na primerih analizirati *adjacency metric dimension*, $dim_A(G)$, različnih grafov. Analizo sva delali v programu CoCalc. Osredotočili sva se na grafe s 3 do 10 vozlišči.

$dim_A(G)$ iščemo s pomočjo CLP, zato sva ga tudi zapisali kot kodo:

Algorithm 1 Izračun dimenzije sosednosti $\dim_A(G)$ s CLP

procedure DIM_A(G)
  $V \leftarrow$ *seznam vozlisc grafa G*
  $p \leftarrow$ *MixedIntegerLinearProgram(maximization=False)* `#uporabimo CLP z minimizacijo`
  $x = \{0,1\}$ `#definiramo binarno spremenljivko`
  M = *matrika_sosednosti*
  $\sum_{v \in V} x[v]$
  for each v, w **in** V **do**
    if $v \neq w$ **then**
      Dodaj pogoj $\left(\sum_{u \in V} |M[u][v] - M[u][w]| \cdot x[u] + x[v] + x[w] \geq 1\right)$
    end if
  end for
  Reši CLP
  $S \leftarrow \{v \in V \mid p.\texttt{get\_values}(x[v]) = 1\}$ `#Določimo množico` S
  Izpiši moč množice S in S
end procedure

2 Grafi z $dim_A(G) = 1, 2$ oz. 3

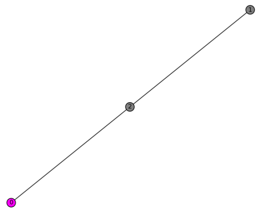
Najprej sva se osredotočili na grafe, ki so imeli dimenzijo sosednosti enako 1, 2 oz.3. Da bi nama analiza bila lažja, sva kodo dopolnili:

Algorithm 2 Analizira grafov z dimenzijo $1, 2$ oz. 3

procedure FUNKCIJA(*min_vozlisca*, *max_vozlisca*)
  for n **from** *min_vozlisca* **to** *max_vozlisca* **do**
    Izpiši "Povezani grafi na n vozliščih z dimenzijo $1, 1$ oz. 3:"
    for each graf G **do**
      $dim_A(G)$
      if *dimenzija* $= 1, 2$ oz. 3 **then**
        Prikaži graf G
        Izpiši $dim_A(G)$ in množico S
      end if
    end for
  end for
end procedure

2.1 $dim_A(G) = 1$

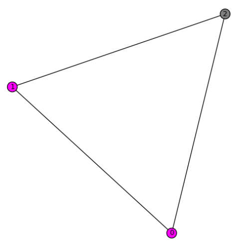
Hitro sva ugotovili, da obstaja le en graf, ki ustreza pogoju $dim_A(G) = 1$. Če je $dim_A(G) = 1$, potem obstaja eno samo vozlišče v, ki loči vse pare vozlišč. To je mogoče le, če za vsak par vozlišč velja, da je ena izmed njiju sosednja izbranemu vozlišču v, druga pa ne. Le tako lahko velja pogoj, da njuna razdalje do vozlišča, ki reši graf, ni enaka. Torej je to res mogoče le v primeru, ko imamo tri vozlišča.



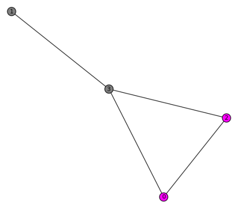
Graf z $dim_A(G) = 1$

2.2 $dim_A(G) = 2$

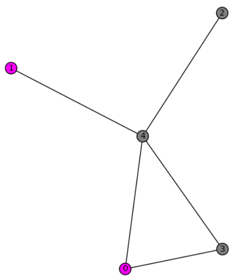
Preko eksperimentov sva ugotovili, da najmanjši grafi z $dim_A(G) = 2$ imajo 3 vozlišča, največji pa 6 vozlišč.



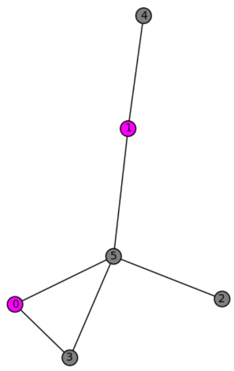
Graf s 3 vozlišči



Graf s 4 vozlišči



Graf s 5 vozlišči

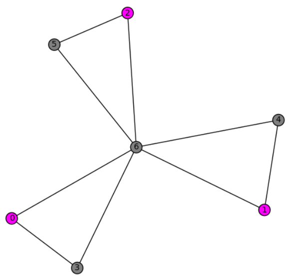


Graf s 6 vozlišči

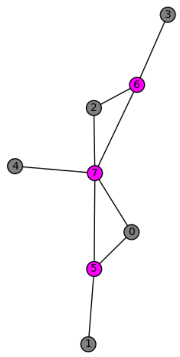
Figure 1: Primeri grafov z $dim_A(G) = 2$

2.3 $dim_A(G) = 3$

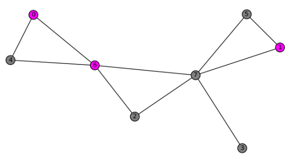
Za grafe z dimenzijo sosednosti 3 nisva ugotovili nobene začilnosti, ki bi držala za vse grafe. Sva pa opazili eno skupino grafov, ki ima dim_A enako 3, to so t.i. kaktusni grafi, ki so sestavljeni iz listov in ciklov z največ enim skupnim vozliščem.



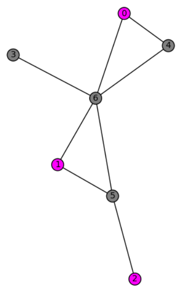
Kaktusni graf s 7 vozlišči



Kaktusni graf z 8 vozlišči



Kaktusni graf z 8 vozlišči



Kaktusni graf s 7 vozlišči

Figure 2: Primeri kaktusnih grafov z $dim_A(G) = 3$

3 Grafi z $dim_A(G) = n, n-1$ oz. $n-2$

Naslednja stvar, ki sva jo morali analizirati so bili grafi z n vozlišči, ki imajo $dim_A(G)$ enako $n, n-1$ ali $n-2$. Analize sva se tudi tu lotili tako, da sva definirali tri funkcije, vsako za različno dimenzijo, ki bi nama izpisale samo tiste grafe, ki ustrezajo našim zahtevam.

Psevdokoda za prikaz ustreznih grafov:

Algorithm 3 Analizira grafov z dimenzijo $n, n-1$ oz. $n-2$

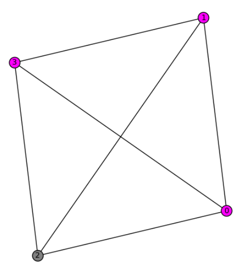
procedure FUNKCIJA(*min_vozlisca*, *max_vozlisca*)
  for n **from** *min_vozlisca* **to** *max_vozlisca* **do**
    Izpiši "Povezani grafi na n vozliščih z dimenzijo $n, n-1$ oz. $n-2$:"
    for each graf G **do**
      $dim_A(G)$
      if $dimenzija = n, n-1$ oz. $n-2$ **then**
        Prikaži graf G
        Izpiši $dim_A(G)$ in množico S
      end if
    end for
  end for
end procedure

3.1 $dim_A(G) = n$

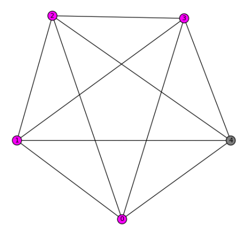
Koda nama ni izpisala nobenega grafa, torej noben graf nima $dim_A(G)$ enake številu vozlišč. Taki grafi ne obstajajo, saj vedno obstaja neko vozlišče, ki ni potrebno, da bi bil graf razrešen, mi pa smo predpostavili, da iščemo najmanjšo tako množico vozlišč.

3.2 $dim_A(G) = n - 1$

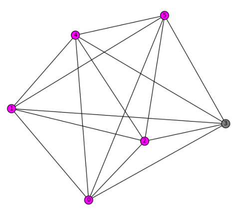
Na podlagi rezultatov eksperimenta sva ugotovili, da so grafi, ki zadoščajo $dim_A(G) = n-1$ polni grafi. To je pričakovano, saj je vsako vozlišče sosedno vsem ostalim. To pomeni, da na obstaja noben par vozlišč, ki ne bi imel skupnega sosednega vozlišča. Torej bo edina možnost ta, da za S vzamemo vsa vozlišča razen enega. Hkrati pa če graf ni pol, obstaja vsaj en par vozlišč brez skupnega soseda.



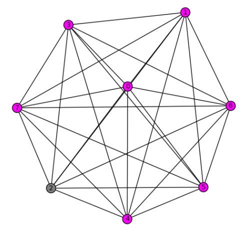
Graf s 4 vozlišči



Graf s 5 vozlišči



Graf s 6 vozlišči



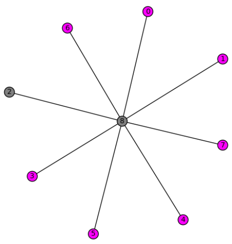
Graf z 8 vozlišči

Figure 3: Primeri grafov z $dim_A(G) = n - 1$

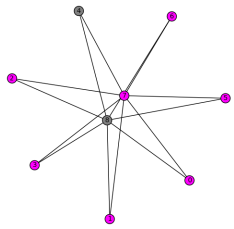
3.3 $dim_A(G) = n - 2$

Za grafe z $dim_A(G) = n - 2$ sva ugotovili, da imajo sledečo lastnosti:

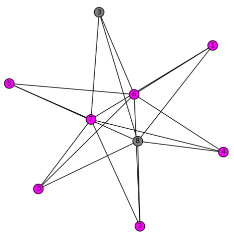
- k vozlišč ima za sosede natanko ostalih $n - k$ vozlišč: To je smiselno, saj če S zmannjšamo že za eno ali dve vozlišči, dobimo par/-e vozlišč, ki so nerazrešljivi, saj njihove sosednje množice v S postanejo enake zaradi simetrije povezav oz. dolžin poti.



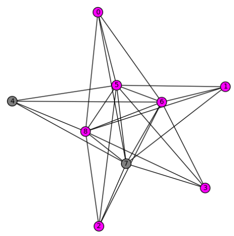
$n - k = 1$



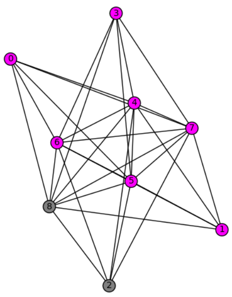
$n - k = 2$



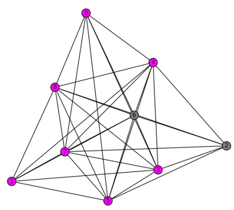
$n - k = 3$



$n - k = 4$



$n - k = 5$



$n - k = 6$

Figure 4: Primeri grafov z $dim_A(G) = n - 2$

- graf vsebuje poln podgraf z $n-1$ vozlišči in eno vozlišče s $k \in \{1, 2, ..., n-2\}$ povezavami: Tudi te latnosti ni težko razložiti, namreč imamo poln podgraf z $n-1$ vozlišči, za katerega vemo, da mora imeti $dim_A(poln\ podgraf) = n-2$. Ta množica S ustreza tudi ostalemu vozlišču, saj obstaja vsaj eno vozlišče iz polnega podgrafa, ki je njemu ni sosedno, je pa v S.

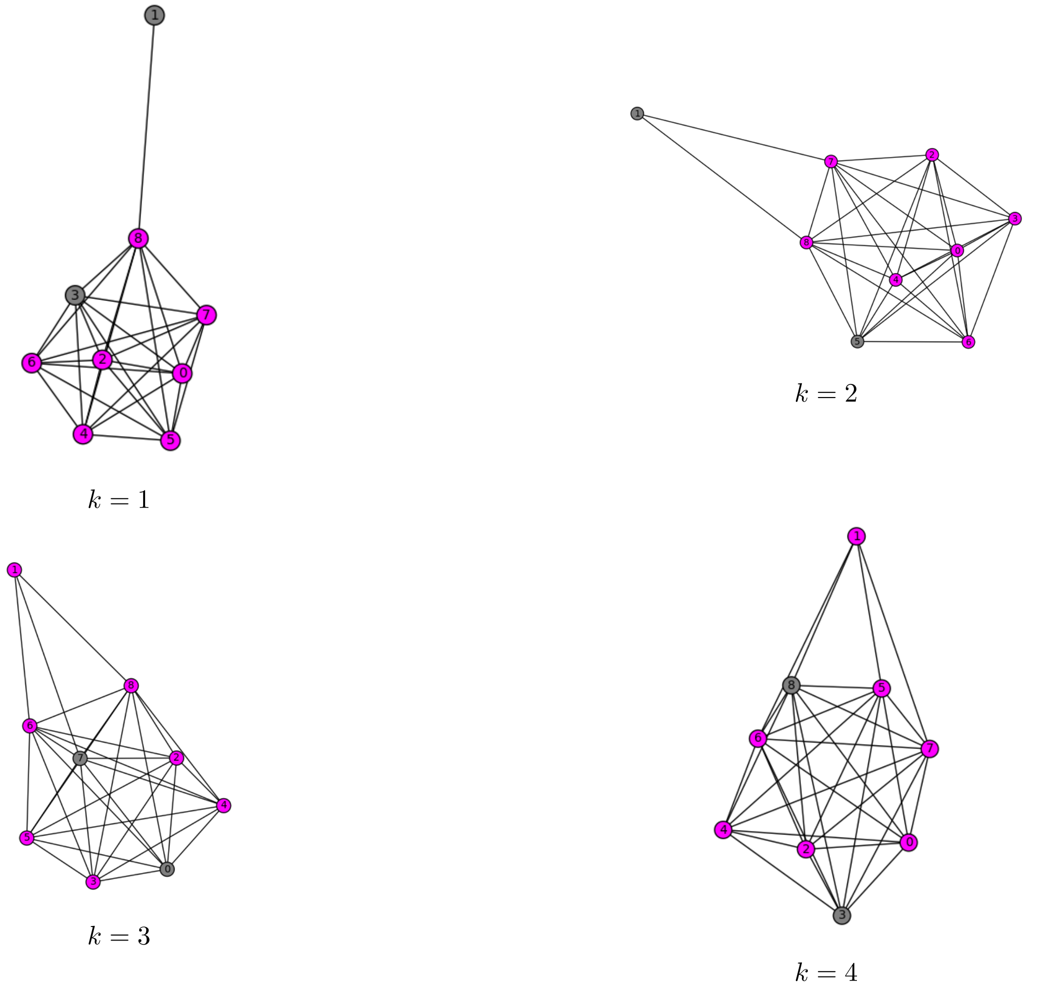


Figure 5: Primeri grafov z $dim_A(G) = n - 2$

4 Adjacency metric dimension dreves

Za konec sva si posebej ogledali drevesa. Najna predpostavka je, da bo $\frac{n}{3} \leq dim_A(T) \leq n-2$. Uporabljali sva podobno kodo, prilagodili sva le to, da bo obravnavala samo drevesa in ne vseh grafov:

Algorithm 4 Analiza dreves

```
procedure FUNKCIJA(min_vozlisca, max_vozlisca)
    dimenzije ← {}
    for n from min_vozlisca to max_vozlisca do
        min_dim ← −∞
        max_dim ← ∞
        for each drevo T do
            dim_A(T)
            min_dim ← min(min_dim, dim)  #posodobimo minimalno in maksimalno dimenzijo
            max_dim ← max(max_dim, dim)
            if dim = n/3 or ceil(n/3) or n − 2 then
                Prikaži drevo T
            end if
        end for
        Izpiši: “Za n vozlišč je minimalna dimenzija: min_dim”
        Izpiši: “Za n vozlišč je maksimalna dimenzija: max_dim”
    end for
    return dimenzije
end procedure
```

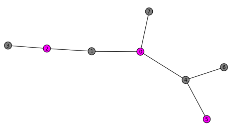
Eksperiment je podprl najno predpostavko. Pogledali sva si drevesa z 3 vozlišči, pa vse do dreves z 20 vozlišči.

št. vozlišč	najmanjša dimenzija	največja dimenzija
3	1	1
4	2	2
5	2	3
6	2	4
7	3	5
8	3	6
9	3	7
10	4	8
11	4	9
12	4	10
13	5	11
14	5	12
15	5	13
16	6	14
17	6	15
18	6	16
19	7	17
20	7	18

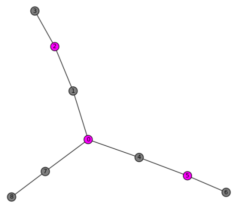
Table 1: Tabela dim_A dreves

4.1 Katera drevesa imajo $dim_A(T) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$?

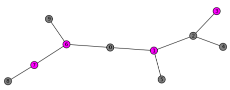
Opazili nisva nobene jasne skupne značilnosti, razen to, da nobeno drevo ni vsebovalo poddrevesa z več kot 3 vozlišči. Spodaj je par primerov.



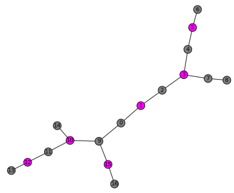
Drevo z 8 vozlišči



Drevo z 9 vozlišči



Drevo z 10 vozlišči

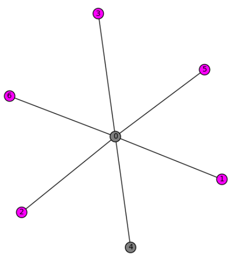


Drevo s 17 vozlišči

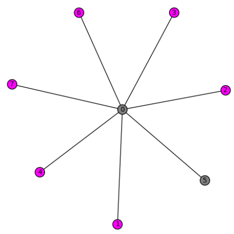
Figure 6: Primeri dreves z $dim_A(G) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

4.2 Katera drevesa imajo $dim_A(T) = n - 2$?

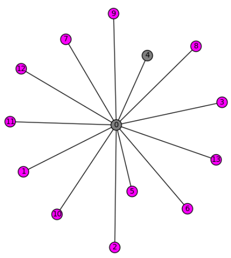
Kot pričakovano, se izkaže, da imajo tako dimenzijo ravno zvezdna drevesa, kar smo videli že v razdelku z grafi, ki so imeli dimenzijo $n - 2$.



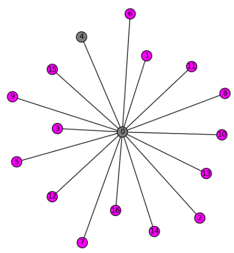
Drevo s 7 vozlišči



Drevo z 8 vozlišči



Drevo s 14 vozlišči



Drevo s 17 vozlišči

Figure 7: Primeri dreves z $dim_A(G) = n - 2$

5 Zaključek

Eksperimenti so nama je pokazali, da v večini primerov obstaja smiselna razlaga za dimenzijo sosednosti določenih povezanih grafov. Ugotovili sva, da najmanjša dimenzija, ki jo ima lahko graf, je 1, največja pa $n-2$; pri drevesih pa sta meji $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ in $n-2$.