

k-RDM の高速化手法について

計数工学科 3 年 03-220602 浜口広樹

2023 年 2 月 4 日

1 問題設定

Q 個の行列 C_1, C_2, \dots, C_Q がある。この時、その内 k 個を選んだ際の順列に関する ${}_Q P_k$ 個の積を全て求めたい。この時の計算量はいくらほどか。ただし、各行列は積に関して非可換であるとする。

2 前提

まず、私が自明だと思っていた点の一つに、行列積の演算自体が、 $\mathcal{O}(n^3)$ でなく、 $\mathcal{O}(cn^2)$ で実行できる点があります。ただし、 c は疎行列の疎性に関する定数で、今回はほぼ 1 だと思います。行列の疎性に基づく計算量削減です。

元のコードでは、わざわざ密行列に変換していたので、前者の計算量になっていました。これを削減することは、コードを少し書き換えるだけなので容易です。なので、元々の計算量 $\mathcal{O}(n^3(k-1){}_Q P_k)$ から、 $\mathcal{O}(n^2(k-1){}_Q P_k)$ へは自明に落ちます。

上記に誤りがあり、元々の実装から $\mathcal{O}(n^2(k-1){}_Q P_k)$ でした。

ここで、 $(k-1)$ は、各順列に対して、前から順番に行列を演算していく場合、長さ-1 回の演算が必要ということを意味します。

そして、この $(k-1)$ が (ある仮定の下で) 落ちる (と言っても良いだろう) ということで、 $\mathcal{O}(n^2{}_Q P_k)$ になる、というのがこのメモの主張です。

3 考察

行列積を考えます。

最終的に今回は全く関係がない話なのですが、連鎖行列積という問題があります。これは区間 dp を用いて計算量を削減するものです。詳しくは、以下の url を参照して下さい。

[pdf\(特に、p.78 あたりから\)](#)

この話を私は知っていたので、同様の高速化が望めるのではないかと期待して、演算方法を考え

ていました。

しかし、この話は各行列のサイズが異なるという前提があり、今回のようにサイズが同じ行列同士の積の計算には使えません。

ただ、根本的なアイデアは似ていて、計算順序を工夫すると、計算量が落ちることがあります。

4 問題の言い換え

今回の問題では、以下のように問題を言い換えると、問題の本質を表します。

Q 個の行列 C_1, C_2, \dots, C_Q がある。この時、その内 k 個を選んだ際の順列に関する ${}_Q P_k$ 個の積を全て求めたい。それを計算する為に、グルーピングを考える。この時、上記の積を求めるのに必要なグルーピングの最小回数は如何ほどか。

ただし、グルーピングとは、 (C_1, C_2) とグルーピングすることで、 $C_1 @ C_2$ に対応しているイメージである。また、非可換性より、 (C_2, C_1) と (C_1, C_2) は別物で、 (C_1, C_2) と C_3 から、 (C_1, C_2, C_3) を新たなグループとすることも、同じく 1 回と数える事とする。

5 具体例

具体例を図 1 に示しました。

この最適解を求めることは、恐らくかなり難しいはずです。(恐らく……。私の頭が回っていない可能性がやや否定しきれません)

これは既に解かれていても全くおかしくない問題なので、色々調べたのですが、そもそも $Q=k=4$ の最適解すら、それを求めるコードが私には書けません。計算量が爆発するような案しか浮かびません。

また、OEIS という数列検索サービスがあるのですが、そこで「2,10 permutation」と調べたのですが、それでもめぼしい成果は見つかりませんでした……。

さらに、論文検索をしようとしたのですが、permutation matrix などと検索すると置換行列が出てきてしまい諦めました。

(これに関しては完全に私の実力不足です。申し訳ないです。)

ただ、かなり非自明な問題が裏に隠れているんだなぁと感心してはいました。

6 妥協案の模索

この問題を厳密に解くことは早々に諦め、妥協案を探す事にしました。(最適解があったとしても、実装が大変すぎるだろうと思ったのもあります)

まず、自明な下界として、 ${}_Q P_k$ 回は絶対に必要です。何故なら、 ${}_Q P_k$ 個の積はそれぞれ異なるもので、最終的な積はグルーピングの結果として全て出てくる必要があるからです。

なので、この自明な下界をオーダー的な観点から満たすようなアルゴリズムがあれば、実用上は

18:12 2月2日(木) wedge

レポート2 貪欲法 wedge ネットワーク最適化 計算量理論 22

$Q=k=2$

1	2
2	1

$Q=k=3$

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

同値な可
算可

$Q=k=4$

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2
2	1	3	4
2	1	4	3

これはどうグループ化するのが最適か? 全く分かりません。

34 とすれば今度は (23) p (42) の恩恵を得られず。

また、3要素以上のグループ化も計算が難しい。

2D

2Dは算術でも可:

$$\frac{(3-1)3!}{2!} - 2 = 10D$$

(多分、これ以上は無理)

図 1 grouping

問題ないはずです。

それを適切な仮定で達成するのが以下の案です。

7 妥協案

図 2 を見るのが早いと思います。

やっていること自体は極めて自明に近く、同じ箇所をまとめて木にするという話だけです。(ちなみに、似たような話として Trie 木という木があり、これは文字列検索などで使うのですが、割と似たような考え方だと思います。)(木というのは、閉路を持たない連結グラフという意味で、 n 頂点 $n - 1$ 辺の形に必ずなります)

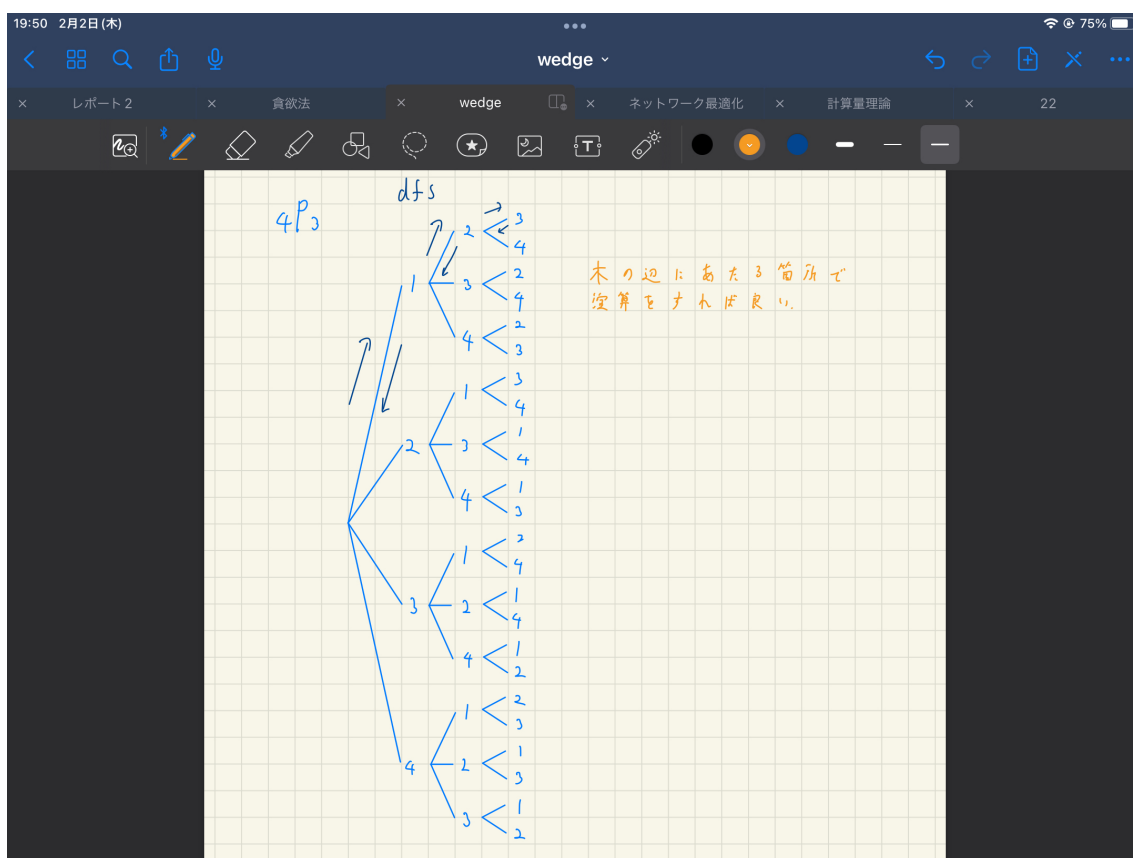


図 2 dfs

この演算回数 (グルーピングの回数) を見積もると、演算は木の辺に対応するので、

$$\left(\sum_{i=0}^k Q P_i \right) - 1$$

回になります。

これは $k \ll Q$ の仮定の下で、 $O(QP_k)$ になるので (少なくとも QP_k の 2 倍に収まるはず)、グループニング回数の $(k-1)$ は落ちることが分かります。(ちゃんと解析すると、これは計算量として e などが出てくるはずですが。深くは考えていません。仮定ももう少し厳密になるはずですが。というか今考えると仮定はそんなに必要無い気がしてきました)

そして、先の議論から、これはかなり最適に近いはずです。

よって、ほどほどの妥協案は見つかりました。

8 実装

以上のことをコードを落とし込む為に、いくつか注意すべきことがあります。

まず、そもそも効率良く順列を生成するということが、実は中々に難しい問題ではあります。何故なら、例えば、145 と順列を定めた時、次に来れるのは 236 など、1,4,5 は来てはいけません。(順列なので、重複が許されない)

参照:[itertools の実装 \(実はかなり煩雑です\)](#)

今回は若干の悪化を許しながらではありますが、seen という flag を立てて、dfs(深さ優先探索)をすることでそれを実現しています。(厳密には階乗から累乗へと計算量が悪化していますが、定数倍の差の方が速いはずですが。これを嫌う場合は set を使えば $O(1)$ で出来るので階乗のままになります)

また、Python は再帰が遅いです。定数倍の差でしかありませんが、非再帰 dfs という競プロの技を使うと少し速くなります。(参照:[記事](#))

以上を基に実装したのが以下です。

ソースコード 1 code

```
1 def _make_jordan_wigners_mul_vec(Q, k, vec):
2     assert k >= 1
3
4     jw_operators = _make_jw_operators(Q)
5
6     if k == 1:
7         return [jw_operator @ vec for jw_operator in jw_operators]
8
9     # # slow
10    # n_hilbert = 2**Q
11    # for ps in permutations(range(Q), k):
12    #     sparse_matrix = scipy.sparse.identity(n_hilbert,
13    #                                           dtype=complex,
14    #                                           format='csc')
15    #     for ladder_operator in ps:
16    #         sparse_matrix = sparse_matrix * jw_operators[
17    #             ladder_operator]
18    #     jordan_wigners_mul_vec[_getIdx(Q, *ps)] = sparse_matrix
```

```

18         @ vec
19     jordan_wigners_mul_vec = [None for _ in range(Q**k)]
20     path = []
21     seen = [False for _ in range(Q)]
22     que = []
23     for i in range(Q):
24         que.append((~i, None))
25         que.append((i, jw_operators[i]))
26
27     while que:
28         i, mat = que.pop()
29         if i >= 0:
30             seen[i] = True
31             path.append(i)
32             for ni in range(Q):
33                 if seen[ni]:
34                     continue
35                 if len(path) < k-1:
36                     que.append((~ni, None))
37                     que.append((ni, mat @ jw_operators[ni]))
38                 elif len(path) == k-1:
39                     jordan_wigners_mul_vec[_getIdx(Q, *path, ni)]
40                     =\
41                     mat @ jw_operators[ni] @ vec
42             else:
43                 seen[~i] = False
44                 path.pop()
45     return

```

9 さらに高速化

以下が追記事項です。

実は、上記のことを考えずとも、今回の C_i に対しては、任意個の重複がない行列積が直接求まります。

まず、行列 C_i の定義を述べます。以下、 N は 0 を含むものとします。

関数 $f(i, ps) : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \pm 1$ を以下の様に定義します。

$$f(i, ps) = \sum_{p \in ps} \text{popcount}(i \gg p)$$

ただし、関数 $\text{popcount}(i) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ は、 i を二進数表記した際の 1 の個数 (立っているビット数) とし、 $i \gg p$ で i を p 桁右シフトした値 ($\lfloor \frac{i}{2^p} \rfloor$) を表すものとします。

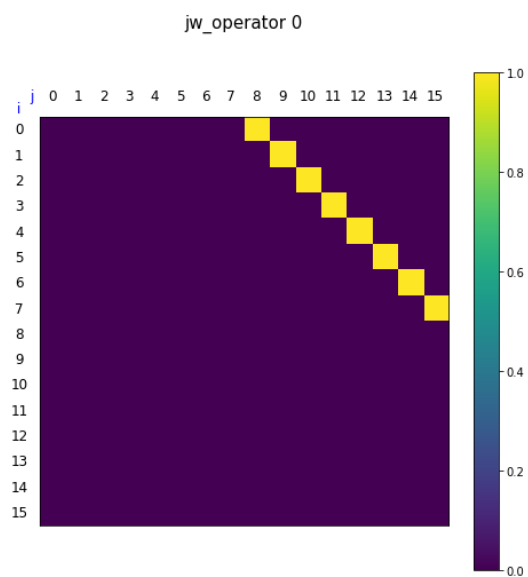


図 3 0 番目

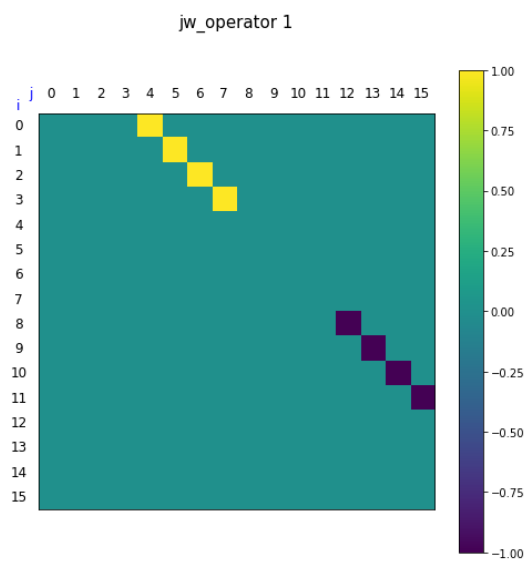


図 4 1 番目

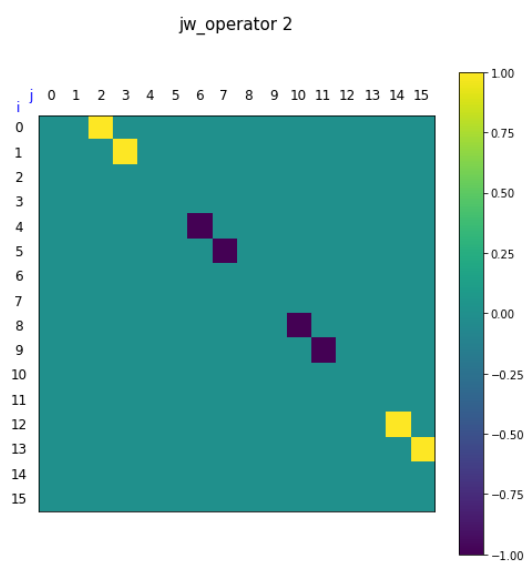


図 5 2 番目

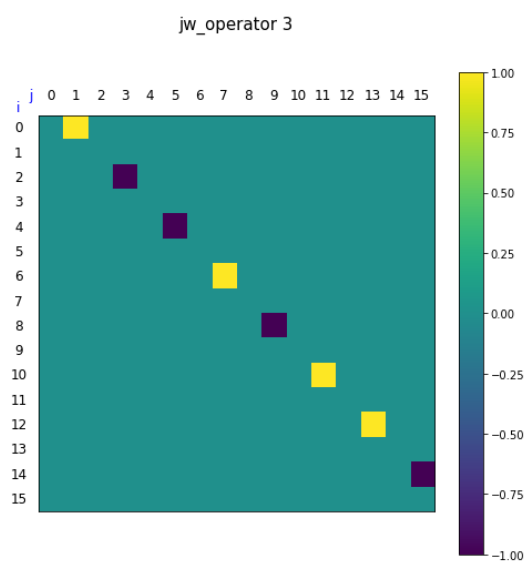


図 6 3 番目