

BOLA





Kelompok 11 Geometri Analitik

Desvarina Zahra Arlineta 1301621069

Fatya Nailah Sondakh 1301621049

Lestari Kumala Dewi 1301621005

Syahdam Rosyan Albani 1301621059




Dr. Pinta Deniyanti Sampoerno, M.Si
Mimi Nur Hajizah, M.Pd





Pembahasan

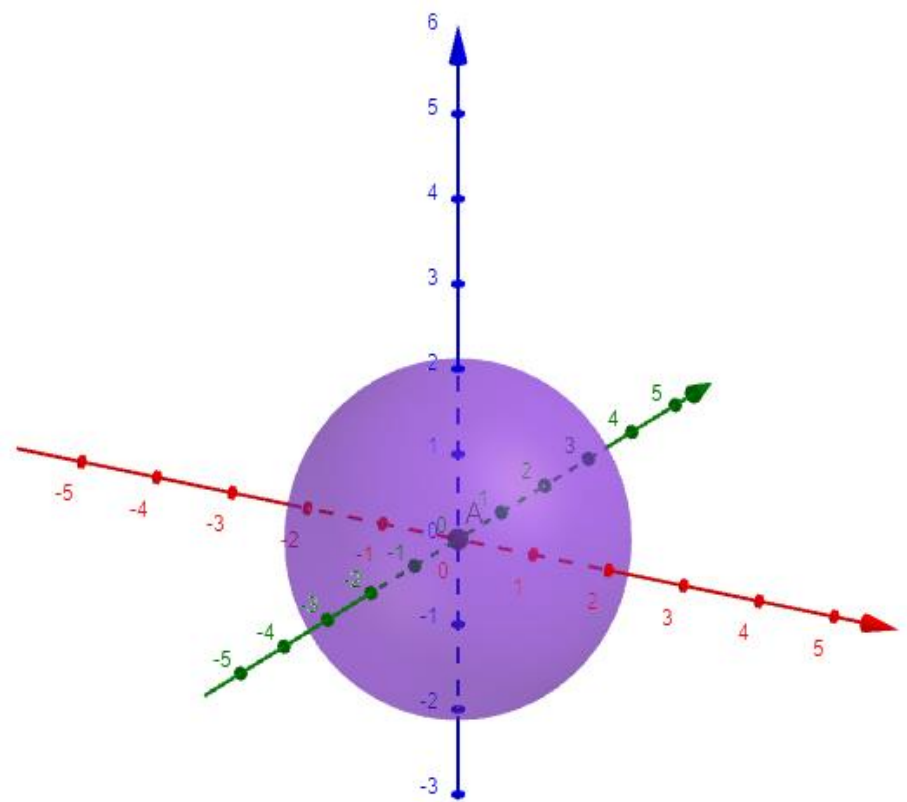
- 
- 
- 1 Pengertian
 - 2 Persamaan Bola
 - 3 Persamaan bidang singgung bola
 - 4 Persamaan bidang polar bola



Pengertian

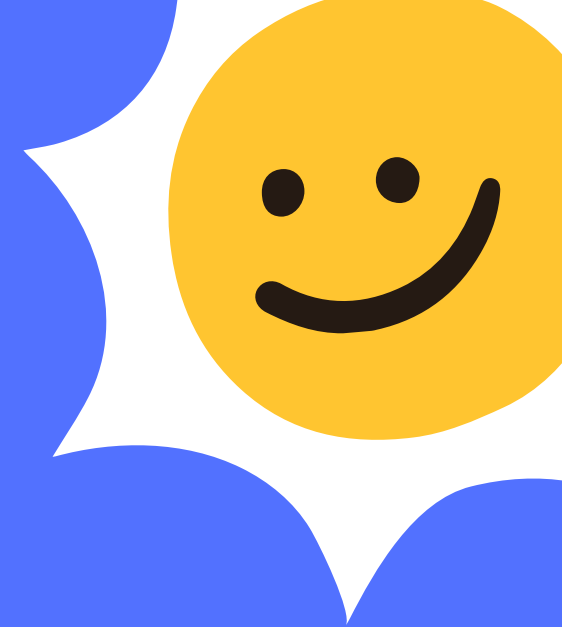
Bola (permukaan) adalah himpunan titik-titik yang mempunyai jarak yang sama terhadap sebuah titik tertentu.

Titik tertentu disebut pusat bola, jarak titik pada permukaan bola ke pusat bola disebut jari-jari bola.



Persamaan bola merupakan suatu bola (tepatnya kulit bola) yang didefinisikan sebagai kumpulan titik-titik dalam ruang tiga dimensi yang berjarak sama terhadap suatu titik pusat tetap (pusat bola), dapat dinyatakan dengan suatu persamaan.

Persamaan Bola



Persamaan Pusat Bola

- Bola Berpusat $M(a, b, c)$

Jika diketahui sebarang titik $P(x, y, z)$ pada permukaan sebuah bola, maka jarak P ke M adalah r . Sehingga:

$$\overline{PM} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = r$$

Atau dengan bentuk lain:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

- Bola Berpusat $O(0, 0, 0)$

Jika $P(x, y, z)$ sebarang titik pada permukaan bola, maka jarak P ke $O(0, 0, 0)$ adalah r . Sehingga:

$$\overline{PO} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} = r$$

Atau dengan bentuk lain:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Contoh Soal

1. Tentukan persamaan bola yang berpusat dititik $(1, 2, 3)$ dan melalui titik $(2, 4, 1)$.

Penyelesaian:

Persamaan bola

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

$$(2 - 1)^2 + (4 - 2)^2 + (1 - 3)^2 = r^2$$

$$1 + 4 + 4 = r^2$$

$$r^2 = 9$$

$$r = \sqrt{9}$$

$$r = 3$$

Substitusikan $r = 3$ dan titik pusat $(1, 2, 3)$ ke bentuk persamaan umum bola:

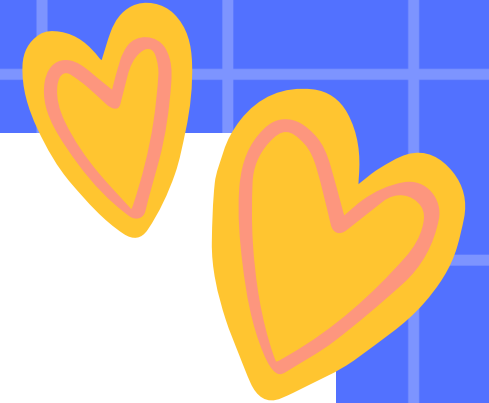
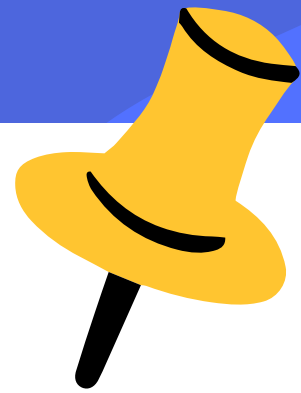
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 3^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$$

Jadi, persamaan bola yang berpusat di titik $(1, 2, 3)$ dan melalui titik $(2, 4, 1)$ adalah

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9 .$$



Persamaan Umum Bola

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Atau dapat dijabarkan yaitu:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2 - r^2) = 0$$

Dimana:

$$-2a = A \rightarrow a = -\frac{1}{2}A$$

$$-2b = B \rightarrow b = -\frac{1}{2}B$$

$$-2c = C \rightarrow c = -\frac{1}{2}C$$

Maka dapat ditulis bahwa persamaan bola adalah

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Dengan demikian pusat bola pada persamaan umum bola adalah

$$M(a, b, c) = M\left[-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B, -\frac{1}{2}C\right]$$

Sehingga jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2 - D}$

***notes:**

Tiga kemungkinan yang didapat dari persamaan dan jari-jari diatas adalah

- i. Jika $r > 0$ maka bola berbentuk bola nyata/sejati**
- ii. Jika $r = 0$ maka bola berbentuk bola titik**
- iii. Jika $r < 0$ maka bola berbentuk khayal/imajiner dikarenakan r nya imajiner**

Contoh Soal

2. Tentukan titik pusat dan jari-jari bola yang persamaannya adalah

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 10y - 6z + 1 = 0$$

Penyelesaian:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 10y - 6z + 1 = 0$$

$$A = 8 \qquad a = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(8) = -4$$

$$B = -10 \qquad b = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}(-10) = 5$$

$$C = -6 \qquad c = -\frac{1}{2}C = -\frac{1}{2}(-6) = 3$$

$$D = 1$$

Karena $a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = D$, maka

$$r^2 = (-4)^2 + (5)^2 + (3)^2 - 1$$

$$r^2 = 16 + 25 + 9 - 1$$

$$r^2 = 49$$

$$r = \sqrt{49}$$

$$r = 7$$

Jadi, Titik pusat bola adalah $(-4, 5, 3)$ dan jari-jarinya adalah 7.




Persamaan Bola Melalui 4 Buah Titik

Suatu lingkaran dapat ditentukan dari tiga buah titik yang tidak segaris.

Suatu bola dapat ditentukan dari empat buah titik yang tidak sebidang.

Misalkan $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ dan $S(x_4, y_4, z_4)$ adalah empat buah titik dalam ruang dimensi 3. Langkah-langkah dalam menentukan persamaan bola, yaitu sebagai berikut:

Periksalah terlebih dahulu apakah keempat titik yang diberikan sebidang atau tidak. Jika sebidang maka persamaan bola tidak dapat ditentukan. Jika tidak sebidang maka lanjut ke langkah berikutnya.



Persamaan Bola Melalui 4 Buah Titik

Dimisalkan persamaan bola yaitu, $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$. Titik P, Q, R, dan S berada pada bola artinya koordinat titik-titik tersebut memenuhi persamaan bola.

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0$$

Selesaikan Sistem Persamaan Linear diatas untuk A, B, C, dan D. Maka persamaan bola akan diperoleh.

Contoh Soal

3. Tentukan persamaan bola dengan yang melalui 4 titik $P(1, 1, 1)$; $Q(1, 2, 1)$; $R(1, 1, 2)$ dan $S(2, 1, 1)$.

Penyelesaian:

Misalkan persamaan bola $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Titik $P(1, 1, 1)$

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + A(1) + B(1) + C(1) + D = 0 \leftrightarrow A + B + C + D = -3 \text{ (i)}$$

Titik $Q(1, 2, 1)$

$$1^2 + 2^2 + 1^2 + A(1) + B(2) + C(1) + D = 0 \leftrightarrow A + 2B + C + D = -6 \text{ (ii)}$$

Titik $R(1, 1, 2)$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + A(1) + B(1) + C(2) + D = 0 \leftrightarrow A + B + 2C + D = -6 \text{ (iii)}$$

Titik $S(2, 1, 1)$

$$2^2 + 1^2 + 1^2 + A(2) + B(1) + C(1) + D = 0 \leftrightarrow 2A + B + C + D = -6 \text{ (iv)}$$

Dari persamaan (i), (ii), (iii), (iv)

maka diperoleh $A = B = C$

Substitusi $A = B = C$ ke (ii) dan (i),

diperoleh $A = B = C = -3$ dan $D = 6$

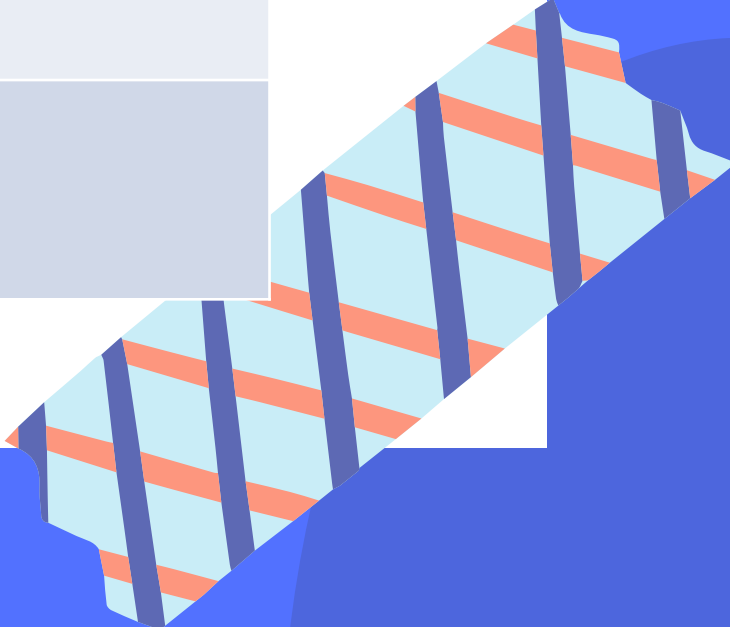

Jadi persamaan bola adalah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$$

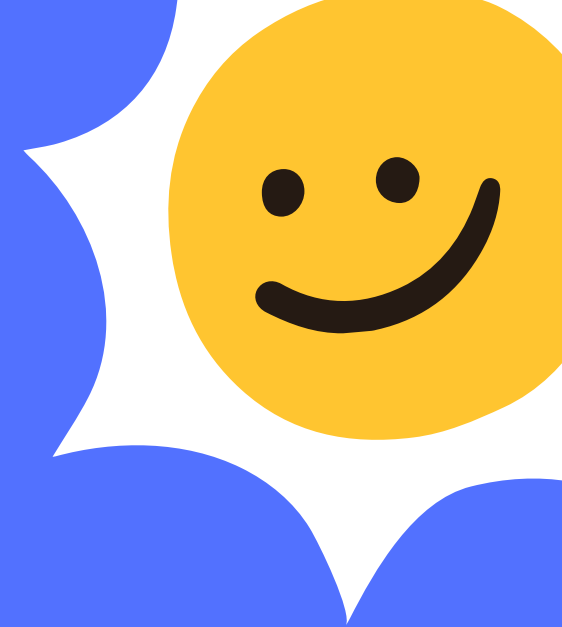


Perbedaan Lingkaran dan Bola

	Lingkaran	Bola
Pusat O $(0, 0)$, jari-jari r	$x^2 + y^2 = r^2$	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
Pusat P (a, b) , jari-jari r	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$
Persamaan Umum	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$
Pusat	$P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$	$P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B, -\frac{1}{2}C\right)$
Jari-jari	$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$	$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2 - D}$



Bidang Singgung Pada Bola



Misal persamaan bola $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1$, $T(x_1, y_1, z_1)$ adalah titik singgung pada bidang. Bidang singgung bola dengan jari-jari bola saling tegak lurus, ambil sembarang titik di bidang singgung misal $V(x, y, z)$

Misal $P(a, b, c)$ pusat bola, maka

$$\overrightarrow{TV} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$\overrightarrow{PT} = (x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c)$$

$$\overrightarrow{PV} = (x - a, y - b, z - c)$$

$$\overrightarrow{PT} \text{ Tegak lurus } \overrightarrow{TV} \rightarrow \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{TV} = 0$$

$$\overrightarrow{PT} \cdot (\overrightarrow{PV} - \overrightarrow{PT}) = 0$$

$$\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PV} - \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PT} = 0$$

$$(x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c) \cdot (x - a, y - b, z - c) - r \cdot r = 0$$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) + (z_1 - c)(z - c) - r^2 = 0$$

Jadi persamaan bidang singgung bola dengan pusat di (a, b, c) , Titik singgung $T(x_1, y_1, z_1)$ dan jari-jari r :

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) + (z_1 - c)(z - c) - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B, -\frac{1}{2}C\right)$$

$$S(x_1, y_1, z_1)$$

Persamaan bidang singgung bola $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ di titik $S(x_1, y_1, z_1)$ adalah

$$x_1x + y_1y + z_1z + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + \frac{1}{2}C(z + z_1) + D = 0$$

Bukti:

Jika $S(x_1, y_1, z_1)$ **adalah sebuah titik dari bola** : $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Maka koordinat-koordinat x_1, y_1, z_1 **memenuhi pada persamaan itu dan dengan demikian:** $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$

Titik pusat bola itu adalah titik: $P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B, -\frac{1}{2}C\right)$

Misalkan bidang α **adalah bidang singgung bola di** $S(x_1, y_1, z_1)$ **maka** \overline{PS} **adalah vektor normal bidang singgung** α **sehingga**

$$\overline{PS} = (x_1, y_1, z_1) - \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B, -\frac{1}{2}C\right)$$

$$\overline{PS} = \left(x_1 - \left(-\frac{1}{2}A\right), y_1 - \left(-\frac{1}{2}B\right), z_1 - \left(-\frac{1}{2}C\right)\right)$$

$$\overline{PS} = \left[x_1 + \frac{1}{2}A, y_1 + \frac{1}{2}B, z_1 + \frac{1}{2}C\right]$$

Bidang singgung di $S(x_1, y_1, z_1)$ berdiri tegak lurus pada jari-jari ini dan persamaannya adalah:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}A\right)(x - x_1) + \left(y_1 + \frac{1}{2}B\right)(y - y_1) + \left(z_1 + \frac{1}{2}C\right)(z - z_1) = 0$$

$$x_1x - x_1^2 + \frac{1}{2}Ax - \frac{1}{2}Ax_1 + y_1y - y_1^2 + \frac{1}{2}By - \frac{1}{2}By_1 + z_1z - z_1^2 + \frac{1}{2}Cz - \frac{1}{2}Cz_1 = 0$$

$$x_1x + y_1y + z_1z + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + \frac{1}{2}C(z + z_1) - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0 \quad (2)$$

Selanjutnya, titik $S(x_1, y_1, z_1)$ pada bola $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$, sehingga

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D \quad (3)$$

Substitusi (3) ke (2), sehingga

$$x_1x + y_1y + z_1z + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + \frac{1}{2}C(z + z_1) - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0$$

$$x_1x + y_1y + z_1z + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + \frac{1}{2}C(z + z_1) - (D) = 0$$

$$x_1x + y_1y + z_1z + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + \frac{1}{2}C(z + z_1) + D = 0$$

Contoh Soal

Tentukan persamaan bidang singgung pada bola $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 4z + 5 = 0$ di titik T (1, 3, 3).

Penyelesaian:

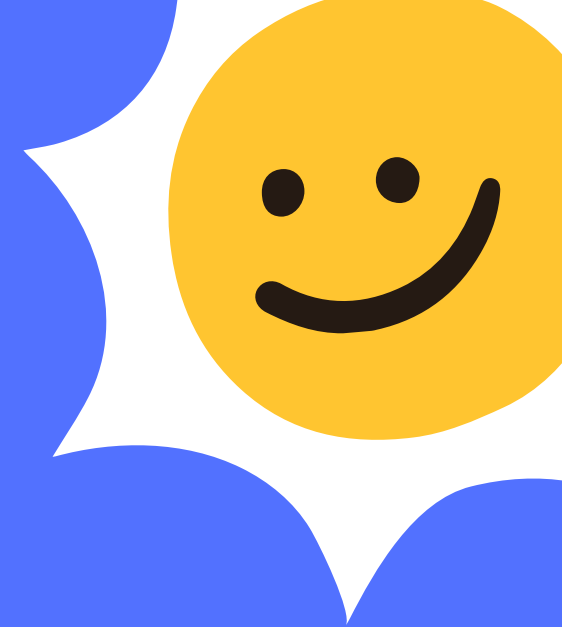
Periksalah titik T pada bola, maka persamaan bidang singgung pada bola di T adalah

$$x + 3y + 3z - 3(x + 1) - (y - 1) - 2(z + 3) + 5 = 0$$

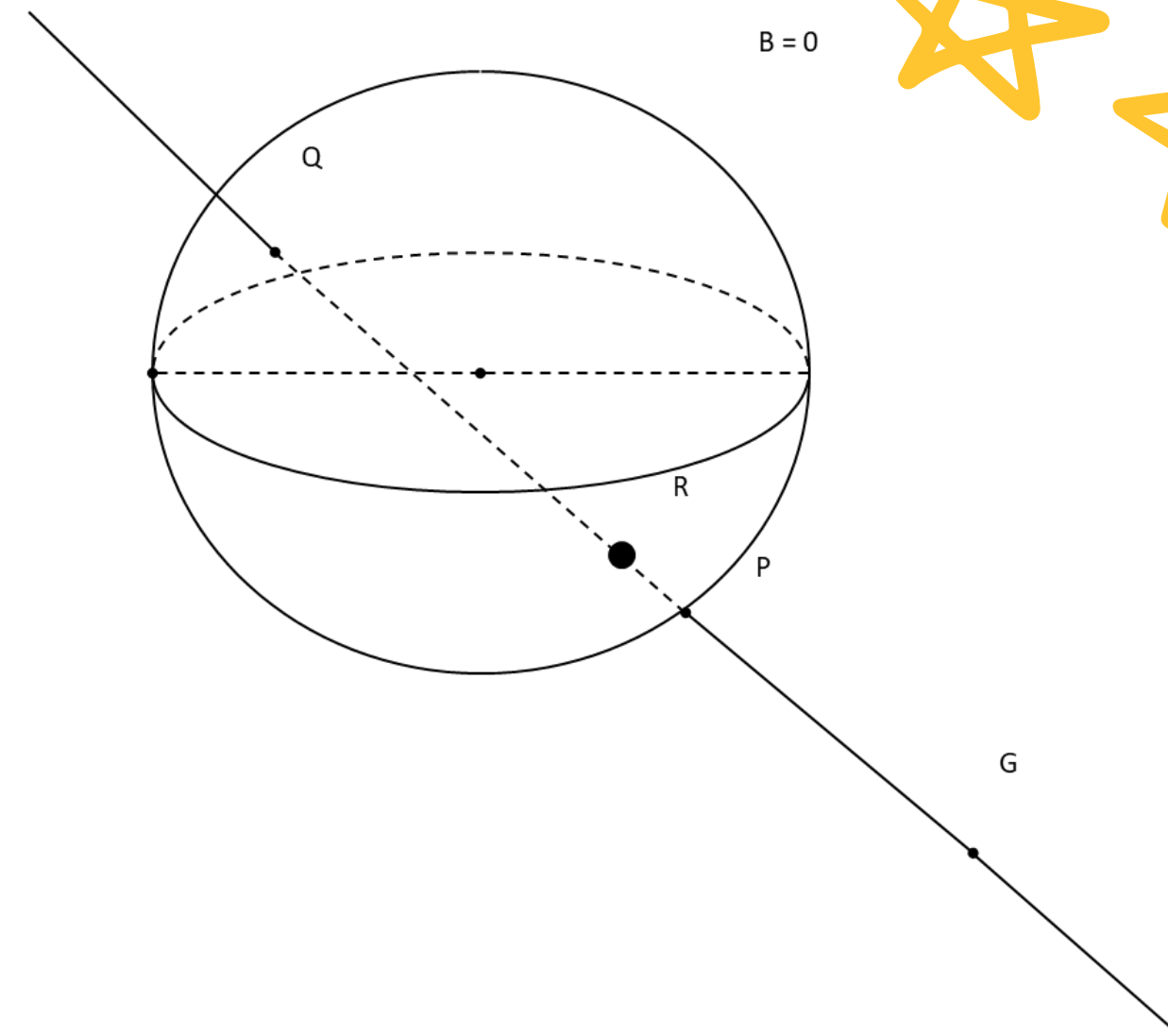
$$x + 3y + 3z - 3x - 3 - y - 3 - 2z - 6 + 5 = 0$$

$$-2x + 2y + z - 7 = 0$$

Persamaan Bidang Polar Bola



Pandang bola $B = 0$ dan titik G , tarik garis g melalui G (x_0, y_0, z_0) yang memotong bola di P dan Q . Titik R (x_1, y_1, z_1) pada garis g sedemikian sehingga P, Q sekawan harmonis dengan G, R . Maka TK dari titik R apabila g bergerak merupakan suatu bidang datar yang disebut bidang kutub (bidang polar) dari bola $B = 0$ dengan kutub (titik kutub) titik G .



Andaikan ditentukan bola B: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dengan kutub G (x_1, y_1, z_1) . Ambil R (x_0, y_0, z_0) pada garis sebarang melalui G. Titik yang membagi GR atas perbandingan $\lambda : 1$ berkoordinat:

$$\left(\frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda + 1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda + 1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda z_0 + z_1}{\lambda + 1}\right)^2 + r^2 = 0$$

Atau:

$$\lambda^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2) + 2\lambda(x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 - r^2) + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2) = 0 \quad (i)$$

Dengan akar-akar persamaan I_1 dan I_2 menunjukkan perbandingan di mana titik P dan Q membagi GR. Agar pembagian tersebut sekawan harmonis berarti $\lambda_1 = -\lambda_2$ atau $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ sehingga dari (i), dengan sifat akar: $x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 = r^2$ dan dengan menjalankan titik (x_0, y_0, z_0) diperoleh persamaan bidang kutub:

$$x_1x + y_1y + z_1z = r^2$$

Catatan :

Persamaan bidang kutub mengikuti pula kaidah membagi adil, di mana (x_1, y_1, z_1) menunjukkan titik kutubnya. Kalau titik kutub di luar bola, maka bidang kutub merupakan bidang yang memuat lingkaran perpotongan bola dengan kerucut selubung bola yang puncaknya titik tersebut.

Contoh Soal

Tentukan bidang kutub bola B: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z - 16 = 0$ **dengan kutub** $(6, 4, -8)$.

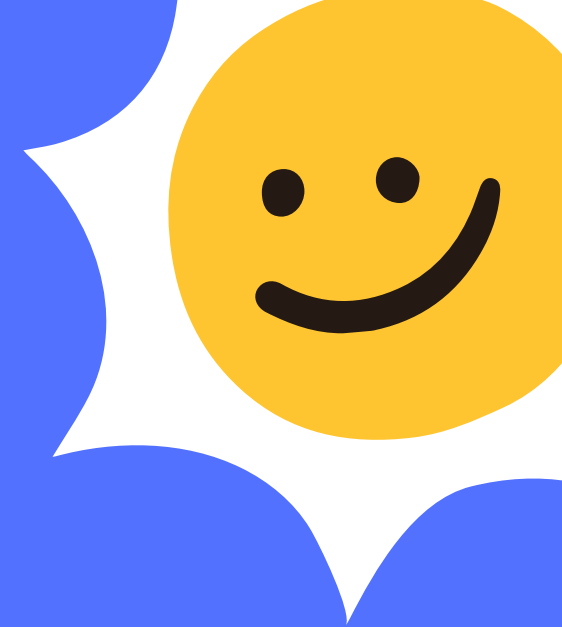
Penyelesaian:

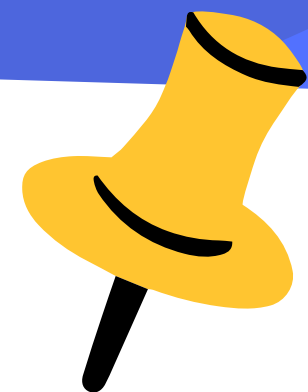
Dengan kaidah membagi adil, bidang kutub:

$$x_1x + y_1y + z_1z - 3(x + x_1) + (y + y_1) + 2(z + z_1) - 16 = 0,$$

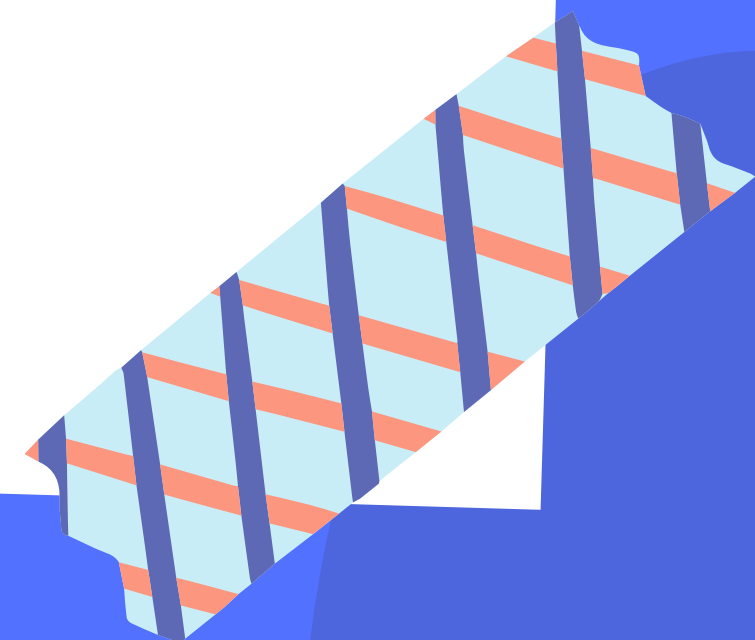
di mana $(x_1, y_1, z_1) \equiv (6, 4, -8)$, **diperoleh:** $3x + 5y - 6z - 46 = 0$

Latihan Soal

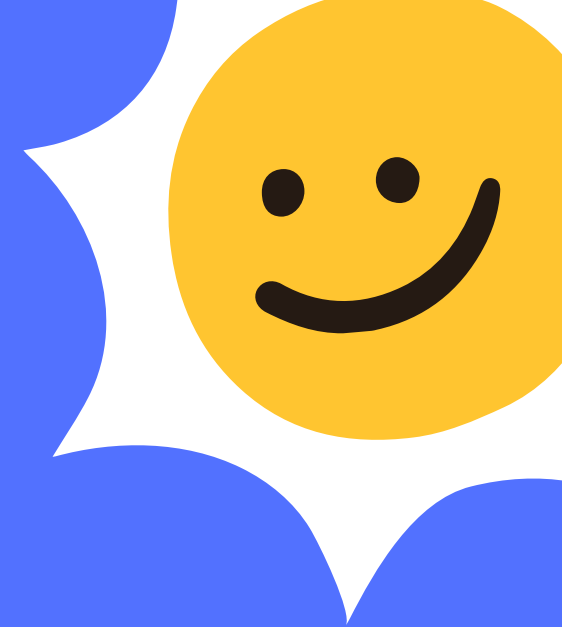




1. **Tentukan persamaan bola yang berpusat dititik $(1, 3, -2)$ dan melalui titik $(2,5,0)$.**
2. **Tentukan persamaan bola dengan pusat $M(7,2,3)$ dan jari-jari 5.**
3. **Tentukan titik pusat dan jari-jari bola yang persamaannya adalah**
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 12z = -40$$
4. **Tentukan persamaan bidang singgung bola $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$ di titik T $(1, 2, -3)$.**
5. **Tentukan titik kutub dari bidang $x + 3y - 2z = 7$ terhadap bola: $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.**



Pembahasan



1. Tentukan persamaan bola yang berpusat dititik $(1, 3, -2)$ dan melalui titik $(2,5,0)$.

Penyelesaian:

Persamaan bola

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

$$(2 - 1)^2 + (5 - 3)^2 + (0 - (-2))^2 = r^2$$

$$1 + 4 + 4 = r^2$$

$$r^2 = 9$$

$$r = \sqrt{9}$$

$$r = 3$$

Substitusikan $r = 3$ dan titik pusat $(1, 3, -2)$ ke bentuk persamaan umum bola:

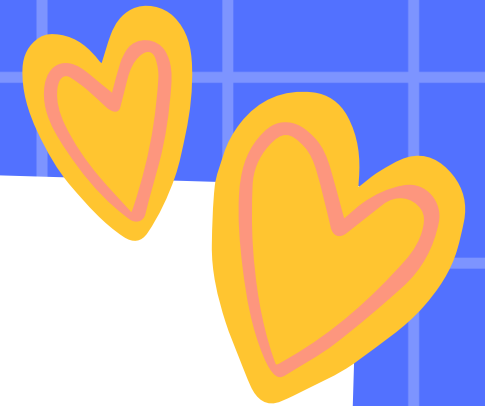
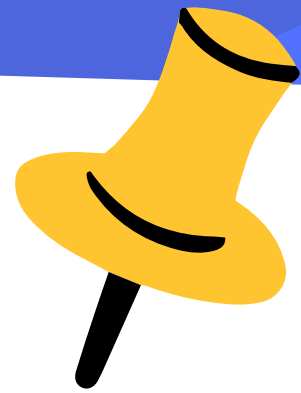
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - (-2))^2 = 3^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = 9$$

Jadi, persamaan bola yang berpusat di titik $(1, 3, -2)$ dan melalui titik $(2, 5, 0)$ adalah

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = 9 .$$



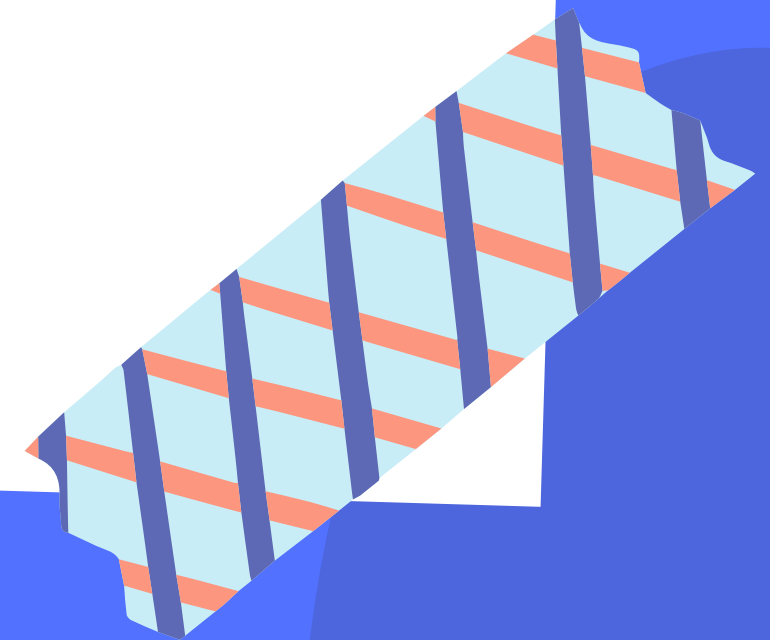
2. Tentukan persamaan bola dengan pusat $M(7,2,3)$ dan jari-jari 5.
Penyelesaian:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

$$(x - 7)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 5^2$$

$$(x - 7)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

Jadi, persamaan bola dengan pusat $M(7,2,3)$ dan jari-jari 5 adalah $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$



3. Tentukan titik pusat dan jari-jari bola yang persamaannya adalah $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 12z = -40$

Penyelesaian:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 12z + 40 = 0$$

$$A = -4 \quad a = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(-4) = 2$$

$$B = -8 \quad b = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}(-8) = 4$$

$$C = -12 \quad c = -\frac{1}{2}C = -\frac{1}{2}(-12) = 6$$

$$D = 40$$

Karena $a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = D$, maka

$$r^2 = (2)^2 + (4)^2 + (6)^2 - 40$$

$$r^2 = 4 + 16 + 36 - 40$$

$$r^2 = 16$$

$$r = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

Jadi, Titik pusat bola adalah (2, 4, 6) dan jari-jarinya adalah 4.

4. Tentukan persamaan bidang singgung bola $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$ di titik **T** (1, 2, -3).

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan bola yang diketahui maka persamaan bidang singgungnya adalah

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) + (z - c)(z_1 - c) - r^2 = 0$$

$$(x - 2)(1 - 2) + (y - 3)(2 - 3) + (z + 1)(-3 + 1) - 9 = 0$$

$$-x + 2 - y + 3 - 2z - 2 - 9 = 0$$

$$-x - y - 2z - 6 = 0$$

5. Tentukan titik kutub dari bidang $x + 3y - 2z = 7$ terhadap bola: $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

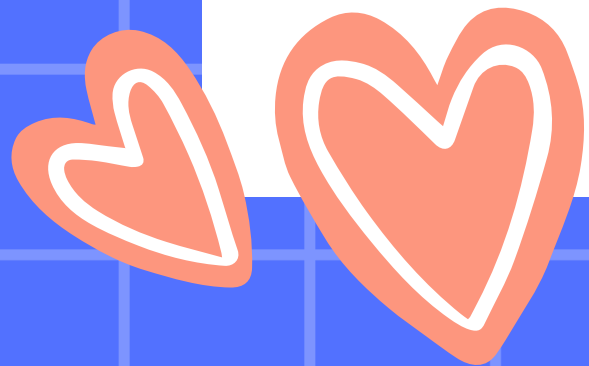
Penyelesaian:

Misal titik kutubnya T (x_1, y_1, z_1)

Bidang kutub bola $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ **adalah** $x_1x + y_1y + z_1z = 49$

Kita identikkan dengan $x + 3y - 2z = 7$ **atau** $7x + 21y - 14z = 49$

Jadi, titik kutub $(7, 21, -14)$.





THANK YOU!



SEE YOU NEXT TIME!

