

# ఏకఘాత ప్రణాళిక

**ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్య:**  $x, y$  చలరాశుల్లో, రేఖీయ అసమీకరణాల్లో వ్యక్తం చేయడానికి వీలయ్యే కొన్ని పరిమితులకు లోబడి  $f = Ax + By$  ( $A, B \in \mathbb{R}$ ) ను గరిష్టం లేదా కనిష్టం చేసే సమస్యలను ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్య అంటారు.

**ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యల సాధనలోని వివిధ సోపానాలు:**

1. సమస్యలో ఇచ్చిన షరతులకు లోబడి అసమీకరణాలను జాబితా రూపంలో రాయాలి.
2. అసమీకరణాలను గ్రాఫు కాగితంపై గీసి, అవి సూచించే ప్రదేశాలను ఛాయావృత్తం చేసి, బహుభుజి ప్రాంత శీర్షాలను గుర్తించండి.
3. లక్ష్యప్రమేయ సమాసాన్ని రాయండి.
4. బహుభుజి ప్రాంత శీర్షాల వద్ద (ప్రతి శీర్షం వద్ద) లక్ష్యప్రమేయ విలువలను కనుక్కోవాలి.
5. ఏ శీర్షం వద్ద లాభం గరిష్టం లేక కనిష్టం అవుతుందో అదే సమస్యకు సాధన అవుతుంది.

**బహుతల సమితి:** రేఖీయ అసమీకరణాల సాధన సమితి ఒక బిందువుల సమితి. దీనినే బహుతల సమితి అంటారు.

## ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

### 1. కుంభాకార సమితి అంటే ఏమిటి?

ఒక తలంలో ఏవైనా రెండు బిందువులను తీసుకొని వాటిని కలుపగా ఏర్పడే రేఖాఖండం, సంపూర్ణంగా ఆ తలంలోనే ఇమిడి ఉంటే.. అలాంటి వాటిని కుంభాకార సమితి అంటారు.

### 2. లక్ష్యప్రమేయం అంటే ఏమిటి?

గరిష్టం కాని, కనిష్టం గాని చేయాల్సిన ప్రమేయం  $f = Ax + By$ ; ( $A, B \in \mathbb{R}$ )ను లక్ష్యప్రమేయం అంటారు.

### 3. అనుకూల ప్రాంతం అంటే ఏమిటి?

ఒక ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలోని షరతుల ద్వారా ఏర్పడే సంవృత లేదా వివృత కుంభాకార సమితిని అనుకూల ప్రాంతం అంటారు.

### 4. వివృత కుంభాకార బహుభుజి అంటే ఏమిటి?

పరిమిత శీర్షాలు ఉన్న ఒక బహుభుజి ఒక భుజం వైపు తెరచి ఉంటే అలాంటి బహుభుజిని వివృత కుంభాకార బహుభుజి అంటారు.

### 5. సంవృత కుంభాకార బహుభుజి అంటే ఏమిటి?

ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలోని రేఖీయ అసమీకరణాల వ్యవస్థ సాధనం సంవృత కుంభాకార బహుభుజి అంటారు.

### 6. అనుకూల సాధన అంటే ఏమిటి?

అనుకూల ప్రాంతంలోని ప్రతి బిందువును అనుకూల సాధన అంటారు.

### 7. తుల్య లాభరేఖ అంటే ఏమిటి?

లక్ష్యప్రమేయంతో నిర్ధారితమైన ఏ సమాంతర రేఖనైనా తుల్య లాభరేఖ అంటారు.

### 8. ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలో సమస్యకు ఎప్పుడు అనంత సాధనలు ఉంటాయి?

తుల్య లాభరేఖ, బహుభుజి ప్రాంత అంచులలో ఏ అంచులో సమాంతరంగా ఉన్నా.. లేక ఏ అంచుతో ఏకీభవించినా సమస్యకు అనంత సాధనలు ఉంటాయి.

## రెండు మార్కుల ప్రశ్నలు

### 1. ఒక కుంభాకార బహుభుజి శీర్షాలు $(0, 0)$ , $(6, 0)$ , $(4, 2 \frac{1}{2})$ , $(0, 5)$ అయిన $F = 3x + 2y$ ను గరిష్టం చేయండి?

**Sol.** లక్ష్య ప్రమేయం  $F = 3x + 2y$

$(0, 0)$  వద్ద  $F = 3(0) + 2(0) = 0$

$(6, 0)$  వద్ద  $F = 3(6) + 2(0) = 18$

$(4, 2 \frac{1}{2})$  వద్ద  $F = 3(4) + 2(2 \frac{1}{2}) = 17$

$(0, 5)$  వద్ద  $F = 3(0) + 2(5) = 10$

$\therefore (6, 0)$  వద్ద  $f$  విలువ గరిష్టం అవుతుంది.

గరిష్ట విలువ = 18

### 2. ఒక ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్యలో $A(3, 0)$ , $B(0, 5)$ అనే బిందువుల వద్ద లక్ష్యప్రమేయం విలువలు వరుసగా 6, 15 అయితే లక్ష్య ప్రమేయాన్ని కనుక్కోండి?

**Sol.** లక్ష్యప్రమేయం  $f = ax + by$  అనుకొనండి.

$A(3, 0)$  వద్ద  $f$  విలువ = 6

$\therefore a(3) + b(0) = 6$

$3a = 6$

$a = 6/3$

$a = 2$

$B(0, 5)$  వద్ద  $f$  విలువ = 15

$a(0) + b(5) = 15$

$5b = 15$

$b = 15/5$

$b = 3$

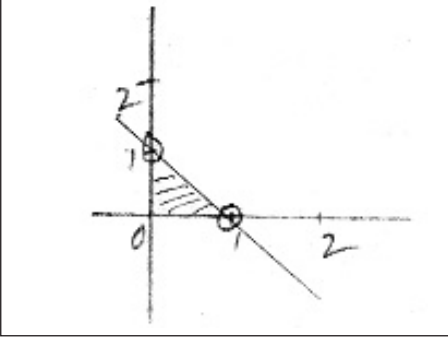
$\therefore$  లక్ష్యప్రమేయం  $f = 2x + 3y$

3. కింద ఇచ్చిన రేఖీయ అసమీకరణాల వ్యవస్థ సాధనలను రేఖాచిత్రాలపై చూపండి.  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ ?

**Sol.**  $x \geq 0, y \geq 0$  అంటే మొదటి పాదం ( $Q_1$ ) ను సూచిస్తుంది.

$x + y \leq 1$  సూచించాలంటే  $x + y = 1$  సరళరేఖను గీసి, మూలబిందువు వైపు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.

x	0	1
y	1	0

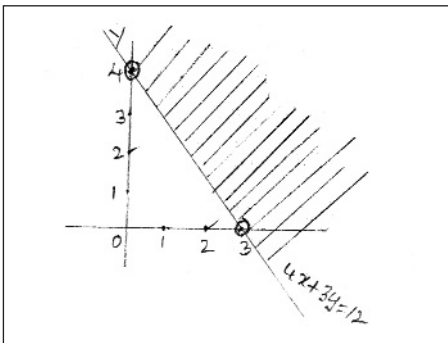


4.  $4x + 3y \geq 12$  అసమీకరణం సూచించు ప్రాంతాన్ని కనుక్కోండి?

**Sol.**  $4x + 3y \geq 12$  అంటే  $4x + 3y = 12$  సరళరేఖను గీయాలి.

$4x + 3y \geq 12$ లో  $(0, 0)$  ఉంచిన  $0 \geq 12$ , అసత్యం కాబట్టి  $4x + 3y = 12$  సరళరేఖకు మూలబిందువు లేని ప్రాంతాన్ని సూచిస్తుంది.

x	0	3
y	4	0



5.  $x \geq 1, y \geq 1, x \leq 3, y \leq 3$  అనే రేఖీయ అసమీకరణాల వ్యవస్థ సాధనకు రేఖాచిత్రంపై చూపండి?

**Sol.**

1.  $x \geq 1$  అంటే  $x = 1, x > 1$

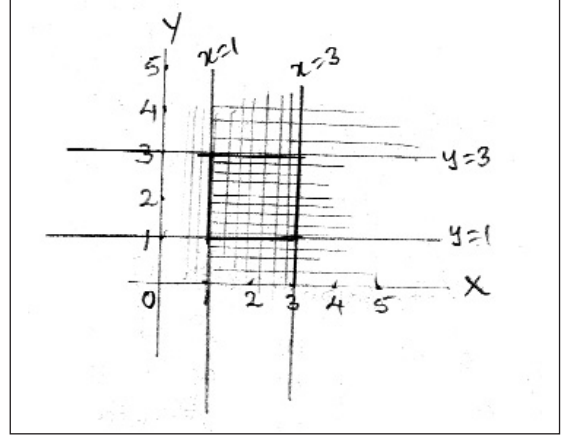
$x = 1$  అను సరళరేఖను గీయాలి. ఇది y-అక్షానికి 1 యూనిట్ దూరంలో సమాంతరంగా ఉంటుంది.  $(0, 0)$  బిందువు లేని ప్రాంతాన్ని సూచిస్తుంది.

2.  $y \geq 1$  అంటే  $y = 1$  సరళరేఖను గీచి మూల బిందువు లేని ప్రాంతాన్ని సూచించాలి.

3.  $x \leq 3$  అంటే  $x = 3$  లేదా  $x < 3$ .

$x = 3$  సరళరేఖను గీసి, మూలబిందువు వైపు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.

4.  $y \leq 3$  అంటే  $y = 3$  సరళరేఖను గీసి మూలబిందువు వైపు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.



#### 4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. కింది నియమాల దృష్ట్యా  $f = 3x + y$ ను గరిష్టం చేయండి?

$$8x + 5y \leq 40, 4x + 3y \geq 12 \quad x \geq 0, y \geq 0$$

**Sol.**

1.  $x \geq 0, y \geq 0$  ల సాధన సమితి  $Q_1$  (మొదటి పాదం)

2.  $8x + 5y \leq 40$  అంటే  $8x + 5y = 40$  సరళరేఖ గీయాలి.

$8x + 5y \leq 40$  అసమీకరణం  $(0, 0)$  వద్ద  $0 \leq 40$  సత్యం కాబట్టి మూలబిందువు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.

x	0	5
y	8	0

3.  $4x + 3y \geq 12$  అంటే  $4x + 3y = 12$  సరళరేఖను గీయాలి.

x	0	3
y	4	0

$4x + 3y \geq 12$  అసమీకరణం  $(0, 0)$  వద్ద  $0 > 12$  అసత్యం కాబట్టి మూలబిందువు లేని ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.

లక్ష్య ప్రమేయం  $f = 3x + y$

గ్రాఫ్ ఆధారంగా సంవృత కుంభాకార బహుభుజి శీర్షాలు

A (3, 0), B(5, 0), C(0, 5), D(0, 4)

A (3, 0) వద్ద  $f = 3(3) + 0 = 9$

B (5, 0) వద్ద  $f = 3(5) + 0 = 15$

C (0, 5) వద్ద  $f = 3(0) + 5 = 5$

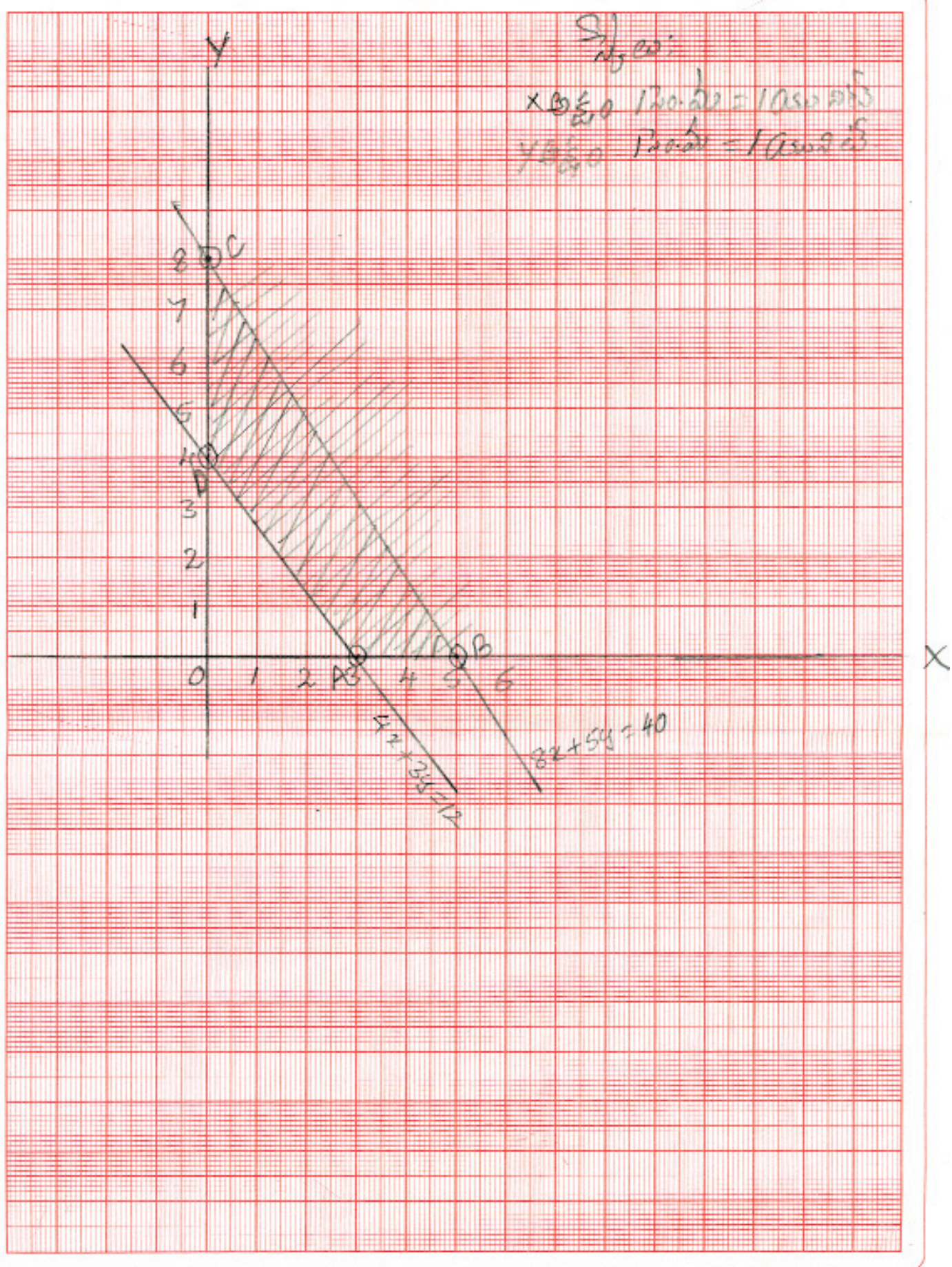
D (0, 4) వద్ద  $f = 3(0) + 4 = 4$

B (5, 0) వద్ద f విలువ గరిష్టం అవుతుంది.

∴ గరిష్ట విలువ = 15

(గ్రాఫ్ 4.1 చూడండి)





ग्राफ 4.1



2. ఇద్దరు దర్జీలు ప్రతిరోజూ రూ. 20, రూ. 25 సంపాదిస్తారు. A ప్రతి రోజు 4 చొక్కాలను, 2 పాంట్లను; B ప్రతిరోజూ 2 చొక్కాలను, 4 పాంట్లను కుట్టగలరు. కనీసం 100 చొక్కాలను, 110 పాంట్లను కనిష్ట ధరకు కుట్టాలంటే.. వారు ఒక్కొక్కరు ఎన్ని రోజులు పని చేయాలో కనుక్కొని సమస్యకు లక్ష్యప్రమేయాన్ని, అసమీకరణాల వ్యవస్థను రాయండి? (గ్రాఫ్ అవసరం లేదు)

**Sol.**

A పనిరోజుల సంఖ్య =  $x$ ,

B పనిరోజుల సంఖ్య =  $y$  అనుకొనండి.

$x \geq 0, y \geq 0$  ఎందుకంటే.. పనిరోజుల సంఖ్య ధనాత్మకం

$x$  రోజులలో A కుట్టు చొక్కాలు =  $4x$

$y$  రోజులలో B కుట్టు చొక్కాలు =  $2y$

లెక్క ప్రకారం  $4x + 2y \geq 100$

లేదా

$2x + y \geq 50$  .....(1)

$x$  రోజులలో A కుట్టే ప్యాంట్లు =  $2x$

$y$  రోజులలో B కుట్టే ప్యాంట్లు =  $4y$

లెక్క ప్రకారం

$2x + 4y \geq 110$

$x + 2y \geq 55$  .....(2)

మొదటి దర్జీ A ఒక రోజు సంపాదన = రూ. 20

B ఒక రోజులో సంపాదన = రూ. 25

$x$  రోజులలో A సంపాదించినది =  $20x$

$y$  రోజులలో B సంపాదించినది =  $25y$

$\therefore$  లక్ష్య ప్రమేయం  $f = 20x + 25y$

3. ఒక దుకాణదారు రెండు విభిన్న రంగుల్లో ఉన్న చొక్కాలను 20 కంటే ఎక్కువ అమ్మలేదు. ఆకుపచ్చ చొక్కాల అమ్మకానికి కనీసం రెట్టింపు తెల్లచొక్కాలను అమ్ముతాడు. ప్రతి తెల్లచొక్కాపై లాభం రూ. 20. కాగా ప్రతి ఆకుపచ్చ చొక్కాపై లాభం రూ. 25 అయితే గరిష్ట లాభం పొందడానికి ఒక్కో రకపు చొక్కాలు ఎన్నింటిని అమ్మాలి? ఈ సమస్యకు సంబంధించిన షరతులను సూచించే అసమీకరణాలను, లక్ష్యప్రమేయాన్ని రాయండి. గ్రాఫ్ గీయవసరం లేదు?

**Sol.** ఆకుపచ్చని చొక్కాలు =  $x$ ,

తెల్లని చొక్కాలు =  $y$  అనుకొనండి.

చొక్కాల సంఖ్య ధనాత్మకం కాబట్టి  $x \geq 0, y \geq 0$ .

ప్రతి రోజు రెండు చొక్కాలు కలిసి 20 కంటే ఎక్కువ అమ్మలేదు.

$\therefore x + y \leq 20$  .....(1)

ప్రతిరోజు ఆకుపచ్చ చొక్కాలకు రెట్టింపు తెల్లచొక్కాలు అమ్మిన

$2x \leq y$

$\therefore 2x - y \leq 0$  .....(2)

తెల్లచొక్కాపై లాభం = రూ. 20

ఆకుపచ్చ చొక్కాపై లాభం = రూ. 25

$\therefore$  మొత్తం లాభం =  $20x + 25y$

$\therefore$  లాభ ప్రమేయం  $P = 20x + 25y$

4. ఒక మిఠాయి దుకాణంలో రెండు రకాల మిఠాయిలు A, Bలను 7కి.గ్రా. సంచులలో మిశ్రమం చేసే విధానం ఈ విధంగా ఉంది. A రకం మిఠాయి కనీసం 3 కి.గ్రా ఉండేట్లు .. B రకం మిఠాయి 5 కి.గ్రా.ల కంటే ఎక్కువ కాకుండా కలపాలి. A రకం మిఠాయిపై ప్రతి కి.గ్రా.కు రూ. 15 లాభం.. B రకం మిఠాయిపై ప్రతి కి.గ్రా.కు రూ.20 లాభం పొందేట్లుయితే గరిష్ట లాభం పొందాలంటే ప్రతి 7 కి.గ్రా. సంచిలో ఏ రకం మిఠాయి ఎన్ని కి.గ్రా.లు ఉండాలి. ఈ సమస్యకు సంబంధించిన షరతులను సూచించే అసమీకరణాలను, లక్ష్యప్రమేయాన్ని రాయండి. గ్రాఫ్ గీయవసరం లేదు?

**Sol.** మిఠాయి కొట్టువాని మిఠాయి రకాలు = A, B అనుకొనండి.

A రకం మిఠాయి కనీసం 3 కి.గ్రా., B రకం మిఠాయి కనీసం 5 కి.గ్రా. కంటే ఎక్కువ కాకుండా అంటే  $A \geq 3, B \leq 5$  .....(1)

ఒక్కొక్క సంచిలో నింపగల మిఠాయి బరువు = 7 కి.గ్రా.

$\therefore A+B \leq 7$  .....(2)

A రకం మిఠాయిపై లాభం = రూ. 15

B రకం మిఠాయిపై లాభం = రూ. 20

$\therefore$  లాభప్రమేయం  $P = 15A+20B$

### 5 మార్కుల ప్రశ్నలు

1.  $2x+3y \leq 12, 3x+y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$ లకు గుణంగా  $f=5x+7y$ ను గరిష్టం చేయండి?

$x \geq 0, y \geq 0$ ల సాధనసమితి  $Q_1$ (మొదటిపాదం)

$2x+3y \leq 12$  అంటే  $2x+3y = 12$  సరళరేఖను గీయాలి.

x	0	6
y	4	0

$2x+3y \leq 12$  లో (0, 0) ప్రతిక్షేపిస్తే  $0 \leq 12$  సత్యం కాబట్టి

$2x+3y \leq 12$  సాధన క్షేత్రం మూలబిందువు వైపు ఉంటుంది.

$3x+y \leq 12$  అంటే  $3x+y = 12$  సరళరేఖ గీయాలి.

x	0	4
y	12	0

$3x+y \leq 12$  నందు (0, 0) ఉంచిన  $0 \leq 12$  సత్యం కాబట్టి  $3x+y$

$\leq 12$  ప్రాంతం కూడా మూలబిందువు వైపు ఉంటుంది. పై రేఖా

చిత్రాల ద్వారా కుంభాకార బహుభుజి OABC అవుతుంది.

బహుభుజి శీర్షాలు O (0, 0), A (4, 0), B (3.4, 1.7), C (0, 4)

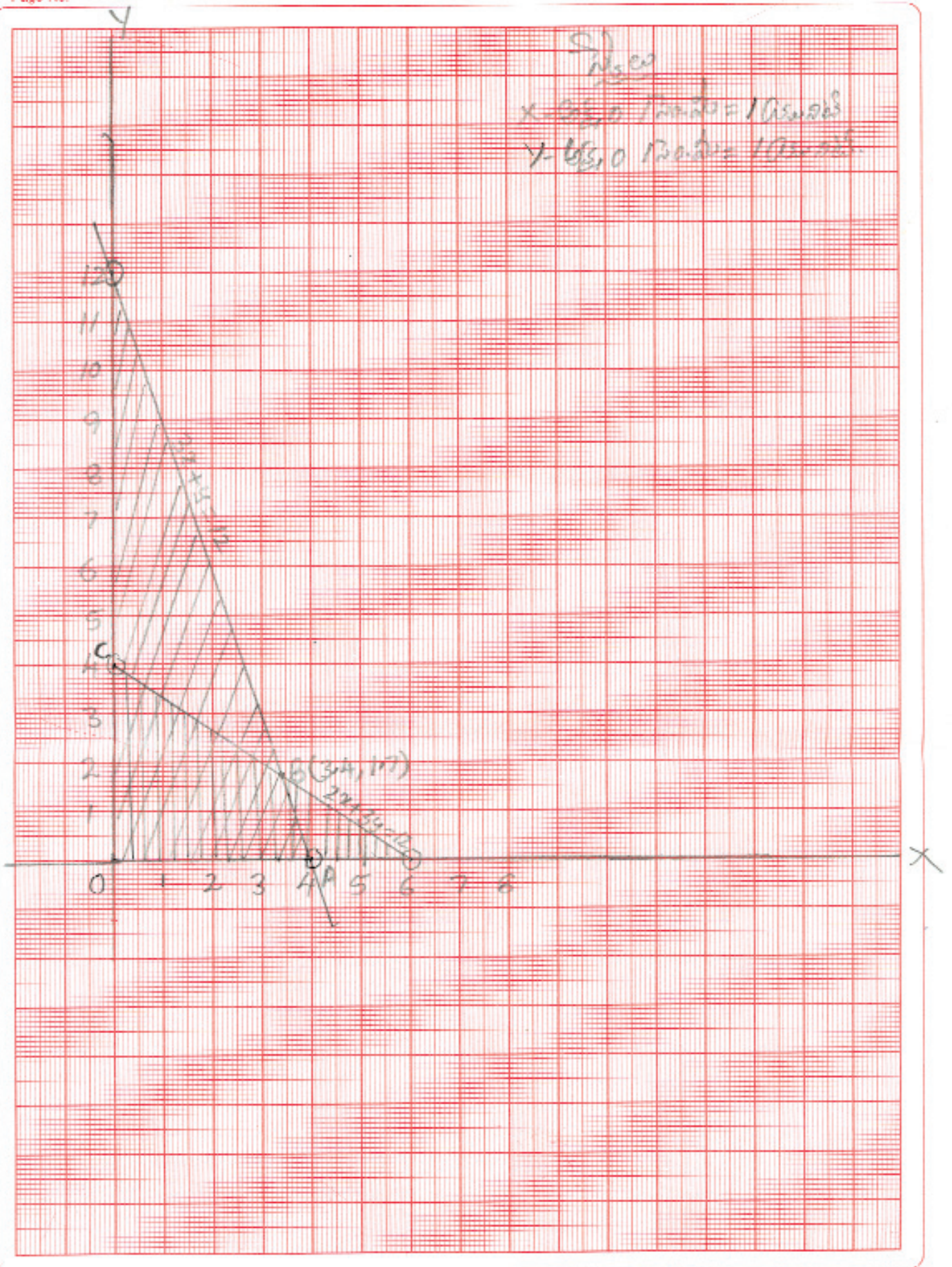
లక్ష్యప్రమేయం  $f = 5x+7y$

O(0, 0) వద్ద  $f=5(0) + 7(0) = 0$



Page No.

Date :




**क्वांट 4.2**



A (4, 0) వద్ద  $f=5(4) + 7(0) = 20$

B (3.4, 1.7) వద్ద  $f=5(3.4) + 7(1.7)$   
 $= 17 + 11.9 = 28.9$

C (0, 4) వద్ద  $f=5(0) + 7(4) = 28$

∴ B (3.4, 1.7) వద్ద లక్ష్యప్రమేయం గరిష్టం అవుతుంది.

∴ గరిష్ట విలువ = 28.9

(గ్రాఫ్ 4.2ను చూడండి.)

2.  $x + y \geq 6$ ,  $2x + y \geq 8$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  నియమాల దృష్ట్యా  $f = x + y$  ను కనిష్టం చేయండి?

**Sol.**  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ల సాధన సమితి  $Q_1$  (మొదటి పాదం)

$x + y \geq 6$  అంటే  $x + y = 6$  సరళరేఖ గీయాలి.

x	0	6
y	6	0

$x + y \geq 6$  లో (0, 0) ప్రతిక్షేపించిన  $0 \geq 6$  అసత్యం కాబట్టి  $x + y \geq 6$  సాధ్యక్షేత్రం మూలబిందువు లేని ప్రాంతం.

$2x + y \geq 8$  లో అంటే  $2x + y = 8$  సరళరేఖను గీయాలి.

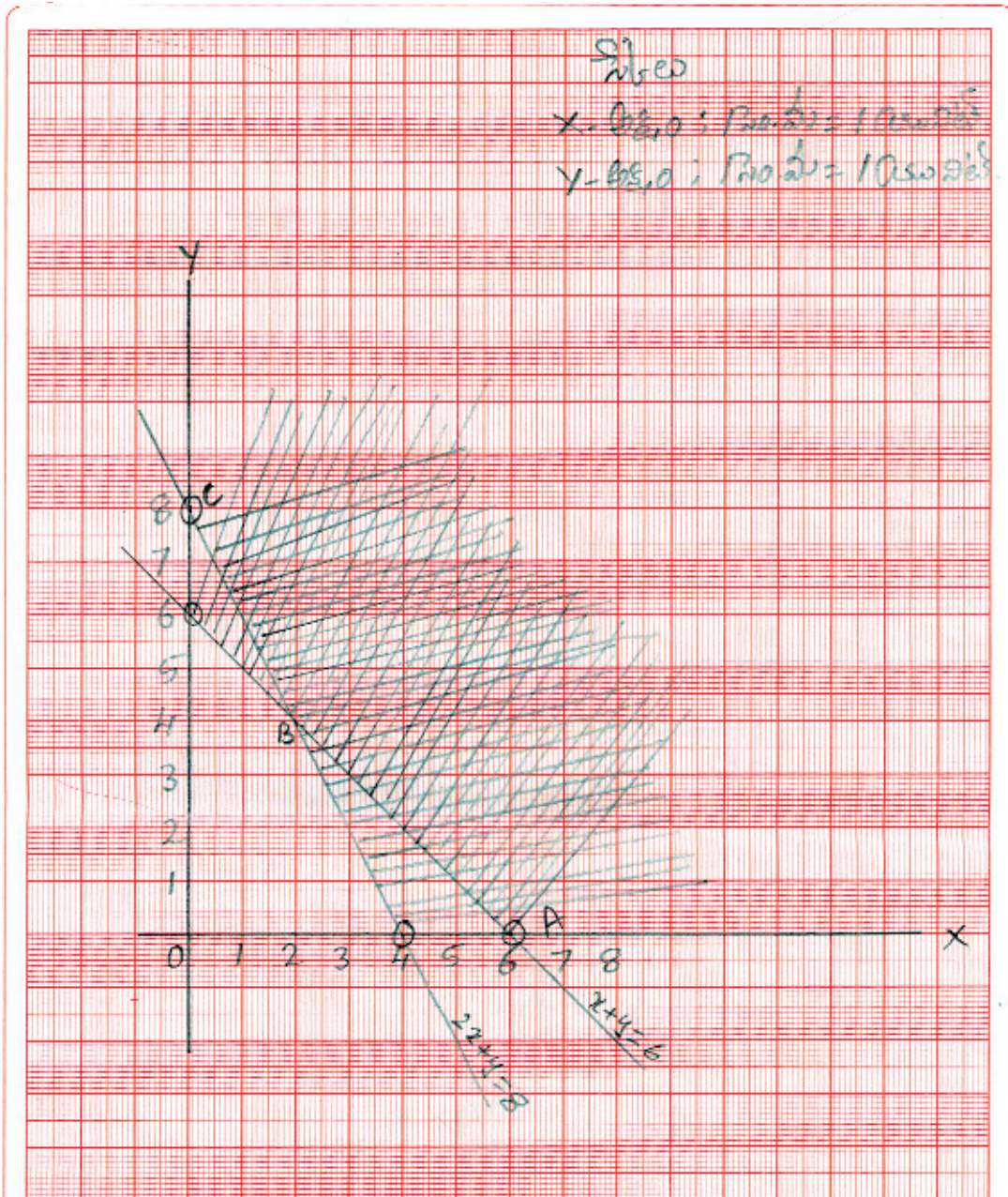
x	0	4
y	8	0

$2x + y \geq 8$  లో (0, 0) ప్రతిక్షేపించగా  $0 \geq 8$  అసత్యం కాబట్టి  $2x + y \geq 8$  సాధ్యక్షేత్రం మూలబిందువు లేని ప్రాంతాన్ని సూచిస్తుంది.

పై వాటిని రేఖాచిత్రంలో సూచించిన ABC వివృత కుంభాకార బహుభుజి ఏర్పడుతుంది.

శీర్షాలు A (6, 0), B (2, 4), C (0, 8)

లక్ష్యప్రమేయం  $f = x + y$



గ్రాఫ్ 4.3



A (6, 0) వద్ద  $f = 6+0 = 6$

B (2, 4) వద్ద  $f = 2+4 = 6$

C (0, 8) వద్ద  $f = 0+8 = 8$

A (6, 0), B (2, 4) వద్ద  $f = x+y$  కనిష్టం అవుతుంది.

కనిష్ట విలువ = 6

(గ్రాఫ్ 4.3ను చూడండి.)

3. కింది నియమాలకు అనుగుణంగా  $f=2x+y$ ను గరిష్టం చేయండి?

$2x+y \leq 8, y \leq 4, x \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$ .

1.  $x \geq 0, y \geq 0$ ల సాధన సమితి  $Q_1$  మొదటి పాదం
2.  $x \leq 3$  రేఖాచిత్రం గీయాలంటే  $x = 3$  సరళరేఖను గీసి మూలబిందువు వైపు ప్రాంతాన్ని సూచించాలి.
3.  $y \leq 4$  రేఖాచిత్రం గీయాలంటే..  $y = 4$  సరళరేఖను గీసి మూలబిందువు వైపు ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.
4.  $2x+y \leq 8$  రేఖాచిత్రం గీయాలంటే..  $2x+y = 8$  సరళరేఖ గీయాలి.  $2x+y \leq 8$ లో (0, 0) ఉంచిన  $0 \leq 8$  సత్యం కాబట్టి మూలబిందువు వైపు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.

x	0	4
y	8	0

పై వాటిని రేఖాచిత్రంలో సూచించినపుడు OABCD కుంభాకార బహుభుజి ఏర్పడింది.

బహుభుజి శీర్షాలు O (0, 0), A(3, 0), B(3, 2), C(2, 4), D(0, 4)

లక్ష్య ప్రమేయం  $f = 2x+y$

O (0, 0) వద్ద  $f = 2(0)+0 = 0$

A (3, 0) వద్ద  $f = 2(3)+0 = 6$

B (3, 2) వద్ద  $f = 2(3)+2 = 8$

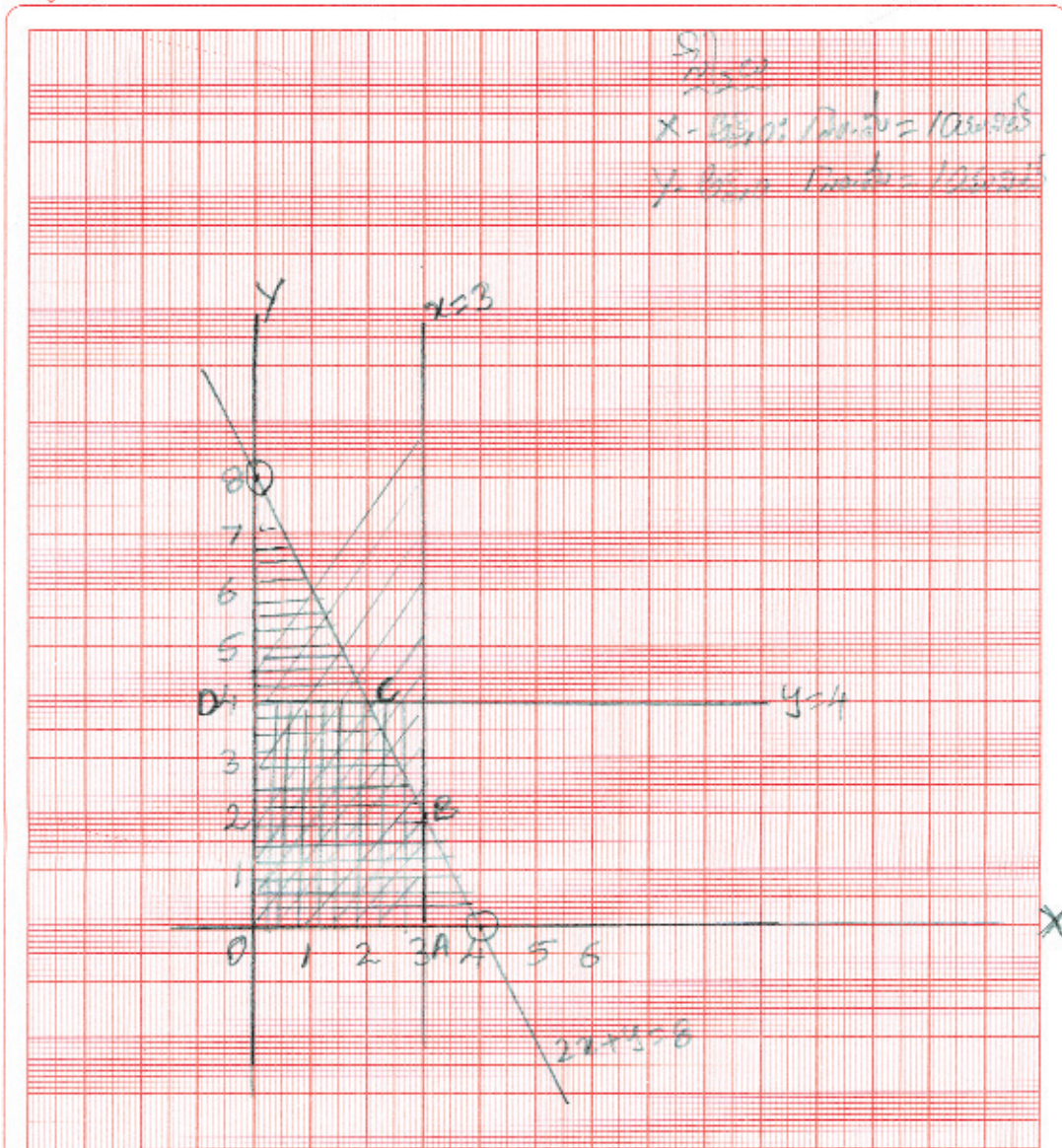
C (2, 4) వద్ద  $f = 2(2)+4 = 8$

D (0, 4) వద్ద  $f = 2(0)+4 = 4$

B (3, 2), C (2, 4) వద్ద లక్ష్యప్రమేయం గరిష్టం అయింది.

$\therefore$  గరిష్ట విలువ = 8

(గ్రాఫ్ 4.4ను చూడండి.)



గ్రాఫ్ 4.4