

ప్రమేయాలు

1. **ప్రమేయం:** $x \in A, y \in B$ అయితే f లో ఏ రెండు క్రమయుగ్మాల జతలను ఒకే ప్రథమ నిరూపకాలు లేని (x, y) క్రమయుగ్మాల సమితిని ప్రమేయం f అంటారు. దీనిని $f: A \rightarrow B$ అని రాస్తాం. దీనిలో A ప్రదేశం, B సహప్రదేశం, $f(A)$ వ్యాప్తి.

2. **అన్వేక ప్రమేయం:** f అనేది A నుంచి B కి ప్రమేయమై, B లోని విభిన్న మూలకాలు, A లోని విభిన్న మూలకాలతో జతపరచిన f ను అన్వేక ప్రమేయం అంటారు.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ అయితే f అన్వేకం.

3. **సంగ్రస్త ప్రమేయం:** f అనేది A నుంచి B కి ప్రమేయం అయి.. ప్రమేయ వ్యాప్తి B కు సమానమైనా f ను సంగ్రస్త ప్రమేయం అంటారు. ప్రతి $y \in B$ కి అనుగుణంగా $f(x) = y$ అయ్యేట్లు కనీసం ఒక మూలకం $x \in A$ ఉన్న f ను సంగ్రస్తం అంటారు.

$$f(A) = B$$

4. **ద్విగుణ ప్రమేయం:** f అనే ప్రమేయం అన్వేకం, సంగ్రస్తం అయితే f ను ద్విగుణ ప్రమేయం అంటారు.

5. **అంతఃప్రమేయం:** f అనేది A నుంచి B కి ప్రమేయమై.. ప్రమేయ వ్యాప్తి B కు ఉపసమితి అయితే f ను అంతఃప్రమేయం అంటారు.

6. **తత్సమ ప్రమేయం:** $f: A \rightarrow A$ ప్రమేయం $f(x) = x \quad \forall x \in A$ అయ్యేవిధంగా ఉంటే f ను A పై తత్సమ ప్రమేయం అంటారు.

7. **స్థిర ప్రమేయం:** ప్రమేయం $f: A \rightarrow B, f(x) = c \quad \forall x \in A$ అయ్యేట్లు $c \in B$ వ్యవస్థితమైతే.. f ను స్థిరప్రమేయం అంటారు.

8. **వాస్తవ ప్రమేయం:**

1. $f: A \rightarrow B$ ప్రమేయంలో ప్రదేశం A , వాస్తవసంఖ్య సమితి R కు ఉపసమితి అయితే f ను వాస్తవ చలరాశి ప్రమేయం అంటారు.

2. $f: A \rightarrow B$ ప్రమేయంలో B, R కు ఉపసమితి అయితే.. అది వాస్తవ మూల్యప్రమేయం.

3. $f: A \rightarrow B$ ప్రమేయం అయి A, B లు R కు ఉపసమితి అయితే.. అది వాస్తవ ప్రమేయం.

9. **విలోమ ప్రమేయం:** $f: A \rightarrow B$ అనేది అన్వేక, సంగ్రస్తమైన $f^{-1}: B \rightarrow A$ ను విలోమ ప్రమేయం అంటారు.

10. **సమాన ప్రమేయం:** ఒక ప్రదేశం D పై నిర్వచితమైన ప్రమేయాలు f, g లు $f(x) = g(x) \quad \forall x \in D$ అయ్యేట్లుంటే అలాంటి

ప్రమేయాలను సమాన ప్రమేయాలు అంటారు.

11. **సంయుక్త ప్రమేయం:** $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ రెండు ప్రమేయాలు అయితే.. f, g ల సంయుక్త ప్రమేయాన్ని $g \circ f$ తో సూచిస్తారు.

$$g \circ f: A \rightarrow C \text{ అవుతుంది.}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] \quad \forall x \in A \text{ అవుతుంది.}$$

Note: $g \circ f \neq f \circ g$

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $f(x) = x + 2$ తో నిర్వచితమైన ప్రమేయ ప్రదేశం $\{x : 2 \leq x \leq 5\}$ అయితే.. f^{-1} ప్రమేయం వ్యవస్థితం అని చూపి, దాని ప్రదేశం, వ్యాప్తులను కనుక్కోండి?

sol:

$f(x) = x + 2$ తో నిర్వచితమైన ప్రమేయ ప్రదేశం $\{x : 2 \leq x \leq 5\}$

$f(x)$ అన్వేకమని చూపటం:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2$$

$$x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ కాబట్టి } f(x) \text{ అన్వేకం}$$

$f(x)$ సంగ్రస్తమని చూపటం:

$$x + 2 = y \text{ అయితే } x = y - 2$$

$$f(x) = f(y - 2) = y - 2 + 2 = y$$

$$\therefore f(x) \text{ సంగ్రస్తం}$$

$f(x)$ అనేది అన్వేకం, సంగ్రస్తం కాబట్టి $f(x)$ ద్విగుణ ప్రమేయం కాబట్టి $f^{-1}(x)$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$$f^{-1} \text{ వ్యాప్తి} = f \text{ ప్రదేశం} = \{x : 2 \leq x \leq 5\}$$

$$f^{-1} \text{ ప్రదేశం} = f \text{ వ్యాప్తి} = \{x + 2; 2 + 2 \leq x + 2 \leq 5 + 2\}$$

$$= \{x + 2; 4 \leq x + 2 \leq 7\}$$

$$\therefore f^{-1} \text{ ప్రదేశం} = \{y; 4 \leq y \leq 7\}$$

$$f^{-1} \text{ వ్యాప్తి} = \{x; 2 \leq x \leq 5\}$$

2. ప్రమేయాలు f, g, h లను కింది విధంగా నిర్వచించారు. $f(x) = x + 2, g(x) = 3x - 1, h(x) = 2x$ అయితే $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ అని చూపండి?

sol:

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = 3x - 1$$

$$h(x) = 2x$$

1. $(g \circ f)(x)$

$$= g[f(x)]$$

$$= g[x + 2]$$

$$= 3(x + 2) - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= 3x + 6 - 1 \\
 &= 3x + 5 \\
 2. [h \circ (g \circ f)](x) &= h[(g \circ f)(x)] \\
 &= h(3x + 5) \\
 &= 2(3x + 5) \\
 &= 6x + 10 \text{ ----- (1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. (h \circ g)(x) &= h[g(x)] \\
 &= h(3x - 1) \\
 &= 2(3x - 1) \\
 &= 6x - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. [(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)[f(x)] \\
 &= (h \circ g)(x + 2) \\
 &= 6(x + 2) - 2 \\
 &= 6x + 12 - 2 \\
 &= 6x + 10 \text{ ----- (2)} \\
 (1), (2) \text{ల నుంచి } h \circ (g \circ f) &= (h \circ g) \circ f
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. f(x) &= x + 2, g(x) = 2x + 3, h(x) = 3x + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
 \text{అయితే } (f \circ g) \circ h &= f \circ (g \circ h) \text{ అని చూపండి?}
 \end{aligned}$$

sol:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + 2 \\
 g(x) &= 2x + 3 \\
 h(x) &= 3x + 4 \\
 1. (f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\
 &= f(2x + 3) \\
 &= 2x + 3 + 2 \\
 &= 2x + 5 \\
 2. [(f \circ g) \circ h](x) &= (f \circ g)[h(x)] \\
 &= (f \circ g)(3x + 4) \\
 &= 2(3x + 4) + 5 \\
 &= 6x + 8 + 5 \\
 &= 6x + 13 \text{ ----- (1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. (g \circ h)(x) &= g[h(x)] \\
 &= g(3x + 4) \\
 &= 2(3x + 4) + 3 \\
 &= 6x + 8 + 3 \\
 &= 6x + 11 \text{ ----- (2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. [f \circ (g \circ h)](x) &= f[g \circ h(x)] \\
 &= f(6x + 11) \\
 &= 6x + 11 + 2 \\
 &= 6x + 13 \\
 (1), (2) \text{ల నుంచి } (f \circ g) \circ h &= f \circ (g \circ h)
 \end{aligned}$$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

$$1. f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ప్రమేయం } f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \text{ తో నిర్వచితమైతే}$$

$$f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = x \text{ అని చూపండి?}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

$$f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = \frac{\frac{2(2x+1)}{x-2} + 1}{\frac{2x+1}{x-2} - 2}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{2(2x+1)+x-2}{\frac{x-2}{(2x+1)-2(x-2)}} \\
 &= \frac{4x+2+x-2}{2x+1-2x+4} = \frac{5x}{5} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = x$$

$$2. f(x) = x + 2, g(x) = x^2 - x - 2 \text{ అయితే}$$

$$\frac{g(1)+g(2)+g(3)}{f(-4)+f(-2)+f(2)} \text{ విలువ కనుక్కోండి?}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + 2 \\
 f(-4) &= -4 + 2 = -2 \\
 f(-2) &= -2 + 2 = 0 \\
 f(2) &= 2 + 2 = 4 \\
 g(x) &= x^2 - x - 2 \\
 g(1) &= 1^2 - 1 - 2 = -2 \\
 g(2) &= 2^2 - 2 - 2 = 0 \\
 g(3) &= 3^2 - 3 - 2 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{g(1)+g(2)+g(3)}{f(-4)+f(-2)+f(2)} &= \frac{-2+0+4}{-2+0+4} \\
 &= \frac{2}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$3. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4 \text{ అయితే } f^{-1} \text{ కనుక్కోండి?}$$

sol:

$$f(x) = 3x - 4 = y \text{ అనుకుంటే..}$$

$$3x - 4 = y$$

$$3x = y + 4$$

$$x = \frac{y+4}{3}, \quad x = f^{-1}(y)$$

$$\therefore f^{-1}(y) = x = \frac{y+4}{3} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\text{అంటే... } f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 4. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) &= \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ లు } f(x) = 1 + 2x, \\
 g(x) &= 3 - 2x \text{ అయితే } (f \circ g)(3), (g \circ f)(3) \text{ లను} \\
 &\text{కనుక్కోండి?}
 \end{aligned}$$

$$\text{sol: } f(x) = 1 + 2x$$

$$g(x) = 3 - 2x$$

$$\begin{aligned}
 1. (f \circ g)(3) &= f[g(3)] \\
 &= f(3 - 2 \times 3) \\
 &= f(3 - 6) \\
 &= f(-3) \\
 &= 1 + 2(-3) \\
 &= 1 - 6 = -5
 \end{aligned}$$

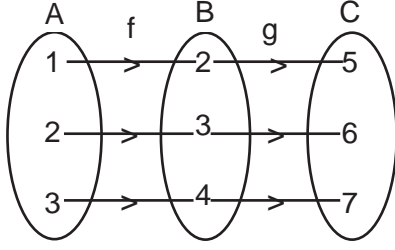
$$\begin{aligned}
 2. (g \circ f)(3) &= g[f(3)] \\
 &= g(1 + 2 \times 3) \\
 &= g(7) \\
 &= 3 - 2 \times 7 \\
 &= 3 - 14 = -11
 \end{aligned}$$

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$, $g = \{(2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$

అయితే $(g \circ f)$ కనుక్కోండి?

sol:



$$\therefore (g \circ f) = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$$

2. $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ అయితే $f \circ f$ కనుక్కోండి?

sol:

$$f \circ f \text{ ప్రదేశం} = f \text{ ప్రదేశం} = \{(1, 2, 3, 4)\}$$

$$(f \circ f)(1) = f[f(1)] = f(2) = 3$$

$$(f \circ f)(2) = f[f(2)] = f(3) = 4$$

$$(f \circ f)(3) = f[f(3)] = f(4) = 1$$

$$(f \circ f)(4) = f[f(4)] = f(1) = 2$$

$$\therefore (f \circ f) = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$$

3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ అయితే $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ అని చూపండి?

sol:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}$$

$$= \frac{1+x}{1-x}$$

$$= -\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

$$\therefore f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

$$= 0$$

4. ప్రమేయ శూన్యాన్ని నిర్వచించండి?

sol: x ఏ విలువ వద్ద ప్రమేయం విలువ శూన్యం అవుతుందో దాన్నే ప్రమేయ శూన్యవిలువ అంటారు.

5. $f(x) = x^2 + 2x - 15$ ($x \in \mathbb{R}$) $f(-2)$, $f(-3)$ లను కనుక్కోండి?

sol:

$$f(x) = x^2 + 2x - 15$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 15$$

$$= 4 - 4 - 15$$

$$= -15$$

$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) - 15$$

$$= 9 - 6 - 15$$

$$= -12$$