

బహుపదులు

ముఖ్యాంశాలు

1. వర్గ సమీకరణం రూపం $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

2. $ax^2 + bx + c = 0$ మూలాలు α, β అయితే

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac$ ను విచక్షిణి అంటారు.

3. వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ మూలాల మొత్తం $= -b/a$

4. $ax^2 + bx + c = 0$ మూలాల లబ్ధం $= c/a$

5. α, β లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

6. $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ అయితే x విలువ α, β ల మధ్య ఉండదు.

7. $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ అయితే x విలువ α, β ల మధ్య ఉంటుంది.

8. ఒక అకరణీయ పూర్ణాంక సమాసం $f(x)$ ను $(x - a)$ తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(a)$ అవుతుంది. దీన్నే శేష సిద్ధాంతం అంటారు.

9. $f(x)$ అకరణీయ పూర్ణాంక సమాసంలోని పదాల గుణకాల మొత్తం సున్నా అయితే $f(x)$ కు $(x - 1)$ కారణాంకం అవుతుంది.

10. $f(x)$ అకరణీయ పూర్ణాంక సమాసంలోని బేసి ఘాతాల గుణకాల మొత్తం, సరి ఘాతాల గుణకాల మొత్తానికి సమానమైతే $f(x)$ కు $(x + 1)$ కారణాంకం అవుతుంది.

11. గణితాను గమన సిద్ధాంతం; ఒక ప్రవచనం $P(n)$

1) $n = 1$ అయితే ప్రవచనం నిజం,

2) $1, 2, \dots, n$ లకు నిజమైనప్పుడల్లా $(n + 1)$ కూడా నిజమైతే.. n అన్ని విలువలకు $P(n)$ నిజం.

12. ద్విపద సిద్ధాంతం; n ఒక సహజ సంఖ్య అయితే

$$(x + y)^n =$$

$${}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots +$$

$${}^nC_r x^{n-r} y^r + \dots + {}^nC_n y^n$$

ఇక్కడ ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \dots$ లను ద్విపద గుణకాలు అంటారు.

13. $(x + y)^n$ విస్తరణలో $(r + 1)$ వ పదం $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. శేష సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2$ ను కారణాంకాలుగా రాయండి?

Sol:

$$f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2$$

$$x = 1 \text{ అయితే } f(1) = 4(1)^4 - 12(1)^3 + 7(1)^2 + 3(1) - 2$$

$$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2$$

$$= 14 - 14 = 0$$

$$f(1) = 0 \text{ కాబట్టి } f(x) \text{కు } (x - 1) \text{ కారణాంకమవుతుంది.}$$

$$x = 2 \text{ అయితే, } f(2) = 4(2)^4 - 12(2)^3 + 7(2)^2 + 3(2) - 2$$

$$= 64 - 96 + 28 + 6 - 2$$

$$= 0$$

$f(x)$ నకు $(x - 2)$ కారణాంకమవుతుంది.

హార్మర్ సంక్షేపణ భాగహార పద్ధతి:

$f(x)$ లోని పదాల గుణకాలను తీసుకుంటే...

$x=1$	4	-12	7	3	-2
	0	4	-8	-1	2
$x=2$	4	-8	-1	2	0
	0	8	0	-2	
	4	0	-1	0	

దత్త సమాసం $f(x)$ కు కారణ రాశులు =

$$(x - 1)(x - 2)(4x^2 - 1)$$

$$= (x - 1)(x - 2)[(2x)^2 - 1^2]$$

$$= (x - 1)(x - 2)(2x + 1)(2x - 1)$$

2. $x = 0$ దగ్గర $ax^2 + bx + c$ విలువ -2 , $(x - 1)$ తో భాగిస్తే శేషం 3, $(x + 1)$ తో భాగిస్తే శేషం -3 అయ్యేటట్లు a, b, c విలువలను తెల్పుండి?

Sol:

$$\text{ఇచ్చిన సమీకరణం } f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$x = 0 \text{ అయితే } f(x) \text{ విలువ } = -2$$

$$a(0) + b(0) + c = -2$$

$$\therefore c = -2$$

$$f(x) \text{ను } (x - 1) \text{తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం } f(1) = 3$$

$$a(1)^2 + b(1) + c = +3$$

$$a + b - 2 = +3 \quad (\because c = -2)$$

$$a + b = +3 + 2$$

$$a + b = +5 \quad (1)$$

$$f(x) \text{ను } (x + 1) \text{తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం } f(-1) = -3$$

$$a(-1)^2 + b(-1) + c = -3$$

$$a - b - 2 = -3$$

$$a - b = -3 + 2$$

$$a - b = -1 \quad (2)$$

(1), (2)లను సాధిస్తే..

$$a + b = 5$$

$$a - b = -1$$

$$2a = 4$$

$$a = 4/2 = 2$$

$$(1) \text{ నుంచి } a + b = 5$$

$$2 + b = 5$$

$$b = 5 - 2 = 3$$

$$b = 3$$

$$\therefore a = 2, b = 3, c = -2$$

3. $\left(3x - \frac{5}{x^2}\right)^9$

విస్తరణలో x లేని పదం (స్థిర పదం)ను కనుక్కోండి?

Sol:

$$\left(3x - \frac{5}{x^2}\right)^9 \text{ విస్తరణలో } n = 9$$

$$x = 3x$$

$$y = -5/x^2$$

$$(x+y)^n \text{ విస్తరణలో } T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$$

$$= {}^9C_r (3x)^{9-r} \left(\frac{-5}{x^2}\right)^r$$

$$= {}^9C_r 3^{9-r} x^{9-r} (-5)^r \frac{1}{x^{2r}}$$

$${}^9C_r 3^{9-r} (-5)^r x^{9-r-2r}$$

$$x \text{ లేని పదం అంటే..}$$

$$x^{9-r-2r} = x^0 \text{ కావాలి.}$$

$$9-3r = 0$$

$$3r = 9$$

$$r = 9/3 = 3$$

$$r = 3 \text{ ను } T_{r+1} \text{ లో ప్రతిక్షేపిస్తే..}$$

$$\therefore \left(3x - \frac{5}{x^2}\right)^9 \text{ విస్తరణలో } x \text{ లేని పదం} =$$

$${}^9C_r 3^{9-r} (-5)^r$$

$$= {}^9C_3 3^{9-3} (-5)^3$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \times 3^6 \times (-5)^3$$

$$= -84 \times 3^6 \times 5^3$$

4. $x^2 + ax + b, x^2 + bx + a$ ($a \neq b$)లకు ఒక ఉమ్మడి కారణాంకముంటే... $a + b + 1 = 0$ అని చూపించండి?

Sol:

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$g(x) = x^2 + bx + a \text{ అనుకొంటే..}$$

$$f(x), g(x) \text{ లకు ఉమ్మడి కారణాంకం } (x-k) \text{ అనుకొంటే..}$$

$$f(x) \text{ కు } (x-k) \text{ కారణాంకం కాబట్టి}$$

$$f(k) = 0$$

$$k^2 + ak + b = 0$$

$$k^2 + ak + b = 0 \text{ _____ (1)}$$

$$g(x) \text{ కు } (x-k) \text{ కారణాంకం కాబట్టి}$$

$$g(k) = 0$$

$$k^2 + bk + a = 0 \text{ _____ (2)}$$

$$(1), (2) \text{ ల నుంచి}$$

$$k^2 + ak + b = k^2 + bk + a$$

$$ak + b = bk + a$$

$$ak - bk = a - b$$

$$k(a-b) = a-b$$

$$k = a-b/a-b$$

$$k = 1$$

$$\therefore k \text{ విలువను (1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే..}$$

$$k^2 + ak + b = 0$$

$$1^2 + a(1) + b = 0$$

$$\therefore a + b + 1 = 0$$

5. x లో ఒక వర్గ సమాసాన్ని $(x-1), (x-2), (x-3)$ లతో భాగిస్తే వరుసగా 1, 2, 4 శేషాలనిచ్చే ఒక వర్గ సమాసాన్ని కనుక్కోండి?

Sol:

$$\text{వర్గ సమాసం } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ అనుకొంటే..}$$

$$f(x) \text{ ను } (x-1) \text{ తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం } f(1) = 1$$

$$a(1)^2 + b(1) + c = 1$$

$$a + b + c = 1 \text{ _____ (1)}$$

$$f(x) \text{ ను } (x-2) \text{ తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం } f(2) = 2$$

$$a(2)^2 + b(2) + c = 2$$

$$4a + 2b + c = 2 \text{ _____ (2)}$$

$$f(x) \text{ ను } (x-3) \text{ తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం } f(3) = 4$$

$$a(3)^2 + b(3) + c = 4$$

$$9a + 3b + c = 4 \text{ _____ (3)}$$

$$(1), (2) \text{ ల నుంచి}$$

$$a + b + c = 1$$

$$4a + 2b + c = 2$$

$$\text{-----}$$

$$\text{తీసివేస్తే } -3a - b = -1$$

$$\text{(లేదా)}$$

$$3a + b = 1 \text{ _____ (4)}$$

$$(2), (3) \text{ ల నుంచి}$$

$$4a + 2b + c = 2$$

$$9a + 3b + c = 4$$

$$\text{-----}$$

$$\text{తీసివేస్తే } -5a - b = -2$$

$$\text{(లేదా)}$$

$$5a + b = 2 \text{ _____ (5)}$$

$$(4), (5) \text{ లను సాధిస్తే..}$$

$$3a + b = 1$$

$$5a + b = 2$$

$$\text{-----}$$

$$\text{తీసివేస్తే } -2a = -1$$

$$2a = 1$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$a = 1/2 \text{ ను (4) లో ప్రతిక్షేపిస్తే..}$$

$$3a + b = 1$$

$$3(1/2) + b = 1$$

$$b = 1 - 3/2$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

a, b విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$$a + b + c = 1$$

$$1/2 - 1/2 + c = 1$$

$$c = 1$$

∴ వర్గ సమాసం $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - mx + 5$ ను $(x-3)$ తో నిశ్శేషంగా భాగించేట్లు m విలువ ఎంత?

Sol:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - mx + 5$$

$$f(x) \text{ను } (x-3) \text{ నిశ్శేషంగా భాగిస్తే...} f(3) = 0$$

$$f(3) = 3^4 - 2(3)^3 + 3(3)^2 - m(3) + 5 = 0$$

$$81 - 54 + 27 - 3m + 5 = 0$$

$$59 - 3m = 0$$

$$3m = 59$$

$$m = 59/3$$

2. $x^2 - 11x + 10 > 0$ ను సాధించండి?

Sol:

$$x^2 - 11x + 10 > 0$$

$$x^2 - 10x - x + 10 > 0$$

$$x(x-10) - 1(x-10) > 0$$

$$(x-10)(x-1) > 0$$

$$x-10 > 0, (x-1) > 0$$

$$(x-\alpha)(x-\beta) > 0 \text{ సాధన } x \text{ విలువ}$$

$$\alpha, \beta \text{ల మధ్య ఉండదు. కాబట్టి}$$

$$x \text{ విలువ } 1, 10 \text{ల మధ్య ఉండదు.}$$

3. $x^2 - 6x + 5 < 0$ సాధించండి?

Sol:

$$x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$x^2 - 5x - x + 5 < 0$$

$$x(x-5) - 1(x-5) < 0$$

$$(x-1)(x-5) < 0$$

$$\therefore \text{ సాధన సమితి } = \{1 < x < 5\}$$

4. $\left(3x + \frac{1}{2x}\right)^7$ విస్తరణలో మధ్య పదాలను కనుక్కోండి?

Sol:

ద్విపద ఘాతం 7 కాబట్టి విస్తరణలో $7+1 = 8$ పదాలు ఉంటాయి. కాబట్టి 4, 5 పదాలు మధ్య పదాలు అవుతాయి.

$$(x+y)^n \text{ విస్తరణలో } T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$$

$$\left(3x + \frac{1}{2x}\right)^7 \text{ విస్తరణలో}$$

$$T_4 = T_{3+1} = {}^7C_3 (3x)^{7-3} \left(\frac{1}{2x}\right)^3$$

$${}^7C_3 \cdot 3^4 x^4 \cdot \frac{1}{2^3 x^3}$$

$$= {}^7C_3 \times \frac{81}{8} x$$

$$T_5 = T_{4+1} = {}^7C_4 (3x)^{7-4} \left(\frac{1}{2x}\right)^4$$

$$= {}^7C_4 \times 3^3 \times x^3 \times \frac{1}{2^4 x^4}$$

$$= {}^7C_4 \times \frac{27}{16x}$$

5. రెండు వరుస బేసి సంఖ్యల లబ్ధం 143 అయితే వాటిని కనుక్కోండి?

Sol:

$$\text{రెండు వరుస బేసి సంఖ్యలు} = x, x+2 \text{ అనుకొంటే..}$$

$$\text{లబ్ధం} = 143$$

$$x(x+2) = 143$$

$$x^2 + 2x - 143 = 0$$

$$x^2 + 13x - 11x - 143 = 0$$

$$x(x+13) - 11(x+13) = 0$$

$$(x+13)(x-11) = 0$$

$$x = -13 \text{ లేదా } x = 11$$

$$\therefore x = 11 \text{ అయితే వరుస బేసి సంఖ్యలు} = 11, 13$$

$$x = -13 \text{ అయితే వరుస బేసి సంఖ్యలు} = -13, -11$$

6. శేష సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించండి?

Sol:

నిర్వచనం: x చరరాశిగా గల అకరణీయ పూర్ణాంక సమాసం

$f(x)$ ను $(x-a)$ తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(a)$

నిరూపణ: x చరరాశిగా గల అకరణీయ పూర్ణాంక సమాసం $f(x)$

దీన్ని $(x-a)$ తో భాగిస్తే వచ్చే భాగఫలం $\phi(x)$, R శేషం అనుకొంటే..

$$f(x) = (x-a) \phi(x) + R$$

$$f(a) = (a-a) \phi(a) + R$$

$$f(a) = R$$

1 మార్కు ప్రశ్నలు

1. $\sqrt{3}x^2 + 9x + 6\sqrt{3} = 0$ వర్గ సమీకరణం మూలాల మొత్తం, లబ్ధాన్ని కనుక్కోండి?

Sol:

వర్గ సమీకరణం $\sqrt{3}x^2 + 9x + 6\sqrt{3} = 0$

$a = \sqrt{3}, b = 9, c = 6\sqrt{3}$

మూలాల మొత్తం = $\frac{-b}{a} = \frac{-9}{\sqrt{3}}$

$= \frac{-3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= -3\sqrt{3}$

మూలాల లబ్ధం = $\frac{c}{a} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$

2. $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$

మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం రాయండి?

Sol:

$\alpha = 2 + \sqrt{3}$

$\beta = 2 - \sqrt{3}$

$\alpha + \beta = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$

$\alpha\beta = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

$= 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$

\therefore వర్గ సమీకరణం $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

3. $x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ ను $(x-2)$ తో భాగిస్తే వచ్చే శేషమెంత?

Sol:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

$f(x)$ ను $(x-2)$ తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(2)$ అవుతుంది.

$\therefore f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4(2) - 5$

$= 8 - 12 + 8 - 5$

$= -1$

4. రెండు వరుస సంఖ్యల లబ్ధం 72 అయితే వాటిని కనుక్కోండి?

Sol:

రెండు వరుస సంఖ్యలు = $x, x + 1$ అనుకొంటే..

లబ్ధం = 72

$x(x+1) = 72$

$x^2 + x - 72 = 0$

$x^2 + 9x - 8x - 72 = 0$

$x(x+9) - 8(x+9) = 0$

$(x+9)(x-8) = 0$

$\therefore x = -9$ లేదా $x = 8$

$\therefore x = 8$ అయితే రెండు వరుస సంఖ్యలు = 8, 9

$x = -9$ అయితే రెండు వరుస సంఖ్యలు -9, -8

5. $3x^2 - 7x + 2 = 0$ సమీకరణం మూలాల స్వభావాన్ని తెల్పండి?

Sol:

సమీకరణం $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$a = 3, b = -7, c = 2$

విచక్షణ $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2$

$= 49 - 24$

$= 25$

$\Delta > 0$ కాబట్టి మూలాల వాస్తవాలు, అసమానాలు.

6. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^8$ విస్తరణలో 5వ పదం కనుక్కోండి?

Sol:

$(x+y)^n$ విస్తరణలో $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$

$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^8$ విస్తరణలో $T_{4+1} = T_5 = {}^8C_4 \left(\frac{x}{y}\right)^{8-4} \left(\frac{y}{x}\right)^4$

$= {}^8C_4 \times \frac{x^4}{y^4} \times \frac{y^4}{x^4}$

$= {}^8C_4$

5 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $x^2 - x - 6 = 0$ ను $y = x^2$ రేఖా చిత్రం సాయంతో సాధించండి?

Sol:

$x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$ వాస్తవ మూలాలు $y = x^2, y = x + 6$ అనే

వక్రాల ఖండన బిందువుల x నిరూపకాలు అవుతాయి.

$y = x^2$

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	1	4	9	1	4	9

$y = x + 6$

x	-2	3
y	4	9

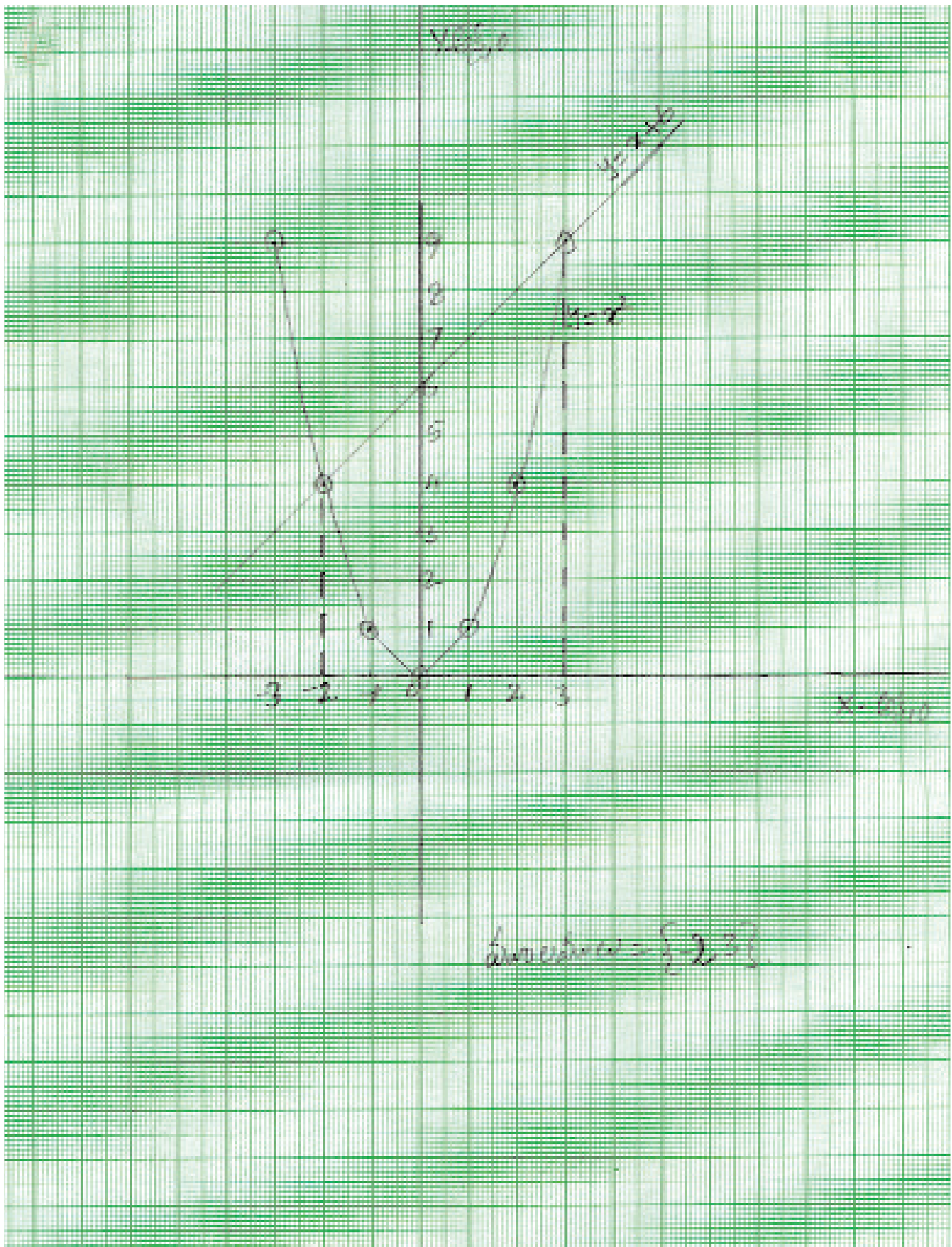
స్కేలు: x -అక్షం 1 సెం.మీ = 1 యూనిట్

y -అక్షం 1 సెం.మీ = 1 యూనిట్

గ్రాఫ్ ద్వారా $y = x^2, y = x + 6$ సరళరేఖల ఖండన బిందువులు

$(-2, 4), (3, 9)$

$\therefore x^2 - x - 6 = 0$ సమీకరణ మూలాలు = $\{-2, 3\}$



2. $y = x^2 - x - 12$ రేఖాచిత్ర సహాయంతో $x^2 - x - 12 = 0$ సాధించండి?

Sol:

$$y = x^2 - x - 12$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
-x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
-12	-12	-12	-12	-12	-12	-12	-12	-12	-12
y	8	0	-6	-10	-12	-12	-10	-6	0

స్కేలు: x-అక్షం 1 సెం.మీ = 1 యూనిట్

y-అక్షం 1 సెం.మీ = 2 యూనిట్

$(-4, 8), (-3, 0), (-2, -6), (-1, -10), (0, -12), (1, -12), (2, -10), (3, -6), (4, 0)$ బిందువులను గ్రాఫ్పై చిత్రించాలి. వాటిని మృదువైన వక్రంతో కలిపితే మనకు కావల్సిన రేఖాచిత్రం వస్తుంది.

x-అక్షం ఖండన బిందువులు $(4, 0), (-3, 0)$

\therefore సాధన సమితి విలువలు $x = 4, x = -3$

