

# వాస్తవ సంఖ్యలు

ముఖ్యాంశాలు:

1.  $x$  ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే  $x$  మాపం లేదా పరమ మూల్యం  $|x|$   
 $|x| = x, x > 0$   
 $= -x, x < 0$   
 $= 0, x = 0$  అని నిర్వచిస్తాం.

2.  $a$  ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య అయితే  $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

3.  $a$  ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య అయితే  $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$  లేదా  $x \leq -a$

4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$  ( $n$  అకరణీయ సంఖ్య)

5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} a^{m-n}$

## 4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1.  $lmn = 1$  అయితే  $\frac{1}{1+l+m^{-1}} + \frac{1}{1+m+n^{-1}} + \frac{1}{1+n+l^{-1}} = 1$

అని చూపండి?

sol:

$$1. \frac{1}{1+l+m^{-1}} = \frac{1}{1+l+\frac{1}{m}} \quad \left( \because a^{-1} = \frac{1}{a} \right)$$

$$= \frac{m}{m+lm+1}$$

$$= \frac{m}{m+\frac{1}{n}+1} \quad \left( \because lmn = 1 \right)$$

$$lm = \frac{1}{n}$$

$$= \frac{mn}{mn+1+n} \dots \dots \dots (1)$$

$$2. \frac{1}{1+m+n^{-1}} = \frac{1}{1+m+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{n}{n+mn+1} \dots \dots \dots (2)$$

$$3. \frac{1}{1+n+l^{-1}} = \frac{1}{1+n+mn} \dots \dots \dots (3) \quad \left( \because lmn = 1 \right)$$

$$mn = \frac{1}{l} = l^{-1}$$

(1) + (2) + (3) చేయగా..

$$L.H.S = \frac{1}{1+l+m^{-1}} + \frac{1}{1+m+n^{-1}} + \frac{1}{1+n+l^{-1}}$$

$$= \frac{mn}{mn+1+n} + \frac{n}{n+mn+1} + \frac{1}{1+n+mn}$$

$$= \frac{mn+n+1}{mn+1+n}$$

$$= 1 \text{ R.H.S.}$$

$$\therefore L.H.S. = R.H.S.$$

2.  $y = \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$  అయితే  $3y^3 - 9y = 10$  అని చూపండి?

sol:

$$y = \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

ఇరువైపుల ఘనం చేయగా

$$y^3 = \left( \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$y^3 = (\sqrt[3]{3})^3 + \left( \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^3 + 3\sqrt[3]{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left( \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)$$

$$= 3 + \frac{1}{3} + 3y$$

$$= \frac{9+1+9y}{3}$$

$$3y^3 = 10 + 9y$$

$$3y^3 - 9y = 10$$

3.  $\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}} + \frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}} = 1$  అని

చూపండి?

sol:

L.H.S

$$= \frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}} + \frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{x^a}{x^b}+\frac{x^a}{x^c}} + \frac{1}{1+\frac{x^b}{x^c}+\frac{x^b}{x^a}} + \frac{1}{1+\frac{x^c}{x^a}+\frac{x^c}{x^b}}$$

$$= \frac{x^b x^c}{x^b x^c + x^a x^c + x^a x^b} + \frac{x^c x^a}{x^c x^a + x^b x^a + x^b x^c} + \frac{x^a x^b}{x^a x^b + x^c x^b + x^c x^a}$$

$$= \frac{x^{b+c}}{x^{b+c} + x^{a+c} + x^{a+b}} + \frac{x^{c+a}}{x^{c+a} + x^{b+a} + x^{b+c}} + \frac{x^{a+b}}{x^{a+b} + x^{c+b} + x^{c+a}}$$

$$= \frac{x^{b+c} + x^{c+a} + x^{a+b}}{x^{b+c} + x^{a+c} + x^{a+b}}$$

$$= 1 \text{ R.H.S.}$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{2a}}{x-a}$  ను గణన చేయండి?

sol:

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{2a}}{x-a}$  లవాన్ని అకరణీయం చేయగా

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{2a}}{x-a} \times \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{2a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{2a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x+a})^2 - (\sqrt{2a})^2}{(x-a)(\sqrt{x+a} + \sqrt{2a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x+a-2a}{(x-a)(\sqrt{x+a} + \sqrt{2a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{x} - a}{(\cancel{x} - a)(\sqrt{x+a} + \sqrt{2a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{2a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+a} + \sqrt{2a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{2a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2a}}$$

## 2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1.  $a = x + \sqrt{x^2 + 1}$  అయితే  $x = \frac{1}{2}(a - a^{-1})$  అని చూపండి?

sol:

$$a = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$a - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$(a-x)^2 = (\sqrt{x^2 + 1})^2$$

$$a^2 - 2ax + x^2 = x^2 + 1$$

$$a^2 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1 = 2ax$$

$$a^2 - 1 = 2ax$$

$$\therefore x = \frac{a^2 - 1}{2a}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{a^2}{a} - \frac{1}{a} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [a - a^{-1}]$$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} a^{m-n}$  అని చూపండి?

sol:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{a^m - a^m}{a^n - a^n} = \frac{0}{0} \text{ అనిర్ధారకం.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \text{ లవహారాలను } (x-a) \text{ తో భాగించగా}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^m - a^m)/(x-a)}{(x^n - a^n)/(x-a)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (x^m - a^m)/(x-a)}{\lim_{x \rightarrow a} (x^n - a^n)/(x-a)}$$

$$= \frac{m \cdot a^{m-1}}{n \cdot a^{n-1}}$$

$$= \frac{m}{n} a^{m-1-n+1}$$

$$= \frac{m}{n} a^{m-n}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} a^{m-n}$$

3.  $a^{1/3} + b^{1/3} + c^{1/3} = 0$  అయితే  $(a+b+c)^3 = 27 abc$  అని చూపండి?

sol:

$$a^{1/3} + b^{1/3} + c^{1/3} = 0$$

$$a^{1/3} + b^{1/3} = -c^{1/3}$$

ఇరువైపుల ఘనం చేయగా

$$(a^{1/3} + b^{1/3})^3 = (-c^{1/3})^3 \quad \because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$(a^{1/3})^3 + (b^{1/3})^3 + 3a^{1/3}b^{1/3}(a^{1/3} + b^{1/3}) = -c$$

$$a + b + 3a^{1/3}b^{1/3}(-c^{1/3}) = -c$$

$$a + b - 3a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3} = -c$$

$$a + b + c = 3a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3}$$

ఇరువైపుల ఘనం చేయగా

$$(a+b+c)^3 = (3a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3})^3$$

$$(a+b+c)^3 = 27 abc$$

4.  $a^x = b^y = c^z$ ;  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$  అయితే  $y/x = \frac{2z}{x+z}$  అని చూపండి?

sol:

$$a^x = b^y = c^z = k \text{ అనుకొంటే...}$$

$$a^x = k$$

$$a = k^{1/x}$$

$$\text{అదేవిధంగా } b = k^{1/y}$$

$$c = k^{1/z}$$

$$\text{లెక్క ప్రకారం } \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$$b^2 = ac$$

$$\left( k^{1/y} \right)^2 = k^{1/x} \cdot k^{1/z}$$

$$k^{2/y} = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}$$

$$\therefore \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{2}{y} = \frac{z+x}{xz}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{xz}{z+x}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2z}{z+x}$$

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$  ను గణనం చేయండి?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = \frac{2^2 - 7 \times 2 + 10}{2 - 2}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ (అనిర్ధారకం)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$$

$$x^2 - 7x + 10 \text{ కు కారణదాహలు} = x^2 - 5x - 2x + 10$$

$$= x(x - 5) - 2(x - 5)$$

$$= (x - 2)(x - 5)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)}$$

$$= 2 - 5$$

$$= -3$$

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/4} - a^{1/4}}{x^4 - a^4}$  ను గణనం చేయండి?

sol:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} a^{m-n}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/4} - a^{1/4}}{x^4 - a^4} = \frac{1/4}{4} \cdot a^{\frac{1}{4}-4}$$

$$= \frac{1}{4 \times 4} a^{\frac{1-16}{4}}$$

$$= \frac{1}{16} a^{-\frac{15}{4}}$$

$$= \frac{1}{16a^{15/4}}$$

2.  $|2x - 3| \leq 7$  సాధించండి?

sol:

$$|x| \leq a \text{ సాధన } -a \leq x \leq a \text{ కాబట్టి}$$

$$|2x - 3| \leq 7 \text{ సాధన } -7 \leq 2x - 3 \leq 7$$

$$-7 + 3 \leq 2x - 3 + 3 \leq 7 + 3$$

$$-4 \leq 2x \leq 10$$

$$-\frac{4}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{10}{2}$$

$$\text{సాధన సమితి} = -2 \leq x \leq 5$$

3.  $|5p - 7| \geq 9$  సాధించండి?

sol:

$$|x| \geq a \text{ సాధన } x \geq a \text{ లేదా } x \leq -a \text{ కాబట్టి}$$

$$|5p - 7| \geq 9 \Rightarrow 5p - 7 \geq 9 \text{ లేదా } 5p - 7 \leq -9$$

$$5p \geq 9 + 7 \text{ లేదా } 5p \leq -9 + 7$$

$$p \geq 16/5 \text{ లేదా } p \leq -2/5$$

$$\therefore \text{సాధన} = p \geq 16/5 \text{ లేదా } p \leq -2/5$$

4.  $(x^{2/3})^p = x^2$  అయితే p ను కనుక్కోండి?

$$(x^{2/3})^p = x^2$$

$$x^{\frac{2p}{3}} = x^2 \Rightarrow \frac{2p}{3} = 2$$

$$p = 2 \times \frac{3}{2}$$

$$p = 3$$

5.  $x = a^p, y = a^q, x^q \cdot y^p = a^{2/r}$  అయితే pqr = 1 అని చూపండి?

sol:

$$x = a^p, y = a^q,$$

$$x^q \cdot y^p = a^{2/r}$$

$$x^q \cdot y^p = a^{2/r}$$

$$(a^p)^q \cdot (a^q)^p = a^{2/r}$$

$$a^{pq} \cdot a^{pq} = a^{2/r}$$

$$a^{pq + pq} = a^{2/r}$$

$$a^{2pq} = a^{2/r}$$

$$2pq = 2/r$$

$$pq = 1/r$$

$$pqr = 1$$