ప్రవచనాలు - సమితులు

1. ప్రవచనం:

సత్యం కాని, అసత్యం కాని ఏదో ఒకటి మాత్రమే అయ్యే వాక్యాన్ని ప్రవచనం అంటారు. ప్రవచనాలను p, q, r, ...లతో సూచిస్తారు.

సత్యమైన ప్రవచన సత్య విలువ Tతో, అసత్యమైన దాని సత్య విలువను F తోనూ సూచిస్తారు.

2. వ్యతిరేక ప్రవచనం:

ఒక ప్రవచనానికి ''కాదు'' అనే పదాన్ని చేర్చితే అది వ్యతిరేక ప్రవచనం అవుతుంది. p ఒక ప్రవచనం అయితే వ్యతిరేక ప్రవచనాన్ని ~pతో సూచిస్తాం.

3. సంయోజకాలు:

1. మరియు ($\wedge$) 2. లేదా ($\vee$) 3. అయితే ($\rightarrow$)

4. అయినప్పుడే ($\leftrightarrow$)

4. సంయుక్త ప్రవచనాలు:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను సంయోజకాలను ఉపయోగించి కలిపి రాస్తే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనాలను సంయుక్త ప్రవచనాలు అంటారు. అవి...

1. సముచ్ఛయం 2. వైకల్పికం 3. అనుషంగికం

4. ద్విముఖానుషంగికం

5. సముచ్ఛయం:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను ''మరియు'' అనే సంయోజకంతో కలిపితే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనం. p, qలు రెండు ప్రవచనాలైతే వాటి సముచ్ఛయాన్ని $p\wedge q$తో సూచిస్తాం. p, qలు రెండు సత్యాలైతే $p\wedge q$ సత్యం అవుతుంది.

సముచ్ఛయ సత్య పట్టిక

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

6. వైకల్పికం:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను ''లేదా'' అనే సంయోజకాన్ని ఉపయోగించి రాస్తే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనాన్ని వైకల్పికం అంటారు. p,qలు రెండు ప్రవచనాలైతే దాని వైకల్పికాన్ని $p\vee q$తో సూచిస్తాం. p, qలు రెండు అసత్యాలు అయితే $p\vee q$ అసత్యం అవుతుంది.

వైకల్పిక సత్య పట్టిక

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

7. అనుషంగికం:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను ''అయినచో'' అనే సంయోజకంతో కలిపితే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనాన్ని అనుషంగికం అంటారు.

p, qలు రెండు ప్రవచనాలైతే.. దాని అనుషంగికంను $p\Rightarrow q$తో సూచిస్తాం.

p సత్యం qఅసత్యమైన $p\rightarrow q$ అసత్యమవుతుంది.

$p\rightarrow q$లో pను దత్తాంశం qను సారాంశం అంటారు.

అనుషంగిక సత్య పట్టిక

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

8. ద్విముఖానుషంగికం:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను ''అయినప్పుడే'' అనే సంయోజకంతో కలిపితే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనాన్ని ద్విముఖానుషంగికం అంటారు. p,qలు రెండు ప్రవచనాలైతే వాటి ద్విముఖానుషంగికాన్ని $p\leftrightarrow q$తో సూచిస్తారు.p, qలు రెండూ సత్యాలైతే లేదా రెండూ అసత్యాలైనా వాటి ద్విముఖానుషంగికం సత్య విలువ సత్యం అవుతుంది.

ద్విముఖానుషంగిక సత్య పట్టిక

p	q	$p\leftrightarrow q$	$q\leftrightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

9. పునరుక్తి:

ఒక సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో అన్నీ Tలు ఉన్నట్లయితే అలాంటి ప్రవచనాన్ని పునరుక్తి అంటారు.

ఉదా: $p\vee(\sim p)$

10.విరోధాభాసం:

ఒక సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో అన్నీ Fలు ఉన్నట్లయితే అట్టి ప్రవచనాన్ని విరోధాభాసం అంటారు. **ఉదా:** $p \wedge (\sim p)$

11.పరిమాపకాలు:

పరిమాపకాలు 2 రకాలు.

1. అస్థిత్వ పరిమాపకం (∀) 2. సార్వత్రిక పరిమాపకం (∃)

12.ప్రవచనం విపర్యయం, విలోమం, ప్రతివర్తితం

1. $p \Rightarrow q$ ఒక నియత ప్రవచనమైతే దాని విపర్యయం ; $q \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow q$ నియత ప్రవచనం విలోమం ; $\sim p \Rightarrow \sim q$
3. $p \Rightarrow q$ నియత ప్రవచనం ప్రతివర్తితం ; $\sim q \Rightarrow \sim p$

13.నిరూపణ పద్ధతులు:

ఇవి మూడు రకాలు.

1. ప్రత్యక్ష నిరూపణ 2. పరోక్ష నిరూపణ

3. ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా అసత్య నిరూపణ

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ఒక నియత ప్రవచనం విపర్యయం దాని విలోమానికి తుల్యమని చూపించండి?

Sol:

$p \Rightarrow q$ ఒక ప్రవచనమైతే

$q \Rightarrow p \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$ అని చూపించాలి.

p	q	q⇒p	~p	~q	~p⇒~q
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

$\therefore q \Rightarrow p \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$

2. $[p \wedge (\sim q)] \wedge [(\sim p) \vee q]$ ఒక విరోధాభాసమని చూపించండి?

p	q	~p	~q	p∧(~q)	(~p)∨q	p∧(~q) ∧ (~p)∨q
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	F

పై సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో అన్నీ Fలు ఉన్నాయి.

$\therefore [p \wedge (\sim q)] \wedge [(\sim p) \vee q]$ ఒక విరోధభాసం అవుతుంది.

3. $p \wedge (\sim q) \Rightarrow p$ పునరుక్తి అని చూపించండి?

Sol:

p	q	~q	p∧(~q)	p∧(~q)⇒p
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

పై సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో అన్ని Tలు ఉన్నాయి. కాబట్టి $p \wedge (\sim q) \Rightarrow p$ ఒక పునరుక్తి అవుతుంది.

4. ప్రత్యక్ష నిరూపణ పద్ధతి అంటే ఏమిటి? x ఒక సరిసంఖ్య అయితే x^2 సరిసంఖ్య అవుతుందని చూపించండి?

Sol:

దత్తాంశంతో ప్రారంభించి, కొన్ని సోపానాలు ఏర్పరుస్తూ వాటికి కారణాలు వివరిస్తూ సారాంశాన్ని చేరే పద్ధతిని ప్రత్యక్ష నిరూపణ పద్ధతి అంటారు.

వరుస సంఖ్య	సోపానాలు	కారణాలు
1.	x సరిసంఖ్య	దత్తాంశం
2.	$x = 2K, K \in N$	సరిసంఖ్యల నిర్వచనం
3.	$x^2 = (2K)^2$ $x^2 = 4K^2$ $= 2(2K^2)$ $x^2 = 2L, L \in N$	ఇరువైపులా వర్గం చేస్తే $2K^2 = L$
4.	x^2 సరిసంఖ్య	సరిసంఖ్యల నిర్వచనం

రెండు మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ΔABCలో AB > AC అయితే ∠C > ∠Bనకు విపర్యయం, విలోమం, ప్రతివర్తితాలను రాయండి?

Sol:

ప్రవచనం: ΔABCలో AB > AC అయితే ∠C >∠B

విపర్యయం: ΔABCలో ∠C > ∠B అయితే AB > AC

విలోమం: ΔABCలో AB < AC అయితే ∠C < ∠B

ప్రతివర్తితం: ΔABCలో ∠C < ∠B అయితే AB < AC

2. సముచ్ఛయాన్ని నిర్వచించి సత్య పట్టిక రాయండి?
3. వైకల్పికాన్ని నిర్వచించి సత్య పట్టిక రాయండి?
4. అనుషంగికం నిర్వచించి సత్య పట్టిక రాయండి?
5. పునరుక్తి, విరోధభాసాలను నిర్వచించండి?

(2 నుంచి 5 ప్రశ్నల సమాధానాలు మొదటి పేజీలో ఉన్నాయి.)

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. $\sim(\sim p) = p$ అని చూపించండి?

p	~p	~(~p)
T	F	T
F	T	F

∴ ~(~p) = p

2. 4 × 5 = 20 లేదా 4 ÷ 2 = 2 సత్య విలువ తెల్పండి?

Sol:

4 × 5 = 20 సత్య విలువ T

4 ÷ 2 = 2 సత్య విలువ T

∴ 4 × 5 = 20 లేదా 4 ÷ 2 = 2 సత్య విలువ T

3. 5 × 4 = 20 ⇒ 5 + 2 = 8 సత్య విలువ తెల్పండి?

Sol:

5 × 4 = 20 సత్య విలువ T

5 + 2 = 8 సత్య విలువ F

∴ 5 × 4 = 20 ⇒ 5 + 2 = 8 సత్య విలువ F

4. "5 ఒక బేసి సంఖ్య ; 5 ధనాత్మకం" అనే ప్రవచనాలకు వైకల్పికాన్ని రాయండి?

Sol:

p : 5 ఒక బేసి సంఖ్య

q : 5 ధనాత్మకం

వైకల్పికం p∧q : 5 ఒక బేసి సంఖ్య లేదా 5 ధనాత్మకం.

5. p, qలు ఏవైనా రెండు ప్రవచనాలైతే p ∨ (~q) అనే సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టిక రాయండి?

Sol:

p	q	~q	p ∨ ~q
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

సమితులు

గుర్తుంచుకోవాల్సిన అంశాలు

A, Bలు రెండు సమితులు, x మూలకమైతే

1. A ∪ B = {x / x∈A లేదా x∈B}
2. A ∩ B = {x / x∈A మరియు x∈B}
3. A – B = {x / x∈A మరియు x∉B}
4. B – A {x/x∈B మరియు x∉A}
5. A ⊂ B, B ⊂ A అయితే A = B అవుతుంది.
6. x∉(A∪B) ⇒ x∉A మరియు x∉B
7. x∉(A∩B) ⇒ x∉A లేదా x∉B

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. A,B,Cలు మూడు సమితులైతే a∩(B∪C) = (A∩B)∪(A∩C) అని చూపించండి?

Sol:

A∩(B∪C) = (A∩B) ∪ (A∩C) అని చూపించడానికి

1) A∩(B∪C) ⊂ (A∩B) ∪ (A∩C),

2) (A∩B) ∪ (A∩C) ⊂ A∩(B∪C) అని చూపించాలి.

(1) x∈A ∩ (B∪C) ⇒ x∈A మరియు x∈(B∪C)

⇒ x∈A మరియు (x∈B లేదా x∈C)

⇒ (x∈A మరియు x∈B) లేదా (x∈A మరియు x∈C)

⇒ x∈(A∩B) లేదా x∈(A∩C)

⇒ x∈(A∩B) ∪ (A∩C)

∴ A∩(B∪C)లోని ప్రతి మూలకం (A∩B)∪(A∩C)లో ఉంటుంది. కాబట్టి

A∩(B∪C) ⊂ (A∩B) ∪ (A∩C) _______ (1)

(2) x∈(A∩B) ∪ (A∩C) ⇒ x∈(A∩B) లేదా x∈(A∩C)

⇒ (x∈A మరియు x∈B) లేదా (x∈A మరియు x∈C)

⇒ x∈A మరియు (x∈B లేదా x∈C)

⇒ x∈A మరియు x∈(B∪C)

⇒ x∈A∩(B∪C)

∴ (A∩B)∪(A∩C)లోని ప్రతి మూలకం A∩(B∪C)లో ఉంటుంది.

∴ (A∩B)∪(A∩C) ⊂ A∩(B∪C) _______ (2)

(1), (2)ల నుంచి A∩(B∪C) =

(A∩B) ∪ (A∩C) అవుతుంది.

2. మూలకోత్పత్తి ద్వారా A, B, Cలు మూడు సమితులైతే A– (B∩C) = (A–B) ∪ (A–C) అని చూపించండి?

Sol:

A–(B∩C) = (A–B) ∪ (A–C) అని చూపించడానికి

1) A–(B∩C) ⊂ (A–B) ∪ (A–C)

2) (A–B) ∪ (A–C) ⊂ A–(B∩C) అని చూపించాలి.

(1) x∈(A–(B∩C)) ⇒ x∈A మరియు x∉(B∩C)

⇒ x∈A మరియు (x∉B లేదా x∉C)

⇒ (x∈A మరియు x∉B) లేదా

(x∈A మరియు x∉C)

⇒ x∈(A–B) లేదా x∈(A–C)

⇒ x∈(A–B) ∪ (A–C)

∴ A–(B∩C)లోని ప్రతి మూలకం (A–B)∪(A–C)లో ఉంటుంది.

∴ A–(B∩C) ⊂ (A–B) ∪ (A–C) ——— (1)

(2) $x \in (A-B) \cup (A-C) \Rightarrow x \in (A-B)$ లేదా $x \in (A-C)$

$\Rightarrow (x \in A$ మరియు $x \notin B)$

లేదా $(x \in A$ మరియు $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in A$ మరియు $(x \notin B$ లేదా $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in A$ మరియు $x \notin (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A-(B \cap C)$

$\therefore$ $(A-B)\cup(A-C)$లోని ప్రతి మూలకం $A-(B \cap C)$లో ఉంటుంది.

$\therefore$ $(A-B)\cup(A-C) \subset A-(B \cap C)$ ——— (2)

(1), (2)ల నుంచి $A-(B \cap C) = (A-B)\cup(A-C)$

3. μ అనే సార్వత్రిక సమితికి A, Bలు రెండు ఉపసమితులైతే $(A \cup B)' = A' \cap B'$ అని చూపించండి?

Sol:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ అని చూపించడానికి

1) $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$

2) $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$ అని చూపించాలి.

(1) $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in (\mu-(A \cup B))$

$\Rightarrow x \in \mu$ మరియు $x \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow x \in \mu$ మరియు $(x \notin A$ మరియు $x \notin B)$

$\Rightarrow (x \in \mu$ మరియు $x \notin A)$ మరియు

$(x \in \mu$ మరియు $x \notin B)$

$\Rightarrow x \in (\mu-A)$ మరియు $x \in (\mu-B)$

$\Rightarrow x \in A'$ మరియు $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cap B'$

$\therefore$ $(A \cup B)'$లోని ప్రతి మూలకం $A' \cap B'$లో ఉంటుంది.

$\therefore$ $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$ ——— (1)

(2) $x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A'$ మరియు $x \in B'$

$\Rightarrow x \in (\mu-A)$ మరియు $x \in (\mu-B)$

$\Rightarrow (x \in \mu$ మరియు $x \notin A)$ మరియు

$(x \in \mu$ మరియు $x \notin B)$

$\Rightarrow x \in \mu$ మరియు $(x \notin A$ మరియు $x \notin B)$

$\Rightarrow x \in \mu$ మరియు $x \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow x \in \mu - (A \cup B)$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$

$\therefore$ $A' \cap B'$లోని ప్రతి మూలకం $(A \cup B)'$లో ఉంటుంది.

$\therefore$ $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$ ——— (2)

(1), (2)ల నుంచి $(A \cup B)' = A' \cap B'$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. μ ఒక సార్వత్రిక సమితికి A, Bలు రెండు ఉపసమితులైతే $A \cap B = A-B' = B-A'$ అని చూపించండి?

Sol:

$A-B' = \{x ; x \in A$ మరియు $x \notin B'\}$

$= \{x ; x \in A$ మరియు $x \in B\}$

$= A \cap B$

అదేవిధంగా $B-A' = \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin A'\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \in A\}$

$= \{x ; x \in A$ మరియు $x \in B\}$

$= A \cap B$

$\therefore$ $A \cap B = A-B' = B-A'$

2. A, Bలు రెండు సమితులైతే $A'-B' = B-A$ అని చూపించండి?

Sol:

$A'-B' = \{x ; x \in A'$ మరియు $x \notin B'\}$

$= \{x ; x \notin (A')'$ మరియు $x \in (B')'\}$

$= \{x ; x \notin A$ మరియు $x \in B\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin A\}$

$= B-A$

3. $A \subset B$ అయితే $B' \subset A'$ అని చూపించండి?

Sol:

$x \in B' \Rightarrow x \notin (B')'$

$\Rightarrow x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A$ ($\because A \subset B$)

$\Rightarrow x \in A'$

$\therefore$ B'లోని ప్రతి మూలకం A'లో ఉంటుంది.

$\therefore$ $B' \subset A'$

4. $A \cap B' = A-B$ అని చూపించండి?

Sol:

$A \cap B' = \{x ; x \in A$ మరియు $x \notin B'\}$

$= \{x ; x \in A$ మరియు $x \notin B\}$

$= \{x ; x \in A-B\}$

$A \cap B' = A-B$

5. A, Bలు ఏవైనా రెండు సమితులైతే.. $A'-B' = B-A$ అని చూపించండి?

Sol:

$A'-B' = \{x ; x \in A'$ మరియు $x \notin B'\}$

$= \{x ; x \in A'$ మరియు $x \in B\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \in A'\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin A\}$

$= \{x ; x \in B-A\}$

$\therefore$ $A'-B' = B-A$

6. $A \cap B = \varnothing$ అయితే $B \cap A' = B$ చూపించండి?

Sol:

$B \cap A' = \{x ; x \in B$ మరియు $x \in A'\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin (A')'\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin A\}$

$= \{x ; x \in B\}$ ($\because A \cap B = \varnothing$)

$B \cap A' = B$

1 మార్కు ప్రశ్నలు

1. $n(A\cup B) = 51$, $n(A) = 20$, $n(B) = 44$ అయితే $n(A\cap B)$ విలువ ఎంత?

Sol:

$n(A\cup B) = 51$
$n(A) = 20$
$n(B) = 44$
$n(A\cap B) = n(A) + n(B) - n(A\cup B)$
$= 20 + 44 - 51$
$= 13$

2. A ఒక సమితి అయితే $(A')' = A$ అని చూపించండి?

Sol:

$x\in (A')' \Rightarrow x\notin A'$
$\Rightarrow x\in A$
$\therefore (A')' \subset A$ ——— (1)
$x\in A \Rightarrow x\notin A'$
$\Rightarrow x\in (A')'$
$\therefore A \subset (A')'$ ——— (2)
(1), (2)ల నుంచి $(A')' = A$

3. $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{3, 4, 5\}$ అయితే $A\Delta B$ కనుక్కోండి?

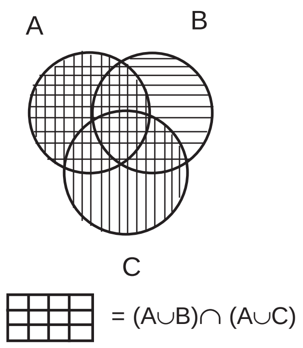
Sol:

$A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$
$A - B = \{1, 2, \not{3}\} - \{3, 4, 5\}$
$= \{1, 2\}$
$B - A = \{\not{3}, 4, 5\} - \{1, 2, 3\}$
$= \{4, 5\}$
$A\Delta B = \{1, 2\} \cup \{4, 5\}$
$= \{1, 2, 4, 5\}$

4. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$నకు సమితి నిర్మాణ రూపం రాయండి?

Sol:

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$A = \{x/x\in z, -3 \le z \le 3\}$

5. $(A\cup B) \cap (A\cup C)$ వెన్ చిత్రంలో చూపించండి?

Sol: