శ్రేఢులు

అంకశ్రేఢి (A.P): మొదటి పదం మినహా మిగితా పదాలన్నీ దాని పూర్వ పదానికి ఒక స్థిర సంఖ్యను కలిపితే ఏర్పడిన సంఖ్యల వరుస లను అంకశ్రేఢులంటారు (A.P). ఈ కలిపిన స్థిర సంఖ్యను పదాంత రం (d) అని, మొదటి పదం (a)ను t_1తో సూచిస్తాం.
$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$... etc.,

అంకశ్రేఢి సాధారణ రూపం: మొదటి పదం a, పదాంతరం d అయితే

a, a+d, a+2d, ... $a+\overline{n-1}d$

అంకశ్రేఢిలో nవ పదం $t_n = a+(n-1)d$
where $d = t_2-t_1 = t_3-t_2$ = etc.,

అంకశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తం:

అంకశ్రేఢిలోని 'n'వ పదాల మొత్తం $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

(లేదా)

$= \frac{n}{2}[a+l]$

where l = చివరి పదం

అంకమధ్యమం (A.M): a, b, cలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే bను a, bల అంకమధ్యమం అంటారు.

$b = \frac{a+c}{2}$

1. 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తం = $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. 'n' సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం $\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. 'n' సహజ సంఖ్యల ఘనాల మొత్తం $\Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\Sigma n)^2$

గుణశ్రేఢి (G.P): మొదటి పదం తప్ప మిగితా పదాలన్నీ దానికి ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర నిష్పత్తిలో ఉన్న శ్రేఢిని గుణశ్రేఢి అంటా రు. ఈ స్థిర నిష్పత్తిని సామాన్య నిష్పత్తి (r) అంటారు.

$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2}$ = etc.,

గుణశ్రేఢి సాధారణ రూపం: మొదటి పదం a, సామాన్య నిష్పత్తి 'r' అయితే a, ar, ar^2, ar^3, ...ar^{n-1}
గుణశ్రేఢిలో 'n'వ పదం $t_n = ar^{n-1}$

గుణశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తం:

గుణశ్రేఢిలోని 'n' పదాల మొత్తం $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, (r<1)$

(లేదా)

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, (r>1)$

గుణశ్రేఢిలో పదాల సంఖ్య అపరిమితమైతే.. దాన్ని అనంత గుణశ్రేఢి అంటారు.

అనంత గుణశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తం $S_\alpha = \frac{a}{1-r}$

గుణమధ్యమం (G.M): a, b, cలు గుణశ్రేఢిలో ఉంటే.. bను a, cల గుణమధ్యమం అంటారు.

$b = \sqrt{ac}$

హరాత్మక శ్రేఢి (H.P): ఇచ్చిన శ్రేఢిలో ప్రతి పదం వ్యుత్క్రమ్యం (విలో మాలు) అంకశ్రేఢిలో ఉన్నట్లయితే... ఆ శ్రేఢిని హరాత్మక శ్రేఢి అంటా రు. అంకశ్రేఢి విలోమాలు హరాత్మక శ్రేఢి.

హరాత్మక శ్రేఢిలో 'n'వ పదం $t_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$

హరాత్మక శ్రేఢిలో 'n' పదాల మొత్తానికి సూత్రం లేదు.

హరాత్మక మధ్యమం (H.M):

a, b, cలు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటే.. bను a, cల హరాత్మక మధ్యమం అంటారు.

$b = \frac{2ac}{a+c}$

a, b, cల అంకమధ్యమం A, గుణమధ్యమం G, హరాత్మక మధ్యమం H అయితే... $G^2 = A.H$ అవుతుంది, $A \geq G \geq H$

A, G, Hలు గుణశ్రేఢిలో ఉంటాయి.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. మొదట 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తం S_1, వర్గాల మొత్తం S_2, ఘనాల మొత్తం S_3 అయితే $9S_2^2 = S_3(1+8S_1)$ అని చూపించండి?

Sol:

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తం $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం

$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల ఘనాల మొత్తం

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S_3(1+8S_1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[1+\cancel{8}^{4}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}\right]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}[1+4n(n+1)]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}(1+4n^2+4n)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}[(2n)^2+2.2n+1]$$

$$S_3(1+8S_1)^2 = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{4}$$

R.H.S.లోని లవ, హారాలను 9తో గుణిస్తే..

$$S_3(1+8S_1)^2 = \frac{9n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{9\times4}$$

$$= 9\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^2$$

$= 9S^2{}_2$

$\therefore S_3\ (1+8S_1)^2 = 9S_2{}^2$

2. 0.5 + 0.55 + 0.555 +...... శ్రేఢిలో 'n' పదాల మొత్తాన్ని కనుక్కోండి?

Sol:

S_n = 0.5 + 0.55 + 0.555 +.......n పదాలు

= 5[0.1 + 0.11 + 0.111 +.......n పదాలు]

= 5[1/10 + 11/100 + 111/1000 +.......n పదాలు]

9తో గుణించి భాగిస్తే...

= 5/9[9/10 + 99/100 + 999/1000 +.......n పదాలు]

= 5/9[(1– 1/10) + (1– 1/100) + (1– 1/1000) +......n పదాలు)]

= 5/9[1 + 1 + 1 +.....n పదాలు) – (1/10 + 1/100 + 1/1000 +......n పదాలు)]

= 5/9[n–(1/10 + 1/10^2 + 1/10^3 +.......n పదాలు)]

$$= \frac{5}{9}\left[n-\frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[n-\frac{1}{\cancel{10}}\times\frac{\cancel{10}}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{9n-\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{9}\right]$$

$$= \frac{5}{81}\left[9n-\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$$

3. 1.4 + 3.7 + 5.10 +....... శ్రేఢిలో n పదాల మొత్తం కనుక్కోండి?

Sol:

దత్తశ్రేఢి 1.4 + 3.7 + 5.10 +.......

దత్తశ్రేఢిలో ప్రతి పదానికి రెండు కారణాంకాలు ఉన్నాయి.

ప్రతి పదంలోని మొదటి కారణాంకాలను వరుసగా రాస్తే..

1, 3, 5, 7, ... ఇవి అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి.

a = 1, d = 2

t_n = a+(n–1)d

= 1+(n–1)2

= 1 + 2n–2

= 2n – 1

ఇదేవిధంగా రెండో కారణాంకాలను వరుసగా రాస్తే..

4, 7, 10, ... అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి.

a = 4, d = 3

t_n = 4+(n–1)3

= 4 + 3n – 3

= 3n + 1

దత్త శ్రేఢిలో nవ పదం T_n = (2n–1) (3n+1)

=$6n^2$ – n – 1

దత్త శ్రేఢిలో n పదాల మొత్తం $S_n = \Sigma T_n$

= $\Sigma(6n^2 – n – 1)$

= $(6\Sigma n^2 – \Sigma n – \Sigma 1)$

$$= \frac{\cancel{6}n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}} - \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)-n(n+1)-2n}{2}$$

$$\frac{n}{2}[2(n+1)(2n+1)-(n+1)-2]$$

$$\frac{n}{2}[4n^2+2n+4n+2-n-1-2]$$

$$\frac{n}{2}[4n^2+5n-1]$$

4. (b+c), (c+a), (a+b)లు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటే.. 1/a², 1/b², 1/c²లు కూడా హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటాయని చూపించండి?

Sol:

(b+c), (c+a), (a+b)లు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటే.. 1/b+c,

1/c+a, 1/a+bలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటాయి.

పదాంతరం $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}$$

$$\frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c+a-a-b}{(c+a)(a+b)}$$

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c-b}{(c+a)(a+b)}$$

$$\frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{a+b}$$

(a+b) (b–a) = (b+c) (c–b)

(or)

(b+a) (b–a) = (c+b) (c–b)

$b^2 - a^2 = c^2 - b^2$

$2b^2 = a^2 + c^2$

$\therefore$ a^2, b^2 c^2లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటాయి.

$\therefore \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ లు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటాయి.

5. 1/12, 1/42 ల మధ్య 4 హరాత్మక మధ్యమాలు ఉంచండి?

Sol:

1/12, 1/42ల మధ్య హరాత్మక మధ్యమాలు = $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$ అనుకొంటే..

$\therefore \frac{1}{12}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \frac{1}{42}$ అనేది హరాత్మక శ్రేఢి.

హరాత్మక శ్రేఢిలోని విలోమాలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటాయి. కాబట్టి 12, x_1, x_2, x_3, x_4, 42లు అంకశ్రేఢి.

a = 12

$t_6 = 42$

a + 5d = 42

12 + 5d = 42

5d = 42 – 12

5d = 30

d = 30/5 = 6

$\therefore$ x_1 = a+d

= 12+6 = 18

x_2 = a+2d = 12+2×6 = 24

x_3 = a+3d = 12+3×6 = 30

x_4 = a+4d = 12+4×6 = 36

$\therefore$ అంకశ్రేఢి = 12, 18, 24, 30, 36, 42

$\therefore$ హరాత్మక శ్రేఢి = 1/12, 1/18, 1/24, 1/30, 1/36, 1/42

హరాత్మక మధ్యమాలు = 1/18, 1/24, 1/30, 1/36

6. రెండు సంఖ్యల A.M., G.M., H.M.,లు వరుసగా A, G, H అయితే A ≥ G ≥ H అని చూపించండి?

Sol:

రెండు సంఖ్యలు = a, b అనుకొంటే..

a, bల అంకమధ్యమం (A.M) = A = a+b/2

a, bల గుణమధ్యమం (G.M) = $G = \sqrt{ab}$

a, bల హరాత్మక మధ్యమం (H.M) = $H = \frac{2ab}{a+b}$

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{ab}}{1}$$

$$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$A - G = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

$\therefore A - G \geq 0$

$A \geq G$ —— (1)

$$G - H = \frac{\sqrt{ab}}{1} - \frac{2ab}{a+b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2\sqrt{ab}.\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left[a+b-2\sqrt{ab}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$ ($\because$a,b లు ధనాత్మకాలు)

$\therefore G - H \geq 0$

$G \geq H$ ____ (2)

(1), (2)ల నుంచి $A \geq G \geq H$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ఒక అంకశ్రేఢిలో 8వ పదం 17, 19వ పదం 39 అయితే 25వ పదం కనుక్కోండి?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో 8వ పదం t_8 = 17

a + 7d = 17 _____ (1)

అంకశ్రేఢిలో 19వ పదం t_{19} = 39

a + 18d = 39 _____ (2)

(1), (2)లను సాధిస్తే..

$\cancel{a} + 7d = 17$

$\cancel{a} + 18d = 39$

$- \quad - \quad -$

తీసివేస్తే $-11d = -22$

$d = 22/11 = 2$

(1) నుంచి $a + 7d = 17$

$a + 7(2) = 17$

$a = 17-14$

$a = 3$

అంకశ్రేఢిలో 25వ పదం $t_{25} = a + 24d$

$= 3 + 24(2)$

$= 3 + 48$

$= 51$

2. 4, 64ల మధ్య 3 గుణమధ్యమాలు ఉంచండి?

Sol:

4, 64ల మధ్య గుణమధ్యమాలు = g_1, g_2, g_3 అనుకొంటే..

$\therefore$ శ్రేఢి = 4, g_1, g_2, g_3, 64(గుణశ్రేఢి)

$a = 4$

$t_5 = 64$

$ar^4 = 64$

$4r^4 = 64$

$r^4 = 64/4$

$r^4 = 16$

$r^4 = 2^4$

$\therefore r = 2$

$a = 4, r = 2$ అయితే

$g_1 = ar = 4\times2 = 8$

$g_2 = ar^2 = 4 \times 2^2 = 16$

$g_3 = ar^3 = 4 \times 2^3 = 32$

$\therefore$ 4, 6ల మధ్య గుణమధ్యమాలు = 8, 16, 32

3. అంకశ్రేఢిలో మొదటి 'n' పదాల మొత్తం $2n + 3n^2$ అయితే 'r'వ పదాన్ని కనుక్కోండి?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో 'n' పదాల మొత్తం $S_n = 2n + 3n^2$

'n'వ పదం $t_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2n + 3n^2) - [2(n-1) + 3(n-1)^2]$

$= (2n + 3n^2) - [2n-2 + 3(n^2-2n+1)]$

$= \cancel{2n} + \cancel{3n^2} - \cancel{2n} + 2 - \cancel{3n^2} + 6n - 3$

అంకశ్రేఢిలో 'n'వ పదం = $6n-1$

$\therefore$ అంకశ్రేఢిలో 'r'వ పదం = $6r-1$

4. m, nల మధ్య g_1, g_2, g_3, గుణమధ్యమాలుంటే... $g_1 g_3 = g_2^2 = mn$ అని చూపించండి?

Sol.

గుణశ్రేఢి = m, g_1, g_2, g_3, n

నిష్పత్తి సమానం కాబట్టి

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \frac{t_5}{t_4}$$

$$\frac{g_1}{m} = \frac{g_2}{g_1} = \frac{g_3}{g_2} = \frac{n}{g_3}$$

మొదటి, చివరివాటి నుంచి

$$\therefore \frac{g_1}{m} = \frac{n}{g_3}$$

$g_1g_3 = mn$ —— (1)

మధ్య పదాల నుంచి

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{g_3}{g_2}$$

$g_2^2 = g_1g_3$ —— (2)

(1), (2)ల నుంచి

$g_1g_3 = g^2_2 = mn$

5. ఒక అంకశ్రేఢిలోని మూడు వరుస పదాల మొత్తం, లబ్ధాలు వరుసగా 12, 48 అయితే.. ఆ పదాలను రాయండి?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదాలు = $a-d, a, a+d$ అనుకొంటే..

వాటి మొత్తం = 12

$a-d + a + a + d = 12$

$3a = 12$

$a = 12/3$

$a = 4$

లబ్ధం = 48

$(a-d)\, a\, (a+d) = 48$

$a(a^2 - d^2) = 48$

$4(4^2 - d^2) = 48$

$16 - d^2 = 48/4$

$16 - 12 = d^2$

$d = \sqrt{4} = \pm2$

$\therefore a = 4, d = 2$ అయితే మూడు వరుస పదాలు = 2, 4, 6

$a = 4, d = -2$ అయితే మూడు వరుస పదాలు = 6, 4, 2

6. అంకశ్రేఢిలో 7వ పదానికి 7 రెట్లు, 11వ పదానికి 11 రెట్లకు సమానమైన 18వ పదం సున్న అని చూపండి?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో 7వ పదానికి 7 రెట్లు = 11వ పదానికి 11 రెట్లు

$7\, t_7 = 11\, t_{11}$

$7(a+6d) = 11(a + 10d)$

7a + 42d = 11a + 110d
42d – 110d = 11a – 7a
–68d = 4a
4a + 68d = 0
4(a + 17d) = 0
(or)
a + 17d = 0
t_{18} = 10
∴ అంకశ్రేఢిలో 18వ పదం = 0

1 మార్కు ప్రశ్నలు

1. $\frac{-2}{7}, x, -7/2$ వరుస సంఖ్యలు గుణశ్రేఢిలో ఉంటేx విలువెంత?

Sol:

$\frac{-2}{7}, x, -7/2$ గుణశ్రేఢిలో ఉన్నాయి కాబట్టి

సామాన్య నిష్పత్తి $\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2}$

$$\frac{x}{-2/7} = \frac{-7/2}{x}$$

$$x^2 = \left(\frac{-7}{2}\right) \times \left(\frac{-2}{7}\right)$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{2}{7}$$

x = √1
x = ±1

2. 5, 2, –1, ... అంకశ్రేఢిలో ఎన్నో పదం –28 అవుతుంది?

Sol:

అంకశ్రేఢి = 5, 2, –1, ...
a = 5
d = 2–5 = –3
'n'వ పదం t_n = –28
a + (n–1)d = –28
5 + (n–1) (–3) = –28
5 – 3n + 3 = –28
8 – 3n = –28
8 + 28 = 3n
3n = 36
n = 36/3
n = 12
∴ శ్రేఢిలో 12వ పదం –28 అవుతుంది.

3. గుణశ్రేఢి సామాన్య నిష్పత్తి –4/5 అనంతపదాల మొత్తం 80/9 అయితే మొదటి పదమెంత?

Sol:

గుణశ్రేఢి సామాన్య నిష్పత్తి r = –4/5
అనంత పదాల మొత్తం S_∞ = 80/9

$$\frac{a}{1-r} = \frac{80}{9}$$

$$\frac{a}{1-\left(-4/5\right)} = \frac{80}{9}$$

$$\frac{a}{1+4/5} = \frac{80}{9}$$

$$\frac{a}{9/5} = \frac{80}{9}$$

$$a = \frac{\overset{16}{\cancel{80}}}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{9}}{\cancel{5}}$$

a = 16

4. ఒక అంకశ్రేఢిలో *l* = 8, n = 8, S_8 = –20 అయితే a విలువెంత?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో *l* = 8
n = 8
S_8 = –20

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l) \qquad S_8 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}}(a+8)$$

–20 = 4(a+8)
–20 = 4a + 32
4a = –20 –32
4a = –52

$$a = \frac{-52}{4}$$

a = –13

5. 1 + 2 + 2^2 + 2^3 +....... శ్రేఢిలో 10వ పదాల మొత్తమెంత?

Sol:

1 + 2 + 2^2 + 2^3 +........ 10 పదాలు

a = 1
r = 2, n = 10

10 పదాల మొత్తం $S_{10} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$$= \frac{1(2^{10}-1)}{2-1} = 2^{10} - 1$$

6. √3, √6, 2√3, 2√6, ... శ్రేఢిలో 8వ పదం రాయండి?

Sol:

√3, √6, 2√3, 2√6, ... శ్రేఢిలో నిష్పత్తి సమానం కాబట్టి ఇది గుణశ్రేఢి.

a = √3

$$r = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

8వ పదం $t_8 = ar^7$
$= \sqrt{3}(\sqrt{2})^7$