

త్రికోణమితి

ముఖ్యాంశాలు:

త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలకు, వాటి భుజాలకు గల సంబంధాన్ని త్రికోణమితి అంటారు. త్రిభుజ భుజాలకు, వాటి కోణాలకు మధ్య గల సంబంధాన్ని హిప్పార్కస్ 140 B.C లో ఆవిష్కరించాడు.

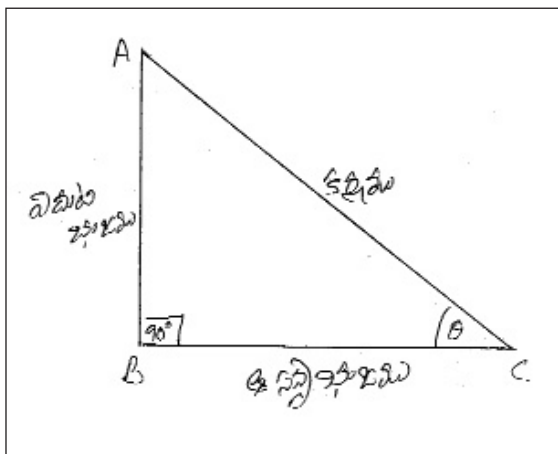
కోణం: రెండు కిరణాల సమ్మేళనాన్ని కోణం అంటారు. కోణాన్ని మూడు పద్ధతుల ద్వారా కొలుస్తారు.

పద్ధతి	ప్రమాణం
1. షష్ఠాంశమానం(ఆంగ్ల పద్ధతి)	- డిగ్రీ
2. శతాంశమానం(ఫ్రెంచి పద్ధతి)	- గ్రేడు
3. వర్తులమానం లేదా రేడియన్ మానం	- రేడియన్

గమనిక:

- 90 డిగ్రీలు = 100 గ్రేడ్లు = $\pi/2$ రేడియన్లు
- 1 రేడియన్ = $57^{\circ}16'22''$ (57 డిగ్రీల 16 నిమిషాల 22 సెకన్లు)

త్రికోణమితి నిపుత్తులు:



- $\sin \theta = \text{ఎదుటి భుజం/కర్ణం} = AB/AC$
- $\cos \theta = \text{ఆసన్నభుజం/కర్ణం} = BC/AC$
- $\tan \theta = \text{ఎదుటి భుజం/ఆసన్నభుజం} = AB/BC$
- $\csc \theta = \text{cosec} \theta = \text{కర్ణం/ఎదుటి భుజం} = AC/AB$
- $\sec \theta = \text{కర్ణం/ఆసన్నభుజం} = AC/BC$
- $\cot \theta = \text{ఆసన్నభుజం/ఎదుటి భుజం} = BC/AB$

సూత్రాలు:

- $\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} \Rightarrow \sin \theta \times \csc \theta = 1$
- $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \Rightarrow \cos \theta \times \sec \theta = 1$
- $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \Rightarrow \tan \theta \times \cot \theta = 1$
- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$
- $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$

$$13. \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$14. \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$15. \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$16. \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$17. \tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

త్రికోణమితి నిపుత్తి విలువలు:

$$1. \sin 0^\circ = \cos 90^\circ = 0$$

$$2. \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$3. \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4. \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5. \sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$$

గమనిక:

$$1. \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$2. \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$3. \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ లను ఉపయోగించి 'θ' విలువలను కనుక్కోవచ్చు.}$$

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

$$1. \frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \text{ అని చూపించండి?}$$

Sol:

We know that

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{(\tan \theta + \sec \theta) - (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)}{\tan \theta - \sec \theta + 1} \\ &= \frac{(\tan \theta + \sec \theta) - (\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta)}{\tan \theta - \sec \theta + 1} \\ &= \frac{(\tan \theta + \sec \theta)[1 - (\sec \theta - \tan \theta)]}{\tan \theta - \sec \theta + 1} \\ &= \frac{(\tan \theta + \sec \theta)(1 - \sec \theta + \tan \theta)}{\tan \theta - \sec \theta + 1} \\ &= \tan \theta + \sec \theta \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \left(\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ and } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

$$= \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta}$$

= R.H.S
 \therefore L.H.S = R.H.S

2. $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = P$ అయితే $(P^2+1) \cos \theta = (P^2-1)$ అని చూపించండి?

Sol:

We know that

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta) = 1$$

$$\text{given that } \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = p \text{ ---- (1)}$$

$$\therefore p(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta) = 1$$

$$\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = 1/p \text{ ---- (2)}$$

(1), (2)లను సాధిస్తే..

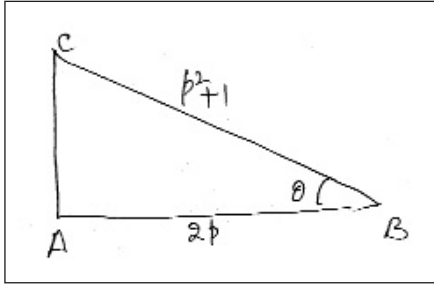
$$\operatorname{cosec} \theta + \cancel{\cot \theta} = p$$

$$\operatorname{cosec} \theta - \cancel{\cot \theta} = \frac{1}{p}$$

$$2 \operatorname{cosec} \theta = p + \frac{1}{p}$$

$$2 \operatorname{cosec} \theta = \frac{p^2 + 1}{p}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{p^2 + 1}{2p}$$



$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{కర్ణం/అసన్నభుజం}}{AB} = \frac{BC}{AB} = \frac{p^2 + 1}{2p}$$

ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$= (p^2 + 1)^2 - (2p)^2$$

$$= p^2 + 1 + 2p^2 - 4p^2$$

$$= p^2 + 1 - 2p^2$$

$$AC^2 = (p^2 - 1)^2$$

$$\therefore AC = p^2 - 1$$

$$\text{పటం నుంచి } \cos \theta = \frac{\text{అసన్నభుజం/కర్ణం}}{AB} = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$$

$$\cos \theta = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \Rightarrow (p^2 + 1) \cos \theta = p^2 - 1$$

3. $3(\sin x - \cos x)^4 + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 13$
 అని చూపించండి?

Sol:

$$(1) \quad 3(\sin x - \cos x)^4 = 3[(\sin x - \cos x)^2]^2$$

$$= 3[\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x]^2$$

$$= 3[1 - 2 \sin x \cos x]^2$$

$$= 3[1 + 4 \sin^2 x \cos^2 x - 4 \sin x \cos x]$$

$$= 3 + 12 \sin^2 x \cos^2 x - 12 \sin x \cos x$$

$$(2) \quad 6(\sin x + \cos x)^2 = 6(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x)$$

$$= 6(1 + 2 \sin x \cos x)$$

$$= 6 + 12 \sin x \cos x$$

$$(3) \quad 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4[(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3]$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= 4[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)]$$

$$= 4[1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x]$$

$$= 4 - 12 \sin^2 x \cos^2 x$$

(1) + (2) + (3) చేయగా

L.H.S =

$$3(\sin x - \cos x)^4 + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 x + \cos^6 x)$$

$$= 3 + 12 \sin^2 x \cos^2 x - 12 \sin x \cos x + 6 + 12 \sin x \cos x + 4 - 12 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 3 + 6 + 4$$

$$= 13 = \text{R.H.S}$$

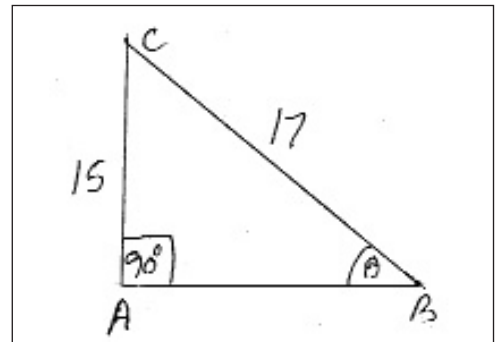
$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$4. \quad \sin \theta = \frac{15}{17} \text{ అయితే } \frac{15 \cot \theta + 17 \sin \theta}{8 \tan \theta + 16 \sec \theta}$$

విలువ కనుక్కోండి?

Sol:

$$\text{దత్తాంశం } \sin \theta = 15/17$$



ABC లంబకోణ త్రిభుజం ప్రకారం..

$$\sin \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17}$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$

$$= 17^2 - 15^2$$

$$= 289 - 225$$

$$AB^2 = 64$$

$$AB = \sqrt{64} = 8$$

ΔABC నుంచి

$$\sin \theta = \frac{15}{17}$$

$$\sec \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{17}{8}$$

$$\tan \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{8}$$

$$\cot \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{15 \cot \theta + 17 \sin \theta}{8 \tan \theta + 16 \sec \theta} = \frac{15 \times \frac{8}{15} + 17 \times \frac{15}{17}}{8 \times \frac{15}{8} + 16 \times \frac{17}{8}}$$

$$= \frac{8+15}{15+34}$$

$$= \frac{23}{49}$$

5. $a = x \cos \theta + y \sin \theta$, $b = x \sin \theta - y \cos \theta$ ల నుంచి 'a'ను తొలగించండి?

Sol:

$$a = x \cos \theta + y \sin \theta$$

ఇరువైపుల వర్గం చేస్తే..

$$a^2 = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2$$

$$= x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta \quad \text{_____ (1)}$$

ఇదే విధంగా..

$$b = x \sin \theta - y \cos \theta$$

ఇరువైపుల వర్గం చేస్తే...

$$b^2 = (x \sin \theta - y \cos \theta)^2$$

$$= x^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta \quad \text{_____ (2)}$$

(1) + (2) చేస్తే..

$$a^2 + b^2 =$$

$$x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta + x^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta$$

$$= x^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= x^2 + y^2 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\therefore a^2 + b^2 = x^2 + y^2$$

$$6. \tan^2 \alpha - \tan^2 \beta = \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \times \cos^2 \beta} \quad \text{అని చూపించండి?}$$

Sol:

$$L.H.S = \tan^2 \alpha - \tan^2 \beta$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \quad \left(\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$= \frac{\cos^2 \beta \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

$$= \frac{\cos^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \quad (\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

$$= \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

$$= R. H. S$$

$$\therefore L. H. S = R.H.S$$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

$$1. \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \csc \theta - \cot \theta \quad \text{అని చూపించండి?}$$

Sol:

$$L.H.S = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \times \frac{(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{1^2 - \cos^2 \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}} \quad (\because 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta)$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \csc \theta - \cot \theta$$

$$= R.H.S$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

$$2. \tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{అయితే B పరిమాణాన్ని}$$

వర్ణనమానంలో కనుక్కోండి?

Sol:

$$\text{దత్తాంశం} \quad \tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan(A - B) = \tan 30^\circ \quad \left(\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$A - B = 30^\circ \quad \text{_____ (1)}$$

ఇదేవిధంగా..

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin A = \sin 45^\circ \left(\because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$A = 45^\circ \text{ --- (2)}$$

(2)ను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$$45^\circ - B = 30^\circ$$

$$45^\circ - 30^\circ = B$$

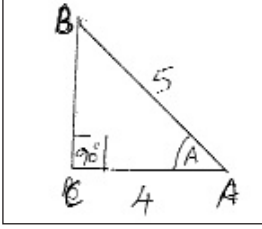
$$\therefore B = 15^\circ$$

$$B \text{ విలువ వర్తులమానంలో } B = 15^\circ \times \frac{\pi^c}{180} = \pi^c / 12$$

3. $\cos A = 4/5$, $0^\circ < A < 90^\circ$ అయితే $\sec A - \tan A$ విలువ కనుక్కోండి?

Sol:

$$\text{దత్తాంశం } \cos A = 4/5$$



ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

లంబకోణ త్రిభుజంలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$= 5^2 - 4^2$$

$$BC = \sqrt{9} = 3$$

$$\therefore \sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{4}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$\sec A - \tan A = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4. $32 \cot^2 \pi/4 - 8 \sec^2 \pi/3 + 8 \cot^3 \pi/6$ విలువెంత?

Sol:

$$\cot^2 \pi/4 = \cot^2 \frac{180}{4} = \cot^2 45 = 1^2 = 1$$

$$\sec^2 \pi/3 = \sec^2 \frac{180}{3} = \sec^2 60 = (2)^2 = 4$$

$$\cot^3 \pi/6 = \cot^3 \frac{180}{6} = \cot^3 30 = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore 32 \cot^2 \pi/4 - 8 \sec^2 \pi/3 + 8 \cot^3 \pi/6 = 32(1) - 8 \times 4 + 8 \times 3\sqrt{3}$$

$$= 32 - 32 + 24\sqrt{3} \\ = 24\sqrt{3}$$

5. $x = a \sec \theta$, $y = b \tan \theta$ సమీకరణాల్లో 'θ' ను తొలగించండి?

Sol:

$$x = a \sec \theta \quad ; \quad y = b \tan \theta$$

$$x/a = \sec \theta \quad ; \quad y/b = \tan \theta$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \text{ కాబట్టి}$$

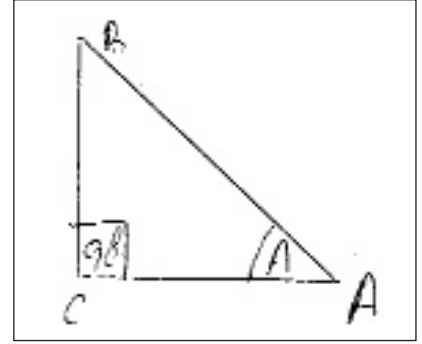
$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{a^2 b^2} =$$

$$\therefore b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

6. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ అని చూపించండి?



పటం నుంచి..

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB} \right)^2 + \left(\frac{AC}{AB} \right)^2$$

$$= \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

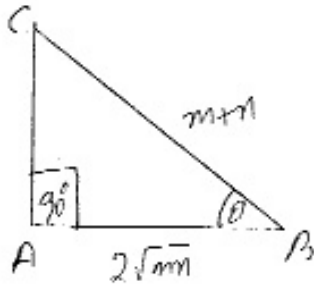
$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \text{ కాబట్టి}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

7. $\sec \theta = \frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$ అయితే $\sin \theta$ ను కనుక్కోండి?

Sol:

$$\sec \theta = \frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$$



ABC లంబకోణ త్రిభుజం నుంచి..

$$\sec \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ &= (m+n)^2 - (2\sqrt{mn})^2 \\ &= m^2 + n^2 + 2mn - 4mn \\ &= m^2 + n^2 - 2mn \\ &= (m-n)^2 \\ AC &= m-n \end{aligned}$$

∴ పటం నుంచి

$$\sin \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$= \frac{m-n}{m+n}$$

8. $\sec \theta (1 - \sin \theta) (\sec \theta + \tan \theta) = 1$ అని చూపించండి?

Sol:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \sec \theta (1 - \sin \theta) (\sec \theta + \tan \theta) \\ &= (\sec \theta - \sec \theta \cdot \sin \theta) (\sec \theta + \tan \theta) \\ &= \left(\sec \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) (\sec \theta + \tan \theta) \\ &= (\sec \theta - \tan \theta) (\sec \theta + \tan \theta) \\ &= \sec^2 \theta - \tan^2 \theta \\ &= 1 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. $5\pi/2$ విలువను శతాంశమానంలో (గ్రేడుల్లో) తెల్పండి?

Sol:

$$\begin{aligned} \pi/2 &= 90^\circ \\ \frac{5}{2} \pi &= 90^\circ \times 5 \\ &= 450^\circ \end{aligned}$$

2. $\tan \theta$ విలువను $\cos \theta$ లో తెల్పండి?

Sol:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta}}$$

3. $\sin 420^\circ$ విలువను కనుక్కోండి?

Sol:

$$\begin{aligned} \sin 420^\circ &= \sin (360^\circ + 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

4. $\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$ విలువెంత?

Sol:

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \therefore \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

5. 270° అను వర్తులమానం (రేడియన్స్) లోకి మార్చండి?

Sol:

$$\begin{aligned} 90^\circ &= \pi/2 \\ 1^\circ &= \pi/180 \\ 270^\circ &= \frac{270}{180} \times \pi = \frac{3\pi}{2} \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

6. $\sin \theta = \frac{5}{13}$ అయితే $\cos \theta$ విలువ కనుక్కోండి?

Sol:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \text{ అని తెలుసు కాబట్టి} \\ \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \\ \cos \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{25}{169}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{169 - 25}{169}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{144}{169}}$$

$$= \frac{12}{13}$$

7. $x = \sec\theta + \tan\theta$, $y = \sec\theta - \tan\theta$ లలో '0'ను తోపించి
చేయండి?

Sol:

$$x = \sec\theta + \tan\theta$$

$$y = \sec\theta - \tan\theta$$

$$xy = (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$$

$$= \sec^2\theta - \tan^2\theta$$

$$xy = 1$$

8. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$ అని చూపించండి?

Sol:

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= 1 + \sin 2\theta \quad (\because 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta)$$

9. $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta$ అని చూపించండి?

Sol:

$$\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$$

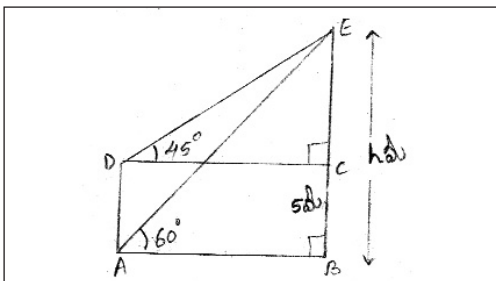
$$= \operatorname{cosec}^2\theta \cdot \sec^2\theta$$

5 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ఒక భవనం నేల మట్టం నుంచి, మొదటి అంతస్తు నుంచి ఒక చర్చి గోపురంపై భాగాన్ని విడివిడిగా చూసినప్పుడు 60° , 45° ల ఊర్ధ్వ కోణాలుగా గమనించారు. భవనం మొదటి అంతస్తు 5 మీటర్ల ఎత్తులో ఉన్నట్లయితే, చర్చి గోపురం ఎత్తును కనుక్కోండి.

Sol:

చర్చి గోపురం ఎత్తు $BE = h$ మీ. అనుకొంటే..
భవనం ఎత్తు $AD = BC = 5$ మీ.
దత్తాంశం ప్రకారం..



$$\angle CDE = 45^\circ$$

$$\angle BAE = 60^\circ$$

$$BC + CE = BE \text{ కాబట్టి}$$

$$5 + CE = h$$

$$CE = h - 5$$

ABE లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{AB}$$

$$AB = \frac{h}{\sqrt{3}} \text{ ——— (1)}$$

CDE లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 45^\circ = \frac{CE}{CD}$$

$$1 = \frac{h - 5}{CD}$$

$$CD = h - 5 \text{ ——— (2)}$$

$AB = CD$ కాబట్టి (1), (2)ల నుంచి

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = h - 5$$

$$h = \sqrt{3}h - 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}h - h = 5\sqrt{3}$$

$$h(\sqrt{3} - 1) = 5\sqrt{3}$$

$$h = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \text{ మీ.}$$

$$\therefore \text{చర్చిగోపురం ఎత్తు } h = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \text{ మీ.}$$

2. సమానమైన ఎత్తు కలిగిన రెండు స్తంభాలు ఒకదానికొకటి 100 మీటర్ల దూరంలో నిలబెట్టి ఉన్నాయి. ఈ రెండు స్తంభాలకు మధ్య ఒక బిందువు నుంచి ఈ స్తంభాల కొనలు వరుసగా 30° , 60° ల ఊర్ధ్వ కోణాలు చేస్తున్నట్లయితే.. స్తంభాల ఎత్తును, స్తంభాల మధ్య పరిశీలన చేసే బిందువు స్థానాలను కనుక్కోండి?

Sol:

రెండు స్తంభాల ఎత్తులు $AB = CD = h$ మీ. అనుకొంటే..

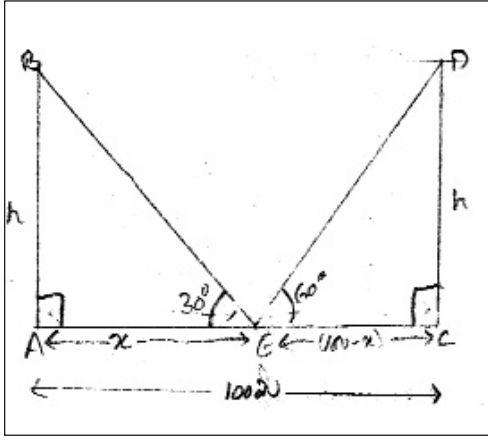
రెండు స్తంభాల మధ్య దూరం $AC = 100$ మీ.

E నుంచి A కు గల దూరం $AE = x$ మీ. అనుకొంటే..

$$CE = AC - AE$$

$$= 100 - x$$

దత్తాంశం ప్రకారం..



$$\angle AEB = 30^\circ, \angle CED = 60^\circ$$

ABE లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x}$$

$$x = h\sqrt{3}$$

$$h = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ ————— (1)}$$

CDE లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{EC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{100-x}$$

$$h = \sqrt{3} (100-x) \text{ ————— (2)}$$

(1), (2)ల నుంచి

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} (100-x)$$

$$x = 3(100-x)$$

$$x = 300 - 3x$$

$$x + 3x = 300$$

$$4x = 300$$

$$x = \frac{300}{4}$$

$$x = 75$$

∴ E బిందువు AB స్తంభంకు 75మీ. దూరంలో ఉంది.

x = 75ను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$$h = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{75}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{75}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{75\sqrt{3}}{3}$$

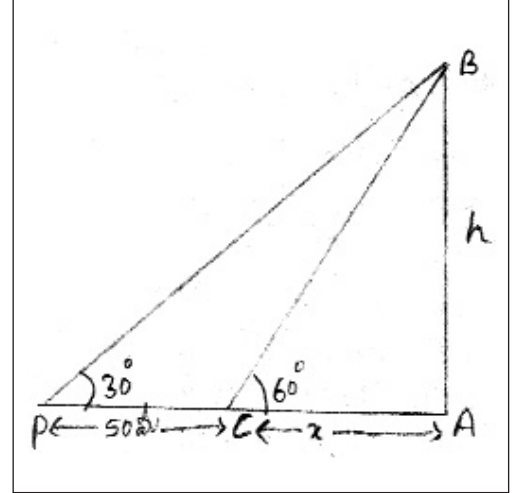
$$h = 25\sqrt{3}$$

సమాన పొడవు కలిగిన స్తంభాల ఎత్తులు AB=CD = 25√3మీ.

3. ఒక పొగ గొట్టం పాదం గుండా పోయే క్షితిజ రేఖపై ఒక బిందువు నుంచి పాదం వైపు 50మీ. దూరం నడిచి వెళ్ళినపుడు గొట్టం పై భాగం చేసే ఊర్ధ్వకోణం 30°ల నుంచి 60°లకు మారుతున్నట్లయితే పొగ గొట్టం ఎత్తును కనుక్కోండి?

Sol:

పొగ గొట్టం ఎత్తు AB = hమీ. అనుకొంటే.. పరిశీలకుడు క్షితిజ రేఖపై P నుంచి పొగ గొట్టంపై భాగాన్ని 30°ల ఊర్ధ్వకోణంలో చూసి, పాదం వైపు 50 మీటర్లు నడిచి C వద్ద నుంచి 60°ల కోణంలో పొగ గొట్టం పై భాగాలను చూశాడు.



$$\therefore \angle BPA = 30^\circ$$

$$\angle BCA = 60^\circ$$

$$PC = 50\text{మీ.}$$

$$AC = x \text{ అనుకొంటే..}$$

$$PA = PC + CA = 50 + x$$

ΔAPB లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{PA} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+50}$$

$$h\sqrt{3} = x+50 \Rightarrow h = \frac{x+50}{\sqrt{3}} \text{ ————— (1)}$$

$$\Delta ABC \text{ లో } \tan 60^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$h = x\sqrt{3} \text{ ————— (2)}$$

$$(1), (2) \text{ల నుంచి } \frac{x+50}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$$

$$x+50 = 3x$$

$$3x - x = 50$$

$$2x = 50$$

$$x = 50/2$$

$$x = 25\text{మీ.}$$

∴ x = 25మీ.లను (2)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$$h = x\sqrt{3}$$

$$h = 25\sqrt{3}\text{మీ.}$$

∴ పొగ గొట్టం ఎత్తు h = 25√3మీ.

4. A, B అనే రెండు దేవాలయాలు నదికి ఇరువైపుల గల గట్లపై ఒకదానికొకటి ఎదురుగా ఉన్నాయి. 40 మీటర్ల ఎత్తు గల దేవాలయం A పై భాగం నుంచి, దేవాలయం B పై భాగం, పాదం (అడుగు భాగం) వరుసగా $12^\circ 30'$, $21^\circ 48'$ నిమిషకోణాలు చేస్తున్నట్లయితే నది వెడల్పును, దేవాలయం B ఎత్తును సుమారుగా కనుక్కోండి?

నిమిషాలు/డిగ్రీలు	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	మధ్యమ భేదాలు				
										3	6	9	12	15
12°	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272					
21°	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3395	0.3979	0.4000	3	7	10	13	17

Sol:

A దేవాలయం ఎత్తు AC = 40మీ.

B దేవాలయం ఎత్తు BD = hమీ. అనుకొంటే..

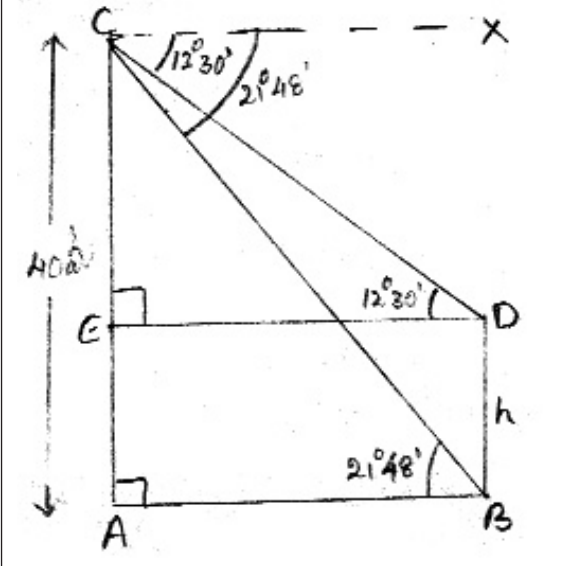
నది వెడల్పు = AB = DE

CE = AC - BD

= 40 - h

DE // CX

తెక్క ప్రకారం..



$\angle XCD = 12^\circ 30'$

$\angle XCB = 21^\circ 48'$

$\therefore \angle CDE = \angle XCD = 12^\circ 30'$ (ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle ABC = \angle XCB = 21^\circ 48'$

$\triangle ABC$ లంబకోణ త్రిభుజంలో

$$\tan 21^\circ 48' = \frac{AC}{AB}$$

పట్టిక ద్వారా $\tan 21^\circ 48' = 0.4000$

$$\therefore 0.4000 = \frac{40}{AB}$$

$$\therefore AB = \frac{40}{0.4}$$

$$AB = \frac{400}{4} = 100 \text{ మీ.}$$

\therefore నది వెడల్పు = 100మీ.

$\triangle CDE$ లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 12^\circ 30' = \frac{CE}{DE}$$

పట్టిక ద్వారా $\tan 12^\circ 30' = 0.2217$

$$0.2217 = \frac{40-h}{DE}$$

$$0.2217 = \frac{40-h}{100}$$

($\because DE = AB =$ నది వెడల్పు = 100మీ.)

$$100 \times 0.2217 = 40 - h$$

$$22.17 = 40 - h$$

$$h = 40 - 22.17$$

$$= 17.83$$

\therefore దేవాలయం ఎత్తు = 17.83మీ.

5. 2500 మీటర్ల ఎత్తులో ఎగురుతున్న ఒక విమానం నుంచి ఒక నది ఇరువైపుల ఎదురెదురుగా ఉన్న రెండు స్థానాలను చూసినప్పుడు $41^\circ 20'$, $52^\circ 10'$ నిమిషకోణాలను చేసినట్లయితే, నది వెడల్పును మీటర్లలో కనుక్కోండి?

నిమిషాలు/డిగ్రీలు	0'	6'	12'	18'	24'	మధ్యమ భేదాలు				
						1	2	3	4	5
41°	0.8693	0.8724	0.8754	0.8784	0.8816	5	10	16	21	26
52°	1.2799	2846	2892	2938	2985	8	16	24	31	39

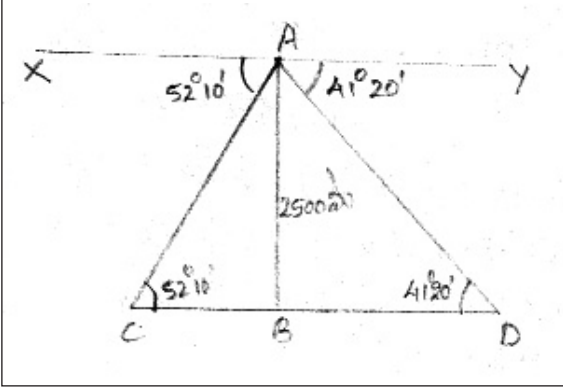
Sol:

విమానం 2500మీ. ఎత్తులో ఎగురుతుంది.

$AB = 2500$ మీ.

నది వెడల్పు = CD

దత్తాంశం ప్రకారం..



$$\angle XAC = 52^\circ 10'$$

$$\angle YAD = 41^\circ 20'$$

$CD \parallel XY$, AC , AD లు తీర్చుకే రేఖలు కాబట్టి

$$\angle ACB = \angle XAC = 52^\circ 10'$$

$$\angle ADB = \angle YAD = 41^\circ 20'$$

లంబకోణ త్రిభుజం ACB లో

$$\tan 52^\circ 10' = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{పట్టిక నుంచి } \tan 52^\circ 10' = \tan(52^\circ 6' + 4')$$

$$= 1.2846 + 0.0031$$

$$= 1.2877$$

$$1.2877 = \frac{2500}{BC}$$

$$BC = \frac{2500}{1.2877}$$

$$= 1941.4 \text{ మీ. } \quad (1)$$

$\triangle ABD$ లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 41^\circ 20' = \frac{AB}{BD}$$

$$\text{పట్టిక ద్వారా } \tan 41^\circ 20' = \tan(41^\circ 18' + 2')$$

$$= 0.8785 + 0.0010 = 0.8795$$

$$0.8795 = \frac{2500}{BD}$$

$$BD = \frac{2500}{0.8795}$$

$$= 2842.5 \text{ మీ. } \quad (2)$$

నది వెడల్పు $CD = CB + BD$

$$= 1941.4 + 2842.5$$

$$= 4783.9 \text{ మీ.}$$