~ ТВиМС ~

Автор: Пицик Харитон

Лекция 3 сентября 2025г.

Глава I. Условные распределения.

Повторение необходимого.

Рассматриваем $(\Omega, F, \mathbb{P})$ — множество элементарных исходов эксперимента. Элемент $A \subset \Omega$ является *случайным событием*, F — σ-алгебра событий:

- $\Omega \in F$;
- $A \in F \to \overline{A} \in F$;
- $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in F \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

$P : F \to [0, 1]$, т.е. $P(A)$ — вероятность события A. Свойства:

- $P(A) \geq 0 \forall A \in F$;
- $P(\Omega) = 1$;
- $P\left(\sqcup_{i=1}^{\inf}\right) P(A_i) = \sum_{i=1}^{\inf} P(A_i)$.

Определение. Случайная величина: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, такая что

$$\forall x \in \mathbb{R} \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$$

Функция распределения вероятностей

Для случайной величины ξ функция распределения выглядит следующим образом:

$F_{\xi}(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$

Случайные величины делятся на *дискретные*, *абсолютно непрерывные.*

Дискретная случайная величина: $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, задаётся числами
$p_i = P\{\xi = x_i\}$;
$p_i > 0$;
$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Абсолютно непрерывная случайная величина: $\xi \in \mathbb{R}$ и пусть $f(x) -$ *функция плотности* распределения. Важно, что $f(x)$ почти всюду $= F'(x)$ Наиболее важным требованием является:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Двумерные случайные величины

Определение. Случайный вектор — это вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, где $\xi_i, \xi = \overline{(1, n)}$ — случайные величины, ξ_i задана в (Ω_i).

Случайный вектор $\overline{\xi}$ задаётся в (Ω, F, P); $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$, где
- F — σ-алгебра,
- $\mathbb{P}$ — вероятностная мера.

Рассмотрим вектор с координатами (ξ, η).

Определение. Функция распределения:

$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\omega : \xi(\omega) < x; \eta(\omega) < y\}$

Свойства:
1. $\forall x, y \in \mathbb{R} 0 \leq F_{\xi,\eta}(x, y) \leq 1$;
2. Если x_0, y_0 — фиксированные, то $F_{\xi\eta}(x_0, y)$ — неубывающая и непрерывная слева по y, а $F_{\xi\eta}(x, y)$ — неубывающая и непрерывная слева по x;
3. $\lim_{x \to +\infty} F(\xi\eta)(x, y) = F_\eta(y)$;
   $\lim_{y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x)$;
   $\lim_{x \to +\infty, y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 1$;
   $\lim_{x \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{x \to -\infty, y \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 0$

Определение. Случайный вектор называется дискретным, если ξ, η — дискретные случайные величины.

Случайные векторы (ξ, η) принимают значения (x_i, y_i) с вероятностями $p_{ij} = P\left\{\xi = x_i, \eta = y_j\right\}$, при этом
$p_{ij} < 0$
$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

Определение. Частные распределения имеют следующий вид:

$p_i = P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$

$q_j = P\left\{\eta = y_j\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$

Независимость величин

Определение. Случайные величины ξ, η называются независимыми, если

$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} * P\{\eta < y\}$, т.е. $F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) * F_\eta(y)$

Аналогично $P(A \cap B) = P(A) * P(B) \Rightarrow A, B$ независимы.

Рассмотрим подробнее. Для дискретных случайных величин:

$p_{ij} = p_i p_j$

Для абсолютно непрерывных случайных величин:

$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$

Определение. Случайный вектор (ξ, η) называется абсолютно непрерывным, если

$F_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u, v) du dv$

Определение. Частные распределения имеют следующий вид:

$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dy;$
$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dx.$

Теорема. Случайные величины ξ, η независимы тогда и только тогда, когда

$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$

Пусть установлено, что случайные величины — зависимы. **Определение.** Пусть $F_{\xi\eta}(x, y)$ — функция распределения вектора (ξ, η), а $F_\xi(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. *Условным распределением* случайной величины η относительно случайной величины ξ называется распределение со следующей функцией:

$F_{\eta \mid \xi}(x, y) = \frac{F_{\xi\eta}(x,y)}{F_\xi(x)}$ при $F_\xi(x) > 0;$
$F_{\eta \mid \xi}(x, y) = 0$ при $F_\xi(x) = 0.$

В частности, для дискретной случайной величины:

$P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i\} = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\xi = x_i\}}$, или
$P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i\} = \frac{P_{ij}}{p_i}$

А для абсолютно непрерывной случайной величины:

$f_{\eta \mid \xi}(x, y) = \frac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_\eta}(x)$ для $f_\xi(x) > 0$. Заметим, что $f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x) * f_{\eta \mid x}(x, y)$.

Т.о. условное распределение является случайной величиной. Наша задача — найти следующую связь: $\eta = f(\xi)$.

Определение. Условным математическим ожиданием случайной величины η относительно случайной величины ξ называется случайная величина

$M_{\eta \mid \xi = x_i} = \sum_{j=1}^{\infty} y_j * P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i\}$

с распределением $P\{\xi = x_i\}$. Построим ряд распределения:

$M_{\eta \mid \xi} = x_i$	m_1	m_2	...	m_n
$P\{\xi = x_i\}$	p_1	p_2	...	p_n

Определение. Условным математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины η относительно случайной величины ξ называется

$M_{\eta \mid \xi} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta \mid \xi}(x, y) dy$ с функцией плотности $f_\xi(x)$.

Покажем, что $M\left(M_{\eta \mid \xi}\right) = M\eta$. Действительно,

$M\left(M_{\eta \mid \xi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(M_{\eta \mid \xi}\right) f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta \mid \xi}(x, y) dy\right) f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta \mid \xi}(x, y) = f_\eta(x) dx dy = f_{\eta\xi}(x, y)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dx\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y) dy = M\eta.$

Аналогично $M\left(M_{\eta \mid \xi}\right) = M\eta$.

$(M\xi, M\eta)$ — центр распределения двумерной случайной величины (ξ, η).

Лекция 10 сентября 2025 года

Определение. Условное мат ожидание

$M_{\eta \mid \xi} = \int_{-\infty}^{\infty} y dF_{\eta \mid \xi}(x, y)$

- случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$

Свойства:
1. $M_{\xi \mid \xi} = \xi$;
2. $M\xi\eta \mid \xi = \eta M\eta|\xi$;
3. $Mg(\xi)|\xi = g(\xi)$;
4. $M(M\eta|\xi) = M\eta$
5. ξ, η - независимые, то $M\eta|\xi = M\eta$

Определение. Функцией регрессии $g(\xi) = M\eta \mid \xi$. Функция регрессии используется для оценки $\hat{\eta} = g(\xi)$, где
- $\hat{\eta}$ - прогнозное / оценка η;
- η - наблюдаемое значение.

У нас есть двумерное распределение (ξ, η), и мы предполагаем существование некоторой функции $f(x)$: $\eta = f(\xi)$.

Теорема. (о наилучшей оценке) (ξ, η) - некоторая двумерная случайная величина, при этом ξ, η - зависимые. Тогда наилучшей в смысле метода наименьших квадратов (МНК) оценкой связи ξ, η является функция регрессии

$g(\xi) = M\eta|\xi$

т.е. $M(\eta - g(\xi))^2 = \min_{f(x)} M(\eta - f(\xi))^2$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $M(\eta - f(\xi))^2 = M(\eta - g(\xi) + g(\xi) - f(\xi))^2 = M(\eta - g(\xi))^2 + M(g(\xi) - f(\xi))^2 + 2M(\eta - g(\xi))M(g(\xi) - f(\xi)) =$

Рассмотрим удвоенное произведенеие:

$$2M(\eta - g(\xi))M(g(\xi) - f(\xi)) = M(g(\xi) - f(\xi)M(\eta - g(\xi))|\xi) = M((g(\xi) - f(\xi))\left[\underbrace{M\eta|\xi}_{0} - \underbrace{Mg(\xi) \mid \xi}_{0}\right] = 0$$

$= M(\eta - f(\xi))^2 = \underbrace{M(\eta - g(\xi))^2}_{\geq 0} + \underbrace{M(g(\xi) - f(\xi))^2}_{\geq 0} \geq M(\eta - g(\xi))^2$ (Разложили дисперию в сумму, сравнили с одним из слагаемых.) Ч.И.Т.Д.

Линейная регрессия, уравнение линейной регрессии

Пусть $\eta = a\xi + b = M\eta \mid \xi$. Задача: оценить коэффициенты a, b методом наименьших квадратов.

$M(\eta - \hat{\eta}^2 \to \min_{a,b}$

$M(\eta - a\xi - b)^2 = L(a, b)$

$\frac{\partial L(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} M(\eta - a\xi - b)^2 = (-2)M(\eta - a\xi - b) * \eta = (-2)M(\eta\xi - a\xi^2 - b\xi) = (-2)[M\eta\xi - aM\xi^2 - bM\xi] = 0$

$\frac{\partial L(a,b)}{\partial b} = (\partial)(\partial b)M[\eta - a\xi - b]^2 = (-2)M(\eta - a\xi - b) = (-2)(M\eta - aM\xi - b) = 0$

$\begin{cases} M\eta - aM\xi - b = 0 \\ M\xi\eta - aM\xi^2 - bM\xi = 0 \end{cases}$

$M\xi\eta - aM\xi^2 - (M\eta - aM\xi)M\xi = 0$

$M\xi\eta - aM\xi^2 - M\xi M\eta - a(M\xi)^2 = 0$

$a(M\xi - (M\xi)^2) = M\xi\eta - \underbrace{M\xi M\eta}_{cov(\eta,\xi)}$

$a = \frac{cov(\xi,\eta)}{D\xi} * \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\eta}} = \underbrace{\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}}_{\text{corr}} * \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\eta}} = r\frac{\partial\eta}{\partial\xi}$

$b = M\eta - r\frac{\partial\eta}{\partial\xi} * M\xi$

Доказательство минимума самостоятельно, следуя соответствуя теореме.

Уравнение регрессии имеет вид:

$\eta = r\frac{\partial\eta}{\partial\xi} * \xi + M\eta - r\frac{\partial\eta}{\partial\xi} M\xi$

$\eta = M\eta + r\frac{\partial\eta}{\partial\xi}(\xi - M\xi)$

Уравнение регрессии в отклонениях:

$\eta - M\eta = r\frac{\partial\eta}{\partial\xi}(\xi - M\xi)$

график $(M\xi, M\eta)$

Оффтоп. О практике, как решать задачи.

Дано 2мерное распределение (ξ, η)

ξ, η	1	2	5
-1	.1	.2	.1
1	.4	0	.1

ξ	-1	1	p
0.4	0.6		

η	1	2	5
q	.5	.2	.3

Построить условное распределение $\eta \mid \xi$
Для $\{\eta = -1\}, p = 0.4$

η	1	2	5
$P\{\eta | -1\}$	1/4	2/4	1/4

$M\eta \mid (\xi = -1) = 1 * \frac{1}{4} + 2 * \frac{1}{2} + 5 * \frac{1}{4} = 1 + 1.5 = 2.5$

Для $\{\eta = 1\}, p = 0.6$

η	1	2	5
$P\{\eta \mid 1\}$	2/3	0	1/3

$M(M\eta|\xi) = \frac{5}{2} * \frac{2}{5} + \frac{7}{3} * \frac{3}{=}1 + \frac{7}{5} = 1 + 1.4 = 2.4$

Итоговая таблица:

$M\eta|\xi$	2.5
$\frac{7}{3}$	p
0.4	0.6

Лекция 17 сентября 2025г.

Предельные теоремы. Последовательности случайных величин

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательнотъ случайных величин $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$

Определение. Последовательность ξ_i сходится по вероятности к случайной величине ξ, если

$\forall \varepsilon > 0 P\left\{w \mid \xi_{i(x)} - \xi(w) < \varepsilon\right\} \underset{i \to \infty}{\to} = 1$

или

$\forall \varepsilon > 0 P\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} \underset{i \to \infty}{\to} 0$

Обозначение: $\xi_i \overset{p}{\to} \xi$

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится по распределению к случайной величине ξ, если во всех точках непрерывности функции $F_\xi(x)$ функция $F_{n(x)} \to F_\xi(x)$.

Можно обозначать $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, или $\xi_i \overset{d}{\to} \xi$, или $P\{w : \xi_i(w) < x\} \to P\{w : \xi(w) < x\}$.

Определение. Последовательность $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится почти наверное к случайной величине ξ, если

$P\left\{w : \xi_{i(w)} \to \xi(w)\right\} = 1$

Определение. Последовательность $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится в среднем к ξ, если $M|\xi_i| < +\infty$, $M|\xi| < +\infty$

$M|\xi_i - \xi|^2 \underset{i \to \infty}{\to} 0$, $\xi_i \underset{l.i.m.}{\to} \xi$ (limit in mean).

Сходимость в среднем — частный случай L сходимости.

Теорема. (Связь сходимости по вероятности и в среднем) Если $\xi_n \underset{l.i.m.}{\to} \xi$, то $\xi_n \overset{p}{\to} \xi$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Чебышева

$\forall \varepsilon > 0 P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2}$

$\forall \varepsilon > 0 P\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} \underset{l.i.m.}{\to} 0 \geq 1$

Теорема. Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению.

$\left(\xi_n \overset{p}{\to} \xi\right) \to \left(\xi_n \overset{d}{\to} \xi\right)$

Доказательство. Пусть верно

$\forall \varepsilon > 0 P\{|\xi_n - \xi| \geq \xi\} \underset{n \to \infty}{\to} 0$

Требуется доказать, что $F_{n(x_0)} \to F(x_0)$, x_0 — точка непрерывности $F_\xi(x)$

x_0 — т. непрерывности $F_\xi(x)$.

Пусть $x' < x_0 < x''$.

$F_{n(x')} = P\{\xi_n < x'\} = P\{(\xi_n < x') \cap (\xi < x' \cap \xi_n \geq x_0)\} \leq P\{\xi_n < 0\} + P\{|\xi_n - \xi| \geq (x_0 - x')\} \leq \lim_{n \to \infty, x' \to x_0} F_{n(x_0)}$

$F_n(x_0) = P\{\xi_n < x_0\} = P\{(\xi_n < x_0) \cap (\xi < x'' \cup (\xi \geq x''))\} = P\{(\xi_n < x_0 \cap \xi < x'')\} + P\{(\xi_n < x_0) \cap (\xi > x'')\}$

$\leq P\{\xi < x'\} + P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon(x_0 x'')\} \leq \lim_{n \to \infty} F_\xi(x'')$

$F_{\xi(x')} \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} F_{n(x_0)} \leq \lim_{n \to \infty} F_{n(x_0)} \leq F_\xi(x'')$

Теорема. Если $\xi_n \overset{d}{\to} c$, то $\xi_n \overset{p}{\to} c$

Доказательство. Рассмотрим функцию распределения константы от x.

$F_{c(x)} = \begin{cases} 0 x \leq c \\ 1 x > c \end{cases}$

Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0 P\{|\xi_n - c| < \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < \xi_n - c < \varepsilon = P\{c - \varepsilon < \xi_n < c + \varepsilon\} \geq P\{c - \varepsilon < \xi_n < c + \frac{\varepsilon}{2}\} = F_{\xi n}(c + \frac{\varepsilon}{2}) - F_{\xi n}(c - \varepsilon) \overset{d}{\to} F_\xi(c + \frac{\varepsilon}{2}) - F_\xi(c - \varepsilon) = 1 - 0 = 1$

Получили $\forall \varepsilon > 0 P\{|\xi_n - c| < \varepsilon\} \geq 1$, но $P\{A\} \leq 1$ => $\lim_{n \to \infty} P\{(\xi_n - c) < \varepsilon\} = 1, \xi_n \overset{p}{\to} c$

Лекция 1 октября 2025г.

Математическая статистика

Выборка и её характеристики

Пусть ξ — наблюдаемая случайная величина. Будем обозначать через $L(x, \theta)$ —закон распределения вероятностей, θ — параметры распределения.

Пример: $\xi \sim N(a, \sigma 2)$ — нормальное распределение. Если $\xi \sim N(\theta_1, \theta_2)$ и параметры θ_1, θ_2 — неизвестные соответственно a, σ^2.

Пусть за случайной величиной ξ произведено n наблюдений. Обозначим как $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случайные величины, распределённые также как ξ. Будем считать, что эти величины независимы по условиям эксперимента.

X_i — независимые одинаково распределённые случайные величины (н о р сл в).

$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \xi(\sim L(x, \theta))$

Основная задача математической статистики состоит в том, чтобы по результатам наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сделать выводы о вероятностных характеристиках.

Определение. Последовательность $\overline{X_n} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ случайных величин $\sim L_\xi(x, \theta)$ называется выборкой из распределения случайной величины ξ.

$\mathbb{X}_n = \left\{\overline{X_n} = (X_1, ..., X_n)\right\}$ — выборочным пространством.

Определение. Множество $(x_1, x_2, ..., x_n)$ значений случайных величин $(X_1, ..., X_n)$ называется реализацией выборки (выборка).

Генеральной совокупностью значений ξ называется множество всех возможных случайных значений случайной величины ξ. Тогда $(x_1, x_2, ..., x_n)$ — выборочная совокупность.

ξ — рост студента СГУ, $N = 30583$, R — средний рост студента.

N ещё называют объёмом генеральной совокупности.

Выборка: $(175; 160; ...; 180)$

$\overline{r}, \overline{R}$ — выборочное среднее, генеральное среднее. Очевидно, что $\overline{r} <> \overline{R}$. Наша задача сводится к $\overline{r} \approx \overline{R}$.

Выборка должна быть репрезентативной (т.е. отражать закономерности генеральной выборки).

злая клубника.

Определение. Вариационным рядом x_i в неубывающем порядке $x_1^* \leq x_2^* \leq ... \leq x_n^*; x_1^* = \min\{x_1, ..., x_n\}, x_n^* = \max\{x_1, ..., x_n\}$

Определение. Интервальным вариационным рядом называется таблица вида $(x_i; x_{i+1}]$

$(x_i; x_{i+1}]$	[x_1, x_2]	$(x_2, x_3]$	...	(x_m, x_{m+1})
n_i	n_1	n_2	...	n_m

n_i — частота — количество наблюдений в $(x_i, x_{i+1}]$. ($n = \sum_{i=1}^m n_i$ — объём выборки)

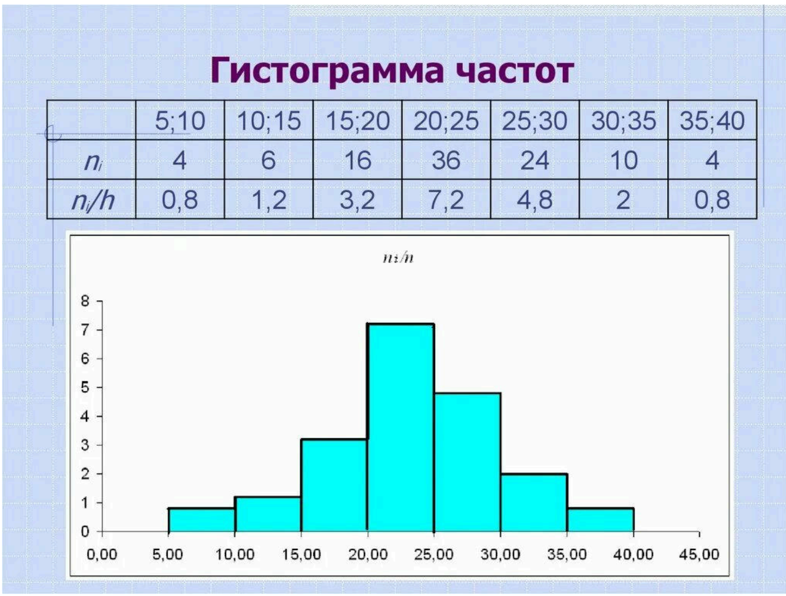
x_i — варианта

m — количество групп (интервалов).

Оптимальное количество вычисляется по формуле Стёрджесса:

$m = [1 + 3.3221 \lg n] = [1 + \log_2 n]$

Гистограмма частот: злая клубника не разрешила.



	5;10	10;15	15;20	20;25	25;30	30;35	35;40
n_i	4	6	16	36	24	10	4
n_i/h	0,8	1,2	3,2	7,2	4,8	2	0,8

Гистограмма позволяет оценить распределение случайной величины ξ.

Определение. Точечным вариационным рядом называется таблица

x_1	x_2	…	x_m	n_1
n_2	…	n_m		

x_i — варианта, n_i — частоты, m — количество групп.ф

Полигон частот:

X	34	35	36	37	38	39	40
M	1	3	4	6	3	2	1

Определение. Эмпирической функцией распределения ξ называется

$\overline{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e(x - X_i)$ или $\overline{F}_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n}$.

$\mu_n(x)$ — количество экспериментов выборки $< x$.

Свойства:

1. $\forall x \in \mathbb{R} 0 \leq \overline{F}_n(x) \leq 1$;
2. $\overline{F}_n(x)$ — ступенчатая, кусочно непрерывная;

3. При $x < x_1$б $\overline{F}_n(x) = 0$, при $x > x_n$, $\overline{F}_n(x) = 1$;
4. Случайная величина $\mu_n(x) \quad Bin\big(n; F_\xi(x)\big)$;
5. $M\overline{F}_n(x) = F_\xi(x); D\overline{F}_n(x) = F_\xi(x)\big(1 - F_\xi(x)\big)$

Для (4):

Действительно, при x рассмотрим случайное событие $\{x_i < x\}$ т.к. $x_i \sim \xi$:

$P\{x_i < x\} = P\{\xi < x\} = F_\xi(x) \forall x.$

Следовательно, $M\mu_n(x) = n * p = n * F_\xi(x)$, $D\mu_n(x) = npq = n * F_\xi(x) * \big(1 - F_\xi(x)\big)$

6. Теорема Гливенко: $\overline{F}_n(x) - \xrightarrow{p} F_\xi(x)$