~ ТВиМС ~

Автор: Пицик Харитон

Лекция 3 сентября 2025г.

Глава I. Условные распределения.

Повторение необходимого.

Рассматриваем $(\Omega, F, \mathbb{P})$ — множество элементарных исходов эксперимента. Элемент $A \subset \Omega$ является *случайным событием*, F — σ-алгебра событий:

- $\Omega \in F$;
- $A \in F \to \overline{A} \in F$;
- $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in F \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

$P : F \to [0, 1]$, т.е. $P(A)$ — вероятность события A. Свойства:

- $P(A) \geq 0 \forall A \in F$;
- $P(\Omega) = 1$;
- $P\left(\sqcup_{i=1}^{\text{inf}}\right) P(A_i) = \sum_{i=1}^{\text{inf}} P(A_i)$.

Определение. Случайная величина: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, такая что

$$\forall x \in \mathbb{R} \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$$

Функция распределения вероятностей

Для случайной величины ξ функция распределения выглядит следующим образом:

$F_{\xi}(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$

Случайные величины делятся на *дискретные*, *абсолютно непрерывные.*

Дискретная случайная величина: $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, задаётся числами
$p_i = P\{\xi = x_i\}$;
$p_i > 0$;
$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Абсолютно непрерывная случайная величина: $\xi \in \mathbb{R}$ и пусть $f(x)$ – *функция плотности* распределения. Важно, что $f(x)$ почти всюду $= F'(x)$ Наиболее важным требованием является:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Двумерные случайные величины

Определение. Случайный вектор — это вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, где $\xi_i, \xi = \overline{(1, n)}$ — случайные величины, ξ_i задана в (Ω_i).

Случайный вектор $\overline{\xi}$ задаётся в (Ω, F, P); $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$, где
- F — σ-алгебра,
- $\mathbb{P}$ — вероятностная мера.

Рассмотрим вектор с координатами (ξ, η).

Определение. Функция распределения:

$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\omega : \xi(\omega) < x; \eta(\omega) < y\}$

Свойства:
1. $\forall x, y \in \mathbb{R} 0 \leq F_{\xi,\eta}(x, y) \leq 1$;
2. Если x_0, y_0 — фиксированные, то $F_{\xi\eta}(x_0, y)$ — неубывающая и непрерывная слева по y, а $F_{\xi\eta}(x, y)$ — неубывающая и непрерывная слева по x;
3. $\lim_{x \to +\infty} F(\xi\eta)(x, y) = F_\eta(y)$;
   $\lim_{y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x)$;
   $\lim_{x \to +\infty, y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 1$;
   $\lim_{x \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{x \to -\infty, y \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 0$

Определение. Случайный вектор называется дискретным, если ξ, η — дискретные случайные величины.

Случайные векторы (ξ, η) принимают значения (x_i, y_i) с вероятностями $p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$, при этом
$p_{ij} < 0$
$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

Определение. Частные распределения имеют следующий вид:

$p_i = P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$

$q_j = P\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$

Независимость величин

Определение. Случайные величины ξ, η называются независимыми, если

$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} * P\{\eta < y\}$, т.е. $F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi}(x) * F_{\eta}(y)$

Аналогично $P(A \cap B) = P(A) * P(B) \Rightarrow A, B$ независимы.

Рассмотрим подробнее. Для дискретных случайных величин:

$p_{ij} = p_i p_j$

Для абсолютно непрерывных случайных величин:

$f_{\xi\eta}(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)$

Определение. Случайный вектор (ξ, η) называется абсолютно непрерывным, если

$F_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u, v) du dv$

Определение. Частные распределения имеют следующий вид:

$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dy;$
$f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dx.$

Теорема. Случайные величины ξ, η независимы тогда и только тогда, когда

$f_{\xi\eta}(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)$

Пусть установлено, что случайные величины — зависимы. **Определение.** Пусть $F_{\xi\eta}(x, y)$ — функция распределения вектора (ξ, η), а $F_{\xi}(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. *Условным распределением* случайной величины η относительно случайной величины ξ называется распределение со следующей функцией:

$F_{\eta \mid \xi}(x, y) = \frac{F_{\xi\eta}(x, y)}{F_{\xi}(x)}$ при $F_{\xi}(x) > 0;$
$F_{\eta \mid \xi}(x, y) = 0$ при $F_{\xi}(x) = 0.$

В частности, для дискретной случайной величины:

$P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i\} = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\xi = x_i\}}$, или
$P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i\} = \frac{P_{ij}}{p_i}$

А для абсолютно непрерывной случайной величины:

$f_{\eta \mid \xi}(x, y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_{\eta}}(x)$ для $f_{\xi}(x) > 0$. Заметим, что $f_{\xi\eta}(x, y) = f_{\xi}(x) * f_{\eta \mid x}(x, y)$.

Т.о. условное распределение является случайной величиной. Наша задача — найти следующую связь: $\eta = f(\xi)$.

Определение. Условным математическим ожиданием случайной величины η относительно случайной величины ξ называется случайная величина

$M_{\eta \mid \xi = x_i} = \sum_{j=1}^{\infty} y_j * P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i\}$

с распределением $P\{\xi = x_i\}$. Построим ряд распределения:

$M_{\eta \mid \xi} = x_i$	m_1	m_2	...	m_n
$P\{\xi = x_i\}$	p_1	p_2	...	p_n

Определение. Условным математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины η относительно случайной величины ξ называется

$M_{\eta \mid \xi} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta \mid \xi}(x, y) dy$ с функцией плотности $f_{\xi}(x)$.

Покажем, что $M\left(M_{\eta \mid \xi}\right) = M\eta$. Действительно,

$M\left(M_{\eta \mid \xi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(M_{\eta \mid \xi}\right) f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta \mid \xi}(x, y) dy\right) f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta \mid \xi}(x, y) = f_{\eta}(x) dx dy = f_{\eta\xi}(x, y)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dx\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta}(y) dy = M\eta.$

Аналогично $M\left(M_{\eta \mid \xi}\right) = M\eta$.

$(M\xi, M\eta)$ — центр распределения двумерной случайной величины (ξ, η).