~ Методы Вычислений ~

Автор: Пицик Харитон

Лекция 9 сентября 2025

Из выше изложенного получаем следующий **алгоритм** построения интерполяционного многочлена (И. М.) в общем виде:

1. По данным интерполяции $(x_k, f_k), k = \overline{(0, n)}$ записать общий вид искомого многочлена: $P_{n(x)} = \ldots$;
2. Построить вспомогательную СЛАУ;
3. Решить СЛАУ (Подходящим численным методом);
4. Найдя на шаге (3) коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, подставить их в искомое представление интерполяционного многочлена в общем виде, записанном на шаге (1).

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

В предыдущем параграфе мы установили, что в случае попарно различных узлов интерполяции, вспомогательная система (3) имеет единственное решение, а следовательно искомая интерполянта вида (2) будет определена в этом случае *единственным* образом.

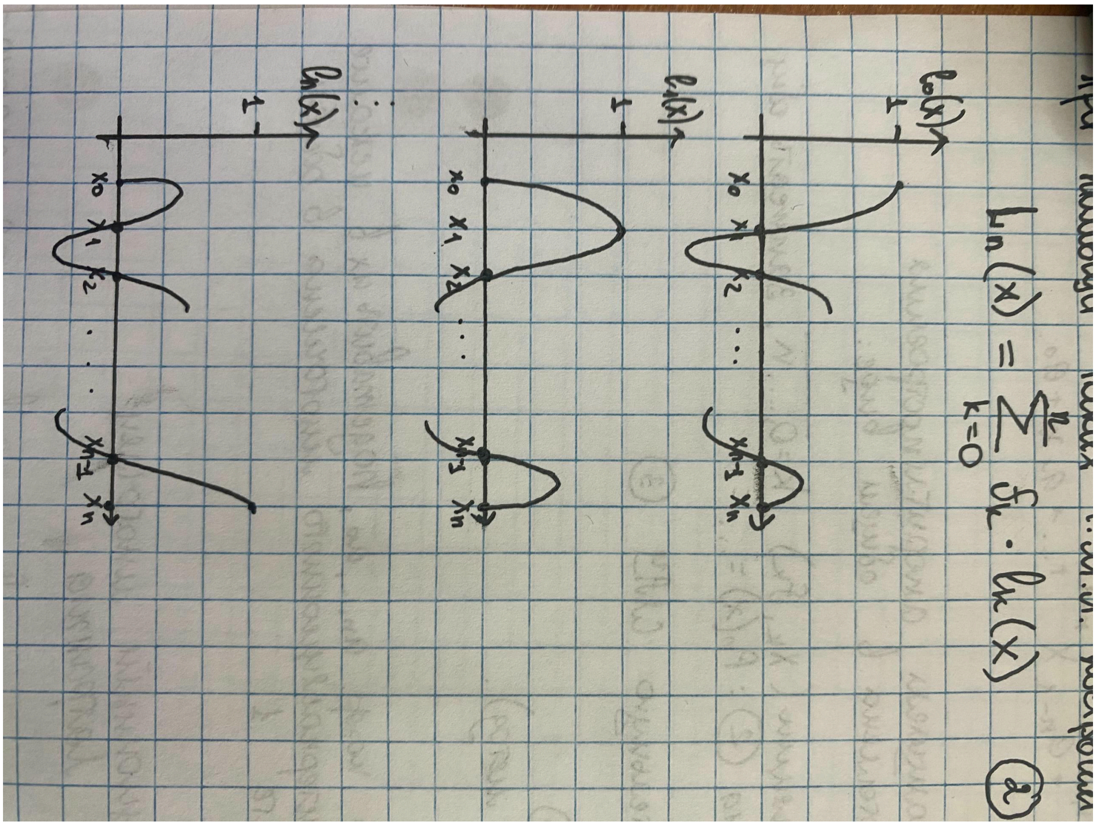
Поскольку способ, описанный в предыдущем параграфе, имеет вычислительные ограничения с ростом числа узлов интерполяции, то зная, что в задаче интерполяции при условии (5) существует и при том единственное решение, далее будем решать ту же задачу, но “иным” способом.

Введём следующие алгебраические многочлена $l_k(x), k = \overline{(0, n)}$, определив их следующим образом:

$l_k(x_j) = 0$ при $k \neq j$, иначе 1 (Определение (1));

Эти многочлены будем называть *фундаментальными многочленами Лагранжа* (Ф. М. Л.). При помощи таких ФМЛ, построим следующую их *линейную комбинацию*:

$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_{k(x)}$ (Определение (2))



Покажем, что представление (2) действительно удовлетворяет главному условию интерполяции. Для этого подставим в него в качестве аргумента $x_j, j = \overline{(0, n)}$. Получаем

$L_n(x_j) = f_0 * l_0(x_j) + f_1 * l_1(x_j) + \ldots + f_j * l_{j(x_j)} + \ldots + f_n * l_{n(x_j)} = f_j * 1 = f_j, \forall j = \overline{(0, n)}$ (Определение (3))

Таким образом, разложение вида (2) (линейная комбинация фундаментальных многочленов Лагранжа) действительно удовлетворяет главному условию интерполяции.

Но отметим, что пока представление (2) искомой интерполянты “не пригодно” для нахождения значения интерполянты вне узловых точек, что необходимо для полного разрешения задачи интерполяции.

В этой связи, зная, что фундаментальные многочлены Лагранжа $l_{k(x)}$ в точках $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n$ принимают нулевые значения в силу (2), применим к таким многочленам *основную теорему алгберы*. В результате, фундаментальные многочлены Лагранжа можно записать в следующем виде:

$l_k(x) = c_{k(x-x_0)}(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)n = \overline{(0, n)}$ (Определение (4))

Потребуем, чтобы представления (4) удовлетворяли условиям номировки:

$l_{k(x)} = 1 \forall n = \overline{(0, n)}$

$l_{k(x_k)} = c_{k(x_k-x_0)}(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)$

($l_{k(x_k)}$ в силу (4) равняется единице, но c_k неизвестно)

$\Rightarrow c_k = \frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)} \forall k = \overline{(0, n)}$ (Определение (5))

Таким образом, осуществляя последовательную подстановку сначала (5) в (4), а затем (4) в (2), мы получим искомую явную аналитическую формулу интерполяционного многочлена в форме Лагранжа:

$L_{n(x)} = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{c_k(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$ (Определение (6))

Лекция 16 сентября 2025

Параграф 4. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

В данном параграфе рассмотрим ещё 1 способ построения интерполяционного многочлена, существование и единственность которого были изучены в пар. 2. При этом, данный способ будет лишён недостатков предыдущих двух способов решении задачи интерполяции.

Рассмотрим $ax^2 + bx + c$. Для нахождения коэффициентов a, b, c:

$\begin{cases} P_2(x_0)=...=A \\ P_{2'}(x_0)=2ax_0+b=B \\ P_{2''}(x_0)=2a=C \end{cases}$

Это — основная идея такого подхода.

Для дальнейшего использования дадим ряд вспомогательных определений.

Определение. Разделенными разностями (Р. Р.) 0го порядка функции f будем называть сами её узловые значения:

Определение. Разделенными разностями 1го порядка функции f будем называть выражение вида:

$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}} - x_k, k = \overline{(0, n-1)}$

Определение. Разделенными разностями 2го порядка функции f будем называть выражение вида:

$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1};x_{k+2})-f(x_k;x_{k+1})}{x_{k+2}-x_k}, k = \overline{(0, n-2)}$

Определение. Разделенными разностями lго порядка функции f будем называть выражение вида:

$f(x_k; x_{k+1}; ..., x_{k+l-1}; x_{k+l}) = \frac{f(x_{k+1};...;x_{k+l})-f(x_k;...;x_{k+l-1})}{x_{k+l}-x_k}, k = \overline{(0, n-l)}$

Разделенные разности, указанные в выше приведенных определениях можно рассматривать как дискретные приближённые аналоги соответствующих производных, понимаемых по классическому определению.

Опр. производной:

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+\delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Используя разделенную разность, попробуем с их помощью восстановить искомый интерполяционный многочлен.

Для упрощения, выскажем **предположение**, что интерполируемая функция $f(x_k, f_k)$ $(k = \overline{(0, n)})$ сама является алгебраическим многочленом степени n. В этом случае, такая функция f и её интерполяционный многочлен $P_{n(x)}$ в силу **единственности** такого многочлена будут тождественно равны друг другу, т.е.

$f(x) = P_{n(x)}, \forall x.$

Возьмём некоторую фиксированную в каком то месте точку, для определённости $x < x_0$, и попытаемся найти $f(x) =?$.

С этой целью будем привлекать разделенные разности в следующем порядке:

$f(x; x_0) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \to f(x) = \underbrace{(x_0)}_{\text{Известно}} + \underbrace{f(x; x_0)}_{?} \underbrace{(x - x_0)}_{\text{Известно}}$ (2).

$f(x; x_0; x_1) = \frac{f(x_0; x_1) - f(x; x_0)}{x_1 - x} \to f(x; x_0) = \underbrace{f(x_0; x_1)}_{\text{Известно}} + \underbrace{f(x; x_0; x_1)}_{?} \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Известно}}$ (3)

Подставляя (3) в (2):

$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{Известно}} + \underbrace{f(x_0; x_2)(x - x_0)}_{\text{Известно}} + \underbrace{f(x; x_0; x_1)}_{?}(x - x_0)(x - x_1)$ (4)

Соответственно, продолжая аналогичные действия, т.е. вводя новый узел интерполяции и привлекая разделенную разность следующего порядка, за конечное число шагов, исчерпав все узлы интерполяции, мы придём к уравнению следующего вида (всё что не отмечено - известно):

$$\underbrace{f(x)}_{?} = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + \underbrace{f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}_{\text{степени n}} + \underbrace{\underbrace{f(x; x_0; x_1; \ldots, x_n)}_{?}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}_{\text{степени n+1}} \quad (5)$$

$P_{n(x)} = a_n x^n + \ldots$

$Q_{m(x)} = b_m x^m + \ldots$

$P_{n(x)} \equiv Q_{m(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ a_k = b_j \forall k = j \end{cases}$

Обратим внимание, что в равенстве (5) в левой части, согласно сделанному предположению, стоит алгебраический многочлен степени n, а в правой части — сумма алгебраических многочленов $0, 1, \ldots, n, n + 1$ степеней. Можем прийти к следующему выводу: для того, чтобы равенство (5) как равенство двух алгебраических многочленов выполнялось $\forall x$, необходимо, чтобы коэффициент $f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n)$ стоящем при x^{n+1}, был тождественно равен 0 (т.е. $f(x; x_0; \ldots; x_n) \equiv= 0$). В противном случае, равенство (5) будет выполняться лишь в конечном числе точек (в том числе может и не в одной из точек).

В этой связи, равенство (5) принимает следующий вид

$f(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + ... + f(x_0; x_1; ...; x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$ (6)

Таким образом, в условиях сделанного предположения, формула (6) позволила нам получить явное аналитическое выражение искомой интерполируемой функции.

Теперь, откажемся от ранее сделанного предположения, т.е. будем считать, что $f(x)$ — произвольная интерполируемая функция и наряду с такой функцией, отдельно и самостоятельно рассмотрим $N_{n(x)}$:

$N_{n(x)} = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + ... + f(x_0; ...; x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$ (7)

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что алгебраический многочлен (7) действительно удовлетворяет главному условию интерполяции:

$N_{n(x_0)} = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x_0 - x_0) + 0 + ... + 0 = f(x_0)$

$N_{n(x_1)} = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + 0 + ... + 0 = f(x_1)$

$N_{n(x_2)} = ... = f(x_2)$

...

$N_{n(x_n)} = ... = f(x_n)$, т.е. $N_{n(x)}$ опр. по явной аналитической формуле (7) удовлетворяет главному условию интерполяции, т.е. является интерполяционным.

(7) — интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Замечание. Для того, чтобы воспользоваться формулой (7) для нахождения интерполянты вне узловой точки, предварительно необходимо вычислить соответствующие разделенные разности. Для удобства, их записывают в виде следующей таблицы (таблица разделенных разностей):

ВСТАВИТЬ ФОТО ТАБЛИЦЫ