NP-полнота задачи поиска несамопересекающегося пути в геометрическом графе

Захар Пилипчук

Abstract

Consider the following problem: *we are given a set of points on a plane. Some of them are connected with line segments (possibly intersecting with each other). We need to determine if there exists non self-intersecting path along the segments between specified points s and t.* We prove this problem is NP-complete.

Аннотация

Рассмотрим следующую задачу: *на плоскости заданы точки, некоторые из них соединены отрезками (отрезкам разрешено пересекаться). Существует ли несамопересекающийся путь, следующий по отрезкам, из точки s в точку t?* В данной работе будет доказана NP-полнота данной задачи.

1 Введение

Определение 1. *Геометрическим графом называется изображение неориентированного графа G на плоскости, в котором вершинам соответствуют точки, а рёбра изображаются отрезками. Эти отрезки, разумеется, могут пересекаться. Будем считать, что никакие 3 вершины не расположены на одной прямой.*

Определение 2. *Экземпляром задачи PLANARPATH является геометрический граф $\mathcal{G}$ и пара его вершин s и t. Требуется определить, существует ли несамопересекающийся путь из s в t.*

Главная цель данной работы — показать NP-полноту задачи PLANARPATH. Вначале мы рассмотрим задачу о пути с запрещёнными парами рёбер, являющуюся, по сути, обобщением исходной проблемы. Мы докажем её NP-полноту, после чего с помощью задачи Planar 3SAT модифицируем доказательство для PLANARPATH.

2 Задача о пути с запрещёнными парами рёбер

Определение 3. *Приведем определение одного из вариантов задачи Path avoiding forbidden pairs (PAFP) ([1, стр. 203]). Задан ориентированный* *граф G, множество $F \subset E \times E$ (его элементы будем называть перекрёстками) и пара вершин $s, t \in V$. Требуется определить, существует ли путь из s в t, не содержащий никакой пары рёбер из F.*

Оказывается, неориентированная версия этой задачи (будем называть её UPAFP) также NP-полна.

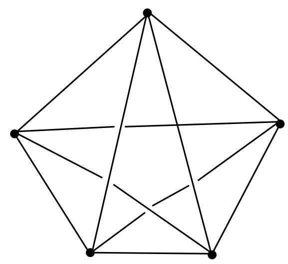

Рис. 1: Граф K_5 с единственным перекрёстком.

Заметим, что PLANARPATH — это частный случай UPAFP, в котором перекрёстки задаются пересекающимися рёбрами в некотором изображении графа на плоскости. С другой стороны, UPAFP не сводится к PLANARPATH тривиальным образом. Не каждый граф со списком перекрёстков можно расположить на плоскости так, чтобы два ребра пересекались тогда и только тогда, когда они образуют перекрёсток. Простой тому пример — полный граф на пяти вершинах с пустым списком запрещённых пар, поскольку в любом его изображении найдётся пара пересекающихся рёбер в силу его непланарности.

Графы с перекрёстками можно изображать схематически. Учитывая предыдущее замечание, иногда мы вынуждены пересекать на рисунке рёбра, не образующие перекрёсток. Такое пересечение мы будем называть "мостом". Рисунок 1 показывает полный граф на пяти вершинах с единственным перекрёстком.

Напомним содержание задачи 3SAT. Пусть ϕ — формула в 3-КНФ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ то есть формула вида

$$(\chi_1^{(1)} \vee \chi_2^{(1)} \vee \chi_3^{(1)}) \wedge \cdots \wedge (\chi_1^{(m)} \vee \chi_2^{(m)} \vee \chi_3^{(m)})$$

где каждое $\chi_i^{(j)} \in \{x_i\} \cup \{\overline{x_i}\}$ — *литерал.* Требуется определить, является ли ϕ выполнимой, то есть истинна ли она при каких-нибудь значениях переменных.

Теорема 1. *Задача UPAFP является NP-полной.*

Доказательство. Доказательство будем проводить сведением 3SAT к нашей задаче. Покажем, как по формуле ϕ в 3-КНФ построить такой граф с перекрёстками G, что ϕ выполнима в том и только в том случае, когда в G существует путь без перекрёстков между фикированными вершинами s и t.

Гаджет для переменной x представляет собой пару вершин, соединённых двумя путями. Эти пути мы будем называть путём для x и путём для $\overline{x}$. Все гаджеты переменных соединены цепочкой, начинающейся в вершине s

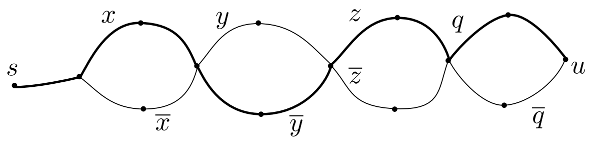

Рис. 2: Цепочка гаджетов переменных.

и заканчивающейся в вершине u. На рисунке 2 показана цепочка гаджетов для четырёх переменных.

Между всевозможными наборами значений для переменных $x_1, \ldots, x_n$ и простыми путями из вершины s в вершину u существует биекция. Истинному значению переменной x соответствует выбор пути для x при прохождении гаджета этой переменной, а ложному значению — выбор пути для $\overline{x}$. На том же рисунке выделен жирным путь, соответствующий выбору переменных $x = 1, y = 0, z = 1, q = 1$.

Гаджет для дизъюнкта $(\chi_1 \vee \chi_2 \vee \chi_3)$ показан на рисунке 3. Здесь рёбра e_1, e_2 и e_3 пересекают пути *отрицаний* литералов, входящих в дизъюнкт.

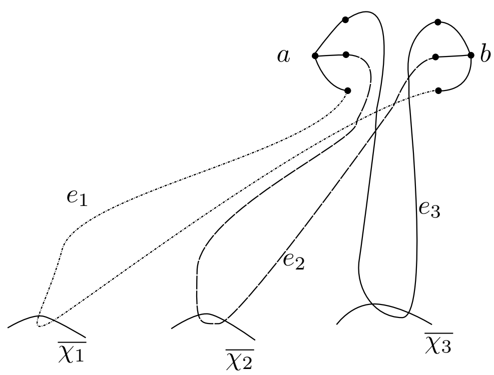

Рис. 3: Гаджет дизъюнкта.

Гаджеты дизъюнктов соединены в общую цепочку с началом в вершине u и концом в вершине t. На рисунке 4 изображён граф, построенный по формуле

$$\phi = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (y \vee z \vee \overline{q}) \wedge (x \vee y \vee q) \tag{1}$$

Покажем, что в построенном графе путь без перекрёстков найдётся тогда и только тогда, когда исходная формула ϕ выполнима. Зафиксируем участок пути от вершины s до вершины u, а значит, и некоторый набор значений переменных.

Видно, что по гаджету дизъюнкта можно пройти без перекрёстков от вершины a до вершины b тогда и только тогда, когда выбрано истинное значение хотя бы для одного из литералов, содержащихся в дизъюнкте. Значит, от u до t можно пройти без перекрёстков если и только если все дизъюнкты истинны на данном наборе значений, то есть если данный набор — выполняющий, что и требовалось доказать.

$\square$

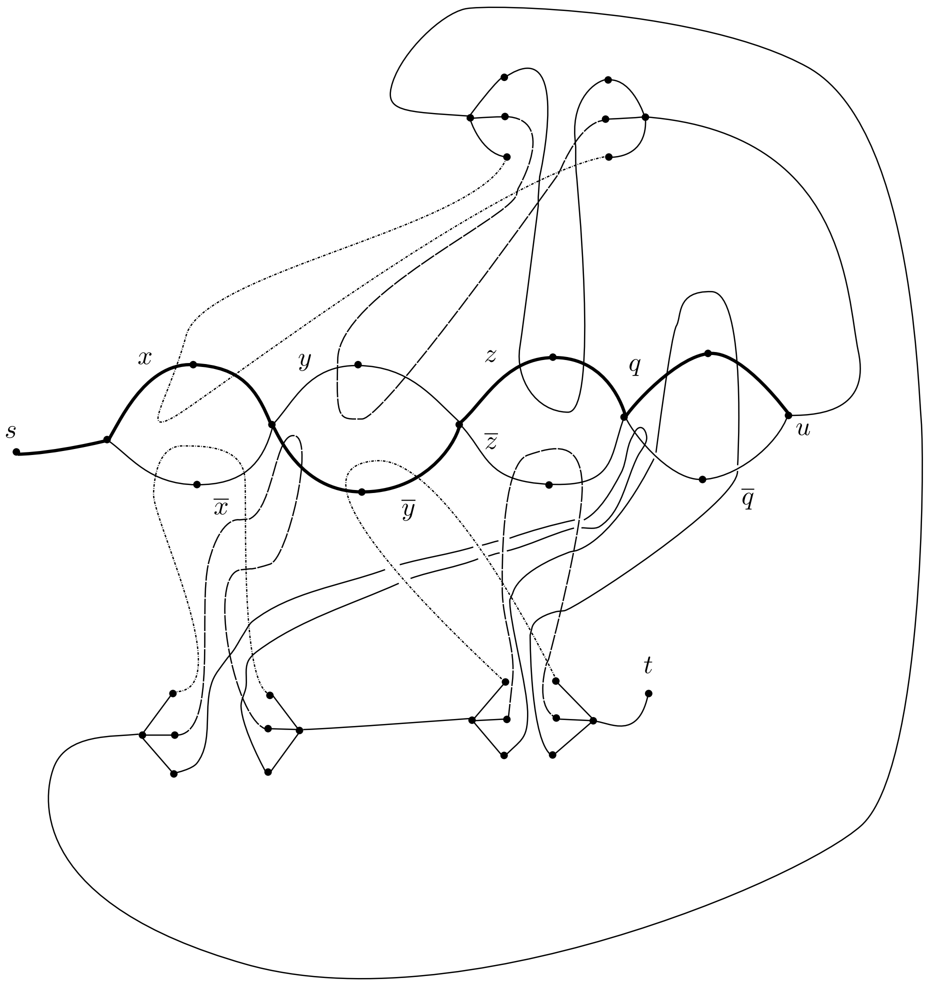

Рис. 4: Построенный граф с перекрёстками для формулы (1).

3 Planar 3SAT

Определение 4. *Естественным графом формулы ϕ в 3-КНФ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с дизъюнктами $c_1, \ldots, c_m$ называется граф $G(\phi) = (V, E)$, где $V = \{x_i\} \cup \{c_j\}$, $E = E_1 \cup E_2$, где $E_1 = \{(c_j, x_i) \mid x_i$ или $\overline{x_i}$ содержится в $c_j\}$, а $E_2 = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, x_1)\}$. Иными словами, вершинами графа являются переменные и дизъюнкты; переменные соединены в цикл, а каждый дизъюнкт связан с переменными, входящими в него, в том числе с отрицанием.*

На рисунке 5 изображен естественный граф для формулы (1)

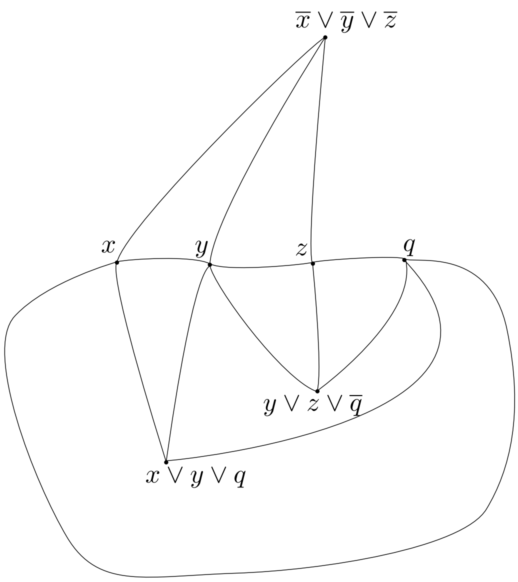

Рис. 5: Естественный граф для формулы (1).

Определение 5. *Задача Planar 3SAT (кратко P3SAT) — это ограничение задачи 3SAT для формул с планарными естественными графами.*

Теорема 2 (Lichtenstein [2])**.** *Задача P3SAT является NP-полной.*

Замечание. *Существуют полиномиальные алгоритмы для проверки на планарность и нахождения планарного изображения, т.е. за полиномиальное время можно проверить корректность входной формулы и построить планарное изображение её естественного графа.*

Наша дальнейшая цель — изменить доказательство теоремы 1, чтобы построенный граф с перекрёстками G мог быть представлен схемой без "мостов" (ведь такая схема и будет искомым геометрическим графом, в котором наличие несамопересекающегося пути из s в t эквивалентно выполнимости формулы). В следующем разделе мы увидим, что планарность естественного графа позволяет нарисовать на плоскости гаджеты переменных и дизъюнктов без использования "мостов", однако соединить гаджеты дизъюнктов в цепочку, не пересекающую другие рёбра, не удастся. Значит, нам потребуется поправить схему доказательства NP-полноты UPAFP для доказательства NP-полноты PLANARPATH.

4 NP-полнота задачи PLANARPATH

Начнём с описания новых гаджетов.

Замечание. *Для простоты и наглядности будем изображать рёбра геометрического графа кривыми. Чтобы получить из графа с “кривыми” рёбрами геометрический граф в строгом смысле, достаточно спрямить каждое ребро, возможно, предварительно подразбив его проходными вершинами. Эта операция не влияет на существование пути.*

Гаджет переменной не изменился, но в его изображении мы будем пересекать пути для переменной и её отрицания $2m$ раз, где m — это количество дизъюнктов. Новый вид цепочки гаджетов переменных показан на рисунке 6. Зелёным цветом здесь обозначены пути для переменных, а красным — для их отрицаний; жирным выделен путь, соответсвующий выбору $x = 1, y = 0, z = 1, q = 1$.

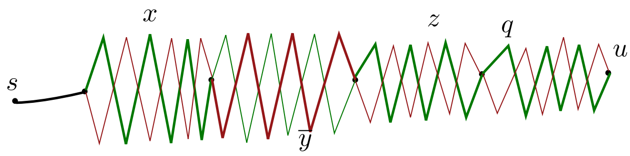

Рис. 6: Гаджеты переменных.

На рисунке 7 изображён гаджет под названием “двойная коса”. Сразу обратим внимание на то, что любые два разноцветных ребра в нём пересекаются.

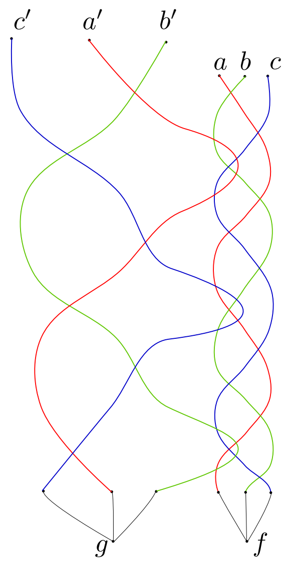

Рис. 7: “Двойная коса”.

Обновлённый гаджет дизъюнкта показан на рисунке 8. Здесь прямоугольниками обозначены “двойные косы”, рёбра e_1, e_2 и e_3, как и ранее, пересекают пути отрицаний литералов, содержащихся в дизъюнкте.

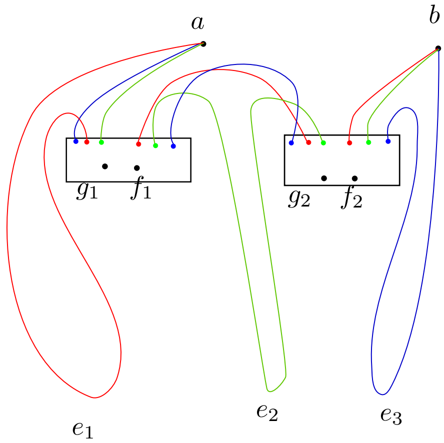

Рис. 8: Обновлённый гаджет дизъюнкта.

Гаджет дизъюнкта мы будем схематически изображать в виде восьмиугольника с тремя “хвостами”, как показано на рисунке 9.

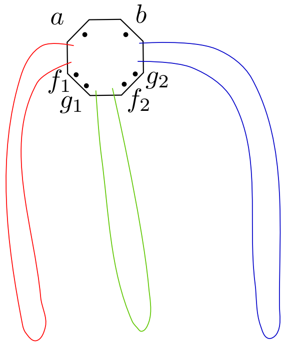

Рис. 9: Схематическое изображение гаджета дизъюнкта.

Теорема 3. *Задача PLANARPATH является NP-полной.*

Доказательство. Будем сводить к PLANARPATH задачу Planar 3SAT. Строить геометрический граф $\mathcal{G}$, соответствующий формуле ϕ, будем по следующему алгоритму:

1. Построим планарное изображение естественного графа формулы ϕ.

2. Заменим цепочку вершин, соответствующих переменным, на цепочку гаджетов переменных.

3. Заменим каждую вершину, соответствующую дизъюнкту, с тремя ребрами, выходящими из неё, на гаджет дизъюнкта с тремя “хвостами”. В силу планарности естественного графа, мы можем произвести эти построения на плоскости без использования “мостов”.

К примеру, естественный граф формулы (1) (изображён на рисунке 5) на данном этапе трансформируется в граф, показанный на рисунке 10.

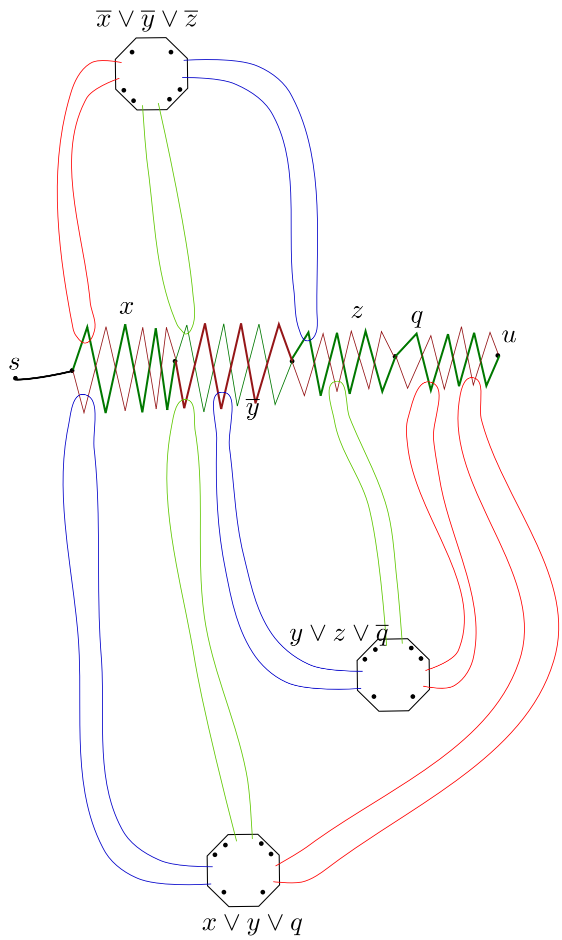

Рис. 10: Трансформированный естественный граф формулы (1).

Если вершину a гаджета какого-то дизъюнкта можно соединить с вершиной f_1 или f_2 гаджета другого дизъюнкта путём, не пересекающим никакие другие рёбра, то первый дизъюнкт будем называть соответственно левым или правым потомком второго дизъюнкта, а второй — родителем первого. Дизъюнкт, вершину a гаджета которого можно соединить с вершиной u путём, не пересекающим другие рёбра, назовём "корневым". Ясно, что каждый дизъюнкт либо имеет родителя, либо является корневым. Так, на рисунке 10 дизъюнкты $\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$ и $x \vee y \vee q$ — корневые, а $y \vee z \vee \overline{q}$ является потомком дизъюнкта $x \vee y \vee q$.

Продолжим построение:

4. Соединим гаджеты корневых дизъюнктов цепочкой, начинающейся в вершине u и оканчивающейся в вершине t.

5. Вершины f_1 и g_1 гаджета каждого дизъюнкта соединим цепочкой, проходящей через гаджеты всех левых потомков этого дизъюнкта (если левых потомков нет, просто соединяем f_1 и g_1); аналогично, f_2 и g_2 соединим цепочкой, проходящей через гаджеты правых потомков.

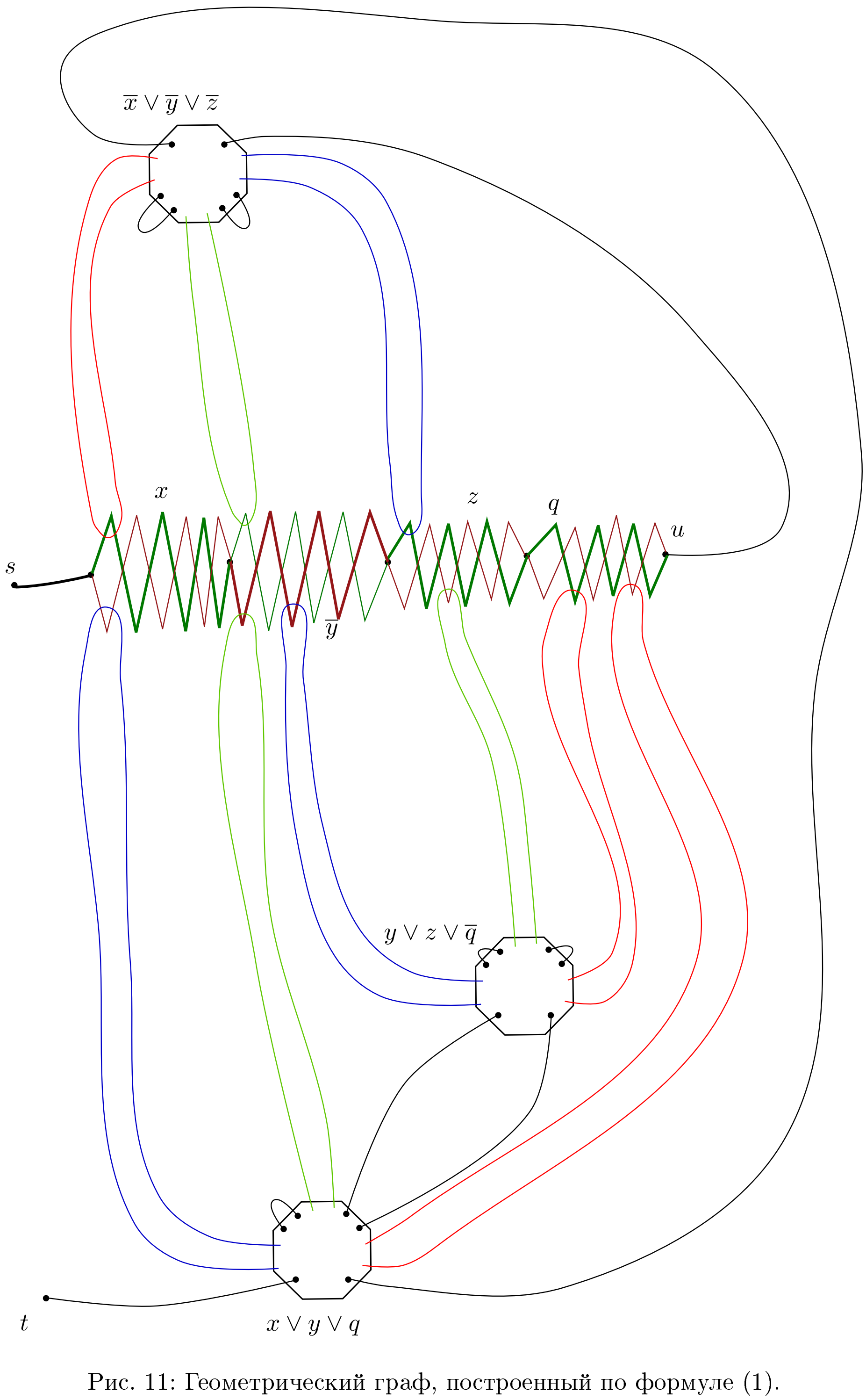

Рис. 11: Геометрический граф, построенный по формуле (1).

На рисунке 11 показан геометрический граф, построенный по формуле (1).

Покажем, что в полученном графе есть самонепересекающийся путь из s в t если и только если у формулы ϕ есть выполняющий набор.

Как и в доказательстве теоремы 1, между простыми путями через все гаджеты переменных и присваиваниями значений всем переменным существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Зафиксируем произвольный путь через гаджеты переменных, а значит, и некоторый соответствующий ему набор значений переменных. Покажем, что выбранный путь можно продолжить до вершины t без самопересечений если и только если выбранный набор значений переменных является выполняющим для ϕ.

Рассмотрим любой гаджет дизъюнкта. Любой путь через него от вершины a до вершины b проходит через вершины g_1, f_1, g_2 и f_2. Кроме того, любой несамопересекающийся путь по дизъюнкту проходит по рёбрам только одного цвета, а значит, проходит ровно через одно из рёбер e_1, e_2 или e_3. Это обеспечивается уже упомянутым свойством “двойной косы” о том, что любые разноцветные рёбра внутри неё пересекаются.

Из сказанного следует, что через гаджет дизъюнкта можно пройти без самопересечений тогда и только тогда, когда, во-первых, этот дизъюнкт истинен на выбранном наборе значений, и, во-вторых, можно пройти без самопересечений через все гаджеты потомков этого дизъюнкта.

Получается, что несамопересекающийся путь от s до t существует если и только если найдётся такой набор значений переменных, что корневые дизъюнкты истинны, их потомки истинны, потомки потомков тоже истинны, и так далее; но это как раз эквивалентно выполнимости формулы ϕ. $\square$

Список литературы

[1] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979. ISBN 0716710447.

[2] D. Lichtenstein. Planar formulae and their uses. *SIAM Journal on Computing*, 11(2):329–343, 1982. doi: 10.1137/0211025. URL `http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0211025`.