RECORRIDO II: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Objetivos:
- Afianzar los conocimientos estudiados en la escuela secundaria acerca de las expresiones algebraicas.
- Clasificar las expresiones algebraicas.
- Operar con polinomios aplicando propiedades.
- Resolver operaciones básicas con expresiones algebraicas racionales fraccionarias.
- Utilizar las técnicas de factorización de polinomios como herramienta para resolver problemas.

Síntesis de contenidos:
En esta unidad vamos a estudiar ciertos tipos de expresiones algebraicas y algunas operaciones definidas entre ellas. Los principales conceptos que desarrollaremos son los siguientes:
- Expresiones algebraicas: clasificación
- Valor numérico de una expresión algebraica
- Operaciones con expresiones algebraicas racionales enteras
- Factorización de expresiones algebraicas racionales enteras
- Polinomios. Operaciones con polinomios
- Raíces de un polinomio. Multiplicidad de raíces
- Regla de Ruffini. Teorema del Resto
- Propiedad de Gauss
- Factorización completa de polinomios
- Expresiones algebraicas racionales fraccionarias
- Operaciones con expresiones algebraicas racionales fraccionarias

Una ***expresión algebraica*** es aquella expresión que combina números y letras, por medio de las operaciones conocidas: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.
Veamos algunos ejemplos:

$$a)3c^2-1; \qquad b)\frac{1}{2b}; \qquad c)\sqrt{6x-2};$$

$$d)\frac{2x-3y}{4x^2-9y^2}; \qquad \text{e)}xz^{-1}; \qquad \text{f)}2\pi\text{r}$$

Observando estos ejemplos con detenimiento, podrás notar que cada una de las expresiones algebraicas pertenece a tipos diferentes, fíjate: en el ejemplo a) y f) las letras, es decir las indeterminadas que intervienen están afectadas por exponentes que son números enteros positivos, mientras que en los ejemplos b), d) y e) se encuentran en el denominador o están afectada por un por un exponente negativo, como en el ejemplo e).

Clasificación de las expresiones algebraicas

Expresiones algebraicas	Racionales	Enteras	*Son expresiones algebraicas en las que las operaciones matemáticas involucradas son: adición, sustracción, multiplicación y potenciación con un número entero positivo como exponente.*
		Fraccionarias	*Son divisiones de expresiones algebraicas enteras con denominador no nulo ó son expresiones en las que la indeterminada está afectada por exponentes enteros negativos.*
	Irracionales		*Son aquellas en las cuales la indeterminada está afectada por un número racional que no es entero o bien las indeterminadas son parte del radicando.*

Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las indeterminadas de las expresiones algebraicas les asignamos algún valor, encontraremos el valor numérico de dicha expresión algebraica.

Es decir, si $c = -1$ entonces, el valor numérico de $3c^2 - 1$ es $3 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

Si $x = 1, y = 0$; entonces, el valor numérico de $\frac{2x-3y}{4x^2-9y^2}$ es $\frac{2.1-3.0}{4.1^2-9.0^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Si r = 2, entonces, el valor numérico de $2.\pi.r$ es $2.\pi.2 = 4\pi$

A esta última expresión algebraica, $2\pi r$, se la denomina **monomio**.

¿Qué es un monomio?

Monomio

Un monomio es una expresión algebraica racional entera que tiene un solo término, formado por un coeficiente (o número) y la parte literal, que son las indeterminadas que intervienen en la expresión. Por ejemplo, son monomios:

$$a)\ -3xz^2; \quad b)\ \frac{1}{2}m; \quad c)\ 16xc^2z^7$$

Coeficiente de un monomio y parte literal:

- -3 es el coeficiente $-3xz^2$, xz^2 es la parte literal.
- $\frac{11}{22}$ es el coeficiente de $\frac{1}{2}m, m$ es la parte literal.
- 16 es el coeficiente de $16xc^2z^7$, xc^2z^7 es la parte literal.

Grado de un monomio: es la suma de los exponentes de las indeterminadas del monomio.

- 3 es el grado de $-3xz^2$
- 1 es el grado de $\frac{1}{2}m$
- 10 es el grado de $16xc^2z^7$

Monomios semejantes.

Dos o más monomios se dicen que son semejantes si tienen la misma parte literal, es decir que solo difieren en el coeficiente. Dos monomios semejantes pueden ser $-2xz^2$ y $\frac{13}{2}xz^2$, así como también lo son $\sqrt{3}b$ $y - b$.

En este apartado, nos detendremos a trabajar solo con las expresiones algebraicas racionales enteras.

Operaciones básicas con expresiones algebraicas racionales enteras

La ADICIÓN de dos expresiones algebraicas racionales enteras se realiza sumando los coeficientes de los términos semejantes. Así, por ejemplo:

1) $2a^2b + ab + 3ba - 6a^2b = -4a^2b + 4ab$

2) $1 - xy + 2xz - 3 + 4xz - xy = -2 - 2xy + 6xz$

La MULTIPLICACIÓN de expresiones algebraicas racionales enteras se realiza aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición o sustracción, haciendo uso de las propiedades de la potenciación y por último, sumando los términos semejantes. Así, por ejemplo,

1) $(b - 3ab) \cdot \left(2a + \frac{3}{2}\right) = 2ab + \frac{3}{2}b - 6a^2b - \frac{9}{2}ab = -\frac{5}{2}ab + \frac{3}{2}b - 6a^2b$

2) $(x^2 + 2y) \cdot (y - 3x^2) = x^2y - 3x^4 + 2y^2 - 6x^2y = -5x^2y - 3x^4 + 2y^2$

Si pensáramos en el procedimiento inverso que realizamos al aplicar la propiedad distributiva, estaríamos escribiéndolo como multiplicación de expresiones más simples, a este procedimiento se lo denomina ***factorización***.

En este apartado, vamos a estudiar solo algunos casos de factorización, cuando estudiemos los polinomios, veremos otros más.

Factorización de expresiones algebraicas racionales enteras.

a) *Factor común:*

En la expresión $ab^2 + 2a^2b^2 - 3ab^3$, el factor ab^2ab^2 aparece en todos los términos de la expresión, por lo que podemos expresar:

$$ab^2 + 2a^2b^2 - 3ab^3 = ab^2 \cdot (1 + 2a - 3)$$

Para conocer el factor común de una expresión, debemos encontrar el máximo común divisor de los coeficientes de los términos, este será el coeficiente del factor común, que tendrá como parte literal, las indeterminadas que se repiten en todos los términos con el menor exponente.
Así, $2a^2b2a^2b$ es el factor común de la expresión $2a^2b - 6a^2b^2c + 8a^3b^2c$, pues:
$2a^2b - 6a^2b^2c + 8a^3b^2c = 2a^2b.(1 - 3bc + 4abc)$

b) ***Cuadrado de un binomio:***
La expresión $a^2 \pm 2ab + b^2$ se denomina **trinomio cuadrado perfecto**, y su expresión factorizada es:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Regla: *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más (o menos) el doble producto del primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.*

Por ejemplo, para factorizar las expresiones algebraicas que siguen:

1) $4x^2z^2 - 12xz + 9$

Observamos que es una expresión algebraica que tiene tres términos, para que dicha expresión sea un trinomio cuadrado perfecto, dos de sus términos deben ser cuadrados y otro de los términos debe ser el doble producto de las bases de dichos cuadrados, veamos:

$$\begin{array}{ccccc} 4x^2z^2 & - & 12xz & + & 9 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (2xz)^2 & & 2.2xz.(-3) & & (-3)^2 \end{array}$$

Con esto, justificamos que la expresión algebraica entera es un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto, la podemos factorizar de la siguiente manera:
$4x^2z^2 - 12xz + 9 = (2xz - 3)^2$

2) $-m^2 + 5n + n^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto, no puede factorizarse como el cuadrado de un binomio. ¿Por qué no lo es?

c) ***Multiplicación de binomios conjugados:***
Toda expresión de la forma $a^2 - b^2$, que es una diferencia de cuadrados, puede factorizarse como multiplicación de binomios conjugados, es decir:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Queda como actividad probar la veracidad de esta igualdad:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

……

Ejemplo:
$25x^2 - y^2z^4 = (5x + yz^2)(5x - yz^2)$

Para pensar…
1. ¿Qué término se podría agregar al binomio $\frac{1}{4}p^2 - 6pq$ para que sea un trinomio cuadrado perfecto?, ¿y para el caso del binomio $64y^2 + z^4 64y^2 + z^4$?
2. ¿Es posible factorizar la expresión $a^2 - 3$ como una multiplicación de binomios conjugados? ¿Cómo resulta?

A continuación veremos un tipo particular de expresiones algebraicas racionales enteras, los *polinomios*.

POLINOMIOS.

$a) 7x^2 - 3x + 1$

Es una expresión algebraica racional entera.
Los coeficientes de $7x^2 - 3x + 1$ son $7, -3 \; y \; 1$.
Tiene tres términos, es un TRINOMIO, cada uno de ellos es un monomio $7x^2;\; 3x;\; 1$.
$b) \; 2 + x^5$

Es una expresión algebraica racional entera.
Los coeficientes de $2 + x^5$ son $2 \; y \; 12 \; y \; 1$.
Tiene dos términos, es un BINOMIO cada uno de ellos es un monomio $2;\; x^5$.

$c) - x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x + 3$

Es una expresión algebraica racional entera.
Los coeficientes de $-x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x$ son -1, 8, $\frac{1}{2}$ y 3.
Tiene cuatro términos, es un CUATRINOMIO, cada uno de ellos es un monomio $-x^3$; $8x^7$; $\frac{1}{2}x$; 3.
Estas tres expresiones algebraicas racionales enteras, son ejemplos de *polinomios. ¿Por qué lo son? ¿Qué tienen en común?*
…….

*Un **polinomio** es una expresión algebraica racional entera que depende de una o varias indeterminadas y sus coeficientes son números reales IR.*

Simbólicamente, llamamos *polinomio en la indeterminada x con coeficientes reales en IR* a toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x \quad + a_0 x^0$$

Esta expresión se lee: "*a sub-ene* por *x a la n* , más *a sub- ene menos uno* por *x a la n menos uno,* ...,más *a sub-uno por x* , más *a sub-cero por x a la cero*".

La notación:

- $P(x)$ se lee "*polinomio P en x*"; "*polinomio P que depende de la indeterminada x".*
- $n \in N_0$
- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2;\ a_1;\ a_0$ son los coeficientes del polinomio (la parte numérica).
- Cada sumando del polinomio,como por ejemplo $a_n x^n$ se denomina término del polinomio.

Si $a_n \neq 0$ entonces, decimos que n es el GRADO del polinomio. Simbólicamente: $gr[P(x)] = n$

Analicemos con mayor profundidad los ejemplos presentados como disparadores, y los vamos a llamar $A(x); B(x)\, y\, C(x), A(x); B(x)\, y\, C(x),$ respectivamente.

Polinomio	$A(x) = 7x^2 - 3x + 1$	$B(x) = 2 + x^5$	$C(x) - x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x + 3$
Grado	$gr[A(x)] = 2$	$gr[B(x)] = 5$	$gr[C(x)] = 7$
Nº de términos	3	2	4
Coeficiente principal	7	1	8
Coef. o término independiente	1	2	3
Completo	SI	NO	NO
Ordenado	SI	SI	NO

¿Qué significa que un polinomio esté ordenado y completo? ¿Qué es el coeficiente principal y el término independiente de un polinomio?

- Un polinomio está **ordenado** (puede ser que lo esté de manera creciente o decreciente) cuando están ordenados, creciente o decrecientemente, los grados de los monomios que son los términos del polinomio.

Por ejemplo, el polinomio $C(x) = -x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x + 3$ no está ordenado, lo podemos ordenar de forma decreciente, de la siguiente manera:

$C(x) = 8x^7 - x^3 + \frac{1}{2}x + 3.$

- Un polinomio está **completo** si figuran en él todos los exponentes de las indeterminadas desde x^0 hasta x^n. En caso contrario se dice incompleto.

Completar un polinomio significa escribir, con coeficientes iguales a cero, todos los términos que faltan.

Los polinomios $B(x) = 2 + x^5$ y $C(x) = -x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x + 3$ quedan completos de la siguiente manera:

$$B(x) = 2 + 0x \quad + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + x^5$$
$$C(x) = 8x^7 + 0x^6 + 0x^5 + +0x^4 + x^3 + 0x^2 + +\frac{1}{2}x + 3$$

- El **coeficiente principal** de un polinomio es el factor numérico del término que posee la indeterminada con el mayor exponente, es decir, es el coeficiente del término que determina el grado del polinomio.
- El **término independiente** de un polinomio es aquel coeficiente que acompaña a la parte literal x^0.

Veamos ahora algunos polinomios especiales:

Polinomio nulo:
Se denomina polinomio nulo al que tiene todos sus coeficientes iguales a cero. El polinomio nulo no tiene grado. Ejemplo: $P(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x$

Polinomio constante:
Un polinomio de grado cero es un polinomio constante. Ejemplo: $P(x) = -5$

Polinomio mónico:
Un polinomio se dice que es mónico, si el coeficiente principal es 1.
Los siguientes polinomios son mónicos:
$P(x) = x^3 - 6x^2 + 2z + 100;\ Q(y) = y^{100} - 1$

Polinomio primo:
Un polinomio $P(x)$ se llama **primo o irreducible** cuando no se puede descomponer como una multiplicación de polinomios de grado menor al grado de $P(x)$. En caso contrario, se dice que el polinomio es **compuesto, reducible o no primo**.
Ejemplos:
$a)\ P(x) = 5x + 10 = 5(x + 2); 5$ es factor de grado 1, $x + 2x + 2$es factor de grado 1.
$b) Q(x) = 2y \quad - 8y^3 = 2y \quad (1 - 4y^2) = 2y \quad (1 + 2y \quad)(1 - 2y \quad)$; los últimos tres factores son de grado 1.
Podemos observar que ***todo polinomio de primer grado es primo***.

Igualdad de polinomios:
Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes son iguales entre sí.
$P(x) = 10x^3 + x^2 - 3$ y $Q(x) = x^2 - 3 + 10x^3$

Así como vimos anteriormente el valor numérico de una expresión algebraica racional, podemos hallar también el ***valor numérico*** de un polinomio.

Consideremos el polinomio $R(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 6$. Si $x = -2$, el valor numérico de $R(x)$ es:

$R(-2) = \frac{1}{2}(-2)^2 - \sqrt{2}(-2) + 6 = 2 + 2\sqrt{2} + 6 = 8 + 2\sqrt{2}$

Generalizamos:

Dado un polinomio:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + +a_1x \quad + a_0x^0$, se denomina valor numérico de $P(x)$ para $x = c$; con $c \in \Re$, al número:

$P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \cdots + a_2c^2 + a_1c \quad + a_0c^0$

Esto será de mucha utilidad para el desarrollo de próximos contenidos, como también lo será para resolver actividades de aplicación.

Hagamos un repaso de lo que vimos hasta ahora, resolviendo las siguientes actividades:

Para revisar lo dado hasta aquí:

(1) Las siguientes expresiones algebraicas no son enteras:

$-3x^{-1}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{8^{11}} \quad + b}{wa^2}$ $\qquad \dfrac{25}{4}\sqrt{b+z}$

$\sqrt{\dfrac{xy}{3}} + x^7 + 2$ $\qquad \dfrac{1}{2}x - \sqrt{3x}$ $\qquad (xy^2+1)^{\frac{2}{8}}$

¿Podés explicar por qué no lo son?

(2) Determiná si las expresiones dadas son monomio o no e indicá la parte literal, el coeficiente y el grado del monomio. Justificá tu respuesta.

$a)\ \dfrac{-xz^2}{9}$ $\qquad b)\ \dfrac{x^3a}{v}$ $\qquad c)\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{xc}$

(3) Escribí dos monomios de grado 4 y 2, respectivamente y luego, determiná dos monomios semejantes a ellos.

(4) Indicá cuáles de las siguientes expresiones son polinomios con coeficientes reales:

$a)\ \dfrac{1}{5}x^2$ $\qquad c)\ 5x^{-1} - x - 2$ $\qquad e)\ 3 - \frac{1}{x}$ $\qquad g) 2^x + 3^{x+1}$

$h)\ 6^{-1} + x^2 + x$

$b)\ 8x^2 - \sqrt{2}x^9 - 1$ $\qquad d)\ 3\pi x^3 - \dfrac{\pi}{2}x^2 + x$ $\qquad f)\ -9$

(5) Completá la tabla con la información correspondiente.

POLINOMIO	Tipo (según sus términos)	Grado	Términos	a_n	a_0
$P(x) = 1 - 2x^2 + x^3$					
$Q(x) = x + \frac{3}{4}$					
$R(x) = 2x$					
$S(x) = -1$					
$T(x) = x - x^7 - \frac{1}{3}x^2$					
$U(x) = -x \quad + 1 - \sqrt{3}x^5$					

(6) Ordená en forma decreciente y completá los polinomio de la actividad anterior cuando sea posible.

(7) Determiná los valores de $a, b\ y\ c a, b\ y\ c$ para que los polinomios $P(x) y\ Q(x)$ sean iguales.

$i)\ P(x) = 1 - 3x^2 + x^3$; $\quad Q(x) = -(2 + a)x^3 - bx^2 + c$

$ii)\ P(x) = -5x^7 + \frac{2}{3}x - \sqrt{36}x^3$; $\quad Q(x) = -(a + b)x^7 + \frac{2}{3}x - bx^3 + c$

(8) Encontrá los valores de $a\ y\ b \in \Re$ para que el polinomio

$Q(x) = (3a - 6)x^2 + (4a - b - 9)x$ sea igual al polinomio nulo.

(9) Hallá el valor de m en los siguientes polinomios para que se cumplan las condiciones dadas.

1) $P_1(x) = x^3 + 2x^2 - mx\ \ y\ \ P_1(-1) = 3$

2) $P_2(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^2 - m \quad y\ P_2(1) = 2$

3) $P_3(x) = -x^2 + 3\sqrt{5}x^2 - m \quad y\ P_3(\sqrt{5}) = 0$

(10) Factorizá, si es posible, las siguientes expresiones:

$(a)\ 169a^5b^3 + 13ab^3c^5$

$(b)\ \frac{x^3y^2}{\sqrt{2}} + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^3 x^2 + \left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right)^4$

$(c)\ 5b^2 - 10a^5b^2 + 5a^2b^3 + 15a^6b^5$

$(d)\ \frac{5}{2}m^5n^3 - \frac{1}{2}m^3n + \frac{1}{8}m^3np^3 + \frac{5}{2}m^4n$

$(e)\ \frac{10}{21}xyz + \frac{4}{3}x^2y^5z^4 - \frac{2}{9}xy^6z^5 - \frac{2}{3}xy^2z^8$

(11) Los siguientes trinomios son cuadrados perfectos, es decir pueden expresarse como cuadrado de un binomio. Encontrá dicha expresión.

$(a)x^2 + 10x + 25$

$(b)m^2 - 2mn + n^2$

$(c)\frac{q^2}{4} - pq + p^2$

$(d)2y^4 + x^2 + 2\sqrt{2}xy^2$

$(e)4x^6 + \frac{4}{3}x^3y + \frac{y^2}{9}$

$(f)4x^6 + \frac{1}{16}y^8 - x^3y^4$

(12) Completá cada uno de los siguientes binomios para que resulte un trinomio cuadrado perfecto.

$(a)x^2 + 4xy$

$(b)9a^2 - 6ab$

$(c)\frac{25}{4}x^2 + 15x$

$(d)16 + 4x$

$(e)\frac{9}{4}x^2 + 2xy$

$(f)\ a^2 - 6\sqrt{2}ab$

(13) Factorizá las siguientes diferencias de cuadrados.

$(a)x^2 - 9$

$(b)\ y^2 - 25m^2$

$(c)\ 4a^2 - 3b^2$

$(d)\ 144m^6 - 121x^8y^4$

$(e)\frac{4}{9}a^6 - \frac{b^4}{25}$

$(f)(x - y)^2 - z^2$

Operaciones con polinomios.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS:

Para sumar o restar polinomios, debemos sumar o restar los términos semejantes y utilizar las propiedades de números reales que vimos en el recorrido anterior.

Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Para efectuar la operación sustracción de polinomios, tenemos que recordar que: $c - b = c + (-b)$.

Es decir, la diferencia entre dos polinomios es igual a la suma del primero con el opuesto del segundo polinomio: *P(x) – Q(x) = P(x) + [-Q(x)].*

Ejemplos:

(a) Encontrá la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 - 5x^2 + 7x)$

Solución:

$(a)(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 - 5x^2 + 7x) =^{(1)}$

$= (x^3 + x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4 \quad ^{(2)}$

$= 2x^3 - 11x^2 + 9x + 4$

(1) Agrupamos términos semejantes.

(2) Sumamos términos semejantes.

(b) Encontrá la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 - 5x^2 + 7x)$

$$(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 - 5x^2 + 7x \quad) =$$

$$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 + 5x^2 - 7x \qquad (1)$$

$$= (x^3 - x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4 \quad (2)$$

$$= 0x^3 - x^2 - 5x + 4 = -x^2 - 5x + 4 \quad (3)$$

(1)Sumamos al primer polinomio el opuesto del segundo polinomio.

(2)Agrupamos términos semejantes.

(3)Operamos con los términos semejantes.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POLINOMIOS.

<u>Multiplicación:</u>

a) Multiplicación de un número por un polinomio:

Para calcularlo se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición o sustracción. El resultado es otro polinomio que tiene de grado el mismo del polinomio y como coeficientes el producto de los coeficientes del polinomio por el número.

Proponé un ejemplo y resolvelo:

………

b) Multiplicación de un monomio por un polinomio:

Se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio utilizando la propiedad distributiva. Además al multiplicar las indeterminadas debemos recordar la propiedad de las potencias de igual base.

Ejemplo:$-3x^2\left(\frac{1}{2}x^6 + x^3 - 4\right) = -3x^2.\frac{1}{2}x^6 - 3x^2.x^3 - 3x^2.(-4)$

$$= -\frac{3}{2}x^8 - 3x^5 + 12x^2$$

c) Multiplicación entre polinomios:

Vamos a multiplicar dos polinomios,

$$(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) = 2x.(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) \qquad (1)$$

$$= (2xx^2 - 2x.5x + 2x.4) + (3.x^2 - 3.5x + 3.4) \qquad (2)$$

$$= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) \qquad (3)$$

$$= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 \qquad (4)$$

(1)Aplicamos propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma algebraica.

(2)Operamos multiplicando los dos monomios de cada término.

(3) Aplicamos la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base.

(4) Operamos con los términos semejantes.

<u>División:</u>

Si tenemos dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y queremos efectuar la división entre ellos $P(x): Q(x)$, primero debemos tener en cuenta que si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios tal que el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$, y $Q(x)$ no es nulo, entonces existen y son únicos dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$, cociente y resto, respectivamente, tales que:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x).$$

$$\begin{array}{llr|ll} \text{Dividendo} & & P(x) & Q(x) & \text{Divisor} \\ \cline{4-5} & \text{Resto} & R(x) & C(x) & \text{Cociente} \end{array}$$

Donde $\mathrm{R(x)} = 0$ ó $\mathrm{gr[R(x)]} < gr[\mathrm{Q(x)}]$

Ordenamos de forma decreciente y completamos los polinomios dividendo y divisor, si no lo están. Siempre debes completar el polinomio dividendo, no lo olvides.

Veamos esto a través de un ejemplo:

Sean los polinomios $P(x) = 8x^4 - 6x^2 + x$ y $Q(x) = 2x^2 - 3Q(x) = 2x^2 - 3$.

Realicemos la división $P(x): Q(x)$.

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1) Escribimos ambos polinomios en forma decreciente. Si los polinomios no son completos agregamos los términos faltantes.

$$\begin{array}{r|l} 8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + x + 0 & 2x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

2) Calculamos el cociente entre el término principal de $P(x)$ y el del divisor $Q(x)$. En este caso resulta $8x^4 : 2x^2 = 4x^2$. Multiplicamos este cociente por el divisor y lo restamos del polinomio $P(x)$:$P(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + x + 0 & 2x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2} -8x^4 + 0x^3 + 12x^2 \qquad\quad & 4x^2 \\ \cline{1-1} 6x^2 + x + 0 & \end{array}$$

3) Calculamos ahora el cociente entre el término de mayor grado de la resta y el divisor $Q(x)$. En el ejemplo tenemos $6x^2 : 2x^2 = 3$. Multiplicamos el divisor por este cociente y lo restamos al polinomio que obtuvimos en el paso anterior.

$$\begin{array}{r|l} 8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + x + 0 & 2x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2} -8x^4 + 0x^3 + 12x^2 \qquad\quad & 4x^2 + 3 \\ \hline 6x^2 + \quad x + 0 & \\ -6x^2 + 0x + 9 & \\ \hline x + 9 & \end{array}$$

El cálculo termina aquí porque el grado del polinomio resto que resulta, luego de realizar el último paso, es menor que el grado del polinomio divisor.
El cociente de la división es $C(x) = 4x^2 + 3$y el resto es $R(x) = x + 9$. Tenemos entonces que $P(x) = (2x^2 - 3).(4x^2 + 3) + x + 9$.
Al dividir el polinomio $P(x)$ por $Q(x) = 2x^2 - 3$ se obtiene el polinomio cociente $C(x) = x^2 - x + 1$ y el resto que resulta es $R(x) = 3x - 2$. ¿Cuál es la expresión del polinomio dividendo?

Actividad:
Hallá el cociente y el resto de la división entre:
$P(x) = -4x^3 + 3x^2 + 6x^4 - 5$ *y* $Q(x) = x - 2$.
Al resolver la división: ¿qué obtuviste como resto?
…….
Observemos que al dividir un polinomio $P(x)P(x)$ por un polinomio de la forma $(x - a)$ con $a \in \Re$ obtenemos un polinomio cociente $C(x)$ y un polinomio resto $R(x)$, tal que:

$$P(x) = (x - a).C(x) + R(x)$$

donde el grado de $R(x)$ es menor al grado de $(x - a)(x - a)$, es decir, $R(x)$ es una constante .

Raíces de un polinomio
Un número real *a* es una ***raíz*** de un polinomio $P(x)$ sí y solo sí el polinomio se anula para ese valor. Es decir,

$$a \text{ es raíz de } P(x) \text{ sí y sólo sí } P(a) = 0$$

Ejemplo: 2 es raíz del polinomio $P(x) = x^5 - 4x^3$,
pues $P(2) = 2^5 - 4.2^3 = 0$.
También -2 es raíz de $P(x)$, pues $P(-2) = (-2)^5 - 4.(-2)^3 = 0$.
Pero 1 no es raíz de $P(x)$, pues $P(1) = -3 \neq 0$.

Regla de Ruffini
En el caso en que tengamos que dividir un polinomio $P(x)$ por uno de la forma $(x - a)$, los coeficientes del cociente $C(x)$ y el resto R (que es un número real) pueden calcularse utilizando la ***regla de Ruffini***.
¿Quién fue Ruffini? Realizá un buceo bibliográfico para investigar a este matemático.
…….

A continuación, veremos paso a paso cómo hallar el cociente y el resto de dividir el polinomio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$ por $Q(x) = x - 3$ aplicando el método de Ruffini.

Escribimos el polinomio $P(x)$ en forma decreciente y completamos el polinomio, si es que no lo está.

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5$$

Como el divisor es $Q(x) = x - 3$, tomamos el valor $a = 3$. Debido a que 3 es raíz de Q(x), es decir es el valor que anula dicho polinomio.

Realizamos la división con la ayuda de una tabla en la que colocamos en la primer fila los coeficientes del polinomio $P(x)$ y a la izquierda de la línea vertical colocamos el valor de a. A continuación describimos los cálculos que se realizan para completar la tabla y hallar así el cociente y el resto de la división.

1. El primer coeficiente de $P(x)$; que en este caso es 2 se reescribe en la tercer fila, luego se multiplica por a y el resultado se coloca debajo del segundo coeficiente de $P(x)$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & & \mathbf{6} & & \\ \hline & \mathbf{2} & & & \end{array}$$

2. Sumamos el segundo coeficiente con el valor que agregamos en el paso anterior y colocamos el resultado debajo de ambos en la tercera fila. Luego multiplicamos este último valor por *a* y colocamos el resultado en la segunda fila, debajo del tercer coeficiente de $P(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & & \mathbf{6} & \mathbf{-3} & \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & & \end{array}$$

3. Siguiendo los cálculos de esta manera, completamos la tabla.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & & \mathbf{6} & \mathbf{-3} & \mathbf{-9} \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \boxed{\mathbf{-4}} \end{array}$$

El último valor de la última fila de la tabla es el resto de la división, en este caso el resto es $R = -4$. Los demás valores son los coeficientes del polinomio cociente ordenados en forma decreciente. Así, en este ejemplo resulta: $C(x) = 2x^2 - x - 3$.

Finalmente encontramos:

$$P(x) = (2x^2 - x - 3)(x - 3) - 4$$

Recuerda que al dividir un polinomio de grado *n* por otro de grado *1*, se obtiene un polinomio cociente de grado *n-1.* En este ejemplo hemos dividido un polinomio de grado 3 por otro de grado 1, por lo tanto el polinomio cociente es de grado 2.

Teorema del resto.

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ y un binomio de la forma $(x - a)$ es igual al número que se obtiene al reemplazar la indeterminada x en el polinomio $P(x)$ por el número a, es decir, $P(a) = R$.

Aplicamos el Teorema del Resto para verificar el resto de la división encontrado en el ejemplo anterior,

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 5$$
$$= 54 - 63 + 5 = -\mathbf{4}$$

Actividad.

Realizá las dos divisiones siguientes aplicando el método de Ruffini para encontrar el resto y el cociente, luego verificá el resto encontrado con el Teorema del Resto.

1) $(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1) : (x - 1)$

2) $(4x^3 + 4x^2 + x + 75) : (x + 3)$

Solución:

Divisibilidad de polinomios:

Cuando el resto de una división es cero, se dice que **el dividendo es múltiplo del divisor** y también, que **el dividendo es divisible por el divisor** o que **el divisor es un factor del dividendo**. En el ejemplo 2, el polinomio dado es divisible por $(x + 3)$ porque el resto es cero.

De forma general, cuando un polinomio $P(x)$ es divisible por otro $Q(x)$, se escribe: $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$.

Para repasar lo dado hasta aquí:

(1) Dados los siguientes polinomios:

$A(x) = -x^2 + 3x^3 + 5x - x^6$

$B(x) = x^2 - 2x^5 + x^4 - x$

$C(x) = 2x^3 - 9x^2$

$D(x) = -4x$

Efectuá las operaciones, indicando el grado del polinomio resultante.

a) $[A(x) + B(x)] \,.\, C(x)$

b) $3B(x) - D(x) \,.\, C(x)$

c) $C(x) - [D(x)]^2$

d) $x[C(x)]^2 - B(x) - 6x^2$

(2) Resolvé las operaciones indicadas con polinomios:

1) $\left(5x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}x^3+3x^2+\frac{1}{5}x-\frac{1}{2}\right)$
2) $\left(3x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x^2-1\right)$
3) $(0{,}5x^2-x+1{,}2)\cdot(1{,}2x-0{,}9)$
4) $\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+16x-4\right):\left(\frac{1}{2}x+3\right)$

(3) Hallá el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ al dividir $A(x)$ por $B(x)$ y expresá cada polinomio como $A(x)=B(x).C(x)+R(x)$. Cuando sea posible, aplicá la regla de Ruffini.

1) $A(x) = 6x^6+x^5+18x^3-2x-8 \quad B(x) = 2x^2-x+1$
2) $A(x) = 4x^5-3x^2-x^4 \quad B(x) = 2x^2-x$
3) $A(x) = 6x^7-2x^6-x^4+x \quad B(x) = x-14$
4) $A(x) = -2x^4-\dfrac{3}{2}x^2 \quad B(x) = x+3$

(4) Determiná el resto de la división de los polinomios
$P(x) = x^3-3x+2$ y $Q(x) = x-1$.

(5) Ídem al anterior pero ahora tomando como divisor $T(x) = x+2$.

(6) Indicá si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ o por $T(x)$ en base a los ejercicios (4) y (5).

(7) Calculá el valor de k en el polinomio $P(x) = -2x^4+kx^3-3x-2$, sabiendo que el resto de dividir $P(x)$ por $x+2x+2$ es 4.

(8) ¿Para qué números reales m el resto de dividir el polinomio
$P(x) = 3x^2+9x-26$ por $(x-m)$ *es* 4?

(9) Determiná el polinomio que, dividido por $5x^2-1$ da como cociente $2x^2+x-2$ y resto $x-2$.

(10) Encontrá los valores de a, b, c y d sabiendo que:

1) $a+(a-b)x+(b-c)x^2+dx^3 = 8+12x+5x^3-10x^5$
2) $ax^3+(a+b)x^2+(a-c)x+d = 12x^3-3x^2+3x-4$

(11) Determiná si la primera expresión es divisor de la segunda.

a) $x-2;\quad x^4+3x^3-5x^2+2x-24$
b) $x-5;\quad x^3+2x^2-25x-50$
c) $x+\dfrac{3}{2};\quad 2x^4+5x^3+3x^2+12$

(12) Probá que $x - b$ es factor de los binomios $x^5 - b^5$; $x^6 - b^6$; $x^7 - b^7$ y encontrá el cociente correspondiente mediante la regla de Ruffini.

Factorización de polinomios.

Factorizar un polinomio $P(x)$ significa escribirlo como producto entre el coeficiente principal y factores de la forma $(x - c)$, en donde las letras c son las raíces de $P(x)$.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 x^0$ es un polinomio de enésimo grado con $n > 0$, entonces existen n números $c_1; c_2; c_3; \ldots; c_n$ no necesariamente distintos, tales que:

$$\boldsymbol{P(x) = a_n \cdot (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n)}$$

Las letras c_i indican las raíces de $P(x)$.

Un valor $c \in \Re$ es una raíz de un polinomio $P(x)$, si el valor numérico de $P(x)$ evaluado en c es cero; es decir si $P(c) = 0$. Podemos pensar entonces a la raíz c como una solución de la ecuación $P(x) = 0$ y utilizar las herramientas de la unidad anterior para hallar las raíces de un polinomio.

Hay una manera en la que se puede decir que hay exactamente $\boldsymbol{n}$ raíces, en donde c es una ***raíz de multiplicidad*** $\boldsymbol{k}$ de $P(x), si\ (x - c)$ aparece $\boldsymbol{k}$ veces en su factorización completa.

Por ejemplo en $P(x) = 3(x-5)^2(x+4)\,(x-3)^3$

Las raíces $5, -4, 3$ tienen multiplicidad $2, 1\ y\ 3$ respectivamente. Una raíz de multiplicidad 1 (*k = 1*) se denomina ***raíz simple***.

Si tenemos un polinomio expresado de la forma:

$P(x) = 2.(x-2).(x-3)^3.(x+3)$

Inmediatamente, podemos concluir que las raíces de $P(x)$ son:

$x_1 = 2$, con k = 1 es raíz simple

$x_2 = 3$, con k = 3 es raíz triple

$x_3 = -3$, con k = 1 es raíz simple

Esto es así, dado que encontrar las raíces de $P(x)$ equivale a resolver la ecuación polinomial $P(x) = 0$ y

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2.(x-2).(x-3)^3.(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ (x-3)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \\ x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \end{cases}$$

Es importante observar que no toda ecuación polinómica $P(x) = 0$ tiene solución en el conjunto de los números reales. Para este curso, en los casos en que no existan raíces reales, aceptaremos como factorizada la forma en que la que está dado el polinomio. Más adelante, continuaremos ampliando la factorización de polinomios al conjunto de los números complejos.

Les dejamos estos ejercicios para resolver aplicando lo visto hasta ahora.

- Encontrá las raíces del polinomio $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 9x^2 - x + 3$ sabiendo que $x_1 = -1$ es una raíz de dicho polinomio.
- Determiná el polinomio mónico de grado mínimo con coeficientes reales que tenga como raíz simple $x_1 = 2$ y como raíz doble a $x_2 = -5$.
- Calculá las raíces reales del polinomio $P(x) = x^4 - x^2 - 2$.

Propiedad de Gauss.

Junto con la regla de Ruffini y el teorema del Resto, la propiedad de Gauss permite **encontrar todas las raíces racionales de un polinomio**, para poder expresar dicho polinomio de forma completamente factorizada.

Investigá: ¿Quién fue Gauss? ¿Cuáles son los aportes a la Matemática por los cuáles se lo reconoce?

……

……

El enunciado de la propiedad de Gauss es el siguiente:

Sea $P(x)$ un polinomio de grado *n*, con coeficientes enteros. Si $P(x)$ admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (siendo *p* y *q* coprimos), entonces p es divisor del término independiente y q es divisor del coeficiente principal.

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$.

El coeficiente principal es 1 y el coeficiente independiente es -30.

Por el enunciado de la propiedad de Gauss, las posibles raíces racionales (enteras y fraccionarias) son los cocientes que se obtienen de dividir el término independiente por el coeficiente principal.

$Divisores\ de\ \boldsymbol{p}:: \pm\mathbf{30}, \pm\mathbf{15}, \pm\mathbf{10}, \pm\mathbf{6}, \pm\mathbf{5}, \pm\mathbf{3}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{1}$

$Divisores\ de\ \boldsymbol{q}: \pm\mathbf{1}$

$Posibles\ raíces\ \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}: \pm\mathbf{30}, \pm\mathbf{15}, \pm\mathbf{10}, \pm\mathbf{6}, \pm\mathbf{5}, \pm\mathbf{3}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{1}$

Aplicamos el teorema del resto para determinar cuáles de todas estas posibles raíces, son raíces del polinomio $P(x)$.

Comencemos con $x = 5$

$P(5) = 5^3 + 4 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 - 30 = 125 + 100 - 55 - 30 = 140 \neq 0$ podemos asegurar que $x = 5$ no es raíz del polinomio $P(x)$.

Sigamos con $x = 3$

$P(3)=3^3+4\cdot 3^2-11\cdot 3-30=27+36-33-30=0$ como $P(3)=0$, podemos asegurar que 3 es raíz del polinomio $x_1=3$.

Por el método de Ruffini, realizamos la división de $P(x)$ por el divisor (ahora conocido) $(x-3)$ para obtener el cociente $C(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -11 & -30 \\ 3 & & 3 & 21 & 30 \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{10} & \mathbf{0} \end{array}$$

Es decir que $R(x)=0$ y el cociente $C(x)=x^2+7x+10$, se puede escribir al polinomio $P(x)$ como $P(x)=(x-3)\cdot C(x)+R(x)$ es decir:

$P(x)=(x-3)\cdot(x^2+7x+10)$

Podemos seguir probando con el resto de las posibles raíces, pero el polinomio $C(x)=x^2+7x+10$ es de grado 2, es decir, podemos aplicar la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado para obtener las otras dos raíces faltantes (pues, el polinomio P(x) tendrá 3 raíces por ser de grado 3).

Luego, las raíces de $C(x)=x^2+7x+10$ son $x_2=-2$ y $x_3=-5$

Entonces el polinomio $P(x)$ queda completamente factorizado de la siguiente manera:

$$P(x)=(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x+5)$$

Expresiones algebraicas racionales fraccionarias.

Para realizar las operaciones básicas de las expresiones racionales fraccionarias, se utilizan las mismas reglas que se usan para los números racionales. Ante todo, definiremos *mínima expresión de una expresión racional fraccionaria*.

Una expresión racional fraccionaria está en su ***mínima expresión*** cuando el numerador y el denominador no tienen ningún factor común (excepto el uno).

Por ejemplo $\dfrac{2x}{x+3}$ es la mínima expresión de $\dfrac{8x^3}{4x^3+12x^2}$, pues

$\dfrac{8x^3}{4x^3+12x^2}=\dfrac{{}^{2}\cancel{8x^3}}{{}_{1}\cancel{4x^2}(x+3)}$ podemos observar que el numerador y el denominador de la segunda expresión algebraica racional fraccionaria tienen factores comunes.

Para reducir una expresión racional a su mínima expresión se procede de la siguiente manera:

Se factoriza el numerador y el denominador y se simplifican los factores comunes.

Por ejemplo:

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}=\frac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)}=\frac{x+3}{x} \qquad con\, x\neq 0\,;x\neq -2$$

Observación: Al simplificar se debe excluir la división por cero, por lo tanto se restringen los valores de x que anulan el factor simplificado. En el ejemplo, excluimos los valores 0 y–2 para la *x*.

Mínimo común múltiplo de polinomios (mcm).

Dados dos o más polinomios, tal que cada uno se halla expresado como multiplicación de factores primos o irreducibles, decimos que el ***mínimo común múltiplo*** entre ellos es la multiplicación de los factores irreducibles comunes y no comunes considerados con su mayor exponente.

Ejemplo:

Calculamos el mínimo común múltiplo entre:

$x^2 - 4$; $x^2 + 4x + 4$ y $x^2 - 2x$

Al factorizar cada uno de ellos resulta:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$
$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$
$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

Entonces el mcm es: $x\,(x+2)^2(x-2)$.

Operaciones con expresiones algebraicas racionales fraccionarias

Adición y sustracción.

Para sumar o restar expresiones algebraicas racionales fraccionarias, se determina el mínimo común múltiplo entre los denominadores y se procede de igual manera que al sumar o restar números racionales.

Sea $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x-1}$ $\quad con \quad x \neq -1 \; y \; x \neq 1$

Determinamos el mcm entre los denominadores, en este caso: $(x+1)(x-1)$.

Y efectuamos la operación de forma análoga a los números racionales:

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{2x-2+3x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{5x+1}{(x+1)(x-1)}$$

En el caso de la sustracción se procede en forma similar:

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{3x-2(x-1)}{x(x-1)} = \frac{3x-2x+2}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x(x-1)} \quad con \; x \neq 0 \; y \; x \neq 1$$

Multiplicación.

Para multiplicar expresiones algebraicas racionales fraccionarias se procede igual que para multiplicar números racionales fraccionarios, es decir se multiplican los numeradores entre sí y se multiplican los denominadores entre sí.

$$\frac{x+1}{x-3} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{x(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x^2+x}{x^2-x-6} \quad con \; x \neq 3 \; y \; x \neq -2$$

En algunos casos es conveniente obtener la mínima expresión del resultado:

$$\frac{2x+1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{10x+5}=\frac{(2x+1)(x^2-1)}{(x+1)(10x+5)}$$

$$=\frac{(2x+1)(x-1)(x+1)}{(x+1)5(2x+1)}$$

$$=\frac{x-1}{5} \quad ;\ \text{con} \quad x\neq -1;\quad x\neq -\frac{1}{2}$$

¿Te animás a justificar cada uno de los pasos realizados en el ejercicio anterior?

……
……
………..

División.

Y para terminar, en la división (como con los números racionales fraccionarios), se multiplica a la primera expresión racional fraccionaria por el inverso multiplicativo o recíproca de la segunda expresión.

$$\frac{x^2-2x+1}{x+3}\div\frac{x^2-x}{x^2+x-6}=\frac{(x-1)^2}{x+3}\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{x(x-1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{x};\quad x\neq 1;\ x\neq -3;\ x\neq 0$$

Justificá cada uno de los pasos realizados en el cálculo anterior.

……