RECORRIDO II: Expresiones algebraicas.

1) Dadas las siguientes expresiones, decidí cuáles son los polinomios y en tal caso, indicá el grado, el coeficiente principal, el término independiente.

$a)\ -2t^3 + 4t^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{t^2} + 2$

$b)\ \frac{1}{2}t^5 + 6t^4 - \frac{3}{2}t^3 - 2t + 5$

$c)\ \sqrt{t} - 2$

$d)\ \frac{1}{3}t^2 + 2t - 1$

2) Considerá el polinomio $2x^5 + 6x^4 + 4x^2$:

- ¿Cuántos términos tiene?
- Escribí los términos.
- ¿Cuál es el factor común?
- Factorizá el polinomio.

3) Construí un polinomio $R(x)$ que cumplan, en cada caso, las siguientes condiciones:

a) Es de grado 3 y no tiene término lineal.

b) Es de grado 4, el coeficiente principal es -3 y el término lineal es 1. ¿Es único dicho polinomio?

4) Escribí los siguientes polinomios en forma decreciente y completalos:

$a)\ P(x) = \sqrt{2} - 3x^2 + x^5 + 6x - \frac{3}{2}x^3$

$b)\ P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5 + 4x - 6x^4 - \frac{3}{2}x^5$

5) Encontrá a, b, c y d para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales.

$$P(x) = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{5}x^3 + 3; \quad Q(x) = (a-1)x^3 + (b+2)x^2 + cx + d$$

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad Q(x) = 3(x-1)(x+2)(x-1)$$

6) Dados los polinomios:

$P(x) = -3 + 5x^3 - 7x^2 + 3x; \quad Q(x) = 4x^2 - 6x - 4x^4 + 3;$

$R(x) = 3x^3 + 2x; \quad S(x) = 3$ **realizá las siguientes operaciones:**

$a)\ [P(x) + Q(x)].R(x) =$

$b)\ P(x) - [R(x)]^2 =$

$c)\ S(x).R(x) - Q(x) + \frac{1}{2}P(x) =$

7) Hallá en cada caso, el cociente y el resto de dividir $P(x)$ por $Q(x)$, utilizando la regla de Ruffini cuando sea posible.

$a)\ P(x) = 4x^4 + 18x^3 + 29x + 10; \quad Q(x) = 2x^2 + 3x - 1$

$b)\ P(x) = \frac{1}{8}x^5 + 8x^3 - \frac{7}{2}x^6; \quad Q(x) = x^2 + 2x;$

$c)\ P(x) = \frac{9}{2}x^6 - x^4 - \frac{5}{3}x^2 - 5;\ \ Q(x) = x - 1$

$d)\ P(x) = 3x^5 + x^4 - \frac{5}{9}x^2;\ \ Q(x) = x - \frac{1}{2}$

8) ¿Es cierto que existe un polinomio $P(x)$ tal que $6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15 = P(x)(2x^2 - 3)$? Justificá.

9) Calculá el valor de m para que el resto de la división de $P(x) = 4x^4 - mx^3 + 3x^2$ por $Q(x) = x - 3$ sea 324.

10) ¿Qué valores deben tener m y n para que el polinomio $Q(x) = x^3 + mx^2 + nx + 6$ sea divisible por $(x-3)$ y $(x+2)$?

11) Determiná si $1; 2; 0;\ \sqrt{2}$ son raíces de los siguientes polinomios:

$a)\ P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$b)\ P(x) = x^4 - 2(\sqrt{2}+1)x^3 + 2(\sqrt{2}+1)x^2 - 4x$

12) Hallá los valores de *a* y *b* en el polinomio $P(x) = x^4 - a\,x^3 + b\,x^2$ para que $x = 3$ y $x = -1$ sean dos de sus raíces.

13) Hallá todas las raíces reales de los siguientes polinomios sabiendo que *r* es una de ellas:

$A(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x, \quad r = 1$

$C(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6, \quad r = -3$

$D(x) = 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2, \quad r = \frac{1}{3}$

14) El polinomio $P(x) = 2x^3 - 18x^2 + x - 9$ es divisible por $Q(x) = 2x^2 + 1$. Hallá la única raíz real de $P(x)$.

15) Encontrá los valores de *a* tales que al dividir $x^2 + 5x - 2$ por $x - a$ el resto sea igual a -8.

16) Hallá el resto de la división de los polinomios $A(x) = x^3 - 3x + 2$ y $B(x) = x - 1$.

17) Ídem al anterior, pero ahora tomando como divisor $C(x) = x + 2$.

18) Indicá si $A(x)$ es divisible por $B(x)$ o por $C(x)$ de los ejercicios 16 y 17 .

19) Hallá el cociente y el resto de la división para los siguientes pares de polinomios.

$A(x) = -x^6 + 2x^5 - 3x^3 + 3,\ \ B(x) = x + 2$

$A(x) = -x^5 + x^4 + 2x^3 - 1,\ \ B(x) = x - 3$

20) Determiná el valor de k en el polinomio $P(x) = -2x^4 + kx^3 - 3x - 2$ sabiendo que el resto de dividir $P(x)$ por $x + 2$ es 5.

21) ¿Para qué números reales *m* el resto de dividir el polinomio $P(x) = 3x^2 + 9x - 26$ por $(x - m)$ es 4?

22) Factorizá los siguientes polinomios:

$a)\ 12x^3 + 18x$

$b) x^2 - 2x - 8$

$c) 30x^3 + 15x^4$

$d) x^2 - 14x + 48$

$e)\ \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}$

$f) x^4 - \frac{81}{49}$

$g) 2x^2 + 5x + 3$

$h) 9x^2 - 36x - 45$

$i) 49 - 4y^2$

$j) t^2 - 6t + 9$

$k) (a + b)^2 - (a - b)^2 =$

$l)\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 =$

$m) x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) =$

$n) (a^2 - 1).b^2 - 4(a^2 - 1) =$

$o) 8x^3 - 125 =$

$p) x^3 + 2x^2 + x =$

$q) 3x^3 - 27x =$

$r)\ x^4y^3 - x^2y^5 =$

$s)\ 18y^3x^2 - 2xy^4 =$

$t)\ (x-1)(x+2)^2 + (x-1)^2(x+$

23) Comprobá la veracidad de las siguientes igualdades, siendo a y b números reales.

1) $ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - (a^2+b^2)]$

2) $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2 = 4a^2b^2$

3) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$

24) Factorizá por completo la siguiente expresión:

$$4a^2c^2 - \left(a^2 - b^2 + c^2\right)^2$$

25) ¿Cuál es la forma totalmente factorizada de la expresión $x^2(x-2) - 4x(x-2) + 4(x-2)$?

26) Para seguir pensando un poco más…

a. La cantidad de individuos de dos poblaciones A y B, responde a las siguientes fórmulas:

$P_A(t) = \frac{3}{2}t + 50$

$P_B(t) = t^3 - 12t^2 + 44t + 8$

donde t es el tiempo expresado en semanas. Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana, ¿tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

b. El Servicio Meteorológico utilizó como modelo para la variación de la temperatura en grados centígrados durante cierto día la fórmula $T(t) = 0,04t(t-12)(t-24)$ donde t está medido en horas $y\ t=0$ corresponde a las 6 horas am. ¿A qué hora la temperatura fue de $0\ ^\circ C$? ¿A qué hora tomó valores superiores a $0\ ^\circ C$? ¿A qué hora valores inferiores a $0\ ^\circ C$?

c. En una isla se introdujeron 112 iguanas. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. El número de iguanas a los *t* años de haberlas dejado en la isla está dado por $I(t) = -t^2 + 22t + 112$.

¿En qué momento la población de iguanas se extingue? Calculá la cantidad de años en los cuales la población de iguanas aumentó. Graficá la función $I(t)$.

27) De las siguientes expresiones, ¿cuáles son expresiones racionales fraccionarias?

$(a)\ \frac{3x}{x^2-1}$ $(b)\ \frac{\sqrt{x+1}}{2x+3}$ $(c)\ \frac{x(x^2-1)}{x+3}$

28) Considerá la expresión $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{x}{(x+1)^2}$;

a. **¿cuántos términos tiene esta expresión?**
b. **encontrá el mínimo común denominador de todos los términos.**
c. **resolvé y simplificá la expresión en caso de ser posible.**

29) Simplificá la expresión racional fraccionaria e indicá las restricciones correspondientes.

1) $\frac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$ 2) $\frac{4\,(x^2-1)}{12\,(x+2)(x-1)}$

3) $\frac{x-2}{x^2-4}$ 4) $\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$

5) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$ 6) $\frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$

7) $\frac{x+\frac{1}{x+2}}{x-\frac{1}{x+2}}$ 8) $\frac{1+\frac{1}{c-1}}{1-\frac{1}{c-1}}$

9) $\frac{\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x-2}}{x+2}$ 10) $\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$

11) $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ 12) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+1)^{-1}}$

13) $1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ 14) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$

30) Reducí a la mínima expresión las siguientes expresiones racionales fraccionarias:

a) $\frac{(x+1)^3}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2-25}{2x-10}$ c) $\frac{x^2-7x+6}{x^2-x}$

31) Realizá las operaciones indicadas y simplificá, en caso de ser posible.

a) $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+1}$; b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}+\frac{x}{x-1}$; c) $\frac{x^2}{x^2-x+1}-\frac{x+1}{x}$

32) Factorizá, operá algebraicamente y simplificá las siguientes expresiones:

$a)\ \dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x+3}{x^2+4x+4}$

$b)\ \dfrac{6}{2y+6}-\dfrac{3y}{y^2-9}$

$c)\ \dfrac{bx^2-b}{x^2+2x+1}-\dfrac{bx^2+1}{x^2+x}$

$d)\ \left(\dfrac{a}{p+1}-\dfrac{a}{q-1}\right).\dfrac{a-aq^2}{3a^2}$

33) Comprobá las siguientes igualdades:

$a)\ \dfrac{(x^{-1}+y^{-1})^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}:(x^{-2}-y^{-2})^{-1}=1$

$b)\ \left[\dfrac{3x^2+1}{2x^2}-\dfrac{3x+1}{9x^2-1}.\dfrac{(3x-1)^2}{2x}\right]:\dfrac{x^2+2x+1}{4x^3}=\dfrac{2x}{x+1}$

34) Verificá la validez de la igualdad:

$\dfrac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}=-\sqrt{a}-\sqrt{a+b}$

35) Usando el resultado del inciso anterior, operá algebraicamente y simplificá la siguiente expresión:

$$\frac{\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}-\sqrt{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}\right)}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}}$$