RECORRIDO III: ECUACIONES Y DESIGUALDADES

Objetivos:
- Afianzar los conceptos de ecuación y desigualdad.
- Desarrollar autonomía en el planteo y la resolución de problemas.
- Desarrollar un aprendizaje constructivo de las desigualdades, a partir del uso de sus propiedades y en la realización de las actividades, sentido crítico y confianza en las capacidades idóneas.

Síntesis de contenidos:
En este capítulo estudiaremos las ecuaciones, los sistemas de ecuaciones y las desigualdades. Los principales conceptos a desarrollar son:
- Ecuaciones.
- Ecuaciones polinomiales.
- Ecuaciones con valor absoluto.
- Ecuaciones racionales.
- Ecuaciones irracionales.
- Ecuaciones logarítmicas.
- Ecuaciones exponenciales.
- Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Desigualdades.
- Intervalos.

Para resolver problemas de cualquier índole, de la vida cotidiana, de las ciencias tales como: ingeniería, sociología, física, entre otras, se deben utilizar herramientas de modelización Matemática. Pero, ¿cuál es el significado de modelizar matemáticamente una situación problemática?
En términos sencillos, un modelo matemático es una representación gráfica o algebraica de una situación del mundo real, como la velocidad de una partícula, el crecimiento de una población, la concentración de un producto en una reacción química, etc.
Generalmente se utilizan las funciones como modelo ideal para representar y resolver problemas. Las ecuaciones son la herramienta para que, luego de modelizar el problema real, se calculen las posibles soluciones. Es muy importante la etapa de validación o comprobación de la solución hallada en el problema real.
Repasemos inicialmente los procedimientos para modelizar problemas con ecuaciones y sus resoluciones.

Lenguaje coloquial y simbólico.
Para poder plantear y resolver situaciones problemáticas es necesario manejar la equivalencia entre el lenguaje común o coloquial y el lenguaje algebraico. La tabla siguiente muestra algunos ejemplos que sirven como punto de partida para plantear problemas.

LENGUAJE COLOQUIAL	LENGUAJE SIMBÓLICO
Un número cualquiera	x
La mitad de un número	$\frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$
El triple de un número	$3x$
El siguiente de un número	$x+1$
El anterior del doble de un número	$2x-1$
El doble del anterior de un número	$2(x-1)$

La mayoría de los problemas matemáticos encuentran expresadas sus condiciones en forma de una o varias ecuaciones, ahora bien, ***¿qué es una ecuación?***

……

……

Como a una ecuación se la define como una igualdad de dos expresiones en donde aparece la incógnita, debemos repasar las propiedades de la igualdad:

Propiedades de la igualdad:

1) *Reflexiva*: Todo número real es igual a sí mismo: $\forall a \in \Re : a = a$

2) *Simétrica*: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \Re : \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$

3) *Transitiva*: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \Re : \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$

Las soluciones de una ecuación son los valores que al sustituirlos en las incógnitas hacen cierta la igualdad.

Las letras que figuran en una ecuación, y de cuyos valores depende que la igualdad verifique o no, se denominan ***incógnitas****.*

Ecuaciones Equivalentes

Dos o más ecuaciones se denominan ***equivalentes*** cuando admiten las mismas soluciones. Por ejemplo, la ecuación $2x-4 = x+1$ y la ecuación $x-3=2$, son equivalentes, pues tienen solución común $x=5$ y esta es la única solución que admite cada una de ellas.

TIPO DE LAS ECUACIONES .

1) Ecuación polinomial de grado uno o lineal

Una ecuación cualquiera con una incógnita se dice de ***primer grado*** o ***lineal,*** cuando el mayor grado con que figura la incógnita es uno.

Hallá si existe, la solución de la ecuación $2x + 3 = 5.$ Para resolver la ecuación dada anteriormente, se procede de la siguiente manera:

$$2x+3=5$$
$$2x+3-3=5-3$$
$$2x=2$$

Sumando el opuesto de un número en ambos miembros, no se modifica la ecuación. ¿Por qué?

$$\frac{1}{2}2x=\frac{1}{2}2$$
$$x=1$$

Multiplicando por el recíproco de un número distinto de cero, no se modifica la ecuación. ¿Es válido para un número negativo?

Para comprobar que el valor encontrado es solución de la ecuación, es decir que ese valor hace verdadera a la igualdad, realizamos el siguiente procedimiento de verificación.

$\mathit{Primer\ miembro}$: $2\cdot 1+3=\ 2+3=5$
$\mathit{Segundo\ miembro}$: 5

Como ambos miembros de la igualdad dan el mismo valor $5=5$, aseguramos que $x\ =\ 1$ es solución de la ecuación y lo escribimos $S=\{5\}$.

Para repasar lo dado hasta aquí:

(1) Resolvé las siguientes ecuaciones. Indicá si tienen una, infinitas o no tienen solución. Realizá la verificación cuando encontrés el valor de la incógnita.

a) $\frac{3}{2}x-2{,}5=5+\frac{1}{4}x$; b) $2x-5=4\left(\frac{1}{2}x+3\right)$;

c) $\frac{3}{2}x+1=3\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)$; d) $x-\frac{x+2}{3}=6$;

e) $\frac{3x-1}{20}-\frac{2.(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$

(2) Un pequeño avión tarda 7 horas más que otro en ir de A a B. Las velocidades de los dos aviones son 660 km/h y 275 km/h. Calculá la distancia entre A y B. (Extraído de Problemas OMA)

(3) Un químico tiene 10 ml de una solución que contiene 30% de concentración de ácido. ¿Cuántos ml de ácido puro deben agregarse para aumentar la concentración al 50%?

(4) Un farmacéutico debe preparar 15 ml de unas gotas para los ojos de un paciente con glaucoma. La solución de las gotas debe contener 2% de un ingrediente activo, pero el farmacéutico sólo tiene una solución al 10% y otra al 1%, en su almacén. ¿Qué cantidad de cada tipo de solución debe usar para preparar la receta?

2) Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver la ecuación $|x-1|=2$, aplicamos la definición de valor absoluto:

$$|x-1|=2$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$x-1=2 \vee x-1=-2$$
$$x=2+1 \quad x=-2+1$$
$$x=3 \quad \vee \ x=-1$$

La solución de esta ecuación está formada por dos números reales $S=\{3;-1\}$.

Recordemos que la interpretación geométrica del valor absoluto de un número representa la distancia entre cero y dicho número. Ahora bien, si queremos analizar la distancia al número 1 (centro), significa que las soluciones 3 y -1 distan dos unidades (radio) del valor 1.

A continuación realizaremos la verificación e interpretación en la recta numérica:

……

……

……

……

(1) Resolvé las siguientes ecuaciones con valor absoluto, escribí el conjunto solución y su interpretación:

(1) $|2x-1|=6$

(2) $\left|\frac{1}{2}x+3\right|=1$

(3) $|3-4x|=10$

(4) $|-2(x+2)|+|x+2|=6$ Sugerencia: aplicá propiedades del valor absoluto.

(5) $|2x-3|-\sqrt[6]{(-3)^6}=7$

3) Ecuaciones polinomial de grado dos o cuadrática

Comenzá resolviendo estas ecuaciones:

$5x^2-8=12$

$3x^2-3=46-4x^2$

Observá que en las ecuaciones anteriores se pudo despejar la incógnita x sin mayor dificultad. Ahora miremos las ecuaciones que están a continuación y veamos si es posible realizar el mismo procedimiento:

$6x^2-5x+1=0$

$9x^2+6x+1=0$

$x^2-x+1=0$

$5x^2+3x=0$

Si observamos en cada una de ellas la incógnita x está en dos términos y con distinto exponente, lo que significa que el trabajo de despejar se hace más complejo.

Formalicemos:

La forma general de una ecuación cuadrática o de segundo grado es:

$ax^2 + bx + c = 0$, *donde a, b y c son números reales y* $a \neq 0$

a: coeficiente del término cuadrático

b: coeficiente del término lineal

c: término independiente o constante

Para resolver este tipo de ecuaciones deberemos primero llevarlas a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y luego observar que, encontrar las soluciones para esta ecuación, es equivalente a encontrar las raíces del polinomio de segundo grado del primer miembro.

La siguiente fórmula se conoce con el nombre de ***resolvente***:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \textit{y las raíces son:} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Si en la ecuación falta alguno de los términos a excepción de *a*, se puede utilizar esta fórmula colocando 0 donde va el coeficiente ausente o bien recurrir a procedimientos ya conocidos, cómo lo hicimos al comienzo, utilizando la definición de valor absoluto. También, si no posee el término independiente se puede utilizar la estrategia de extraer factor común y hallar, de esa forma, las raíces.

(1) Resolvé las ecuaciones y determiná la naturaleza de las raíces:

1) $20x^2 + 7 = 33x$

2) $4x(x-6) = -9$

3) $3x^2 = 2(x+4)$

4) $9x^2 = -4x$

(2) Hay muchos problemas relacionados con la vida cotidiana y con otras disciplinas que conducen a ecuaciones cuadráticas y que, para resolverlos se deben encontrar las raíces de la ecuación. Inténtalo:

a) Se va a fabricar una caja de base cuadrada y sin tapa, con una hoja cuadrada de estaño, cortando cuadrados de 3 pulgadas de cada esquina y doblando los lados. Si la caja debe tener 48 pulgadas cúbicas, ¿qué tamaño debe tener la hoja que se va a usar?

b) Se rodea por un camino de ancho uniforme un terreno rectangular de dimensiones 26 m por 30 m. Se sabe que el área del camino es 240 m^2, determiná el ancho del camino.

c) La temperatura t (en ºC) a la que hierve el agua está relacionada con la altitud o elevación h (en metros sobre el nivel del mar) mediante la fórmula:

$$h = 1000.(100 - t) + 580(100 - t)^2$$

1) ¿A qué altitud hierve el agua a una temperatura de 98ºC?

2) El Monte Everest tiene una altura de 29.000 pies (8.840 m). ¿A qué temperatura hervirá el agua en la cima de esta montaña? (Sugerencia: hacer $100 - t = x$ en la fórmula y utilizar la resolvente.)

d) El Centro de Estudiantes de la Facultad de Ciencia y Tecnología está planificando la tirada de una revista trimestral. Para ello le pidió a un diagramador que defina las dimensiones de la revista teniendo en cuenta una serie de restricciones. El largo debe ser 10 cm mayor que el ancho y la superficie de cada página debe ser de 600 cm^2. ¿Cuáles son las medidas que obtuvo el diagramador?

4) Ecuaciones polinomiales de grado mayor que dos.

Algunos ejemplos de ecuaciones pueden ser:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ y $4x^3 + 12x^2 - 9x - 27 = 0$ ecuaciones polinómicas de grado tres. A estas ecuaciones puedes resolverlas teniendo en cuenta la factorización de polinomios, o los temas que están desarrollados en el recorrido anterior. Te sugerimos que lo estudies y después vuelves a resolverlas.

Cuando las resuelvas, encontrarás que las soluciones de la primera ecuación son 1; -2 y –1 y de la segunda ecuación: $\frac{3}{2}$; -3 y $-\frac{3}{2}$.

Una ecuación de este tipo tiene grado cuatro y se llama **bicuadrada**: $x^4 + x^2 - 6 = 0$. Se puede resolver recurriendo a una sustitución de variables por ejemplo $u = x^2$, entonces la ecuación de grado cuatro se reduce a una de grado dos, veamos:

$u^2 + u - 6 = 0$, al aplicar la fórmula resolvente obtenemos $u_1 = 2$ y $u_2 = -3$, pero debemos encontrar los valores de x que satisfagan la ecuación, entonces procedemos así:

Como $u = x^2$, tenemos:

$x^2 = 2$, o sea que $x = \pm\sqrt{2}$,

$x^2 = -3$, o sea que $x = \pm\sqrt{-3}$ determina las raíces complejas conjugadas: $\sqrt{3}i; -\sqrt{3}i$

Entonces hay cuatro soluciones posibles, dos reales y dos complejas conjugadas: $S = \{\pm\sqrt{2};\ \pm\sqrt{3}i\}$

Desafío: Verificá la ecuación con las cuatro raíces obtenidas.

Encontrá las soluciones de las siguientes ecuaciones:

1) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

2) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$

5) Ecuaciones racionales fraccionarias.

Se dice que una ecuación es ***racional fraccionaria*** cuando, por lo menos, una de las incógnitas figura en el divisor.

Antes de resolver una ecuación racional fraccionaria hay que tener en cuenta los valores que anulan los denominadores y a las expresiones racionales que figuren como divisores. Esto se conoce como establecer las **restricciones de la incógnita**. Luego, se hacen las simplificaciones, se aplican propiedades y se resuelven operaciones necesarias para despejar la incógnita.

Ejemplo:

$$\frac{x^2-5x+4}{8-x}=5$$

Como $x = 8x = 8$ anula al denominador de la expresión del primer miembro, $8\,8$ es una restricción, $\boldsymbol{x \neq 8x \neq 8}$

$$\frac{x^2-5x+4}{8-x}=5$$

$$x^2-5x+4=5(8-x)$$

$$x^2-5x+4=40-5x$$

$$x^2-5x+4-40=40-5x-40$$

$$x^2-5x-36=-5x$$

$$x^2-5x-36+5x=-5x+5x$$

$$x^2-36=0$$

$$x^2-36+36=36$$

$$x^2=36 \qquad\qquad x^2=36$$

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{36}$$

$$|x|=6$$

6 y -6 son soluciones a la ecuación racional fraccionaria. $S=\{6,-6\}$.

Verificá, a continuación, que los valores encontrados son soluciones de la ecuación.

……

Resolvé las siguientes ecuaciones, da la condición de restricción y expresá el conjunto solución.

1) $\frac{2x-1}{x}=\frac{x}{-3x+4}$

2) $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}$

3) $\frac{2x+1}{x+3}=1+\frac{x+3}{x-1}$

4) $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}=\frac{(2x)^2}{x^2-16}$

5) $\frac{1}{x+2}-\frac{x-3}{x}=\frac{7-2x}{x+2}$

6) $\frac{3-x}{x}+\frac{x^2-1}{x^2}=5-\frac{5x+1}{x}$

7) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{3}{x^2+6x+9}=1$

8) $\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x-7}=\frac{7}{(x-3)(x-7)}$

9) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}$	10) $\dfrac{3x}{x-2}=1+\dfrac{6}{x-2}$

6) Ecuaciones irracionales.

Se dice que una ecuación es ***irracional*** cuando por lo menos una incógnita es parte del radicando.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{x^2-1}=2$

Elevamos al cubo ambos miembros:

$\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^3=2^3$ se simplifica, sin existir ninguna restricción

$x^2-1=8$ se resuelve la ecuación resultante, que en este caso ha quedado una ecuación cuadrática que, por lo estudiado anteriormente, al resolverla, se obtienen dos raíces.

$x^2=9$ y las soluciones son +3 y –3.

Verificación:

………

………

……

Es importante que siempre realicen la verificación de este tipo de ecuaciones.

Intentá resolver las siguientes ecuaciones:
1) $\sqrt{7-5x}=8$
2) $\sqrt{2x+15}-2=\sqrt{6x+1}$
3) $2+\sqrt[3]{1-5x}=0$

7) Ecuaciones logarítmicas.

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas que tienen la incógnita en el argumento o en la base del logaritmo.

Veamos algunos ejemplos para que comprendas el procedimiento de resolución, recuerda:

1) La definición de logaritmación:

$$\log_b a=n \Leftrightarrow b^n=a \quad con \quad b,a\in\Re,\quad b>0,\quad b\neq 1 \quad y \quad a>0$$

2) Las propiedades de la logaritmación estudiadas en el Recorrido I.

3) Siempre que sea posible expresar ambos miembros como un solo logaritmo de igual base para aplicar la propiedad:

$$\log_b a=\log_b c \Rightarrow a=c$$

4) Que sólo existen logaritmos de números positivos, por eso **es fundamental la verificación** en este tipo de ecuaciones.

- $\log_5(2x-1)=2$ aplicamos la definición de logaritmo:

  $2x-1=5^2$ y resolvemos la ecuación:

$x = \frac{25+1}{2}$; $x = 13$

Verificación:

………

………

………

- $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$ aplicamos propiedades de la logaritmación:

$\log_3 x(x+2) = 1$, aplicamos la definición de logaritmo:

$$x(x+2) = 3^1$$

$x^2 + 2x - 3 = 0$ y resolvemos la ecuación cuadrática.

Luego: $x_1 = 1$ v $x_2 = -3$

Verificación:

………

………

………

Resolvé las siguientes ecuaciones, sin olvidar la verificación y escribí el conjunto solución:

1) $2\log_3 x - \log_3(x+6) = 1$

2) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) - \log_2 8 = 0$

3) $\ln(x-1)^2 = \ln 2 + \ln(x-1)$

4) $\log_4(x^2+7) = 2$

8) Ecuaciones exponenciales.

Recordamos que las ecuaciones exponenciales son aquellas que tienen la incógnita en el exponente.

Para resolverlas debemos considerar:

1) Siempre que sea posible, es conveniente expresar ambos miembros como potencias que tengan igual base, para aplicar la siguiente propiedad:

$b^x = b^m \Rightarrow x = m$

2) Es posible utilizar la definición de logaritmo y las propiedades de la logaritmación para despejar la incógnita que figura en el exponente.

Veamos un ejemplo:

$$4^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$$

Tratemos de expresar ambos miembros como potenciaciones de base 2.

$\left(2^2\right)^{x-1} = \left(2^{-1}\right)^{3x}$ aplicamos propiedades de la potenciación

$2^{2x-2} = 2^{-3x}$, como las bases son iguales entonces los exponentes también lo son:

$2x-2=-3x$, despejando resulta:

$$x=\frac{2}{5}$$

Verificación:

……

……..

Resolvé las siguientes ecuaciones exponenciales e indicá el conjunto solución:

1) $\sqrt{5^x} = 5.\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 2) $9^{2x-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-2}$ 3) $3^{x-5} = 2^{5x+1}$

9) Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Se denomina ***sistema*** de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas a dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una, que deben admitir de manera simultánea las mismas raíces. Estas raíces que son comunes a ambas ecuaciones, de forma simultánea, constituyen la ***solución del sistema.***

Se indica que dos ecuaciones forman un sistema, abarcándolas con una llave. Por ejemplo, para indicar que la ecuación $x+y=8$ y la ecuación $x-y=2$, forman un sistema se escribe de la siguiente manera: $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$, se observa que los valores $x=5 \;\; e \;\; y=3$ satisfacen las dos ecuaciones, pues la suma de esos números es 8 y su diferencia es 2, por lo tanto la solución del sistema es: $S=\{(5;3)\}$

Métodos para la resolución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Método de sustitución:

1. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema.
2. Se ***sustituye*** en la otra ecuación dicha incógnita por la expresión obtenida. De ahí, el nombre de ***método de sustitución***.
3. Se resuelve la ecuación con una incógnita, que así resulta.
4. Esta incógnita se reemplaza por el valor obtenido en la primera ecuación y se calcula su valor.

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ \frac{3}{2}x-2y=5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y=3-2x \quad ,se \quad despeja$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}x-2(3-2x)=5, \quad se \quad sustituye$$

$$\frac{3}{2}x-6+4x=5, \quad se \quad resuelve$$

$$x=2 \quad e \quad y=-1$$

Verifica en alguna de las dos ecuaciones del sistema, los valores de x y y encontrados.

………

………

Solución de este sistema de ecuaciones es :
$S=\{(2;-1)\}$

Método de igualación:

1. Se despeja una de las incógnitas en las dos ecuaciones del sistema.
2. Se ***igualan*** las expresiones obtenidas. De ahí, el nombre de ***método de igualación***.
3. Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.
4. Se reemplaza el valor obtenido de esta incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas, y se obtiene el valor de la otra incógnita.

$$\begin{cases} x+3y=10 & \Rightarrow \quad x=10-3y \quad se \quad despeja \\ 2x-y=4 & \Rightarrow \quad x=\dfrac{4+y}{2} \quad se \quad despeja \end{cases}$$

Observemos que los primeros miembros son iguales entre sí, por lo que los segundos miembros también son iguales entre sí:

$$10-3y=\frac{4+y}{2} \quad se \quad igualan \quad ambos \quad miembros \quad y \quad se \quad resuelve$$

$$y=\frac{16}{7} \quad y \quad x=\frac{22}{7}$$

Verifica en alguna de las dos ecuaciones del sistema, los valores de x y y encontrados.

………

………

Solución de este sistema de ecuaciones:
$S=\left\{\left(\frac{22}{7};\frac{16}{7}\right)\right\}$

Para repasar lo dado hasta aquí:

1) Resolvé los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-y=9 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x-y=13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-4y=-7 \\ x+8y=-1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -3x-4y=5 \\ -x-2y=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -2x-4y=18 \\ x+5y=-36 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x-5y=19 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+2y=-12 \\ 3x-y=-1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x-3y=-14 \\ 9x+5y=28 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3x-2y=-12 \\ 5x+4y=2 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 5x-3y=22 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

10) DESIGUALDADES.

Propiedades de orden:

Una relación de orden es una vinculación que pretende formalizar la idea intuitiva de ordenación de los elementos de un conjunto, es decir que ayuda a la creación del orden del mismo. El símbolo “<”, que se lee “es menor que” y el símbolo “>”, que se lee “es mayor que” nos ayudarán para expresar el orden en el conjunto de los números.

Entre dos números reales *a* y *b* puede darse una y sólo una de estas tres relaciones:

$$a<b \qquad ó \qquad a=b \qquad ó \qquad a>b$$

Observación:

- Vemos que si el número *a* es menor que el número b, está situado a su izquierda en la recta numérica.
- $a<b$ si $b-a$ es positivo.
- Asociadas a las anteriores, existen otras dos relaciones que se leen: *“menor o igual”: ≤.* y *“mayor o igual”: ≥*

Propiedades de las desigualdades

1. *Transitividad:* Si $a<b \;\; y \;\; b<c$, entonces $a<c$.

En la representación en la recta numérica significa que si *a* está a la izquierda de *b* y *b* a la izquierda de *c*, entonces *a* está ubicado a la izquierda de *c*.

2. *Adición*: Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$. *¿Puedes decir qué significa gráficamente?*

3. *Multiplicación:* Si $a<b$ y $c>0$, entonces $a.c<b.c$

Si $a<b$ y $c<0$, entonces $a.c>b.c$

De las propiedades anteriores se deduce que:

Si $a>0$ entonces $\frac{1}{a}>0$

Sean $a \; y \; b$ son ambos positivos o ambos negativos, se cumple que:

Si $a < b$ entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Te brindamos este espacio para que presentes un ejemplo para cada una de las propiedades de las desigualdades enunciadas más arriba.

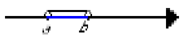
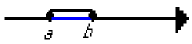
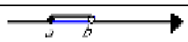
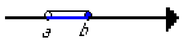
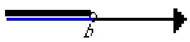
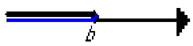
………
………
………

11) INTERVALOS.

Un subconjunto de la recta real se denomina **intervalo,** y contiene a todos los números reales que están comprendidos entre dos de sus elementos.

Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales que están comprendidos entre –3 y 8 es un intervalo, se indica: $\{x \in \Re / -3 < x < 8\}$. (Observa que x es simultáneamente mayor que -3 y menor que 8).

En la tabla siguiente se resumen los tipos de intervalo y su representación geométrica:

	Nombre del intervalo	Notación de intervalos	Notación conjuntista	Gráfica
Finitos	Abierto	(a ,b)	$\{x / a < x < b\}$	
	Cerrado	[a ,b]	$\{x / a \leq x \leq b\}$	
	Semicerrado a la izquierda	[a ,b)	$\{x / a \leq x < b\}$	
	Semicerrado a la derecha	(a ,b]	$\{x / a < x \leq b\}$	
Infinitos	Abierto a la izquierda	(a, ∞)	$\{x / x > a\}$	
	Semicerrado a la izquierda	$[a, \infty)$	$\{x / x \geq a\}$	
	Abierto a la derecha	$(-\infty, b)$	$\{x / x < b\}$	
	Semicerrado a la derecha	$(-\infty, b]$	$\{x / x \leq b\}$	
	Infinito	$(-\infty, \infty)$	$\Re$ (conjunto de todos los números reales)	

Dadas las siguientes desigualdades de números reales, podemos hallar el conjunto solución, teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades y las expresiones dadas en el cuadro anterior, observá:

$x \leq 8 \quad \wedge \quad x > 5$ pueden escribirse como una operación entre los conjuntos que representan a cada intervalo de la siguiente manera:
$(-\infty; 8] \cap (5; +\infty)$ resolviendo esta operación entre conjuntos, denominada ***intersección***, obtenemos:

$$(-\infty; 8] \cap (5; +\infty) = (5; 8]$$

Este intervalo solución $(5; 8]$ es el conjunto formado por todos los elementos ***x*** que estén en ambos intervalos $(-\infty; 8]$ y $(5; +\infty)$. Podemos escribir este intervalo con notación conjuntista de la siguiente manera:
$(5; 8] = \{x \in \Re \, / 5 < x \leq 8\}$

La representación gráfica de este conjunto solución es:

- Observen el siguiente ejercicio:

$-3 \leq x < 5 \vee \ x \geq 3$, pueden escribirse como una operación entre los conjuntos que representan a cada intervalo. Esta operación se denomina ***unión entre conjuntos***, obtenemos entonces:
$[-3; 5) \cup [3; \infty) = [-3; \infty)$

Este intervalo solución $[-3; \infty)$, está compuesto por todos los valores de x que están en $[-3; 5)$ o que están en $[3; \infty)$. Podemos escribir este intervalo con notación conjuntista de la siguiente manera:
$[-3; \infty) = \{x \in \Re \, / x \geq -3\}$

Su representación gráfica es:

Efectuá las siguientes operaciones entre conjuntos y obtené el intervalo solución. Luego representalo gráficamente.

1) $-2 < x < 7 \wedge 0 < x < 6$
2) $4 \leq x < 10 \vee x \geq 9$
3) $x < -\frac{1}{2} \wedge x \geq 3$
4) $x \leq 8{,}5 \vee x \geq -3$

Para pensar…

¿Cómo resolverías las siguientes desigualdades?

Explicá cada uno de los pasos realizados utilizando las propiedades de las desigualdades, representá el conjunto solución gráficamente y expresa la solución como intervalo.

a) $5\,x - 1 < x - 3$ b) $-\frac{x}{8} \leq 3x - 1$ c) $\frac{2}{x+3} \geq 3$

………

………

……
………..

Resolvé las siguientes desigualdades con valor absoluto, representá el conjunto solución en la recta numérica y expresá como intervalo.

a) $|x-2| \le 5$ b) $|x-2| > 5$ c) $\left|5-\dfrac{1}{x}\right| < 3$

……
……
……
………..