MATEMÁTICA

FCyT

Facultad de Ciencia
y Tecnología

PALABRAS DE BIENVENIDA

Querido/a ingresante:

Esta primera instancia académica que realizarás en nuestra Facultad, tiene como objetivo familiarizarte con el sistema académico y fortalecer tus habilidades necesarias para la vida universitaria.

Durante todo el cursado del Módulo Matemática, los profesores a cargo te irán acompañando y orientando en la realización de una propuesta de actividades y desarrollo de contenidos necesarios para las asignaturas que cursarás durante los primeros años de la carrera que elegiste.

En este Módulo, se desarrollarán una serie de actividades destinadas a fortalecer tus conocimientos sobre contenidos de Matemática en base a lo que has visto en el transcurso de la Educación Secundaria. Dichas actividades, permitirán que convalides tus habilidades, aptitudes y actitudes acordes a la carrera elegida.

La modalidad de aprobación será la evaluación diagnóstica y continua, la cual consiste en la puesta en común de reflexiones y actividades de razonamiento presentados en forma de trabajos prácticos o exámenes que realizarás como aspirante, sobre los que se aplican diferentes criterios de evaluación entre ellos: la participación activa en las clases, ya que estas instancias presenciales serán tomadas como clases de consulta; el manejo de la plataforma virtual; la interpretación de consignas; la resolución de las actividades de trabajo propuestas; la entrega de los trabajos en tiempo y forma.

El Módulo Matemática tiene como objetivo acompañarte a iniciar este camino, no sólo en cuanto a los contenidos académicos sino en la adaptación a la vida universitaria, por eso te invitamos a ingresar al Aula Virtual del Módulo Matemática (link de acceso: Módulo Matemática) que es una caja de herramientas con materiales complementarios y recursos interactivos que serán de gran ayuda para entender los temas y poder practicarlos, porque tendrás las posibilidad de autoevaluarte con la realización de los cuestionarios allí disponibles.

Los docentes te brindaremos el apoyo necesario para participar de manera seria, crítica y activamente en esta propuesta.

Pretendemos también, que este material sea tu primer paso hacia la formalidad matemática. Es por esto que, sin perder la rigurosidad, trabajaremos en el lenguaje formal y coloquial con las definiciones y demostraciones, presentándote los diferentes conceptos.

A lo largo de cada uno de los recorridos, realizamos tanto una revisión teórica de los conceptos seleccionados y sus propiedades, como también algunas preguntas que invitan a reflexionar sobre los contenidos desarrollados.

AGRADECIMIENTO

El Módulo Matemática se dicta en el marco del Curso Introductorio desde hace varios años y cuenta con un material de estudio específico, confeccionado por prestigiosos profesores de esta casa de estudios. Por esto, queremos agradecer a todos y a cada uno de los docentes que con gran dedicación y profesionalismo fueron parte de este proceso y dedicaron su tiempo en la elaboración. Hoy, en base al trabajo realizado por ellos, presentamos este renovado material de estudio con las modificaciones que creemos pertinentes.

Los responsables de dicho material de estudio fueron:

Mg. María Gandulfo de Zapata: Números, operaciones y propiedades.

Lic. Liliana Taborda: Polinomios.

Lic. Rosa Blasón: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Mg. Isabel Princich y Lic. Javier Besso: Funciones.

Lic. Esp. Graciela Paredes: Trigonometría.

A todos ellos, les decimos:

¡MUCHAS GRACIAS!

Coordinación Módulo Matemática.

Recorridos

¿Comenzamos?

PROPÓSITOS.

- Facilitar la incorporación del ingresante a la vida universitaria, nivelando sus competencias y proporcionando herramientas metodológicas que propicien su mejor adecuación, desde el primer año de su carrera.

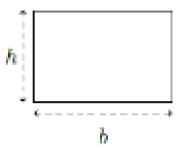
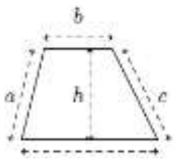
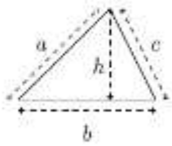
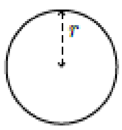
OBJETIVOS GENERALES.

Este Módulo tiene por objetivos:

- Desarrollar autonomía en el aprendizaje, sentido crítico, confianza en sus propias capacidades, aceptación mutua y respeto por las opiniones diferentes.
- Relacionar los conocimientos previos con los nuevos aprendizajes.
- Desarrollar la capacidad analítica que les permita resolver distintos problemas.
- Profundizar conceptos a partir de la resolución de problemas.
- Revisar críticamente los conceptos aprendidos en la Escuela Secundaria.
- Apropiarse de procedimientos, estrategias y tareas propias del quehacer matemático como son la modelización de situaciones, las prácticas de argumentación basadas en conocimientos matemáticos, la elaboración de conjeturas y de pruebas, la validación de resultados, la generalización y el razonamiento deductivo.

FÓRMULAS GEOMÉTRICAS.

A continuación recordamos las fórmulas de área y perímetro de algunas figuras geométricas, que luego utilizaremos a lo largo de estos recorridos.

Figura Geométricas		**Área (*A*) y Perímetro (*P*)**
Rectángulo		$A = b \cdot h$, $P = 2b + 2h$.
Trapecio		$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$, $P = B + b + a + c$.
Triángulo		$A = \frac{b \cdot h}{2}$, $P = a + b + c$.
Circunferencia **Círculo**		$A = \pi r^2$, $P = 2\pi r$.

"Los grandes descubrimientos resuelven grandes problemas, pero en la solución de cualquier problema hay un poco de descubrimiento. El problema puede ser modesto; pero si desafía a la oscuridad y pone en juego las facultades inventivas de una persona, y ésta lo resuelve por sus propios medios, podrá experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento".

George Polya

RECORRIDO I: CONJUNTOS NUMÉRICOS

Objetivos:

- Afianzar conceptos, definiciones y propiedades de los diferentes conjuntos numéricos.
- Desarrollar autonomía en el aprendizaje y en el desarrollo de las actividades.

Síntesis de contenidos:

En este capítulo estudiaremos los conjuntos numéricos, las operaciones y sus propiedades. Los principales conceptos a desarrollar son:

- Números naturales.
- Números enteros.
- Números racionales.
- Números irracionales.
- Números reales.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- Valor absoluto.
- Adición, sustracción, multiplicación y división de números reales.
- Potenciación. Exponentes enteros. Exponentes fraccionarios.
- Radicación. Operaciones con radicales. Racionalización de denominadores.
- Logaritmación.
- Números complejos.

NÚMEROS NATURALES (N)

El conjunto de números naturales es el que informalmente se define como aquel conjunto de elementos utilizados para contar, y que, simbólicamente lo denotamos con **N**. El conjunto de los números naturales puede ser considerado desde dos perspectivas diferentes: en forma *cardinal* o en forma *ordinal.*

¿De qué hablamos cuando hacemos referencia a la cardinalidad y a la ordinalidad?

……

……

……

No tiene último elemento por eso es un conjunto *infinito.* El primer número natural es el uno 1 pero a veces resulta necesario incluir al cero en el conjunto; en ese caso, se escribe $\mathbf{N_0}$.

Entre dos números naturales cualesquiera, existe un número finito de números naturales, por eso es un conjunto *discreto*. Los números naturales se pueden ordenar de menor a mayor o viceversa, y por lo tanto **N** es un conjunto *ordenado.*

NÚMEROS ENTEROS (Z)

Ahora consideremos la siguiente consigna:

Hallar el número que sumado a 4 sea igual a 3.

Este ejercicio no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que si sumamos un número natural a 4 obtendremos otro natural mayor que 4, y 3 es menor que 4. Esta situación es análoga a querer calcular la sustracción $3 - 4$. Es decir, ninguna sustracción en la que el sustraendo sea mayor o igual que el minuendo puede ser resuelta en el conjunto de los naturales.

La imposibilidad de resolver una sustracción en la que el minuendo es menor que el sustraendo, abre camino a un nuevo conjunto numérico denominado campo numérico de los números enteros, simbólicamente Z.

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Z}^- \cup \mathrm{N} \cup \{0\} = \mathrm{Z}^- \cup \mathrm{Z}_0^+$$

Propiedades del conjunto de los números enteros:

- Es un conjunto infinito.
- Es un conjunto ordenado.
- Es un conjunto discreto.
- Carece de primer y último elemento.

Números primos

Sea $a \in Z, a \notin \{-1,0,1\}$, se dice que *a* es primo cuando a tiene únicamente cuatro divisores 1, −1, *a* y – *a* (o 2 divisores positivos: 1 y *a*).

Por ejemplo: 7 es un número primo pues sus únicos divisores son $1, -1, 7\ y - 7$..

D_7 es el conjunto formado por los divisores de 7 y lo escribimos $D_7 = \{-1,1,7,-7\}$

.

En cambio, aquellos números enteros que admiten más de cuatro divisores se denominan *números compuestos.* Estos números se pueden escribir como producto de números primos.

Ejemplos de números compuestos son el 24 y el 57, pues**:**

$24 = 2^3 . 3$ $\qquad\qquad$ $57 = 3.19$

Número Coprimos

Dos números enteros distintos son primos entre sí, es decir coprimos, cuando sólo tienen como divisor común al número 1 y su opuesto -1.

***Ejemplo*:** 9 y 16 son coprimos ya que 1 y -1 son los únicos divisores que tienen en común.

Observa que: ni 9, ni 16 son números primos.

- Dos números primos, son primos entre sí o coprimos.

- Dos números coprimos, no necesariamente son primos.

Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo de dos o más números naturales

Si un número es divisor de varios otros, se dice que es divisor común de todos ellos. Al mayor de los divisores comunes de un conjunto de números naturales se lo denomina Máximo Común Divisor (o también Divisor Común Mayor) y se lo denota MCD.

Notación: MCD(a, b, c)

Por ejemplo, el número 8 tiene como divisores a 1, 2, 4 y 8; el número 20 tiene como divisores a 1, 2, 4, 5, 10 y 20. Observando los divisores comunes de 8 y 20, vemos que se repiten los números 1, 2 y 4. Pero 4 es el mayor de los divisores comunes, por lo tanto, es el Máximo Común Divisor: MDC(8,20) = 4

Si un número es múltiplo de varios otros, se dice que es múltiplo común. Al menor de los múltiplos comunes de varios números se lo denomina Mínimo Común Múltiplo (o también Múltiplo Común Menor).

Notación: mcm(a, b, c)

Por ejemplo: Dados los números 15, 30, 10 hallar el mínimo común múltiplo.
Los múltiplos de 15 son: 15, 30, 45, 60,…
Los múltiplos de 30 son: 30, 60, 90, 120,…
Los múltiplos de 10 son: 10, 20, 30, 40,…
El mínimo común múltiplo es 30. mcm (15, 35, 10) = 30

Para repasar lo dado hasta aquí

(a) Escribí los primeros quince números primos en $\mathbb{N}$.

(b) Indicá si los siguientes números son primos. En caso de que no lo fueran, escribilos como multiplicación de números primos.

325 87 120 1231

(c) Encontrá el MCD y el mcm de 325 y 120.

NÚMEROS RACIONALES (Q)

Este conjunto de números surge para dar solución a las ecuaciones de la forma $n.x = m$ donde m y n son dos números enteros cualesquiera, con $n \neq 0$.

Definición: Un número racional es un número que se puede expresar como el cociente entre dos números enteros $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$.

El conjunto de los números racionales se caracteriza por ser un conjunto *denso* es decir, entre dos números racionales cualesquiera existe siempre otro número racional.

Este conjunto numérico ¿es ordenado?

………

Si el numerador **m** y el denominador **n** del número racional $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$ no tienen divisores enteros comunes mayores que 1, decimos que $\frac{m}{n}$ está reducido a su **mínima expresión**.

Es decir: $\frac{2}{3}$ es la mínima expresión de $\frac{10}{15}$ y $-\frac{4}{3}$ es la mínima expresión de $-\frac{12}{9}$.

Para repasar lo dado hasta aquí:

(1) Efectuá las siguientes operaciones:

$$a)\ \frac{2}{3}+\frac{4}{7}-\frac{9}{5} \quad b)\ \frac{11}{2}\cdot\frac{3}{5} \quad c)\ \frac{11}{2}:\frac{6}{7} \quad d)\ -\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{4}\right)$$

$$e)\ -\frac{3}{4}\cdot\left[\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{7}\right]$$

Expresión decimal de un número racional

Al dividir **m** por **n** (siendo $n \neq 0$) se obtiene la expresión decimal del número racional. Toda fracción decimal (su denominador es la unidad seguida de ceros) puede escribirse como expresión decimal:

$\frac{3}{10} = 0{,}3$

Si se trata de una fracción ordinaria su expresión decimal se obtiene dividiendo el numerador por el denominador. Así el cociente tiene un número finito de cifras decimales como por ejemplo:

$\frac{1}{4} = 0{,}25$

Y se denomina ***expresión decimal exacta*.**

O bien tiene un número infinito de ellas pero con cifras que se repiten periódicamente.

Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666666\ldots$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333333\ldots$$

Estas expresiones reciben el nombre de ***expresiones decimales periódicas.***

Observación:

No toda fracción ordinaria puede transformarse en fracción decimal. La condición es que el denominador de la fracción irreductible puede transformarse en potencia de diez.

Teniendo en cuenta las potencias de diez:

$\mathbf{10 = 2 \cdot 5}$

$\mathbf{10^2 = 2^2 \cdot 5^2}$

$\mathbf{10^3 = 2^3 \cdot 5^3}$

… …

$\mathbf{10^n = 2^n \cdot 5^n}$

Resulta que sus únicos factores son 2 y 5, entonces una fracción ordinaria irreductible puede transformarse en fracción decimal si su denominador es potencia de 2, o de 5 o producto de ambas.

Ejemplos:

$\frac{1}{4}$; $\frac{3}{50}$; $\frac{7}{800}$; $\frac{2}{125}$ pueden transformarse en fracciones decimales

En caso contrario la expresión decimal correspondiente es periódica.

Ejemplos:

$\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots ; \frac{2}{15} = 0{,}133 \ldots ; \frac{3}{11} = 0{,}2727 \ldots$

Para escribir una fracción ordinaria en forma de expresión decimal periódica tendremos en cuenta lo siguiente:

- En una expresión decimal periódica, escribiremos una sola vez el período con un arco sobre él.

$\frac{2}{3} = 0,\widehat{6} \qquad \frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$

- Si el período comienza inmediatamente después de la coma, la expresión se denomina expresión decimal periódica ***pura***, si existen cifras no periódicas antes del período, la expresión es ***mixta***. Por ejemplo: $1,\widehat{4}$ es una expresión decimal periódica pura y $2{,}8\widehat{25}$ es una expresión periódica mixta.

<u>Conversión de una expresión decimal periódica pura a fracción ordinaria</u>

Toda expresión decimal periódica pura de **parte entera nula** se puede transformar en una fracción ordinaria, tal que:

- el numerador es el período.
- el denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el período.

Por ejemplo: $0,\widehat{43} = \frac{43}{99}$

Para las expresiones decimales periódicas puras de **parte entera no nula**, el número se puede transformar en una fracción ordinaria de la siguiente manera:

$5,\widehat{42} = \frac{542-5}{99} = \frac{537}{99}$

- el numerador es igual a la diferencia entre el número formado por las cifras en el orden dado y la parte entera.
- el denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el período.

<u>Conversión de una expresión decimal periódica mixta en fracción ordinaria:</u>

Toda expresión decimal periódica mixta con **parte entera nula** se puede convertir en una fracción ordinaria, tal que:

- el numerador es igual a la diferencia entre el número formado por las cifras en el orden dado, y el número de la parte no periódica.

- el denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras decimales tiene la parte no periódica.

Por ejemplo:

$$0,6\widehat{43} = \frac{643 - 6}{990} = \frac{637}{990}$$

Para las expresiones decimales periódicas mixtas de **parte entera no nula** se puede transformar en una fracción ordinaria de la siguiente manera:

$$2,32\widehat{42} = \frac{23242 - 232}{9900} = \frac{23010}{9900} = \frac{767}{330}$$

- el numerador es igual a la diferencia entre el número formado por las cifras en el orden dado, y el número que queda formado por la parte entera seguido de la parte no periódica.
- el denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras decimales tiene la parte no periódica.

Para repasar lo dado hasta aquí:

(1) Expresá en forma decimal y clasifica las expresiones en exactas y periódicas:

a) $\frac{15}{20}$	b) $\frac{7}{9}$	c) $\frac{14}{11}$
d) $\frac{3}{5}$	e) $\frac{9}{11}$	f) $\frac{14}{15}$
g) $\frac{5}{11}$	h) $\frac{4}{13}$	i) $\frac{1}{9}$

(2) Escribí el número en forma racional fraccionaria:

a) 1,222...	b) 0,341341341...	c) 4,3929292...
d) 0,53333...	e) 34,57898989...	f) 5,040404....
g) 4,81888...	h) 8,37777777...	i) 11,57272...
j) 3,100101...	k) 41,9	l) 5,75
ll) 41,4444...	m) 12,9	n) 8,042
ñ) 36,3636...	o) 63,05	p) 0,767676...

NÚMEROS IRRACIONALES (I)

Un ***número irracional*** es un número que no se puede escribir como la división de dos números enteros. Es decir que, el conjunto de los números racionales, es aquel que tiene por elementos a todos los números que cumplen con esa característica.

Ejemplos de números irracionales:

$\pi = 3,14159265389793...$

$e = 2,718281828459045 ...$

$\log_{10} e = 0,434294481903252 ...$

Te proponemos que investigues sobre el surgimiento de los números irracionales, respondas las siguientes preguntas para luego socializarlas con tus compañeros en la clase.

- *¿Cómo surgen los números irracionales, de qué manera se produce el descubrimiento?*

……

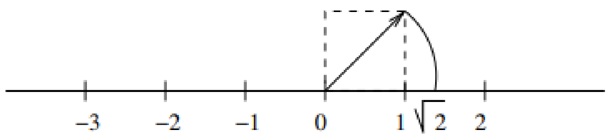
- *¿Quién o quiénes los descubren?*

……

NÚMEROS REALES $\mathbb{R}$

La unión del conjunto de los números racionales $\mathbb{R}$ y el conjunto de los números irracionales I conforman el conjunto de los números reales que se simboliza con $\mathbb{R}$. Este conjunto, al igual que los racionales, es un conjunto *denso* es decir, entre dos números reales cualesquiera existe siempre otro real. Se establece entre los puntos de la recta numérica y los números reales una **correspondencia biunívoca** pues a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta numérica y a cada punto de la recta le corresponde un número real, por esto este conjunto se caracteriza por ser *completo*, es decir los números reales completan la recta numérica.

Representación gráfica:



A cada número real le corresponde un punto sobre la recta y a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número real x , que se denota por $|x|$ y se define así: es el mismo número x , si el número es positivo o cero y el opuesto de x , que se escribe como $-x$ si el número es negativo.

La siguiente expresión que define el valor absoluto de un número real x de manera simbólica:

$$x = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Observa que el valor absoluto de un número es siempre mayor que o igual a cero. La igualdad es válida sólo para el número cero.

Geométricamente, $|x|$ representa la **distancia** de x al origen, 0, en la recta real. De manera más general: $|a-b|$ representa la distancia entre los números *a* y *b*.

$$|a-b| = |b-a|$$

¿Te animás a representar esta situación gráficamente?

Propiedades del valor absoluto.

$|-a| = |a|$ Un número y su opuesto tienen igual valor absoluto.

$|ab| = |a||b|$ El valor absoluto del producto de números reales es igual producto de los valores absolutos de dichos números.

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ El valor absoluto del cociente de dos números reales es igual al cociente entre los valores absolutos de dichos números con $b \neq 0$.

$|a+b| \leq |a| + |b|$ Desigualdad del triángulo: El valor absoluto de suma de dos números es menor o igual que la suma de sus valores absolutos. (¿Cuándo es válida la igualdad?)

> **Para pensar…**
> (1) ¿Es válida la igualdad $|a+b| = |a| + |b|$ para cualquier par de números a, b ∈ R? ¿Existe algún par de números reales que verifiquen dicha igualdad?
> (2) Suponé que x, y, z ∈ R son tales que la distancia de x a y es positiva, y es igual a la distancia de x a z. ¿Qué se puede decir de la distancia entre y y z?

Operaciones en $\mathbb{R}$

En el conjunto de los números reales se definen la *adición*, cuyo resultado es la *suma* y la *multiplicación*, cuyo resultado es el *producto.*

ADICIÓN:

Propiedades de la adición de números reales:

a) Ley de cierre: Esta ley establece que para todo número real *a* y todo número real *b* se cumple que la suma *a + b* es otro número real y es único.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: a + b \in \mathbb{R} \text{ } y \text{ } es \text{ } único$$

b) Propiedad asociativa: Tanto la adición como la multiplicación son operaciones binarias, es decir, trabajan con dos números a la vez. La propiedad asociativa nos permite operar con más de dos sumandos y nos indica que no tiene importancia como se asocien los mismos.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a + b) + c = a + (b + c)$$

c) Existencia del elemento neutro: Dentro del conjunto de los números reales, existe el número cero que sumado a cualquier real *a,* da el mismo número a.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R} / a + 0 = a$$

d) Existencia de elemento inverso aditivo u opuesto: Dentro del conjunto de los números reales existe para cada número *a* otro número real *–a* que es su opuesto tal que sumado a *a* da como resultado el elemento neutro de la adición.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R} / a + (-a) = a - a = 0$$

Observación: Si *a* es un número positivo, entonces *–a* es negativo. Si *a* es un número negativo, entonces *–a* es un número positivo.

e) ***Propiedad conmutativa***: El orden de los sumandos no altera la suma.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: a + b = b + a$$

MULTIPLICACIÓN:

Propiedades de la multiplicación de números reales:

a) ***Ley de cierre:*** La multiplicación de dos números reales da como resultado un único número real.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: a \cdot b \in \mathbb{R}\ y\ es\ \text{único}$$

b) ***Propiedad asociativa***: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

c) ***Existencia de elemento neutro para la multiplicación:*** Todo número real que se multiplique por 1 da como resultado el mismo número.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R}\ /\ a \cdot 1 = a$$

d) ***Existencia del inverso multiplicativo o recíproco*** (de cada número real no nulo): Dado cualquier número real *a* distinto de cero, existe el número real $\frac{1}{a}$ tal que multiplicado por el número *a,* da como resultado el neutro multiplicativo (1).

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}\ /\ a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

e) ***Propiedad conmutativa***: El producto no se altera si se cambia el orden de los factores.

$$\forall a. b \in \mathbb{R}: a \cdot b = b \cdot a$$

f) ***Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición***:

$$\forall a. b, c \in \mathbb{R}: (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
$$\forall a. b, c \in \mathbb{R}: c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

SUSTRACCIÓN Y DIVISIÓN:

A partir de las propiedades anteriormente vistas, que se cumplen para la adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$ podemos ver que las operaciones de sustracción y división se definen a partir de la adición y la multiplicación, respectivamente.

Si *a* y *b* son números reales, sustraer el número real *b* al número real *a* equivale a adicionar el opuesto de *b* al número real *a*. Si $a, b \in \mathbb{R}: a - b = a + (-b)$

Si *a* y *b* son números reales, y b ≠ 0, entonces la división de *a* por b se define como la multiplicación de *a* por el inverso multiplicativo o recíproco de *b*.

$$a, b \in \mathbb{R} \wedge b \neq 0 \quad a{:}\, b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

POTENCIACIÓN:

Sea *a* cualquier número real y *n* un entero positivo, entonces

$a^n = a.a.a.a...a = b$, con *n* que representa la cantidad de factores iguales a *a*.

La expresión anterior se lee: *"a elevado a la enésima potencia"*, o *"a elevado a la n"*, o simplemente *"a a la n".*

La operación presentada es la potenciación; al número *a* se lo denomina ***base***, al número *n* ***exponente*** y el resultado b es la ***potencia.***

Ejemplos:

$2^4 = 2.2.2.2$

$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}$

$\pi^2 = \pi.\pi$

Propiedades de la potenciación:

- **Multiplicación de potenciaciones de igual base**:

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

- **División de potenciaciones de igual base:**

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} siendo \qquad a \neq 0$$

- **Potencia de otra potencia:**

$$\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$$

- **Potenciación con exponente 1:**

$$a^1 = a$$

- **Potenciación con exponente cero:**

$$a^0 = 1$$

  Todo número distinto de cero, elevado a cero es igual a la unidad. ¿Por qué?

- **Potenciación con exponente negativo:**

$$a^{-n} = a^{0-n} = a^0 : a^n = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} \qquad con \quad a \neq 0$$

La potenciación de exponente negativo es otra potenciación cuya base es el número **inverso multiplicativo** de la base dada y cuyo exponente es el número **opuesto** del exponente dado.

¿Te animas a explicarlo a través de ejemplos?

……

……

……

- **Propiedad distributiva de la potenciación respecto a la multiplicación:**

$$\left(a.b\right)^n = a^n.b^n$$

- **Propiedad distributiva de la potenciación respecto a la división:**

$$\left(a : b\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad con \quad b \neq 0$$

La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división de números reales, pero LA POTENCIACIÓN NO ES DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.

Por ejemplo $(3+\ 5)^2 =\ 64\ y\ 3^2 + 5^{\ 2} = 34$

por lo cual: $(3+\ 5)^2 \neq 3^2 + 5^{\ 2}$.

Asimismo, $(3-\ 5)^2 = 4$ y $3^2 - 5^{\ 2} = -16$

por lo cual: $(3-\ 5)^2 \neq 3^2 - 5^{\ 2}$

La diferencia entre los cuadrados de dos números reales es igual a la multiplicación entre la sustracción y la adición de estos números.

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

Esta propiedad surge fácilmente aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y sustracción de números reales, y suele ser muy útil a la hora de realizar ciertos cálculos.

Para repasar lo dado hasta aquí.

Resolvé los siguientes ejercicios aplicando las propiedades de la potenciación:

a) $\dfrac{2^3.2^4.2^7}{2^6.2^3} =$

b) $\dfrac{\left(3^3\right)^2.3^4.3^7}{3^6.3^5} =$

c) $\dfrac{\left[(-5).(-5)^3\right]^2}{(-5)^5.(-5)^4} =$

d) $\dfrac{4^{-3}.4^8.\left(4^2\right)^3}{4^9.4^5} =$

e) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}.\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^5.\left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} =$

Notación científica.

La **notación científica**, también denominada **patrón** o **notación en forma exponencial**, es una forma de escribir los números que acomoda valores demasiado grandes (100000000000) o pequeños (0,00000000001) para ser escrito de manera convencional. El uso de esta notación se basa en potenciaciones de base 10 (los casos ejemplificados anteriormente en notación científica, quedan así escritos $1 \,.\, 10^{11}$ y $1 \,.\, 10^{-11}$, respectivamente).

Un número escrito en notación científica sigue el siguiente patrón:

$$\boldsymbol{m \,.\, 10^{exp}}$$

El número *m* se denomina «mantisa» y *exp* es el «orden de magnitud». La mantisa, en valor absoluto, debe ser mayor o igual a 1 y menor que 10, y el orden de magnitud, dado como exponente, es el número que más varía conforme al valor absoluto.

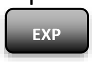
Observá los ejemplos de números grandes y pequeños:

- 600 000
- 30 000 000
- 500 000 000 000 000
- 7 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
- 0,0004
- 0,00000001
- 0,0000000000000006
- 0,0000000000000000000000000000000000000000000008

La representación de estos números, tal como se presenta, tiene poco significado práctico. Incluso, se podría pensar que estos valores son poco relevantes y de uso casi inexistente en la vida cotidiana. Sin embargo, en áreas como la física, la astronomía y la química, estos valores son comunes.

Por ejemplo, la mayor distancia observable del universo mide cerca de

740 000 000 000 000 000 000 000 000 m, y la masa de un protón es de unos 0,00000000000000000000000000167 kg.

También podrás operar con números expresados en notación científica usando la tecla 

de tu calculadora científica.

Para repasar lo dado hasta aquí:

1) Expresá en notación científica o en números con todas sus cifras según corresponda:

a)14560000

b)8742300000

c)0,0000672

d)- 0,0000006451

e)$9451 \cdot 10^{-25}$

f)$0,007 \cdot 10^{14}$

g)$35427,12 \cdot 10^{23}$

h)$0,047292 \cdot 10^{-15}$

2) Resolvé las siguientes situaciones, extrayendo los datos de cada una, indicá los pasos de resolución e interpretá la respuesta acorde al problema.

a) El tiempo transcurrido desde que los primeros animales habitaron el mundo, sobre tierra seca, es de unos 12.000.000.000.000.000 segundos. Expresá este tiempo como potenciación de base diez con una sola cifra, ¿cuál es el orden de magnitud?

b) Un rayo de luz tarda en atravesar una ventana, aproximadamente 1/100.000.000.000 segundos. ¿Qué tiempo tarda en atravesar un vidrio del doble que el anterior?, comparar los órdenes de magnitud de ambos tiempos, ¿cuántos vidrios como el primero, deberá atravesar, para que el orden de magnitud cambie?

c) ¿Cuál es la masa de 2.195 átomos de carbono? La masa de 1 átomo de C = $1,994.10^{-23}$ gramos.

d) Un átomo de helio tiene las siguientes características:

Masa: 0,00000000000000000000000665 g

Radio: 0,0000000093 cm

Velocidad media a 25°C: 136.000 cm/s

Expresá estas cantidades en notación científica.

3) Realizá las operaciones y expresá el resultado en notación científica:

a) $\frac{5{,}12 \cdot 10^{3} \ . \ 4{,}2 \cdot 10^{7}}{1{,}8 \cdot 10^{15}} =$

b) $4.\,10^{13} - 7.\,10^{16} + 5{,}3.\,10^{15} =$

c) $\frac{(3{,}12.10^{-5}+7{,}03.10^{-4}).8{,}3.10^{8}}{4{,}32.10^{3}} =$

d) $\frac{(12{,}5.10^{7} - 8.10^{9})(3{,}5.10^{-5} + 185)}{9{,}2.10^{6}} =$

e) $(5{,}24.10^{6})(6{,}3.10^{8}) =$

f) $\frac{5{,}24.10^{7}}{6{,}3.10^{4}} =$

RADICACIÓN.

Sea *a* un número real positivo y *n* un entero positivo mayor que 1. La raíz enésima de *a* denotada por $\sqrt[n]{a}$ es el número real *b* que satisface $b^{n} = a$. La operación presentada es la radicación; al número *a* se lo denomina **radicando**, el número *n* es el **índice**, el resultado b es la **raíz** y al símbolo $\sqrt{\ }$ lo llamamos radical porque proviene de la deformación de la letra r**,** que es la consonante con la cual comienza dicho término.

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \Leftrightarrow \qquad b^{n} = a$$

Ejemplos:

$\sqrt[3]{8} = 2$ *porque* $2^{3} = 8$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-125} = -5$ *porque* $(-5)^{3} = -125$

$\sqrt[4]{16} = 2$ *porque* $2^{4} = 16$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-512} = -8$ *porque* $(-8)^{3} = -512$

$\sqrt[5]{32} = 2$ *porque* $2^{5} = 32$

Observemos lo siguiente: $\sqrt[4]{16} = 2$ *porque* $2^{4} = 16$

Pero, también es: $(-2)^{4} = 16$

Sin embargo: $\sqrt[3]{8} = 2$ *porque* $2^{3} = 8$

Si el **índice es impar** la raíz tiene el mismo signo que el radicando; si el **índice es par,** para radicando positivo las raíces son números reales opuestos, y para radicando negativo, se obtiene una pareja de números complejos conjugados, como veremos más adelante. En cambio, para el conjunto ℝ, esta situación no tiene solución.

Discutí con tus compañeros la siguiente afirmación:

$$4 = \sqrt{(-4).(-4)} = \sqrt{(-4)^2} = -4$$

……
……
……

Muy importante:

Dado el símbolo $\sqrt{a}$, siempre denota la raíz cuadrada no negativa de *a,* por eso, otra manera de definir el valor absoluto de un número real *a* es:

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

Propiedades de la radicación de números reales:

1. $\boldsymbol{Si\ n\ es\ impar}, entonces\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. $\boldsymbol{Si\ n\ es\ par\ y\ a \geq 0, entonces}\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
3. $\boldsymbol{Raíz\ de\ otra\ raíz}$: $\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[n\cdot r]{a}$
4. $\boldsymbol{Distributiva\ de\ la\ radicación\ respecto\ a\ la\ multiplicación}$:
   $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
5. $\boldsymbol{Distributiva\ de\ la\ radicación\ respecto\ a\ la\ división}$:
   $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad con\ \ b \neq 0$

La radicación, NO ES DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA ADICIÓN NI A LA SUSTRACCIÓN.

Por reciprocidad, de las relaciones **(3)** y **(4)** resulta:

$\sqrt[n]{a}\ .\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad con\ b \neq 0$

Lo que nos permite multiplicar y dividir radicales de igual índice.

Por ejemplo:

$$\frac{\sqrt{2}\ .\sqrt{8}}{\sqrt{3}.\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{2.8}}{\sqrt{3.27}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$$

Cuando los radicales poseen distinto índice, se procede a resolver la operación, escribiendo estos radicales con igual índice. Esto lo logramos calculando el mínimo común múltiplo entre ellos y expresamos los radicales dados en otros del mismo índice. Para ello, procedemos de la siguiente manera.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{3}\ .\ \sqrt{8} = \sqrt[3x.2]{3^2}\ .\sqrt[2x3]{8^3} = \sqrt[6]{3^2.8^3}$,

expresamos *ambos radicales en un mismo índice,* multiplicamos los índices dados y los exponentes de los radicandos por los números que permiten obtener este nuevo índice de la radicación que es múltiplo de los otros anteriormente dados.

Simplificación de radicales.

En la expresión $\sqrt[8]{2^4}$ puede simplificarse, dividiendo el índice y el exponente por el número 4 que es el máximo común divisor (M.C.D.) entre ellos.

Observación: Si en el radicando figuran varios factores, se deberá calcular el M.C.D de los exponentes de los mismos.

$\sqrt[8]{2^4\ a^6\ b^{10}} = \sqrt[4]{2^2\ .a^3\ b^5}$ $\sqrt[3]{5^9\ x^3\ y^{12}} = 5^3\ x\ y^4$

En el segundo ejemplo, el índice se redujo a **1**.

Si resultara imposible encontrar un divisor común entre los exponentes y el índice, (mayor que 1), no se puede efectuar la simplificación si previamente no se distribuyen los radicales. Por ejemplo: $\sqrt[4]{x^2\ y} = \sqrt[4]{x^2}\ .\ \sqrt[4]{y} = \sqrt{x}\ .\ \sqrt[4]{y}$

Extracción de factores fuera del radical

Para realizar cualquier operación, es conveniente efectuar la mayor cantidad de simplificaciones posibles es decir, reducir todo a su mínima expresión.

Una operación indispensable para poder sumar y restar radicales es la extracción de factores fuera del signo de la radicación.

Así, $\sqrt[3]{2^7} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^7} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$ ¿Qué se hizo?

$\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$

Justificá cada uno de los pasos realizados para extraer factores fuera del radical.

1) ………………………………………………………………………………………………………

2) ……………………………………………………………………………………………………..

3) ……………………………………………………………………………………………………..

4) ………………………………………………………………………………………………………

Otra forma de justificación de la extracción de factores fuera del radical es por medio de la regla práctica que se explica a continuación.

Se extrajo el factor 2 con exponente 2 y se dejó un 2 con exponente 1 como radicando.

exponente del factor = 7 | índice de la raíz = 3

resto =1 cociente = 2

Operaciones con radicales.

Sólo es posible efectuar las operaciones adición y sustracción de radicales si estos son **semejantes,** es decir, si poseen igual índice e igual radicando. Sólo pueden diferir (diferenciarse) en el coeficiente que los acompaña.

Por ejemplo: $2.\ \sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - 3\ \sqrt[3]{2} = (2 + \frac{1}{2} - 3)\ \sqrt[3]{2} = -\frac{1}{2}\ \sqrt[3]{2}$

Una expresión como $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$ se debe dejar indicada, ya que no es posible resolverla.

Para multiplicar o dividir radicales que no posean igual índice se debe efectuar una reducción al mínimo común índice (como se explicó anteriormente).

Por ejemplo: $\sqrt{2}.\ \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^2}\ .\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{12}$

Exponentes fraccionarios.

Hasta el momento hemos trabajado la potenciación con exponentes enteros. Abordemos ahora el caso de **exponente fraccionario** y supongamos que la base es un número positivo.

Toda potenciación de exponente fraccionario es igual una radicación cuyo índice es el denominador del exponente fraccionario y el numerador es el exponente del radicando.

Si **m** y **n** son números enteros positivos, entonces: $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$

Ejemplo: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ $\qquad 36^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36^3} = \left(\sqrt{36}\right)^3 = 6^3$

Cuando el exponente es negativo, debemos tomar el **recíproco** de la base y elevarlo al **opuesto** del exponente, por ejemplo: $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

Observación: Si la base **a** es un número negativo, que hallemos o no un resultado real, depende de la paridad del denominador del exponente, es decir, que éste sea par o impar; por ejemplo:

$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$ $\qquad$ *pero*

$(-27)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-27}$ No tiene solución en el campo de los números reales.

Racionalización de denominadores

Dada una fracción en cuyo denominador figura un radical, por ejemplo: $\frac{2}{\sqrt{3}}$, racionalizar su denominador es encontrar otra fracción equivalente a la anterior, tal que en su denominador no aparezca ningún radical.

Para esto, multiplicamos el numerador y el denominador de la expresión fraccionaria dada por $\sqrt{3}$ ya que, de este modo, conseguiremos en el denominador, $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

Por ejemplo: $\frac{2}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Se distinguen dos situaciones:

1) el denominador es un radical único.

2) el denominador es un binomio tal que uno o los dos términos que lo componen son irracionales cuadráticos.

<u>SITUACIÓN 1:</u>

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

Si el radical del denominador fuera $\sqrt[3]{2^3}$, simplificando índice y exponente por 3 obtendríamos por resultado 2. Por lo tanto, nuestro objetivo a lograr es que el índice y el exponente del radical se puedan simplificar.

A la expresión dada, por este motivo, la multiplicamos por $\sqrt[3]{2^2}$, entonces:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

Otro ejemplo: $\dfrac{3}{\sqrt{a}} = \dfrac{3.\sqrt{a}}{\sqrt{a}.\sqrt{a}} = \dfrac{3.\sqrt{a}}{a}$

SITUACIÓN 2:

$\dfrac{3}{2+\sqrt{2}}$ Es conveniente multiplicar el numerador y el denominador de la expresión por el **conjugado** del denominador.

Dos binomios son conjugados cuando difieren sólo en el signo de una de sus componentes.

El conjugado de $2+\sqrt{2}$ es $2-\sqrt{2}$ por lo tanto:

$$\frac{3}{2+\sqrt{2}} = \frac{3}{2+\sqrt{2}}.\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{3\,(2-\sqrt{2})}{4-(\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

Obviamente, el objetivo de multiplicar el denominador por su expresión conjugada ha sido transformarlo en una diferencia de cuadrados.

Otro ejemplo: $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3} = -3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

LOGARITMACIÓN.

Se denomina logaritmo en base *b* de un número *x* no negativo y mayor que cero a otro número *y*, tal que *b* con exponente *y* es igual a *x*.

$\log_b x = y \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x \qquad con\ b, x \in \mathcal{R},\ b > 0,\ b \neq 1\ y\ x > 0$

La operación logaritmación tiene los siguientes elementos:

base: *b*, **argumento:** *x* y **logaritmo:** *y*

La expresión: $\log_b x$

se lee: logaritmo en base *b* del número *x* .

Ejemplos:

$$\log_2 8 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2^3 = 8$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Casos particulares:

1) El logaritmo de 1, con cualquier base, es igual a cero.

$$\log_b 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b^0 = 1$$

2) En cualquier base, el logaritmo de la base es igual a uno.

$$\log_b b = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad b^1 = b$$

Recordá:

- Los números negativos no tienen logaritmo en el conjunto de los números reales.
- No existe el logaritmo de cero.
- La logaritmación no es distributiva con respecto a ninguna operación.

¿Te animás a explicar cada una de las afirmaciones anteriores y luego comentar tu respuesta en la clase?

……

……

……

……

Propiedades de la logaritmación:

- El logaritmo del producto de números reales, es igual a la suma de los logaritmos de los factores, con la misma base:

$$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y$$

- El logaritmo del cociente de dos números reales, es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor, con la misma base:

$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de las potencia:

$$\log_b x^n = n.\log_b x$$

- El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{\log_b x}{n}$$

- Si se elevan a un mismo número no nulo, la base y el argumento de un logaritmo, el resultado no varía:

$$\log_b x = \log_{b^n} x^n$$

Logaritmos naturales y decimales

En Matemática se puede trabajar con logaritmos en cualquier base, las más usuales son 10 y ***e***. A los logaritmos de base 10 se los denomina ***logaritmos decimales***, ten presente que en este tipo de logaritmos no se debe escribir la base 10. Los logaritmos de base ***e*** se denominan ***logaritmos naturales.*** Todas las calculadoras científicas trabajan con ambos logaritmos.

Cambio de base.

Lo usual es trabajar con logaritmos decimales o con logaritmos naturales, en ocasiones podemos necesitar el logaritmo de un número en una base diferente de alguna de las mencionadas anteriormente. Para calcular el logaritmo en una base cualquiera ***c*** de un número ***a***, si aplicamos la siguiente fórmula:

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

En la calculadora hay dos teclas que te permitirá calcular logaritmos, estas son las teclas ***log*** y ***ln,*** logaritmo en base 10 y en base e, respectivamente. Para calcular $\log_2 27$, se realiza un cambio de base (base 10):

$\log_2 27 = \frac{log\,27}{log\,2}$ en la calculadora se ingresan los datos de la siguiente manera:

$\log 27\colon\ \log 2 \cong 4{,}76$

que es aproximadamente el valor de $\log_2 27$.

También obtenemos el mismo resultado si hacemos el cambio de base, utilizando la base *e.* ¿Podrías comprobarlo?

Ejemplo: Calculá $\log_4 100$ sabiendo que $\log 4 \cong 0{,}6$.

$$\log_4 100 = \frac{\log 100}{\log 4} \cong \frac{2}{0{,}6} \cong 3{,}33$$

Para repasar lo dado hasta aquí:

1) Calculá los logaritmos de los siguientes números aplicando la definición de logaritmo:

$a)\ \log_5 125 =$

$b)\ \log_{\frac{1}{8}} 1 =$

$c)\ \log_2 \frac{1}{4} =$

$d)\ lne =$

2) Encontrá el o los valores de h, aplicando la definición de logaritmo;

$a)\ \log_h 8 = 2$

b) $\log_h 243 = 5$

$c)\ \log_h 3 = -1$

d) $\log_h 1 = 0$

3) Reducí las siguientes expresiones a un único logaritmo:

a) $z = \frac{1}{2}\log_b x + 2\log_b y - 3(\log_b x + \log_b y)$

b) $z=\frac{3}{4}(\log_b m-\log_b n)+\log_b(m+n)$

c) $z=\log_b a-\frac{3}{2}\log_b c-\left[\frac{1}{4}\log_b(a-b)+\log_b a\right]$

NÚMEROS COMPLEJOS ($\mathbb{C}$)

Los números complejos surgen para dar solución a las radicaciones de índice par y radicando negativo, donde este caso particular ***no tiene solución*** **en el** ***conjunto de los números reales***.

Si analizamos la expresión $\sqrt{-16}$ no tiene solución en el campo real ya que, no existe ningún número real que elevado al cuadrado de como resultado un número negativo. Sigamos con atención este desarrollo:

$$\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}=4\cdot\sqrt{-1}$$

Surge de esta manera un nuevo conjunto de números, los números ***imaginarios,*** que resultan de multiplicar un número real por la unidad imaginaria ***i***.

$\sqrt{-1}=i$. Así pues, $\sqrt{-16}=4i$

La unión del conjunto de los números reales con el de los números imaginarios, es el conjunto de los números complejos, conjunto que se simboliza con $\mathbb{C}$.

Definición: El conjunto de los números complejos es un conjunto de pares ordenados de números reales. Simbólicamente:

$$\mathbb{C}=\{(a,b)/a\in R\ y\ b\in R\}$$

Recordemos que un par ordenado es un conjunto formado por dos elementos dados en un orden prefijado:

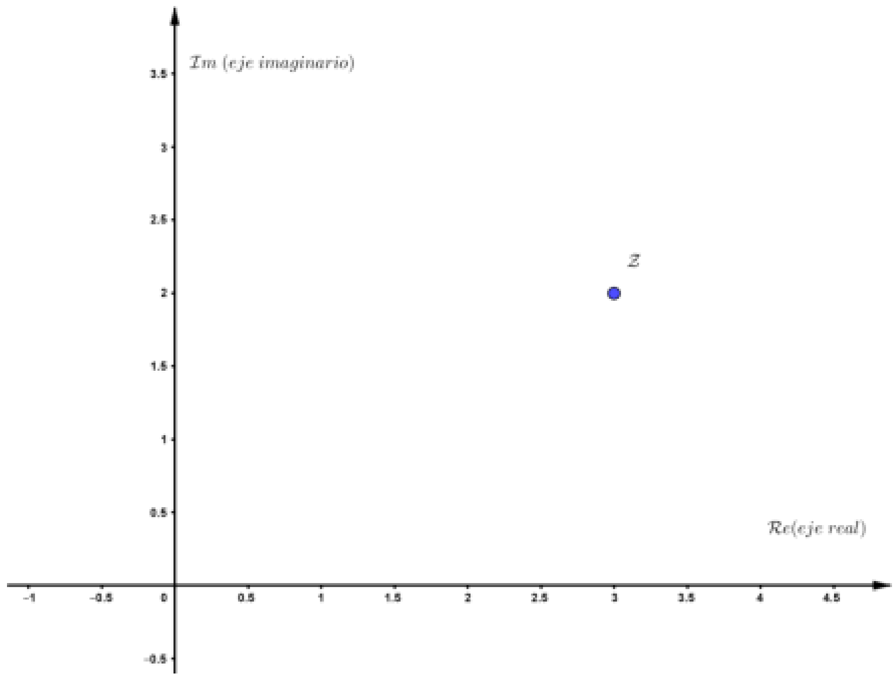
$$(a;b)$$

Llamamos a ***a*** primera componente y a ***b,*** segunda componente del par ordenado.

Representación gráfica de números complejos:

Introduciendo un sistema cartesiano, los números complejos se corresponden con los puntos del plano. La abscisa de cada punto es la parte real y la ordenada es la parte imaginaria.

Sea $z=(3,2)$, su representación gráfica es la siguiente:



Ejercicio:
Representá en el gráfico anterior los números complejos
$z_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad z_2 = \left(4, -\frac{1}{2}\right)$

<u>Parte real y parte imaginaria de un número complejo</u>:
La parte real del número complejo $z = (a, b)\ es\ Re(z) = a$
La parte imaginaria de $z = (a, b)\ \ es\ \ Im(z) = b$
Conviene advertir que tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

<u>NÚMERO COMPLEJO NULO</u>: $z = (a, b)$ es un número complejo nulo si $a = b =$ ___
Dicho número se escribe como el par ordenado z = _________.

<u>OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO</u>: dado $z = (a, b)$ su opuesto es
$-\boldsymbol{z} = (\dots\dots, \dots..)$
Ejemplo: el opuesto de $z = (-3,4)$ es $-\boldsymbol{z} = (\dots\dots, \dots..)$

<u>CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO</u>: dado $z = (a, b)$ su conjugado es
$\bar{\boldsymbol{z}} = (a, -b)$
Ejemplo: el conjugado de $z = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$ es $z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$

<u>IGUALDAD DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS</u>: Dados dos números complejos
$z_1 = (a, b)\ y\ z_2 = (c, d)$ estos números complejos son iguales si y sólo sí $a\ = c\ y\ b = d$.

¿Qué significa la expresión *si y sólo si*, también conocida como *sii?*

……

Operaciones básicas en el conjunto de los números complejos

En el conjunto de los números complejos, se define la adición y la multiplicación de la siguiente manera:

Sean $z_1 = (a,b)\ y\ z_2 = (c,d)$

- $z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

Ejemplos:

Sean $z_1 = (3,-2)\ y\ Z_2 = (-2,-8)$

- $z_1 + z_2 = (3,-2) + (-2,-8) = \big(3 + (-2), -2 + (-8)\big) = (1,-10)$
- $z_1 \cdot z_2 = (3,-2) \cdot (-2,-8) =$

  $z_1 \cdot z_2 = \big(3 \cdot (-2) - (-2) \cdot (-8), 3 \cdot (-8) + (-2)(-2)\big) =$

  $z_1 \cdot z_2 = (-22,-20)$

Ahora bien, seguro te estarás preguntando *¿Cómo se resuelve la sustracción y la división en este campo numérico?*

Para responder a esta pregunta, te invitamos a recordar cómo se define la sustracción en el campo de los números reales. La sustracción es la adición entre el minuendo y el opuesto del sustraendo. ¿Lo recuerdas?

Entonces, en el conjunto de los números complejos, la sustracción se define simbólicamente de la siguiente manera:

- $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a,b) + (-c,-d) = \big(a + (-c), b + (-d)\big)$

  $z_1 - z_2 = (a - c, b - d)$

¿Y la división? Paciencia… te mostraremos una forma más simple de representar a los números complejos que será de mucha utilidad para poder dividir dos números en este campo.

FORMA BINÓMICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Unidad imaginaria: El número complejo imaginario cuya segunda componente es igual a 1, se llama unidad imaginaria y se denota.

$$i = (0,1)$$

La multiplicación de un número complejo real por la unidad imaginaria permuta las componentes del número, lo transforma en un número complejo imaginario. Es decir:

$$(b,0) \cdot i = (b,0) \cdot (0,1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0,b)$$

En efecto,

$$bi = (0,b)$$

Potenciaciones sucesivas de la unidad imaginaria:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

Análogamente:

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

$i^8 = \ 1$

$i^9 =$ ___

¿Qué conclusiones podés extraer de los resultados de las potenciaciones sucesivas de base *i*?

………

¿Por qué sucede eso?

………

Ejercicio: Calculá i^{568}

<u>Forma binómica de un número complejo.</u>

Sea $z = (a, b)$ un número complejo, por definición de adición en este campo numérico,

$$z = (a, 0) + (0, b)$$

Por la definición de unidad imaginaria, $i = (0,1)$ y por lo visto con anterioridad $bi = (0, b)$, resulta la forma binómica:

$$\boxed{\boldsymbol{z = a + b \cdot i}}$$

La conveniencia de la forma binómica se pone de manifiesto al efectuar operaciones con números complejos, evitando el cálculo con pares ordenados que es más laborioso.

Ejercicios:

a) Expresá el número $z = (2; -5)$ es su forma binómica y escribí su opuesto y su conjugado.

b) Representá gráficamente los números complejos dados en a).

División de números complejos:

Al dividir dos números complejos dados en forma binómica:

$z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$,

Se resuelve la división de números complejos siendo $z_2 \neq 0$ de la siguiente manera:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} =$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-(di)^2} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+d^2} =$$

$$= \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ahora, a poner en práctica lo aprendido.

Ejercicios:

Dados

$z_1 = -1+3i \;\; y\, z_2 = 3-2i$

Calculá: $a)\ z_1+z_2\ \ b)\ z_1-z_2\ c)\ z_1 \cdot z_2\ d)\ \frac{z_1}{z_2}\ \ e)\ \frac{1}{z_1}\ f)\ \frac{1}{\overline{z_1}}\ \ g)(z_1)^2\ h)\ (z_2)^3$

……

……

RECORRIDO II: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Objetivos:

- Afianzar los temas estudiados en la escuela secundaria sobre las expresiones algebraicas.
- Clasificar las expresiones algebraicas.
- Operar con polinomios aplicando propiedades.
- Resolver operaciones básicas con expresiones algebraicas racionales fraccionarias.
- Utilizar las técnicas de factorización de polinomios como herramienta para resolver problemas.

Síntesis de contenidos:

En esta unidad vamos a estudiar ciertos tipos de expresiones algebraicas y algunas operaciones definidas entre ellas. Los principales conceptos que desarrollaremos son los siguientes:

- Expresiones algebraicas: clasificación
- Valor numérico de una expresión algebraica
- Operaciones con expresiones algebraicas racionales enteras
- Factorización de expresiones algebraicas racionales enteras
- Polinomios. Operaciones con polinomios
- Raíces de un polinomio. Multiplicidad de raíces
- Regla de Ruffini. Teorema del Resto
- Propiedad de Gauss
- Factorización completa de polinomios
- Expresiones algebraicas racionales fraccionarias
- Operaciones con expresiones algebraicas racionales fraccionarias

Una ***expresión algebraica*** es aquella expresión que combina números y letras, por medio de las operaciones conocidas: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Veamos algunos ejemplos:

$$a)3c^2-1; \qquad b)\frac{1}{2b}; \qquad c)\sqrt{6x-2};$$

$$d)\frac{2x-3y}{4x^2-9y^2}; \qquad \text{e)}xz^{-1}; \qquad \text{f)}2\pi \text{r}$$

Observando estos ejemplos con detenimiento, podrás notar que cada una de las expresiones algebraicas pertenece a tipos diferentes, fíjate: en el ejemplo a) y f) las letras, es decir las indeterminadas que intervienen están afectadas por exponentes que son números enteros positivos, mientras que en los ejemplos b), d) y e) se encuentran en el denominador o están afectada por un por un exponente negativo, como en el ejemplo e).

Clasificación de las expresiones algebraicas

Expresiones algebraicas	Racionales	Enteras	*Son expresiones algebraicas en las que las operaciones matemáticas involucradas son: adición, sustracción, multiplicación y potenciación con un número entero positivo como exponente.*
		Fraccionarias	*Son divisiones de expresiones algebraicas enteras con denominador no nulo ó son expresiones en las que la indeterminada está afectada por exponentes enteros negativos.*
	Irracionales		*Son aquellas en las cuales la indeterminada está afectada por un número racional que no es entero o bien las indeterminadas son parte del radicando.*

Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las indeterminadas de las expresiones algebraicas les asignamos algún valor, encontraremos el valor numérico de dicha expresión algebraica.

Es decir, si $c = -1$ entonces, el valor numérico de $3c^2 - 1$ es $3 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

Si $x = 1, y = 0$; entonces, el valor numérico de $\frac{2x-3y}{4x^2-9y^2}$ es $\frac{2.1-3.0}{4.1^2-9.0^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Si r = 2, entonces, el valor numérico de $2.\pi.r$ es $2.\pi.2 = 4\pi$

A esta última expresión algebraica, $2\pi r$, se la denomina **monomio**.

¿Qué es un monomio?

Monomio

Un monomio es una expresión algebraica racional entera que tiene un solo término, formado por un coeficiente (o número) y la parte literal, que son las indeterminadas que intervienen en la expresión. Por ejemplo, son monomios:

$a) \ -3xz^2; \quad b) \ \frac{1}{2}m; \quad c) \ 16xc^2z^7$

Coeficiente de un monomio y parte literal:

- -3 es el coeficiente $-3xz^2$, xz^2 es la parte literal.
- $\frac{11}{22}$ es el coeficiente de $\frac{1}{2}m$, m es la parte literal.

- 16 es el coeficiente de $16xc^2z^7$, xc^2z^7 es la parte literal.

Grado de un monomio: es la suma de los exponentes de las indeterminadas del monomio.

- 3 es el grado de $-3xz^2$
- 1 es el grado de $\frac{1}{2}m$
- 10 es el grado de $16xc^2z^7$

Monomios semejantes.

Dos o más monomios se dicen que son semejantes si tienen la misma parte literal, es decir que solo difieren en el coeficiente. Dos monomios semejantes pueden ser $-2xz^2$ y $\frac{13}{2}xz^2$, así como también lo son $\sqrt{3}b$ $y - b$.

En este apartado, nos detendremos a trabajar solo con las expresiones algebraicas racionales enteras.

Operaciones básicas con expresiones algebraicas racionales enteras

La ADICIÓN de dos expresiones algebraicas racionales enteras se realiza sumando los coeficientes de los términos semejantes. Así, por ejemplo:

1) $2a^2b + ab + 3ba - 6a^2b = -4a^2b + 4ab$
2) $1 - xy + 2xz - 3 + 4xz - xy = -2 - 2xy + 6xz$

La MULTIPLICACIÓN de expresiones algebraicas racionales enteras se realiza aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición o sustracción, haciendo uso de las propiedades de la potenciación y por último, sumando los términos semejantes. Así, por ejemplo,

1) $(b - 3ab) \cdot \left(2a + \frac{3}{2}\right) = 2ab + \frac{3}{2}b - 6a^2b - \frac{9}{2}ab = -\frac{5}{2}ab + \frac{3}{2}b - 6a^2b$
2) $(x^2 + 2y) \cdot (y - 3x^2) = x^2y - 3x^4 + 2y^2 - 6x^2y = -5x^2y - 3x^4 + 2y^2$

Si pensáramos en el procedimiento inverso que realizamos al aplicar la propiedad distributiva, estaríamos escribiéndolo como multiplicación de expresiones más simples, a este procedimiento se lo denomina ***factorización***.

En este apartado, vamos a estudiar solo algunos casos de factorización, cuando estudiemos los polinomios, veremos otros más.

Factorización de expresiones algebraicas racionales enteras.

a) *Factor común:*

En la expresión $ab^2 + 2a^2b^2 - 3ab^3$, el factor ab^2 aparece en todos los términos de la expresión, por lo que podemos expresar:

$$ab^2 + 2a^2b^2 - 3ab^3 = ab^2(1 + 2a - 3b)$$

Para conocer el factor común de una expresión, debemos encontrar el máximo común divisor de los coeficientes de los términos, este será el coeficiente del factor común, que tendrá como parte literal, las indeterminadas que se repiten en todos los términos con el menor exponente.

Así, $2a^2b2a^2b$ es el factor común de la expresión $2a^2b - 6a^2b^2c + 8a^3b^2c$, pues:

$2a^2b - 6a^2b^2c + 8a^3b^2c = 2a^2b.(1 - 3bc + 4abc)$

b) ***Cuadrado de un binomio:***

A las expresiones $a^2 + 2ab + b^2$ y $a^2 - 2ab + b^2$ se las denomina **trinomio cuadrado perfecto**, y su expresión factorizada es:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Regla: *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más (o menos) el doble producto del primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.*

Por ejemplo, para factorizar las expresiones algebraicas que siguen:

1) $4x^2z^2 - 12xz + 9$

Observamos que es una expresión algebraica que tiene tres términos, para que dicha expresión sea un trinomio cuadrado perfecto, dos de sus términos deben ser cuadrados y otro de los términos debe ser el doble producto de las bases de dichos cuadrados, veamos:

$$4x^2z^2 - \ 12xz \ + \ 9$$
$$\downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$(2xz\,)^2 \ 2.2xz.(-3\,)(-3)^2$$

Con esto, justificamos que la expresión algebraica entera es un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto, la podemos factorizar de la siguiente manera:

$4x^2z^2 - 12xz + 9 = (2xz - 3)^2$

2) $-m^2 + 5n + n^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto, no puede factorizarse como el cuadrado de un binomio. ¿Por qué no lo es?

c) ***Multiplicación de binomios conjugados:***

Toda expresión de la forma $a^2 - b^2$, que es una diferencia de cuadrados, puede factorizarse como multiplicación de binomios conjugados, es decir:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Queda como actividad probar la veracidad de esta igualdad:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

………

Ejemplo:
$25x^2 - y^2z^4 = (5x + yz^2)(5x - yz^2)$

Para pensar…
1. ¿Qué término se podría agregar al binomio $\frac{1}{4}p^2 - 6pq$ para que sea un trinomio cuadrado perfecto?, ¿y para el caso del binomio $64y^2 + z^4 64y^2 + z^4$?
2. ¿Es posible factorizar la expresión $a^2 - 3$ como una multiplicación de binomios conjugados? ¿Cómo resulta?

A continuación veremos un tipo particular de expresiones algebraicas racionales enteras, los *polinomios*.

POLINOMIOS.

$a) 7x^2 - 3x + 1$

Es una expresión algebraica racional entera.
Los coeficientes de $7x^2 - 3x + 1$ son $7, -3$ y 1.
Tiene tres términos, es un TRINOMIO, cada uno de ellos es un monomio $7x^2$; $-3x$; 1
$b)\ 2 + x^5$

Es una expresión algebraica racional entera.
Los coeficientes de $2 + x^5$ son 2 y 1.
Tiene dos términos, es un BINOMIO cada uno de ellos es un monomio 2; x^5.

$c) - x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x + 3$

Es una expresión algebraica racional entera.
Los coeficientes de $-x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x$ son $-1, 8, \frac{1}{2}$ y 3.

Tiene cuatro términos, es un CUATRINOMIO, cada uno de ellos es un monomio $-x^3$; $8x^7$; $\frac{1}{2}x$; 3.

Estas tres expresiones algebraicas racionales enteras, son ejemplos de *polinomios. ¿Por qué lo son? ¿Qué tienen en común?*
……..

Un ***polinomio*** *es una expresión algebraica racional entera que depende de una o varias indeterminadas y sus coeficientes son números reales IR.*
Simbólicamente, llamamos *polinomio en la indeterminada x con coeficientes reales en IR* a toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x \quad + a_0x^0$$

Esta expresión se lee: "*a sub-ene* por *x a la n* , más *a sub- ene menos uno* por *x a la n menos uno*, …,más *a sub-uno por x* , más *a sub-cero por x a la cero*".
La notación:

- $P(x)$ se lee "*polinomio P en x*"; "*polinomio P que depende de la indeterminada x*".
- $N \in N_0$
- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2;\ a_1;\ a_0$ son los coeficientes del polinomio (la parte numérica).
- Cada sumando del polinomio,como por ejemplo $a_n x^n$ se denomina término del polinomio.

Si $a_n \neq 0$ entonces, decimos que n es el GRADO del polinomio. Simbólicamente: $gr[P(x)] = n$

Analicemos con mayor profundidad los ejemplos presentados como disparadores, y los vamos a llamar $A(x); B(x)\, y\, C(x), A(x); B(x)\, y\, C(x),$ respectivamente.

Polinomio	$A(x) = 7x^2 - 3x + 1$	$B(x) = 2 + x^5$	$C(x) - x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x + 3$
Grado	$gr[A(x)] = 2$	$gr[B(x)] = 5$	$gr[C(x)] = 7$
Nº de términos	3	2	4
Coeficiente principal	7	1	8
Coef. o término independiente	1	2	3
Completo	SI	NO	NO
Ordenado	SI	SI	NO

¿Qué significa que un polinomio esté ordenado y completo? ¿Qué es el coeficiente principal y el término independiente de un polinomio?

- Un polinomio está **ordenado** (puede ser que lo esté de manera creciente o decreciente) cuando están ordenados, creciente o decrecientemente, los grados de los monomios que son los términos del polinomio.

Por ejemplo, el polinomio $C(x) = -x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x + 3$ no está ordenado, lo podemos ordenar de forma decreciente, de la siguiente manera:

$C(x) = 8x^7 - x^3 + \frac{1}{2}x + 3.$

- Un polinomio está **completo** si figuran en él todos los exponentes de las indeterminadas desde x^0 hasta x^n. En caso contrario se dice incompleto.

Completar un polinomio significa escribir, con coeficientes iguales a cero, todos los términos que faltan.

Los polinomios $B(x) = 2 + x^5$ y $C(x) = -x^3 + 8x^7 + \frac{1}{2}x + 3$ quedan completos de la siguiente manera:

$$B(x) = 2 + 0x \quad + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + x^5$$

$$C(x) = 8x^7 + 0x^6 + 0x^5 + +0x^4 + x^3 + 0x^2 + +\frac{1}{2}x + 3$$

- El **coeficiente principal** de un polinomio es el factor numérico del término que posee la indeterminada con el mayor exponente, es decir, es el coeficiente del término que determina el grado del polinomio.

- El **término independiente** de un polinomio es aquel coeficiente que acompaña a la parte literal x^0.

Veamos ahora algunos polinomios especiales:

Polinomio nulo:
Se denomina polinomio nulo al que tiene todos sus coeficientes iguales a cero. El polinomio nulo no tiene grado. Ejemplo: $P(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x$

Polinomio constante:
Un polinomio de grado cero es un polinomio constante. Ejemplo: $P(x) = -5$

Polinomio mónico*:*
Un polinomio se dice que es mónico, si el coeficiente principal es 1.
Los siguientes polinomios son mónicos:
$P(x) = x^3 - 6x^2 + 2z + 100;\ \ Q(y) = y^{100} - 1$

Polinomio primo:
Un polinomio $P(x)$ se llama **primo o irreducible** cuando no se puede descomponer como una multiplicación de polinomios de grado menor al grado de $P(x)$. En caso contrario, se dice que el polinomio es **compuesto, reducible o no primo**.
Ejemplos:
$a)\ P(x) = 5x + 10 = 5(x + 2); 5$ es factor de grado 1, $x + 2x + 2$es factor de grado 1.
$b) Q(x) = 2y \quad - 8y^3 = 2y \quad (1 - 4y^2) = 2y \quad (1 + 2y \quad)(1 - 2y \quad)$; los últimos tres factores son de grado 1.
Podemos observar que ***todo polinomio de primer grado es primo****.*

Igualdad de polinomios:
Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes son iguales entre sí.
$P(x) = 10x^3 + x^2 - 3 \ y \ Q(x) = x^2 - 3 + 10x^3$

Así como vimos anteriormente el valor numérico de una expresión algebraica racional, podemos hallar también el ***valor numérico*** de un polinomio.

Consideremos el polinomio $R(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 6$. Si $x = -2$, el valor numérico de $R(x)$ es:

$$R(-2) = \frac{1}{2}(-2)^2 - \sqrt{2}(-2) + 6 = 2 + 2\sqrt{2} + 6 = 8 + 2\sqrt{2}$$

Generalizamos:

Dado un polinomio:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + +a_1x \quad + a_0x^0$, se denomina valor numérico de $P(x)$ para $x = c$; con $c \in \Re$, al número:

$P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \cdots + a_2c^2 + a_1c \quad + a_0c^0$

Esto será de mucha utilidad para el desarrollo de próximos contenidos, como también lo será para resolver actividades de aplicación.
Hagamos un repaso de lo que vimos hasta ahora, resolviendo las siguientes actividades:

Para revisar lo dado hasta aquí:

(1) Las siguientes expresiones algebraicas no son enteras:

$-3x^{-1}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{8^{11}} \quad + b}{wa^2}$ $\qquad \dfrac{25}{4}\sqrt{b+z}$

$\sqrt{\dfrac{xy}{3}} + x^7 + 2$ $\qquad \dfrac{1}{2}x - \sqrt{3x}$ $\qquad (xy^2 + 1)^{\frac{2}{3}}$

¿Podés explicar por qué no lo son?

(2) Determiná si las expresiones dadas son monomio o no e indicá la parte literal, el coeficiente y el grado del monomio. Justificá tu respuesta.

$a)\ \dfrac{-xz^2}{9}$ $\qquad b)\ \dfrac{x^3a}{v}$ $\qquad c)\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{xc}$

(3) Escribí dos monomios de grado 4 y 2, respectivamente y luego, determiná dos monomios semejantes a ellos.

(4) Indicá cuáles de las siguientes expresiones son polinomios con coeficientes reales:

$a)\ \dfrac{1}{5}x^2$ $\qquad c)\ 5x^{-1} - x - 2$ $\qquad e)\ 3 - \frac{1}{x}$ $\qquad g) 2^x + 3^{x+1}$

$h)\ 6^{-1} + x^2 + x$

$b)\ 8x^2 - \sqrt{2}x^9 - 1$ $\qquad d)\ 3\pi x^3 - \dfrac{\pi}{2}x^2 + x$ $\qquad f)\ -9$

(5) Completá la tabla con la información correspondiente.

POLINOMIO	Tipo (según sus términos)	Grado	Términos	a_n	a_0
$P(x) = 1 - 2x^2 + x^3$					
$Q(x) = x + \dfrac{3}{4}$					
$R(x) = 2x$					
$S(x) = -1$					
$T(x) = x - x^7 - \dfrac{1}{3}x^2$					
$U(x) = -x \quad + 1 - \sqrt{3}x^5$					

(6) Ordená en forma decreciente y completá los polinomio de la actividad anterior cuando sea posible.

(7) Determiná los valores de $a, b\ y\ c a, b\ y\ c$ para que los polinomios $P(x)\, y\ Q(x)$ sean iguales.
$i)\ P(x) = 1 - 3x^2 + x^3;\quad Q(x) = -(2 + a)x^3 - bx^2 + c$

$ii)\ P(x) = -5x^7 + \frac{2}{3}x - \sqrt{36}x^3;\quad Q(x) = -(a + b)x^7 + \frac{2}{3}x - bx^3 + c$

(8) Encontrá los valores de $a\ y\ b\ \epsilon\ \Re$ para que el polinomio

$Q(x) = (3a - 6)x^2 + (4a - b - 9)x$ sea igual al polinomio nulo.

(9) Hallá el valor de m en los siguientes polinomios para que se cumplan las condiciones dadas.
1) $P_1(x) = x^3 + 2x^2 - mx\ \ y\ \ P_1(-1) = 3$
2) $P_2(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^2 - m\ \ \ y\, P_2(1) = 2$
3) $P_3(x) = -x^2 + 3\sqrt{5}x^2 - m\ \ \ y\, P_3(\sqrt{5}) = 0$

(10) Factorizá, si es posible, las siguientes expresiones:

$(a)\ 169a^5b^3 + 13ab^3c^5$

$(b)\ \dfrac{x^3y^2}{\sqrt{2}} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)^3 x^2 + \left(\dfrac{xy}{\sqrt{2}}\right)^4$

$(c)\ 5b^2 - 10a^5b^2 + 5a^2b^3 + 15a^6b^5$

$(d)\ \dfrac{5}{2}m^5n^3 - \dfrac{1}{2}m^3n + \dfrac{1}{8}m^3np^3 + \dfrac{5}{2}m^4n$

$(e)\ \frac{10}{21}xyz + \frac{4}{3}x^2y^5z^4 - \frac{2}{9}xy^6z^5 - \frac{2}{3}xy^2z^8$

(11) Los siguientes trinomios son cuadrados perfectos, es decir pueden expresarse como cuadrado de un binomio. Encontrá dicha expresión.

$(a) x^2 + 10x + 25$

$(b) m^2 - 2mn + n^2$

$(c) \frac{q^2}{4} - pq + p^2$

$(d) 2y^4 + x^2 + 2\sqrt{2}xy^2$

$(e) 4x^6 + \dfrac{4}{3}x^3y + \dfrac{y^2}{9}$

$(f) 4x^6 + \dfrac{1}{16}y^8 - x^3y^4$

(12) Completá cada uno de los siguientes binomios para que resulte un trinomio cuadrado perfecto.

$(a) x^2 + 4xy$

$(b) 9a^2 - 6ab$

$(c) \dfrac{25}{4}x^2 + 15x$

$(d) 16 + 4x$

$(e) \dfrac{9}{4}x^2 + 2xy$

$(f)\ a^2 - 6\sqrt{2}ab$

(13) Factorizá las siguientes diferencias de cuadrados.

$(a) x^2 - 9$

$(d)\ 144m^6 - 121x^8y^4$

$(b)\ y^2 - 25m^2$	$(e)\ \frac{4}{9}a^6 - \frac{b^4}{25}$
$(c)\ 4a^2 - 3b^2$	$(f)\ (x-y)^2 - z^2$

Operaciones con polinomios.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS:

Para sumar o restar polinomios, debemos sumar o restar los términos semejantes y utilizar las propiedades de números reales que vimos en el recorrido anterior. Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5+3)x^7 = 8x^7$$

Para efectuar la operación sustracción de polinomios, tenemos que recordar que: $c - b = c + (-b)$.

Es decir, la diferencia entre dos polinomios es igual a la suma del primero con el opuesto del segundo polinomio: *P(x) – Q(x) = P(x) + [-Q(x)].*

Ejemplos:

(a) Encontrá la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 - 5x^2 + 7x)$

Solución:

$(a)(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 - 5x^2 + 7x) =^{(1)}$

$= (x^3 + x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4 \quad ^{(2)}$

$= \ 2x^3 - 11x^2 + 9x + 4$

(1)Agrupamos términos semejantes.

(2)Sumamos términos semejantes.

(b) Encontrá la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 - 5x^2 + 7x)$

$(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 - 5x^2 + 7x) =$

$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 + 5x^2 - 7x \quad (1)$

$= (x^3 - x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4 \quad (2)$

$= 0x^3 - x^2 - 5x + 4 = -x^2 - 5x + 4 \quad (3)$

(1)Sumamos al primer polinomio el opuesto del segundo polinomio.
(2)Agrupamos términos semejantes.
(3)Operamos con los términos semejantes.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POLINOMIOS.

<u>Multiplicación:</u>

a) Multiplicación de un número por un polinomio:

Para calcularlo se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición o sustracción. El resultado es otro polinomio que tiene de grado el mismo del polinomio y como coeficientes el producto de los coeficientes del polinomio por el número.

Proponé un ejemplo y resolvelo:

………

b) Multiplicación de un monomio por un polinomio:

Se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio utilizando la propiedad distributiva. Además al multiplicar las indeterminadas debemos recordar la propiedad de las potencias de igual base.

Ejemplo: $-3x^2\left(\frac{1}{2}x^6+x^3-4\right)=-3x^2.\frac{1}{2}x^6-3x^2.x^3-3x^2.(-4)$

$$=-\frac{3}{2}x^8-3x^5+12x^2$$

c) Multiplicación entre polinomios:

Vamos a multiplicar dos polinomios,

$$(2x+3)(x^2-5x+4)=2x.(x^2-5x+4)+3(x^2-5x+4) \quad (1)$$
$$=(2xx^2-2x.5x+2x.4)+(3.x^2-3.5x+3.4) \quad (2)$$
$$=(2x^3-10x^2+8x)+(3x^2-15x+12) \quad (3)$$
$$=2x^3-7x^2-7x+12 \quad (4)$$

(1)Aplicamos propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma algebraica.

(2)Operamos multiplicando los dos monomios de cada término.

(3) Aplicamos la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base.

(4) Operamos con los términos semejantes.

División:

Si tenemos dos polinomios $P(x)\,y\,Q(x)$ y queremos efectuar la división entre ellos $P(x):Q(x)$, primero debemos tener en cuenta que si $P(x)\,y\,Q(x)$ son dos polinomios tal que el grado de $P(x)$es mayor o igual que el grado de $Q(x)$, y $Q(x)$ no es nulo, entonces existen y son únicos dos polinomios $C(x)$y $R(x)$, cociente y resto, respectivamente, tales que:

$$P(x)\;=\;Q(x)\;\cdot C(x)\;+\;R(x).$$

Dividendo	$P(x)$	$Q(x)$	Divisor
Resto	$R(x)$	$C(x)$	Cociente

Donde $\mathrm{R(x)=0}$ ó $\mathrm{gr[R(x)]} < gr\mathrm{[Q(x)]}$

Ordenamos de forma decreciente y completamos los polinomios dividendo y divisor, si no lo están. Siempre debes completar el polinomio dividendo, no lo olvides.

Veamos esto a través de un ejemplo:

Sean los polinomios $P(x) = 8x^4 - 6x^2 + x$ y $Q(x) = 2x^2 - 3$. Realicemos la división $P(x): Q(x)$.

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1) Escribimos ambos polinomios en forma decreciente. Si los polinomios no son completos agregamos los términos faltantes.

$$\begin{array}{r|l} 8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + x + 0 & 2x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

2) Calculamos el cociente entre el término principal de $P(x)$ y el del divisor $Q(x)$. En este caso resulta $8x^4 : 2x^2 = 4x^2$. Multiplicamos este cociente por el divisor y lo restamos del polinomio $P(x)$:$P(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + x + 0 & 2x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2} -8x^4 + 0x^3 + 12x^2 \qquad & 4x^2 \\ \cline{1-1} 6x^2 + x + 0 & \end{array}$$

3) Calculamos ahora el cociente entre el término de mayor grado de la resta y el divisor $Q(x)$. En el ejemplo tenemos $6x^2 : 2x^2 = 3$. Multiplicamos el divisor por este cociente y lo restamos al polinomio que obtuvimos en el paso anterior.

$$\begin{array}{r|l} 8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + x + 0 & 2x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2} -8x^4 + 0x^3 + 12x^2 \qquad & 4x^2 + 3 \\ \hline 6x^2 + \quad x + 0 & \\ -6x^2 + 0x + 9 & \\ \hline x + 9 & \end{array}$$

El cálculo termina aquí porque el grado del polinomio resto que resulta, luego de realizar el último paso, es menor que el grado del polinomio divisor.

El cociente de la división es $C(x) = 4x^2 + 3$y el resto es $R(x) = x + 9$. Tenemos entonces que $P(x) = (2x^2 - 3).(4x^2 + 3) + x + 9$.

Al dividir el polinomio $P(x)$ por $Q(x) = 2x^2 - 3$ se obtiene el polinomio cociente $C(x) = x^2 - x + 1$ y el resto que resulta es $R(x) = 3x - 2$. ¿Cuál es la expresión del polinomio dividendo?

Actividad:

Hallá el cociente y el resto de la división entre:

$P(x) = -4x^3 + 3x^2 + 6x^4 - 5$ y $Q(x) = x - 2$.

Al resolver la división: ¿qué obtuviste como resto?

……..

Observemos que al dividir un polinomio $P(x)P(x)$ por un polinomio de la forma $(x - a)$ con $a \in \Re$ obtenemos un polinomio cociente $C(x)$ y un polinomio resto $R(x)$, tal que:

$$P(x) = (x - a).C(x) + R(x)$$

donde el grado de $R(x)$ es menor al grado de $(x - a)(x - a)$, es decir, $R(x)$ es una constante .

Raíces de un polinomio

Un número real a es una ***raíz*** de un polinomio $P(x)$ sí y solo sí el polinomio se anula para ese valor. Es decir,

$$a \ \text{es raíz de} \ P(x) \ \text{sí y sólo sí} \ P(a) = 0$$

Ejemplo: 2 es raíz del polinomio $P(x) = x^5 - 4x^3$,
pues $P(2) = 2^5 - 4.2^3 = 0$.
También -2 es raíz de $P(x)$, pues $P(-2) = (-2)^5 - 4.(-2)^3 = 0$.
Pero 1 no es raíz de $P(x)$, pues $P(1) = -3 \neq 0$.

Regla de Ruffini

En el caso en que tengamos que dividir un polinomio $P(x)$ por uno de la forma $(x - a)$, los coeficientes del cociente $C(x)$ y el resto R (que es un número real) pueden calcularse utilizando la ***regla de Ruffini***.
¿Quién fue Ruffini? Realizá un buceo bibliográfico para investigar a este matemático.
………

A continuación, veremos paso a paso cómo hallar el cociente y el resto de dividir el polinomio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$ por $Q(x) = x - 3$ aplicando el método de Ruffini.
Escribimos el polinomio $P(x)$ en forma decreciente y completamos el polinomio, si es que no lo está.

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5$$

Como el divisor es $Q(x) = x - 3$, tomamos el valor $a = 3$. Debido a que 3 es raíz de Q(x), es decir es el valor que anula dicho polinomio.
Realizamos la división con la ayuda de una tabla en la que colocamos en la primera fila los coeficientes del polinomio $P(x)$ y a la izquierda de la línea vertical colocamos el valor de a. A continuación describimos los cálculos que se realizan para completar la tabla y hallar así el cociente y el resto de la división.

1. El primer coeficiente de $P(x)$; que en este caso es 2 se reescribe en la tercer fila, luego se multiplica por a y el resultado se coloca debajo del segundo coeficiente de $P(x)$:

	2	−7	0	5
3		**6**		
	2			

2. Sumamos el segundo coeficiente con el valor que agregamos en el paso anterior y colocamos el resultado debajo de ambos en la tercera fila. Luego multiplicamos este último valor por *a* y colocamos el resultado en la segunda fila, debajo del tercer coeficiente de $P(x)$.

	2	-7	0	5
3		**6**	$-$**3**	
	2	$-$**1**		

3. Siguiendo los cálculos de esta manera, completamos la tabla.

	2	-7	0	5
3		**6**	$-$**3**	$-$**9**
	2	$-$ **1**	$-$**3**	**-4**

El último valor de la última fila de la tabla es el resto de la división, en este caso el resto es $R = -4$. Los demás valores son los coeficientes del polinomio cociente ordenados en forma decreciente. Así, en este ejemplo resulta: $C(x) = 2x^2 - x - 3$

.

Finalmente encontramos:

$$P(x) = (2x^2 - x - 3)(x - 3) - 4$$

Recuerda que al dividir un polinomio de grado *n* por otro de grado *1*, se obtiene un polinomio cociente de grado *n-1.* En este ejemplo hemos dividido un polinomio de grado 3 por otro de grado 1, por lo tanto el polinomio cociente es de grado 2.

Teorema del resto.

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ y un binomio de la forma $(x - a)$ es igual al número que se obtiene al reemplazar la indeterminada x en el polinomio $P(x)$ por el número a, es decir, $P(a) = R$.

Aplicamos el Teorema del Resto para verificar el resto de la división encontrado en el ejemplo anterior,

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 5$$
$$= 54 - 63 + 5 = -4$$

Actividad.

Realizá las dos divisiones siguientes aplicando el método de Ruffini para encontrar el resto y el cociente, luego verificá el resto encontrado con el Teorema del Resto.

1) $(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1) : (x - 1)$

2) $(4x^3 + 4x^2 + x + 75) : (x + 3)$

Solución:

Divisibilidad de polinomios:

Cuando el resto de una división es cero, se dice que **el dividendo es múltiplo del divisor** y también, que **el dividendo es divisible por el divisor** o que **el divisor es un factor del dividendo**. En el ejemplo 2, el polinomio dado es divisible por $(x + 3)$ porque el resto es cero.

De forma general, cuando un polinomio $P(x)$ es divisible por otro $Q(x)$, se escribe: $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$.

Para repasar lo dado hasta aquí:

(1) Dados los siguientes polinomios:

$A(x) = -x^2 + 3x^3 + 5x - x^6$

$B(x) = x^2 - 2x^5 + x^4 - x$

$C(x) = 2x^3 - 9x^2$

$D(x) = -4x$

Efectuá las operaciones, indicando el grado del polinomio resultante.

a) $[A(x) + B(x)]\,.C(x)$

b) $3B(x) - D(x)\,.C(x)$

c) $C(x) - [D(x)]^2$

d) $x[C(x)]^2 - B(x) - 6x^2$

(2) Resolvé las operaciones indicadas con polinomios:

1) $\left(5x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{4}{5}x^3 + 3x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}\right)$

2) $\left(3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x^2 - 1\right)$

3) $(0{,}5x^2 - x + 1{,}2) \cdot (1{,}2x - 0{,}9)$

4) $\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 16x - 4\right) : \left(\frac{1}{2}x + 3\right)$

(3) Hallá el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ al dividir $A(x)$ por $B(x)$ y expresá cada polinomio como $A(x) = B(x).\,C(x) + R(x)$. Cuando sea posible, aplicá la regla de Ruffini.

1) $A(x) = 6x^6 + x^5 + 18x^3 - 2x - 8 \quad B(x) = 2x^2 - x + 1$

2) $A(x) = 4x^5 - 3x^2 - x^4 \quad B(x) = 2x^2 - x$

3) $A(x) = 6x^7 - 2x^6 - x^4 + x \quad B(x) = x - 14$

4) $A(x) = -2x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 \quad B(x) = x + 3$

(4) Determiná el resto de la división de los polinomios $P(x) = x^3 - 3x + 2 \;\; y \;\; Q(x) = x - 1$.

(5) Ídem al anterior pero ahora tomando como divisor $T(x) = x + 2$.

(6) Indicá si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ o por $T(x)$ en base a los ejercicios (4) y (5).

(7) Calculá el valor de k en el polinomio $P(x) = -2x^4 + kx^3 - 3x - 2$, sabiendo que el resto de dividir $P(x)$ por $x + 2x + 2$ es 4.

(8) ¿Para qué números reales m el resto de dividir el polinomio $P(x) = 3x^2 + 9x - 26$ por $(x - m)$ es 4?

(9) Determiná el polinomio que, dividido por $5x^2 - 1$ da como cociente $2x^2 + x - 2$ y resto $x - 2$.

(10) Encontrá los valores de a, b, c y d sabiendo que:
1) $a + (a - b)x + (b - c)x^2 + dx^3 = 8 + 12x + 5x^3 - 10x^5$
2) $ax^3 + (a + b)x^2 + (a - c)x + d = 12x^3 - 3x^2 + 3x - 4$

(11) Determiná si la primera expresión es divisor de la segunda.
$a)$ $x - 2;$ $\quad x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 24$
$b)$ $x - 5;$ $\quad x^3 + 2x^2 - 25x - 50$
$c)$ $x + \frac{3}{2};$ $\quad 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 12$

(12) Probá que $x - b$ es factor de los binomios $x^5 - b^5$; $x^6 - b^6$; $x^7 - b^7$ y encontrá el cociente correspondiente mediante la regla de Ruffini.

Factorización de polinomios.

Factorizar un polinomio $P(x)$ significa escribirlo como una multiplicación entre el coeficiente principal y factores de la forma $(x - c_n)$, en donde c_n son las raíces de $P(x)$.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0x^0$ es un polinomio de enésimo grado con $n \geq 0$, entonces existen n números $c_1; c_2; c_3; \ldots; c_n$ no necesariamente distintos, tales que:

$$\boldsymbol{P(x) = a_n \cdot (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n)}$$

Las letras c_n indican las raíces de $P(x)$.

Un valor $c \in \Re$ es una raíz de un polinomio $P(x)$, si el valor numérico de $P(x)$ evaluado en c es cero; es decir si $P(c) = 0$. Podemos pensar entonces a la raíz c como una solución de la ecuación $P(x) = 0$ y utilizar las herramientas de la unidad anterior para hallar las raíces de un polinomio.

Hay una manera en la que se puede decir que hay exactamente $\boldsymbol{n}$ raíces, en donde c es una ***raíz de multiplicidad*** $\boldsymbol{k}$ de $P(x), si$ $(x - c)$ aparece $\boldsymbol{k}$ veces en su factorización completa.

Por ejemplo en $P(x) = 3(x - 5)^2(x + 4)(x - 3)^3$

Las raíces $5, -4, 3$ tienen multiplicidad $2, 1$ y 3 respectivamente. Una raíz de multiplicidad 1 (*k = 1*) se denomina ***raíz simple***.

Si tenemos un polinomio expresado de la forma:
$P(x) = 2.(x-2).(x-3)^3.(x+3)$

Inmediatamente, podemos concluir que las raíces de $P(x)$ son:

$x_1 = 2$, con k = 1 es raíz simple

$x_2 = 3$, con k = 3 es raíz triple

$x_3 = -3$, con k = 1 es raíz simple

Esto es así, dado que encontrar las raíces de $P(x)$ equivale a resolver la ecuación polinomial $P(x) = 0$ y

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2.(x-2).(x-3)^3.(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ (x-3)^3 = 0 \Leftrightarrow x=3 \\ x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \end{cases}$$

Es importante observar que no toda ecuación polinómica $P(x) = 0$ tiene solución en el conjunto de los números reales. Para este curso, en los casos en que no existan raíces reales, aceptaremos como factorizada la forma en que la que está dado el polinomio. Más adelante, continuaremos ampliando la factorización de polinomios al conjunto de los números complejos.

Les dejamos estos ejercicios para resolver aplicando lo visto hasta ahora.

- Encontrá las raíces del polinomio $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 9x^2 - x + 3$ sabiendo que $x_1 = -1$ es una raíz de dicho polinomio.
- Determiná el polinomio mónico de grado mínimo con coeficientes reales que tenga como raíz simple $x_1 = 2$ y como raíz doble a $x_2 = -5$.
- Calculá las raíces reales del polinomio $P(x) = x^4 - x^2 - 2$.

Propiedad de Gauss.

Junto con la regla de Ruffini y el teorema del Resto, la propiedad de Gauss permite **encontrar todas las raíces racionales de un polinomio**, para poder expresar dicho polinomio de forma completamente factorizada.

Investigá: ¿Quién fue Gauss? ¿Cuáles son los aportes a la Matemática por los cuáles se lo reconoce?

....

....

El enunciado de la propiedad de Gauss es el siguiente:

Sea $P(x)$ un polinomio de grado *n*, con coeficientes enteros. Si $P(x)$ admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (siendo *p* y *q* coprimos), entonces p es divisor del término independiente y q es divisor del coeficiente principal.

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$.

El coeficiente principal es 1 y el coeficiente independiente es -30.

Por el enunciado de la propiedad de Gauss, las posibles raíces racionales (enteras y fraccionarias) son los cocientes que se obtienen de dividir el término independiente por el coeficiente principal.

$Divisores\ de\ \boldsymbol{p}: : \pm\mathbf{30}, \pm\mathbf{15}, \pm\mathbf{10}, \pm\mathbf{6}, \pm\mathbf{5}, \pm\mathbf{3}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{1}$

$Divisores\ de\ \boldsymbol{q}: \pm\mathbf{1}$

$Posibles\ raíces\ \dfrac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}: \pm\mathbf{30}, \pm\mathbf{15}, \pm\mathbf{10}, \pm\mathbf{6}, \pm\mathbf{5}, \pm\mathbf{3}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{1}$

Aplicamos el teorema del resto para determinar cuáles de todas estas posibles raíces, son raíces del polinomio $P(x)$.

Comencemos con $x = 5$

$P(5) = 5^3 + 4 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 - 30 = 125 + 100 - 55 - 30 = 140 \neq 0$ podemos asegurar que $x = 5$ no es raíz del polinomio $P(x)$.

Sigamos con $x = 3$

$P(3) = 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 - 30 = 27 + 36 - 33 - 30 = 0$ como $P(3) = 0$, podemos asegurar que 3 es raíz del polinomio $x_1 = 3$.

Por el método de Ruffini, realizamos la división de $P(x)$ por el divisor (ahora conocido) $(x - 3)$ para obtener el cociente $C(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -11 & -30 \\ 3 & & 3 & 21 & 30 \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{10} & \mathbf{0} \end{array}$$

Es decir que $R(x) = 0$ y el cociente $C(x) = x^2 + 7x + 10$, se puede escribir al polinomio $P(x)$ como $P(x) = (x - 3) \cdot C(x) + R(x)$ es decir:

$P(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 7x + 10)$

Podemos seguir probando con el resto de las posibles raíces, pero el polinomio $C(x) = x^2 + 7x + 10$ es de grado 2, es decir, podemos aplicar la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado para obtener las otras dos raíces faltantes (pues, el polinomio P(x) tendrá 3 raíces por ser de grado 3).

Luego, las raíces de $C(x) = x^2 + 7x + 10$ son $x_2 = -2\ y\ x_3 = -5$

Entonces el polinomio $P(x)$ queda completamente factorizado de la siguiente manera:

$$P(x) = (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x + 5)$$

Expresiones algebraicas racionales fraccionarias.

Para realizar las operaciones básicas de las expresiones racionales fraccionarias, se utilizan las mismas reglas que se usan para los números racionales. Ante todo, definiremos *mínima expresión de una expresión racional fraccionaria*.

Una expresión racional fraccionaria está en su ***mínima expresión*** cuando el numerador y el denominador no tienen ningún factor común (excepto el uno).

Por ejemplo $\dfrac{2x}{x+3}$ es la mínima expresión de $\dfrac{8x^3}{4x^3+12x^2}$, pues

$$\frac{8x^3}{4x^3+12x^2}=\frac{{}^2\cancel{8}\cancel{x^3}}{{}_1\cancel{4}\cancel{x^2}(x+3)}$$ podemos observar que el numerador y el denominador de la segunda expresión algebraica racional fraccionaria tienen factores comunes.

Para reducir una expresión racional a su mínima expresión se procede de la siguiente manera:
Se factoriza el numerador y el denominador y se simplifican los factores comunes.
Por ejemplo:

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}=\frac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)}=\frac{x+3}{x} \qquad con\ x\neq 0\,;x\neq -2$$

Observación: Al simplificar se debe excluir la división por cero, por lo tanto se restringen los valores de x que anulan el factor simplificado. En el ejemplo, excluimos los valores 0 y–2 para la *x*.
Mínimo común múltiplo de polinomios (mcm).
Dados dos o más polinomios, tal que cada uno se halla expresado como multiplicación de factores primos o irreducibles, decimos que el ***mínimo común múltiplo*** entre ellos es la multiplicación de los factores irreducibles comunes y no comunes considerados con su mayor exponente.
Ejemplo:
Calculamos el mínimo común múltiplo entre:
$x^2-4;\quad x^2+4x+4 \quad y \quad x^2-2x$
Al factorizar cada uno de ellos resulta:

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$
$$x^2+4x+4 = (x+2)^2$$
$$x^2-2x = x(x-2)$$

Entonces el mcm es: $x\,(x+2)^2(x-2)$.

Operaciones con expresiones algebraicas racionales fraccionarias

Adición y sustracción.
Para sumar o restar expresiones algebraicas racionales fraccionarias, se determina el mínimo común múltiplo entre los denominadores y se procede de igual manera que al sumar o restar números racionales.

Sea $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1} \qquad con \quad x\neq -1\ y\ x\neq 1$

Determinamos el mcm entre los denominadores, en este caso: $(x+1)(x-1)$.
Y efectuamos la operación de forma análoga a los números racionales:

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{2x-2+3x+3}{(x+1)(x-1)}=\frac{5x+1}{(x+1)(x-1)}$$

En el caso de la sustracción se procede en forma similar:

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{3x-2(x-1)}{x(x-1)}=\frac{3x-2x+2}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x(x-1)} \quad \textit{con } x\neq 0 \; y \; x\neq 1$$

Multiplicación.

Para multiplicar expresiones algebraicas racionales fraccionarias se procede igual que para multiplicar números racionales fraccionarios, es decir se multiplican los numeradores entre sí y se multiplican los denominadores entre sí.

$$\frac{x+1}{x-3}\cdot\frac{x}{x+2}=\frac{x(x+1)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x^2+x}{x^2-x-6} \quad \textit{con } x\neq 3 \; y \; x\neq -2$$

En algunos casos es conveniente obtener la mínima expresión del resultado:

$$\frac{2x+1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{10x+5}=\frac{(2x+1)(x^2-1)}{(x+1)(10x+5)}$$

$$=\frac{(2x+1)(x-1)(x+1)}{(x+1)5(2x+1)}$$

$$=\frac{x-1}{5} \quad ;\ \text{con} \quad x\neq -1; \quad x\neq -\frac{1}{2}$$

¿Te animás a justificar cada uno de los pasos realizados en el ejercicio anterior?

………
………
………

División.

Y para terminar, en la división (como con los números racionales fraccionarios), se multiplica a la primera expresión racional fraccionaria por el inverso multiplicativo o recíproca de la segunda expresión.

$$\frac{x^2-2x+1}{x+3}\div\frac{x^2-x}{x^2+x-6}=\frac{(x-1)^2}{x+3}\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{x(x-1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{x}; \quad x\neq 1;\, x\neq -3;\, x\neq 0$$

Justificá cada uno de los pasos realizados en el cálculo anterior.

………

RECORRIDO III: ECUACIONES E INECUACIONES

Objetivos:
- Afianzar los conceptos de ecuación e inecuaciones.
- Desarrollar autonomía en el planteo y la resolución de problemas.
- Desarrollar un aprendizaje constructivo de las desigualdades, a partir del uso de sus propiedades y en la realización de las actividades, sentido crítico y confianza en las capacidades idóneas.

Síntesis de contenidos:
En este capítulo estudiaremos las propiedades de las desigualdades, las ecuaciones, los sistemas de ecuaciones e inecuaciones. Los principales conceptos a desarrollar son:
- Ecuaciones.
- Ecuaciones polinomiales.
- Ecuaciones con valor absoluto.
- Ecuaciones racionales.
- Ecuaciones irracionales.
- Ecuaciones logarítmicas.
- Ecuaciones exponenciales.
- Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Desigualdades.
- Intervalos.

Para resolver problemas de cualquier índole, de la vida cotidiana, de las ciencias tales como: ingeniería, sociología, física, entre otras, se deben utilizar herramientas de modelización Matemática. Pero, ¿cuál es el significado de modelizar matemáticamente una situación problemática?
En términos sencillos, un modelo matemático es una representación gráfica o algebraica de una situación del mundo real, como la velocidad de una partícula, el crecimiento de una población, la concentración de un producto en una reacción química, etc.
Generalmente se utilizan las funciones como modelo ideal para representar y resolver problemas. Las ecuaciones son la herramienta para que, luego de modelizar el problema real, se calculen las posibles soluciones. Es muy importante la etapa de validación o comprobación de la solución hallada en el problema real.
Repasemos inicialmente los procedimientos para modelizar problemas con ecuaciones y sus resoluciones.

Lenguaje coloquial y simbólico.
Para poder plantear y resolver situaciones problemáticas es necesario manejar la equivalencia entre el lenguaje común o coloquial y el lenguaje algebraico. La tabla

siguiente muestra algunos ejemplos que sirven como punto de partida para plantear problemas.

LENGUAJE COLOQUIAL	LENGUAJE SIMBÓLICO
Un número cualquiera	x
La mitad de un número	$\frac{1}{2}x=\frac{x}{2}$
El triple de un número	$3x$
El siguiente de un número	$x+1$
El anterior del doble de un número	$2x-1$
El doble del anterior de un número	$2(x-1)$

La mayoría de los problemas matemáticos encuentran expresadas sus condiciones en forma de una o varias ecuaciones, ahora bien, ***¿qué es una ecuación?***

………

………

Como a una ecuación se la define como una igualdad de dos expresiones en donde aparece la incógnita, debemos repasar las propiedades de la igualdad:

Propiedades de la igualdad:

1) *Reflexiva*: Todo número real es igual a sí mismo: $\forall a \in \mathbb{R}: a = a$

2) *Simétrica*: $\forall a, b \in \mathbb{R}: a = b \Longrightarrow b = a$

3) *Transitiva*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a = b \ \wedge b = c \Longrightarrow a = c$

Las soluciones de una ecuación son los valores que al sustituirlos en las incógnitas hacen cierta la igualdad.

Las letras que figuran en una ecuación, y de cuyos valores depende que la igualdad verifique o no, se denominan ***incógnitas***.

¿Cómo procedemos para encontrar la solución (o las soluciones) de una ecuación? Para hacerlo, debemos estudiar una de las propiedades más importantes de la igualdad, ***la propiedad uniforme.***

Sean a, b y c números reales

- $Si\ a = b, entonces\ a + c = b + c\ \ ;\ \ \ a - c = b - c$
- $Si\ a = b, entonces\ a \cdot c = b \cdot c\ \ \ \ ;\ \frac{a}{c} = \frac{b}{c}\ c \neq 0$

Ecuaciones Equivalentes

Dos o más ecuaciones se denominan ***equivalentes*** cuando admiten las mismas soluciones. Por ejemplo, la ecuación $2x-4=x+1$ y la ecuación $x-3=2$, son equivalentes, pues tienen solución común $x=5$ y esta es la única solución que admite cada una de ellas.

TIPO DE LAS ECUACIONES.

1) Ecuación polinomial de grado uno o lineal

Una ecuación cualquiera con una incógnita se dice de ***primer grado*** o ***lineal,*** cuando el mayor grado con que figura la incógnita es uno.

Hallá si existe, la solución de la ecuación $2x+3 = 5$. Para resolver la ecuación dada anteriormente, se procede de la siguiente manera:

$$2x+3=5$$
$$2x+3-3=5-3$$
$$2x=2$$

→ Sumando el opuesto de un número en ambos miembros, no se modifica la igualdad. ¿Por qué?

$$\frac{1}{2}2x=\frac{1}{2}2$$
$$x=1$$

→ Multiplicando por el recíproco de un número distinto de cero, no se modifica la igualdad. ¿Es válido para un número negativo?

Para comprobar que el valor encontrado es solución de la ecuación, es decir que ese valor hace verdadera a la igualdad, realizamos el siguiente procedimiento de verificación.

$Primer\ miembro$: $2\cdot 1+3 = 2+3=5$

$Segundo\ miembro$: 5

Como ambos miembros de la igualdad dan el mismo valor $5=5$, aseguramos que $x = 1$ es solución de la ecuación y lo escribimos $S=\{5\}$.

Para repasar lo dado hasta aquí:

(1) Resolvé las siguientes ecuaciones. Indicá si tienen una, infinitas o no tienen solución. Realizá la verificación cuando encontrés el valor de la incógnita.

a) $\frac{3}{2}x-2{,}5=5+\frac{1}{4}\mathrm{x}$; b) $2x-5=4\left(\frac{1}{2}x+3\right)$;

c) $\frac{3}{2}x+1=3\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)$; d) $x-\frac{x+2}{3}=6$;

e) $\frac{3x-1}{20}-\frac{2.(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$

(2) Un pequeño avión tarda 7 horas más que otro en ir de A a B. Las velocidades de los dos aviones son 660 km/h y 275 km/h. Calculá la distancia entre A y B. (Extraído de Problemas OMA)

(3) Un químico tiene 10 ml de una solución que contiene 30% de concentración de ácido. ¿Cuántos ml de ácido puro deben agregarse para aumentar la concentración al 50%?

(4) Un farmacéutico debe preparar 15 ml de unas gotas para los ojos de un paciente con glaucoma. La solución de las gotas debe contener 2% de un ingrediente activo,

pero el farmacéutico sólo tiene una solución al 10% y otra al 1%, en su almacén. ¿Qué cantidad de cada tipo de solución debe usar para preparar la receta?

2) Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver la ecuación $|x-1| = 2$, aplicamos la definición de valor absoluto:

$$|x-1| = 2$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$x-1=2 \ \vee \ x-1=-2$$
$$x=2+1 \qquad x=-2+1$$
$$x=3 \quad \vee \ x=-1$$

La solución de esta ecuación está formada por dos números reales $S=\{3;-1\}$.

Recordemos que la interpretación geométrica del valor absoluto de un número representa la distancia entre cero y dicho número. Ahora bien, si queremos analizar la distancia al número 1 (centro), significa que las soluciones 3 y -1 distan dos unidades (radio) del valor 1.

A continuación realizaremos la verificación e interpretación en la recta numérica:

……

……

……

……

(1) Resolvé las siguientes ecuaciones con valor absoluto, escribí el conjunto solución y su interpretación:

(1) $|2x-1| = 6$

(2) $\left|\frac{1}{2}x+3\right| = 1$

(3) $|3-4x| = 10$

(4) $|-2(x+2)| + |x+2| = 6$ Sugerencia: aplicá propiedades del valor absoluto.

(5) $|2x-3| - \sqrt[6]{(-3)^6} = 7$

3) Ecuaciones polinomial de grado dos o cuadrática

Comenzá resolviendo estas ecuaciones:

$5x^2-8=12$

$3x^2-3=46-4x^2$

Observá que en las ecuaciones anteriores se pudo despejar la incógnita x sin mayor dificultad. Ahora miremos las ecuaciones que están a continuación y veamos si es posible realizar el mismo procedimiento:

$6x^2-5x+1=0$

$9x^2+6x+1=0$

$x^2-x+1=0$

$5x^2 + 3x = 0$

Si observamos en cada una de ellas la incógnita x está en dos términos y con distinto exponente, lo que significa que el trabajo de despejar se hace más complejo.

Formalicemos:

La forma general de una ecuación cuadrática o de segundo grado es:

$ax^2 + bx + c = 0$, *donde a, b y c son números reales y* $a \neq 0$

a: coeficiente del término cuadrático

b: coeficiente del término lineal

c: término independiente o constante

Para resolver este tipo de ecuaciones deberemos primero llevarlas a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y luego observar que, encontrar las soluciones para esta ecuación, es equivalente a encontrar las raíces del polinomio de segundo grado del primer miembro.

La siguiente fórmula se conoce con el nombre de ***resolvente***:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y las raíces son:} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Si en la ecuación falta alguno de los términos a excepción de *a*, se puede utilizar esta fórmula colocando 0 donde va el coeficiente ausente o bien recurrir a procedimientos ya conocidos, cómo lo hicimos al comienzo, utilizando la definición de valor absoluto. También, si no posee el término independiente se puede utilizar la estrategia de extraer factor común y hallar, de esa forma, las raíces.

(1) Resolvé las ecuaciones y determiná la naturaleza de las raíces:

1) $20x^2 + 7 = 33x$

2) $4x(x-6) = -9$

3) $3x^2 = 2(x+4)$

4) $9x^2 = -4x$

(2) Hay muchos problemas relacionados con la vida cotidiana y con otras disciplinas que conducen a ecuaciones cuadráticas y que, para resolverlos se deben encontrar las raíces de la ecuación. Inténtalo:

a) Se va a fabricar una caja de base cuadrada y sin tapa, con una hoja cuadrada de estaño, cortando cuadrados de 3 pulgadas de cada esquina y doblando los lados. Si la caja debe tener 48 pulgadas cúbicas, ¿qué tamaño debe tener la hoja que se va a usar?

b) Se rodea por un camino de ancho uniforme un terreno rectangular de dimensiones 26 m por 30 m. Se sabe que el área del camino es 240 m^2, determiná el ancho del camino.

c) La temperatura t (en ºC) a la que hierve el agua está relacionada con la altitud o elevación h (en metros sobre el nivel del mar) mediante la fórmula:

$$h = 1000.(100-t) + 580(100-t)^2$$

1) ¿A qué altitud hierve el agua a una temperatura de 98ºC?
2) El Monte Everest tiene una altura de 29.000 pies (8.840 m). ¿A qué temperatura hervirá el agua en la cima de esta montaña? (Sugerencia: hacer $100 - t = x$ en la fórmula y utilizar la resolvente.)

d) El Centro de Estudiantes de la Facultad de Ciencia y Tecnología está planificando la tirada de una revista trimestral. Para ello le pidió a un diagramador que defina las dimensiones de la revista teniendo en cuenta una serie de restricciones. El largo debe ser 10 cm mayor que el ancho y la superficie de cada página debe ser de 600 cm^2. ¿Cuáles son las medidas que obtuvo el diagramador?

4) Ecuaciones polinomiales de grado mayor que dos.

Algunos ejemplos de ecuaciones pueden ser:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ y $4x^3 + 12x^2 - 9x - 27 = 0$ ecuaciones polinómicas de grado tres. A estas ecuaciones puedes resolverlas teniendo en cuenta la factorización de polinomios, o los temas que están desarrollados en el recorrido anterior. Te sugerimos que lo estudies y después vuelves a resolverlas.

Cuando las resuelvas, encontrarás que las soluciones de la primera ecuación son 1; -2 y –1 y de la segunda ecuación: $\frac{3}{2}$; -3 y $-\frac{3}{2}$.

Una ecuación de este tipo tiene grado cuatro y se llama **bicuadrada**: $x^4 + x^2 - 6 = 0$. Se puede resolver recurriendo a una sustitución de variables por ejemplo $u = x^2$, entonces la ecuación de grado cuatro se reduce a una de grado dos, veamos:

$u^2 + u - 6 = 0$, al aplicar la fórmula resolvente obtenemos $u_1 = 2$ y $u_2 = -3$, pero debemos encontrar los valores de x que satisfagan la ecuación, entonces procedemos así:

Como $u = x^2$, tenemos:

$x^2 = 2$, o sea que $x = \pm\sqrt{2}$,

$x^2 = -3$, o sea que $x = \pm\sqrt{-3}$ determina las raíces complejas conjugadas: $\sqrt{3}i; -\sqrt{3}i$

Entonces hay cuatro soluciones posibles, dos reales y dos complejas conjugadas: $S = \{\pm\sqrt{2};\ \pm\sqrt{3}i\}$

Desafío: Verificá la ecuación con las cuatro raíces obtenidas.

Encontrá las soluciones de las siguientes ecuaciones:
1) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
2) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$

5) Ecuaciones racionales fraccionarias.

Se dice que una ecuación es ***racional fraccionaria*** cuando, por lo menos, una de las incógnitas figura en el divisor.

Antes de resolver una ecuación racional fraccionaria hay que tener en cuenta los valores que anulan los denominadores y a las expresiones racionales que figuren como divisores. Esto se conoce como establecer las **restricciones de la incógnita**. Luego, se hacen las simplificaciones, se aplican propiedades y se resuelven operaciones necesarias para despejar la incógnita.

Ejemplo:

$$\frac{x^2-5x+4}{8-x}=5$$

Como $x=8x=8$ anula al denominador de la expresión del primer miembro, 8 8 es una restricción, $\boldsymbol{x \neq 8x \neq 8}$

$$\frac{x^2-5x+4}{8-x}=5$$

$$x^2-5x+4=5(8-x)$$

$$x^2-5x+4=40-5x$$

$$x^2-5x+4-40=40-5x-40$$

$$x^2-5x-36=-5x$$

$$x^2-5x-36+5x=-5x+5x$$

$$x^2-36=0$$

$$x^2-36+36=36$$

$$x^2=36 \qquad\qquad x^2=36$$

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{36}$$

$$|x|=6$$

6 y -6 son soluciones a la ecuación racional fraccionaria. $S=\{6,-6\}$.

Verificá, a continuación, que los valores encontrados son soluciones de la ecuación.

………

Resolvé las siguientes ecuaciones, da la condición de restricción y expresá el conjunto solución.

1) $\dfrac{2x-1}{x}=\dfrac{x}{-3x+4}$

2) $\dfrac{x}{x+60}=\dfrac{7}{3x-5}$

3) $\dfrac{2x+1}{x+3}=1+\dfrac{x+3}{x-1}$

4) $\dfrac{x+4}{x-4}-\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{(2x)^2}{x^2-16}$

5) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{7-2x}{x+2}$

6) $\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{x^2-1}{x^2}=5-\dfrac{5x+1}{x}$

7) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{3}{x^2+6x+9}=1$

8) $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x-7}=\dfrac{7}{(x-3)(x-7)}$

9) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}$

10) $\dfrac{3x}{x-2}=1+\dfrac{6}{x-2}$

6) Ecuaciones irracionales.

Se dice que una ecuación es ***irracional*** cuando por lo menos una incógnita es parte del radicando.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{x^2-1}=2$

Elevamos al cubo ambos miembros:

$\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^3=2^3$ se simplifica, sin existir ninguna restricción

$x^2-1=8$ se resuelve la ecuación resultante, que en este caso ha quedado una ecuación cuadrática que, por lo estudiado anteriormente, al resolverla, se obtienen dos raíces.

$x^2=9$ y las soluciones son +3 y –3.

Verificación:

………

………

……….

Es importante que siempre realicen la verificación de este tipo de ecuaciones.

Intentá resolver las siguientes ecuaciones: 1) $\sqrt{7-5x}=8$ 2) $\sqrt{2x+15}-2=\sqrt{6x+1}$ 3) $2+\sqrt[3]{1-5x}=0$

7) Ecuaciones logarítmicas.

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas que tienen la incógnita en el argumento o en la base del logaritmo.

Veamos algunos ejemplos para que comprendas el procedimiento de resolución, recuerda:

1) La definición de logaritmación:

$$\log_b a=n \Leftrightarrow b^n=a \quad con \quad b,a\in\Re, \quad b>0, \quad b\neq 1 \quad y \quad a>0$$

2) Las propiedades de la logaritmación estudiadas en el Recorrido I.

3) Siempre que sea posible expresar ambos miembros como un solo logaritmo de igual base para aplicar la propiedad:

$$\log_b a=\log_b c \Rightarrow a=c$$

4) Que sólo existen logaritmos de números positivos, por eso **es fundamental la verificación** en este tipo de ecuaciones.

- $\log_5(2x-1)=2$ aplicamos la definición de logaritmo:

$2x-1=5^2$ y resolvemos la ecuación:

$x=\dfrac{25+1}{2}$; $x=13$

Verificación:

………
………
………

- $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$ aplicamos propiedades de la logaritmación:

$\log_3 x(x+2) = 1$, aplicamos la definición de logaritmo:

$$x(x+2) = 3^1$$

$x^2 + 2x - 3 = 0$ y resolvemos la ecuación cuadrática.

Luego: $x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = -3$

Verificación:

………
………
………

Resolvé las siguientes ecuaciones, sin olvidar la verificación y escribí el conjunto solución:

1) $2\log_3 x - \log_3(x+6) = 1$
2) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) - \log_2 8 = 0$
3) $\ln(x-1)^2 = \ln 2 + \ln(x-1)$
4) $\log_4(x^2+7) = 2$

8) Ecuaciones exponenciales.

Recordamos que las ecuaciones exponenciales son aquellas que tienen la incógnita en el exponente.

Para resolverlas debemos considerar:

1) Siempre que sea posible, es conveniente expresar ambos miembros como potencias que tengan igual base, para aplicar la siguiente propiedad:

$b^x = b^m \Rightarrow x = m$

2) Es posible utilizar la definición de logaritmo y las propiedades de la logaritmación para despejar la incógnita que figura en el exponente.

Veamos un ejemplo:

$$4^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$$

Tratemos de expresar ambos miembros como potenciaciones de base 2.

$(2^2)^{x-1} = (2^{-1})^{3x}$ aplicamos propiedades de la potenciación

$2^{2x-2} = 2^{-3x}$, como las bases son iguales entonces los exponentes también lo son:

$2x - 2 = -3x$, despejando resulta:

$$x = \frac{2}{5}$$

Verificación:

……

……

Resolvé las siguientes ecuaciones exponenciales e indicá el conjunto solución:

1) $\sqrt{5^x} = 5.\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$ 2) $9^{2x-5} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5x-2}$ 3) $3^{x-5} = 2^{5x+1}$

9) Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Se denomina ***sistema*** de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas a dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una, que deben admitir de manera simultánea las mismas raíces. Estas raíces que son comunes a ambas ecuaciones, de forma simultánea, constituyen la ***solución del sistema.***

Se indica que dos ecuaciones forman un sistema, abarcándolas con una llave. Por ejemplo, para indicar que la ecuación $x+y=8$ y la ecuación $x-y=2$, forman un sistema se escribe de la siguiente manera: $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$, se observa que los valores $x=5 \;\; e \;\; y=3$ satisfacen las dos ecuaciones, pues la suma de esos números es 8 y su diferencia es 2, por lo tanto, la solución del sistema es: $S=\{(5;3)\}$

Métodos para la resolución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Método de sustitución:

1. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema.
2. Se ***sustituye*** en la otra ecuación dicha incógnita por la expresión obtenida. De ahí, el nombre de ***método de sustitución***.
3. Se resuelve la ecuación con una incógnita, que así resulta.
4. Esta incógnita se reemplaza por el valor obtenido en la primera ecuación y se calcula su valor.

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ \frac{3}{2}x-2y=5 \end{cases} \Rightarrow \quad y=3-2x \quad ,se \quad despeja$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}x-2(3-2x)=5, \quad se \quad sustituye$$

$$\frac{3}{2}x-6+4x=5, \quad se \quad resuelve$$

$$x=2 \quad e \quad y=-1$$

Verifica en alguna de las dos ecuaciones del sistema, los valores de x y y encontrados.

……

……

Solución de este sistema de ecuaciones es :
$S = \{(2;-1)\}$

Método de igualación:

1. Se despeja una de las incógnitas en las dos ecuaciones del sistema.
2. Se ***igualan*** las expresiones obtenidas. De ahí, el nombre de ***método de igualación***.
3. Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.
4. Se reemplaza el valor obtenido de esta incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas, y se obtiene el valor de la otra incógnita.

$$\begin{cases} x+3y=10 & \Rightarrow \quad x=10-3y \quad se \quad despeja \\ 2x-y=4 & \Rightarrow \quad x=\frac{4+y}{2} \quad se \quad despeja \end{cases}$$

Observemos que los primeros miembros son iguales entre sí, por lo que los segundos miembros también son iguales entre sí:

$$10-3y=\frac{4+y}{2} \quad se \quad igualan \quad ambos \quad miembros \quad y \quad se \quad resuelve$$

$$y=\frac{16}{7} \quad y \quad x=\frac{22}{7}$$

Verifica en alguna de las dos ecuaciones del sistema, los valores de x y y encontrados.

……

……

Solución de este sistema de ecuaciones:
$S = \left\{\left(\frac{22}{7};\frac{16}{7}\right)\right\}$

Para repasar lo dado hasta aquí:

1) Resolvé los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-y=9 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x-y=13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-4y=-7 \\ x+8y=-1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -3x-4y=5 \\ -x-2y=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -2x-4y=18 \\ x+5y=-36 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x-5y=19 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+2y=-12 \\ 3x-y=-1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x-3y=-14 \\ 9x+5y=28 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3x-2y=-12 \\ 5x+4y=2 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 5x-3y=22 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

10) DESIGUALDADES.

Propiedades de orden:

Una relación de orden es una vinculación que pretende formalizar la idea intuitiva de ordenación de los elementos de un conjunto, es decir que ayuda a la creación del orden del mismo. El símbolo “<”, que se lee “es menor que” y el símbolo “>”, que se lee “es mayor que” nos ayudarán para expresar el orden en el conjunto de los números.

Entre dos números reales *a* y *b* puede darse una y sólo una de estas tres relaciones:

$$a<b \qquad ó \qquad a=b \qquad ó \qquad a>b$$

Observación:

- Vemos que si el número *a* es menor que el número b, está situado a su izquierda en la recta numérica.
- $a<b$ si $b-a$ es positivo.
- Asociadas a las anteriores, existen otras dos relaciones que se leen: *“menor o igual”: ≤.* y *“mayor o igual”: ≥*

Propiedades de las desigualdades

1. *Transitividad:* Si $a<b \;\; y \;\; b<c$, entonces $a<c$.

En la representación en la recta numérica significa que si *a* está a la izquierda de *b* y *b* a la izquierda de *c*, entonces *a* está ubicado a la izquierda de *c*.

2. Adición: Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$. *¿Puedes decir qué significa gráficamente?*

3. *Multiplicación:* Si $a<b$ y $c>0$, entonces $a.c<b.c$
Si $a<b$ y $c<0$, entonces $a.c>b.c$

De las propiedades anteriores se deduce que:

Si $a>0$ entonces $\frac{1}{a}>0$

Sean a y b son ambos positivos o ambos negativos, se cumple que:

Si $a < b$ entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Te brindamos este espacio para que presentes un ejemplo para cada una de las propiedades de las desigualdades enunciadas más arriba.

………
………
………

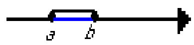
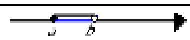
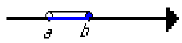
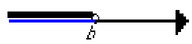
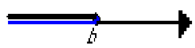
11) INTERVALOS.

Un subconjunto de la recta real se denomina **intervalo,** y contiene a todos los números reales que están comprendidos entre dos de sus elementos.

Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales que están comprendidos entre –3 y 8 es un intervalo, se indica:$\{x \in \mathbb{R}/-3 < x < 8\}$.

(Observa que x es simultáneamente mayor que -3 y menor que 8).

En la tabla siguiente se resumen los tipos de intervalo y su representación geométrica:

	Nombre del intervalo	**Notación de intervalos**	**Notación conjuntista**	**Gráfica**
Finitos	Abierto	(a ,b)	$\{x / a < x < b\}$	
	Cerrado	[a ,b]	$\{x / a \leq x \leq b\}$	
	Semicerrado a la izquierda	[a ,b)	$\{x / a \leq x < b\}$	
	Semicerrado a la derecha	(a ,b]	$\{x / a < x \leq b\}$	
Infinitos	Abierto a la izquierda	(a ,∞)	$\{x / x > a\}$	
	Semicerrado a la izquierda	$[a, \infty)$	$\{x / x \geq a\}$	
	Abierto a la derecha	$(-\infty, b)$	$\{x / x < b\}$	
	Semicerrado a la derecha	$(-\infty, b]$	$\{x / x \leq b\}$	
	Infinito	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de números reales)	

Dadas las siguientes desigualdades de números reales, podemos hallar el conjunto solución, teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades y las expresiones dadas en el cuadro anterior, observá:

$x \leq 8 \quad \wedge \quad x > 5$ pueden escribirse como una operación entre los conjuntos que representan a cada intervalo de la siguiente manera:

$(-\infty; 8] \cap (5; +\infty)$ resolviendo esta operación entre conjuntos, denominada ***intersección***, obtenemos:

$$(-\infty; 8] \cap (5; +\infty) = (5; 8]$$

Este intervalo solución $(5; 8]$ es el conjunto formado por todos los elementos ***x*** que estén en ambos intervalos $(-\infty; 8]$ y $(5; +\infty)$. Podemos escribir este intervalo con notación conjuntista de la siguiente manera:

$(5; 8] = \{x \in \Re \,/ 5 < x \leq 8\}$

La representación gráfica de este conjunto solución es:

- Observen el siguiente ejercicio:

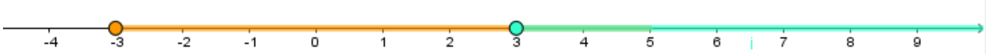
$-3 \leq x < 5 \lor x \geq 3$, pueden escribirse como una operación entre los conjuntos que representan a cada intervalo. Esta operación se denomina ***unión entre conjuntos***, obtenemos entonces:

$[-3; 5) \cup [3; \infty) = [-3; \infty)$

Este intervalo solución $[-3; \infty)$, está compuesto por todos los valores de x que están en $[-3; 5)$ o que están en $[3; \infty)$. Podemos escribir este intervalo con notación conjuntista de la siguiente manera:

$$[-3; \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -3\}$$

Su representación gráfica es:



Efectuá las siguientes operaciones entre conjuntos y obtené el intervalo solución. Luego representalo gráficamente.

1) $-2 < x < 7 \land 0 < x < 6$
2) $4 \leq x < 10 \lor x \geq 9$
3) $x < -\frac{1}{2} \land x \geq 3$
4) $x \leq 8{,}5 \lor x \geq -3$

Para pensar…

¿Cómo resolverías las siguientes inecuaciones?

Explicá cada uno de los pasos realizados utilizando las propiedades de las desigualdades, representá el conjunto solución gráficamente y expresa la solución como intervalo.

a) $5x - 1 < x - 3$ b) $-\frac{x}{8} \leq 3x - 1$ c) $\frac{2}{x+3} \geq 3$

………

………

………

………

Resolvé las siguientes inecuaciones con valor absoluto, representá el conjunto solución en la recta numérica y expresá como intervalo.

a) $|x-2| \leq 5$ b) $|x-2| > 5$ c) $\left|5-\dfrac{1}{x}\right| < 3$

……
……
……
……

RECORRIDO IV: FUNCIONES

Encontrarás aquí temas vistos en la escuela secundaria, te recomendamos que investigues todos aquellos contenidos que son desconocidos, armá una lista y coméntalo en las clases presenciales, es de suma importancia que vayas a las clases con consultas. Lo más importante es:

- repasar los conceptos teóricos básicos necesarios para abordar cada unidad;
- leer en forma cuidadosa los ejercicios resueltos y
- consultar a los docentes del curso las dudas que se te presenten.

Objetivos:

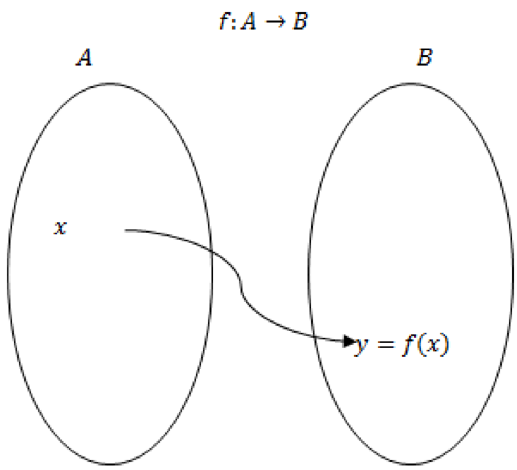
- Afianzar el concepto de función y su clasificación.
- Definir los elementos característicos de cada tipo de función.
- Analizar gráficas de funciones dadas por fórmulas y representadas por GeoGebra.

Síntesis de contenidos:

- Funciones
- Clasificación de funciones
- Funciones lineales
- Funciones cuadráticas
- Funciones exponenciales
- Funciones logarítmicas

Comencemos recordando el concepto de función.

Una función f es una relación entre los conjuntos A y B, llamados **conjunto dominio** y **codominio**, respectivamente, tal que cada elemento de A está relacionado con uno y solamente uno de los elementos de B.



$A = Domf$ dominio de la función.

$B = Codf$ codominio de la función.

Es necesario que todo elemento del primer conjunto se relacione con alguno del segundo y que este último sea único, es decir, que en la definición de función están implícitas las condiciones de **existencia** y **unicidad.**

Observá con atención la siguiente situación que describe la relación funcional entre los nombres de los hermanos Rodríguez y sus edades:

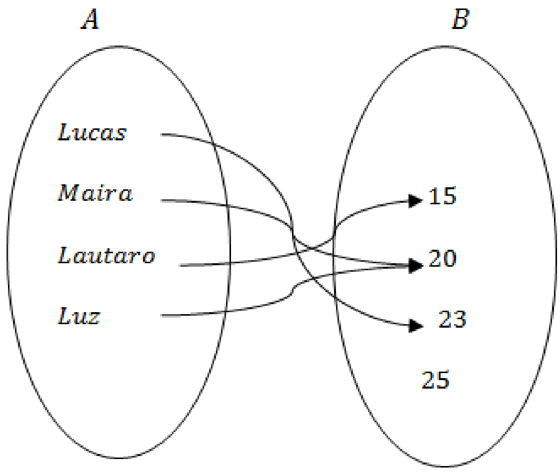
$$R = \{(Lucas; 23), (Maira; 20), (Lautaro; 15), (Luz; 20)\}$$

es una función, porque siendo:

$A = \{Lucas, Maira, Lautaro, Luz\}$ el conjunto formado por los nombres de los hermanos Rodríguez, denominado Dominio, a cada uno de estos elementos le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto o Codominio,

$B = \{15; 20; 23; 25\}$ que es el conjunto formado por las edades.

A esta función la podemos representar por medio de **diagramas de Venn**.

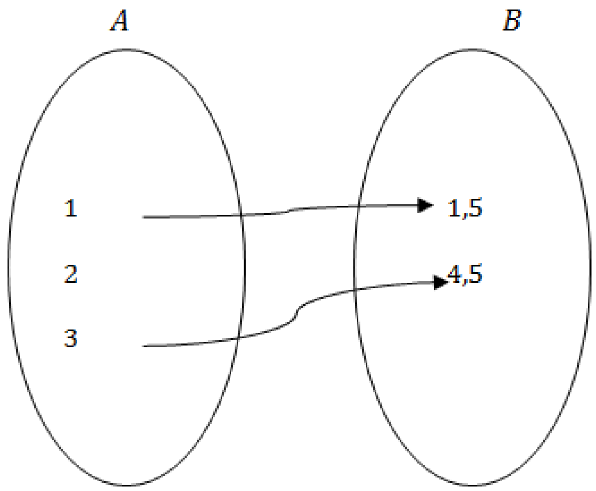


Podrán notar que, el conjunto codominio es el segundo conjunto, el conjunto B, pero los elementos 15, 20 y 23 son los únicos que están interviniendo en la relación. A estos elementos, se los denomina **imágenes** así, la imagen de Maira es 20, la de Lautaro es 15. Al conjunto formado por estos elementos se los denomina **conjunto imagen**.

Simbólicamente: $Imf = \{15; 20; 23\}$

El conjunto imagen puede ser igual al codominio o estar incluido en él. $Imf \subseteq Codf$

Fijate, la siguiente relación no es función, pues no todos los elementos del conjunto A está relacionado con algún elemento del segundo conjunto.



Sin embargo, la siguiente relación expresada como un conjunto de pares ordenados, si lo es.

$$R = \{(a, 1); (b, 10); (c, 100); (d, 1000)\}$$

¿Te animás a explicar por qué esta relación es funcional? Para hacerlo, usa previamente los diagramas de Venn.

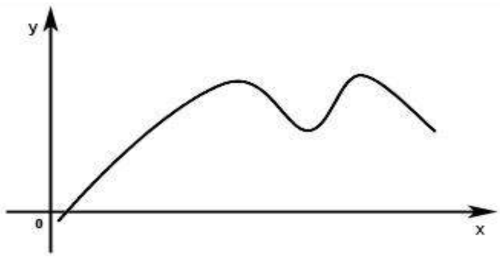
La relación funcional puede presentarse de distintas maneras:

a) Forma tabular: los datos se muestran en una tabla. Como, por ejemplo, la relación entre la temperatura ambiente medida en determinada hora del día.

Tiempo (h)	**Temperatura ambiente** (°C)
5	6
10	12
15	16
20	9

b) Forma analítica: con fórmulas, por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$; $y = x^2 - 6x + 2$; $g(x) = e^x + 1$

c) Forma gráfica, por medio de un sistema de ejes cartesianos.



d) O también mediante el **diagrama de Venn**, como ya lo hemos visto.

Los distintos valores que toman las magnitudes vinculadas (representadas por las variables ***x*** e ***y*** – ¡aunque hay que acostumbrarse a que las variables pueden indicarse con otras letras! – se representan sobre los ejes cartesianos ortogonales: **el eje de abscisas** (horizontal) y el de **ordenadas** (vertical). Existen otros sistemas de representación pero los verás oportunamente.

Clasificación de funciones.

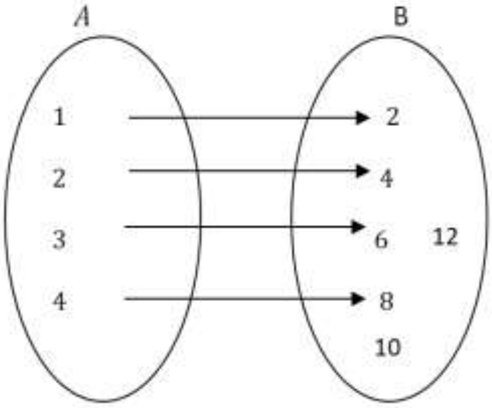
- **Función inyectiva**: una función $f: A \to B$ (se lee: ***f*** es una función definida del conjunto **A** en **B**), es inyectiva si elementos distintos del dominio, poseen siempre imágenes distintas.

Simbólicamente:

$\forall x_1, x_2 \in A;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

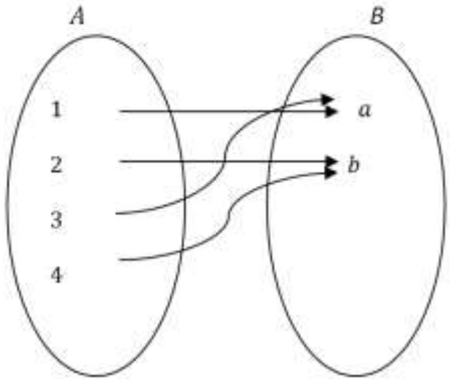
O bien: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow\ x_1 =\ x_2$

Veamos juntos un ejemplo de función inyectiva:



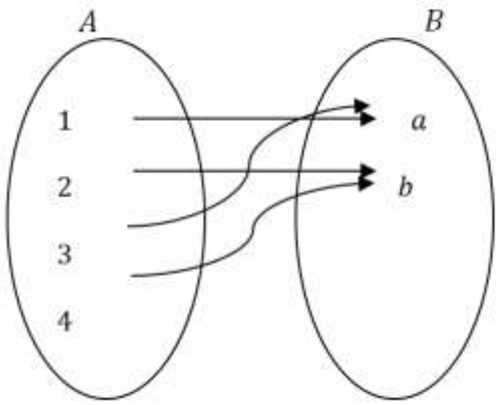
A cada elemento del dominio de la función se le hace corresponde una imagen que es única y no es imagen de otro elemento del dominio. Observá que hay elementos del codominio que no son imágenes de ningún elemento del dominio.

Sin embargo, la siguiente función no es inyectiva pues, a y b son imagenes de más de un elemento del dominio, es decir,

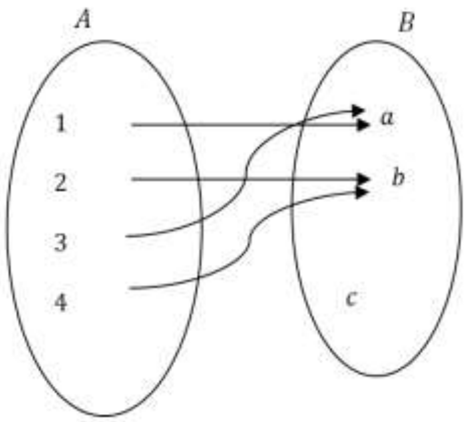


- **Función suryectiva:** una función $f: A \to B$ es suryectiva si todo elemento del codominio posee preimagen. Esto es equivalente a decir que el conjunto codominio y el conjunto imagen coinciden.

Simbólicamente: $\forall y \in B, \exists x \in A / y = f(x)$
La siguiente función es suryectiva, pues $Imf = Codf$



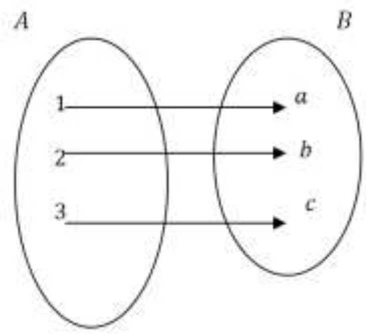
Sin embargo, la siguiente función no es suryectiva:



Pues, $Codf = \{a; b; c\}$ no coincide con $Imf = \{a; b\}$

- **Función biyectiva:** una función $f: A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y suryectiva simultáneamente. Si una función es biyectiva, admite una función inversa.

Por ejemplo:



En este curso en particular, analizaremos cuatro tipos de funciones que son las que verás al comienzo de tu carrera en algunas asignaturas.
Cuando los elementos de ambos conjuntos son números reales la función recibe el nombre de función real de variable real.

Definamos primero dos elementos importantes para poder representar gráficamente funciones en los ejes cartesianos.

Ceros de funciones reales de variable real:
Los ceros de una función *f* son elementos del dominio que anulan a la función, simbólicamente $f(x) = 0$. Gráficamente los ceros de una función son los puntos de coordenadas $(x, 0)$ que intersecan a la gráfica de la función con el eje de abscisas. El cero de una función también se denomina abscisa al origen.

Ordenada al origen de funciones reales de variable real:
La ordenada al origen es el punto de coordenadas $(0, f(0))$ que se obtiene evaluando la función f en 0, es decir, para encontrar la ordenada al origen de la función se calcula la imagen, haciendo $x = 0$ en la función dada.

Así pues, *la abscisa al origen y la ordenada al origen forman las* ***coordenadas al origen*** *de una función*.

FUNCIONES LINEALES.
Una función lineal es una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula:

$$f(x) = ax + b$$

donde *a* y *b* son números reales. El gráfico de esta función es una recta no vertical, donde a es la pendiente y ***b*** es la ordenada al origen.

Ejemplo: $y = 3x + 6$

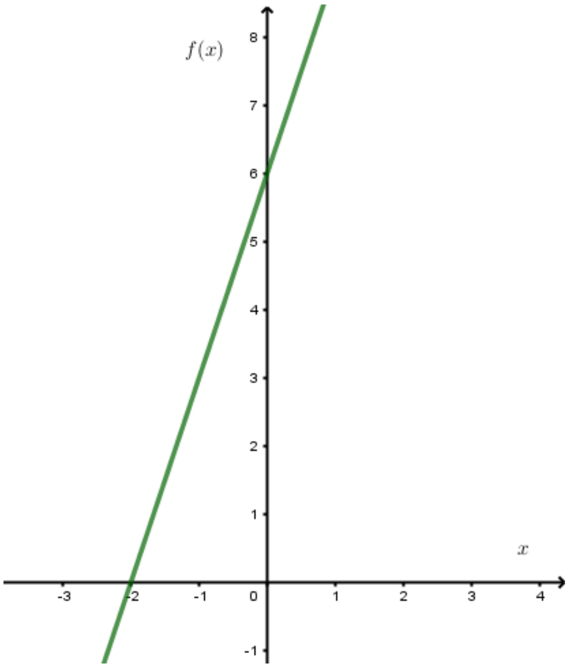
El dominio de esta función es $Domf = \mathbb{R}$ y el codominio es $Codf = \mathbb{R}$.

Su gráfica es una recta que corta al eje de ordenadas en el punto $(0{,}6)$, pues $f(0)=6$. El término independiente: 6, es la coordenada en y (u ordenada) del punto que representa la ordenada al origen; el cero de la función es el punto de coordenadas $(-2{,}0)$ en el cual la recta interseca al eje *x* pues resolviendo $y=f(x)=0;\ \ 3x+6=0$ obtenemos $x=-2$.

3 es la pendiente de la recta o coeficiente angular que numéricamente coincide con la tangente del ángulo que la recta forma con el eje de abscisas (considerado en su orientación positiva).

Ubicamos el cero y la ordenada al origen en un sistema de ejes cartesianos.

Como dos puntos determinan una única recta, podemos representar gráficamente a la función dada por la fórmula $f(x)=3x+6$ de la siguiente manera:



El conjunto imagen de esta función es $Imf=Codf=\mathbb{R}$, es decir se trata de una función suryectiva. También es una función inyectiva ya que, a cada elemento distinto del dominio se le hace corresponder imágenes distintas. Estamos en presencia de una función biyectiva.

Actividad:

1) Utilizá el programa GeoGebra para representar gráficamente los siguientes grupos de funciones:

$a)$ $1) f(x)=4x-1$ $\quad 2) f(x)=x+1$ $\quad 3)\ f(x)=\frac{1}{2}x$

$b)$ $1) f(x)=-2x-2$ $\quad 2) f(x)=-x+3$ $\quad 3)\ f(x)=-\frac{3}{5}x$

$c)$ $1)\ f(x)=-3$ $\quad 2)\ f(x)=5$ $\quad 3)\ f(x)=-\frac{1}{2}$

¿Qué conclusiones puedes extraer de la representación de cada una de estas funciones? ¿Qué diferencias y similitudes tienen las funciones en cuanto a sus pendientes? ¿Qué particularidad presentan las funciones del grupo c) de las funciones lineales?

……

……

2) Calculá para cada una de las funciones anteriores las coordenadas al origen, es decir la abscisa al origen (o cero de la función) y la ordenada al origen, luego represéntalas gráficamente en tu cuaderno.

3) Representá gráficamente las siguientes funciones:
a)$y = 3x + 1$ b)$y = -2x + 3$ c)$y = x + 4$ d) $y = \frac{1}{2}x$

4) Determiná si las funciones dadas en la actividad anterior son biyectivas, en caso de serlo, representá las gráficas de las funciones inversas de las dadas. Puedes recurrir a la simetría con respecto a la recta $y = x$.

Para esta actividad, ten en cuenta:

<u>Procedimiento para el cálculo de funciones inversas</u>
Supongamos que hemos determinado que la función dada por $f(x) = 3x + \frac{1}{2}$ es una función biyectiva, entonces admite una función inversa, para calcularla debemos tener en cuenta los siguientes pasos.

Dado que $f(x) = y$, escribimos:
$y = 3x + \frac{1}{2}$

<u>Primer paso</u>: se despeja x y se escribe en función de y,

$$y - \frac{1}{2} = 3x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$
$$y - \frac{1}{2} = 3x$$
$$\left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} = 3x\frac{1}{3}$$
$$\left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} = x$$
$$\frac{1}{3}y - \frac{1}{6} = x$$

Justifiquen cada uno de los pasos realizados para escribir x en función de y.

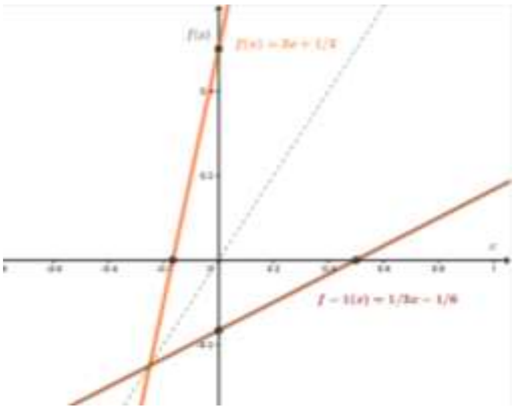
<u>Segundo paso:</u> se realiza el cambio de variables, es decir, se escribe ***x*** en lugar de **y** y recíprocamente.

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = y$$

<u>Tercer paso:</u> se escribe $y = f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$$

La función dada y su inversa se representan así:



FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Una función cuadrática es una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$definida por la fórmula:

$$f(x) = ax^{2} + bx + c$$

donde ***a***, ***b*** y ***c*** son números reales y $a \neq 0$. La representación gráfica de toda función cuadrática es una curva denominada ***parábola***.

Determinemos el **dominio** y el **codominio** y luego, calculemos los **ceros** y la **ordenada al origen** para la función cuadrática por medio de un ejemplo:

Sea la función $f(x) = 2x^{2} + x - 1$, su dominio es $Domf = \mathbb{R}$ y su codominio $Codf = \mathbb{R}$.

Ceros:

Hacemos $f(x) = 0$,

$2x^{2} + x - 1 = 0$ es una ecuación cuadrática, utilizamos la fórmula resolvente para hallar $x_{1\,y}\, x_2$.

Los coeficientes son: $a = 2\; b = 1\; y\, c = -1$, reemplazamos:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{2}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4}$

$x_2 = -1$

Los ceros de la función dada son: $\left(\frac{1}{2};0\right)$ y $(-1;0)$.

<u>Ordenada al origen</u>:

Calculamos$f(0)$ haciendo:

$f(0) = 2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$

$f(0) = -1$ $f(0) = -1$ entonces, el punto de intersección con el eje de ordenadas es $(0;-1)$.

Además de estos tres puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de ordenadas y el eje de abscisas, es necesario conocer otro punto significativo: el ***vértice*** que nos indica el valor máximo o mínimo de la función cuadrática.

Determinemos el <u>vértice de la función</u>: $V = (x_v; y_v)$
Por tratarse de un punto, tiene dos coordenadas:

$x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$ x_1 y x_2 son las abscisas de los ceros de la función.
Para obtener la otra coordenada reemplazamos x_v en la función dada:
$y_v = f(x_v)$

Establezcamos ahora el <u>eje de simetría</u>: $x = x_v$, que es la recta vertical que contiene al vértice.

Para la función que tomamos como ejemplo,

$$x_v = \frac{\frac{1}{2}+(-1)}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$x_v = -\frac{1}{4}$$

Luego:

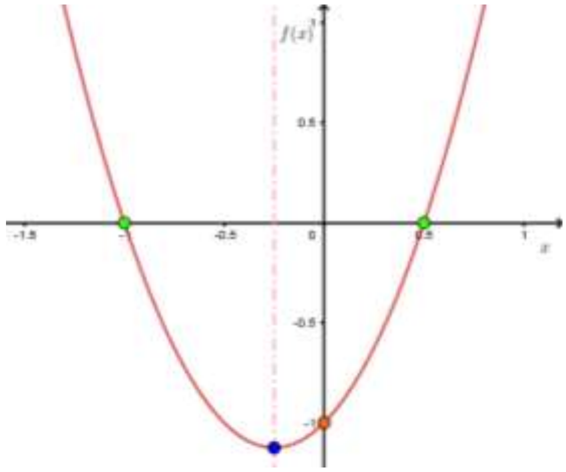
$y_v = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) - 1$

$y_v = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-2-8}{8} = -\frac{9}{8}$

$y_v = -\frac{9}{8}$

Las coordenadas del vértice son: $V = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$ y el eje de simetría es $x = -\frac{1}{4}$

Con estos elementos encontrados, podremos realizar un esbozo de la parábola de la siguiente manera:



Representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = 2x^2 + x - 1$

El conjunto imagen de la función cuadrática es un subconjunto del codominio, en este caso el conjunto imagen es $Imf = \left\{y \in \mathbb{R} / y \geq -\frac{9}{8}\right\}$

Observaciones:
Noten que la imagen se determina conociendo la coordenada en y del vértice, y_v y la concavidad de la función.
Como $Imf \neq Codf$, podemos afirmar que la función no es suryectiva, tampoco es inyectiva por ser una función cuya representación gráfica es simétrica respecto del eje de simetría $x = x_v$, es decir, existen elementos del dominios distintos que poseen la misma imagen por la función.
Podemos concluir que este tipo de funciones así definidas, no admiten una función inversas por no ser biyectivas.

Actividad:
Representá gráficamente cada una de las siguientes familias de funciones cuadráticas, con la ayuda del programa GeoGebra analizando los ceros, la ordenada al origen, el vértice y el eje de simetría de cada una de ellas y luego, respondé.

1) $a)\ f(x) = -x^2 + 1$ $\quad b) f(x) = -2x^2 - 4x + 6$
$c) f(x) = -x^2 - 3x + 10$

¿Qué tienen en común las gráficas de cada una de las funciones anteriores? ¿Por qué?

………

2) $a)\ f(x) = x^2 + 1$ $\quad b) f(x) = 2x^2 - 4x + 6$
$c) f(x) = x^2 - 3x + 10$

¿En qué difieren analíticamente y gráficamente las funciones del grupo 2 respecto de la primera familia de funciones?

....

3) $a)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ $b) f(x) = 2x^2 + 3x$

$c) f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x$

Analíticamente, ¿cómo son las funciones cuadráticas de esta familia de funciones? Gráficamente, ¿qué características tienen sus ceros y la ordenada al origen? ¿A qué conclusión puedes arribar?

....

4) $a)\ f(x) = 2x^2 - 2$ $b) f(x) = -x^2 + 8$

$c) f(x) = x^2 + 5$

Analíticamente, ¿cómo son las funciones cuadráticas de esta familia de funciones? Gráficamente, ¿qué características tienen sus ceros y la ordenada al origen? ¿A qué conclusión puedes arribar?

....

FUNCIONES EXPONENCIALES.

Una relación $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma:
$f(x) = ka^x$, con $a, k \in \mathbb{R}, a > 0$, $a \neq 1$ y $k \neq o$ se denomina función exponencial.
Sean las funciones:
$1)\ f(x) = 2^x$; $2)\ f(x) = 4^{x-1}$; $3) f(x) = 3^{x+1} - 4$

Las fórmulas anteriores definen funciones exponenciales.

Estudiemos los elementos que nos permitirán realizar un esbozo de la función exponencial, por medio de los ejemplos presentados más arriba.

$\boxed{1)\ f(x) = 2^x}$

$Domf = \mathbb{R}$
Comencemos calculando los puntos de intersección con los ejes cartesianos.

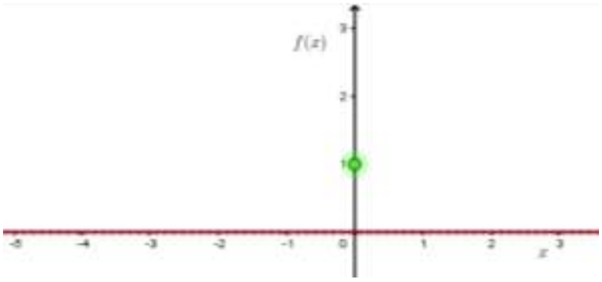
Cero: $f(x) = 0$
$2^x = 0$ aplicamos logaritmo a ambos miembros.
$log2^x = log0$, recordá que $log0$ no tiene solución.

Concluimos que esta función no posee ceros, porque no interseca al eje de abscisas.

Por este motivo, $y = 0$ es una **asíntota horizontal** de la función y la indicamos $AH: y = 0$. Es decir, la ***asíntota horizontal*** es la **recta horizontal** a la cual se le aproxima la función dada.

Ordenada al origen: $f(0)$
$f(0) = 2^0 = 1$ y el punto de intersección con el eje de ordenadas es $(0,1)$.

Representamos gráficamente los elementos hallados:

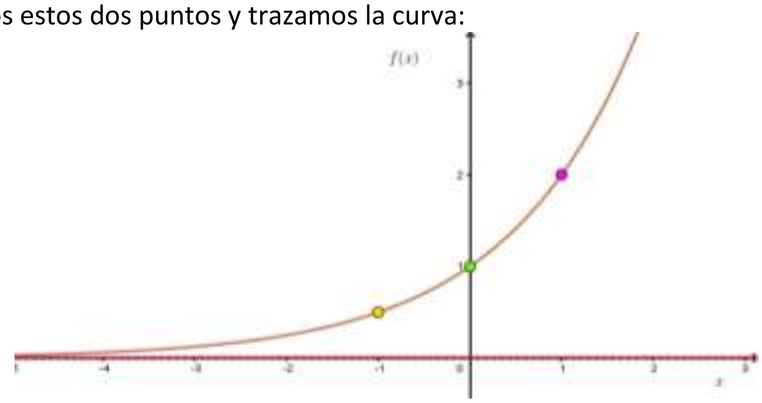


Estos elementos son escasos para poder representar gráficamente a la función exponencial sin saber cómo se comporta gráficamente, solo por ser la primera vez que graficamos una función exponencial, calcularemos las imágenes de dos elementos significativos del dominio:

Cuando $x = 1, f(1) = 2^1 = 2$ el punto $(1; 2)$ pertenece a la gráfica de la función.

Cuando $x = -1, f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ pertenece a la gráfica de la función.

Ubicamos estos dos puntos y trazamos la curva:



Representación gráfica de la función exponencial $f(x) = 2^x$

El conjunto imagen de esta función es $Imf = (0; \infty) = \{y \in \mathbb{R}/y > 0\}$. Como $Imf \neq Codf$, la función no es suryectiva pero si definimos a la función f con valores reales mayores que cero, es decir $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0; \infty)$la función es suryectiva.
Además, la función dada es una función inyectiva pues, para dos elementos distintos del dominio, sus imágenes por la función, son distintas.
Por lo tanto, la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0; \infty)$ definida por $f(x) = 2^x$, es una función biyectiva.

$\boxed{2) f(x) = 4^{x-1}}$

El dominio de la función es $Domf = \mathbb{R}$
Para realizar un esquema de la función, calculamos los puntos de intersección de la función con los ejes cartesianos, la asíntota horizontal y, de ser necesario, calculamos las imágenes de dos elementos significativos del dominio d la función.

<u>Cero</u>: $f(x) = 0$

$4^{x-1} = 0$

$\log 4^{x-1} = log0$

$\log 4^{x-1} = log0$ pero logaritmo de cero no está definido, por lo tanto, esta función no posee ceros , entonces $y = 0$ es <u>asíntota horizontal</u>, $AH: y = 0$.

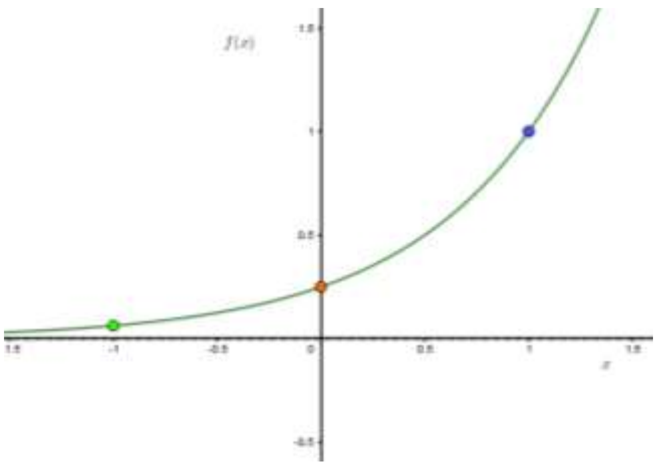
<u>Ordenada al origen</u>: $f(0)$

$f(0) = 4^{0-1} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ el punto de intersección de la gráfica de la función con el eje de ordenadas es $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Cuando $x = -1, f(-1) = 4^{-1-1} = 4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, el punto $\left(-1; \frac{1}{16}\right)$ pertenece a la gráfica de la función.

Cuando $x = 1, f(1) = 4^{1-1} = 4^0 = 1$ el punto $(1; 1)$ pertenece a la gráfica de la función.

Representemos gráficamente a la función exponencial a partir de todos los puntos obtenidos en el análisis anterior.



Representación gráfica de la función definida por $f(x) = 4^{x-1}$

El conjunto imagen de esta función es $Imf = (0; \infty) = \{y \in \mathbb{R}/y > 0\}$., como $Imf \neq Codf$, la función no es suryectiva pero si definimos a la función f con valores reales mayores que cero, es decir $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0; \infty)$la función es suryectiva.
Además, la función dada es una función inyectiva pues dos elementos distintos del dominio, sus imágenes por la función, son distintas.
Por lo tanto, la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0; \infty)$definida por $f(x) = 4^{x-1}$, es una función biyectiva.

$\boxed{3) f(x) = 3^{x+1} - 4}$

$Domf = \Re$

<u>Cero</u>: $f(x) = 0$

$3^{x+1} - 4 = 0$

$3^{x+1} - 4 + 4 = 4$

$3^{x+1} = 4$

$\log 3^{x+1} = \log 4$

$(x + 1)log3 = log4$ por propiedad de la logaritmación.

$$(x + 1)\frac{log3}{log3} = \frac{log4}{log3}$$

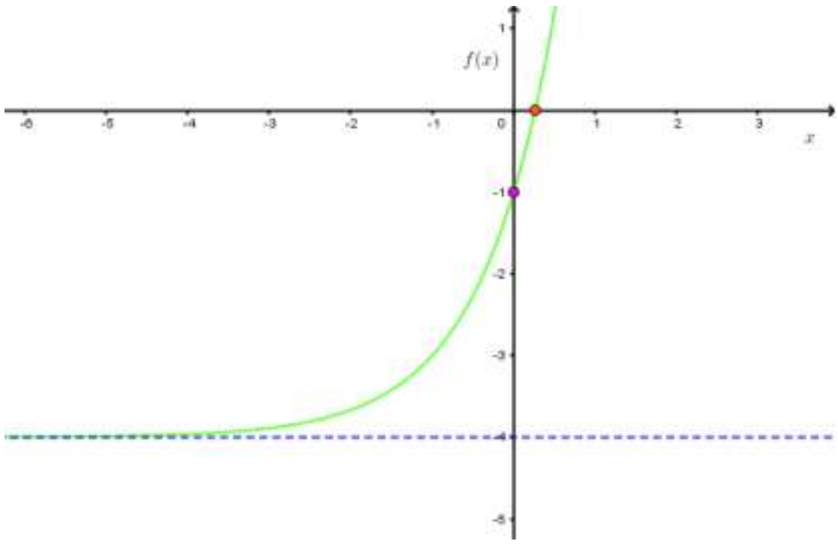
$$x + 1 = \frac{log4}{log3}$$

$$x + 1 - 1 = \frac{log4}{log3} - 1$$

$x = 1{,}261859\ldots$ la coordenada x del punto de intersección con el eje de las abscisas es aproximadamente $1{,}26$.

La asíntota horizontal es $AH: y = -4$
¿Te animás a explicar por qué?
………

<u>Ordenada al origen</u>: $f(0)$
$f(0) = 3^{0+1} - 4 = 3 - 4 = -1$
El punto de coordenadas $(0; -1)$ es el punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas.



El conjunto imagen de esta función es $Imf = (-4; \infty) = \{y \in \mathbb{R}/y > -4\}$. , como $Imf \neq Codf$, la función no es suryectiva pero si definimos a la función f con valores reales mayores que -4, es decir $f: \mathbb{R} \longrightarrow (-4; \infty)$la función es suryectiva.

Además, la función dada es una función inyectiva pues, para dos elementos distintos del dominio por ejemplo: $x = 1$ y $x = -1$, las imágenes son distintas.
Por lo tanto, la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow (-4; \infty)$definida por $f(x) = 3^{x+1} - 4$, es una función biyectiva.

¡Sigamos analizando más funciones exponenciales!

Dadas las siguientes funciones:

$GRUPO\ 1$: $a) f(x) = 3^{x-1} - 2$ $\quad b) f(x) = 2^{x+3} - 1$ $\quad c)\ f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x + 1$

$GRUPO\ 2$: $a)\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad b) f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 3$ $\quad c) f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} - 2$

1) Determiná el dominio de cada función.
2) Calculá los puntos de intersección de la gráfica de la función con los ejes cartesianos y la ecuación de la asíntota.
3) Escribí el conjunto imagen de la función como codominio para que la función sea biyectiva.
4) Utilizá el programa GeoGebra para corroborar la gráfica de la función.
5) Observando el gráfico de las funciones, respondé:
    a. ¿Cuál es el comportamiento de la curva que diferencia, entre otras cosas, a las funciones exponenciales del primer grupo respecto del segundo grupo de funciones?
    b. Las funciones de ambos grupos, ¿son funciones crecientes o decrecientes en todo su dominio?

Analíticamente:
    c. ¿Cómo son las bases de las funciones exponenciales que las diferencian?
    d. Extraé conclusiones.

………
………
………

FUNCIONES LOGARÍTMICAS.

Seguramente habrás notado que las funciones exponenciales analizadas con anterioridad:

1) $f(x) = 2^x$; 2)$f(x) = 4^{x-1}$; 3)$f(x) = 3^{x+1} - 4$

son funciones biyectivas si definimos dichas funciones escribiendo el conjunto imagen de la función como codominio, es decir $f: \mathbb{R} \longrightarrow Imf$. Por eso, podemos asegurar que estas funciones biyectivas admiten funciones inversas.

Calculemos la fórmula que define a cada función exponencial teniendo en cuenta los pasos a seguir para hallar las funciones inversas de funciones reales de variable independiente real.

1) $f(x) = 2^x$

Primer paso:

$f(x) = y$;

$y = 2^x$

$log\, y = log\, 2^x$

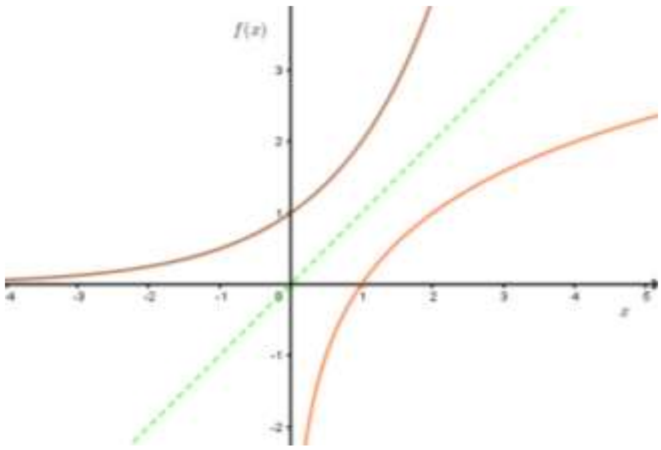
$log\, y = x \cdot log\, 2$

$\frac{log\, y}{log\, 2} = x$ *realizamos el cambio de base correspondiente.*

$\log_2 y = x$

Segundo paso: $y = \log_2 x$

Tercer paso: $f^{-1}(x) = \log_2 x$



La función inversa a la función exponencial $f(x) = 2^x$ es la función $f^{-1}(x) = \log_2 x$, a ésta última se la denomina ***función logarítmica***.

Observen que el dominio de la función exponencial, es la imagen de la función logarítmica; la imagen de la función exponencial es el dominio de la función logarítmica; la ordenada al origen de la función exponencial es el cero de la función logarítmica; el cero de la función exponencial es la ordenada al origen de la función logarítmica y la asíntota horizontal de la función exponencial es la asíntota vertical de la función logarítmica, para este ejemplo $AV: x = 0$.

La ***asíntota vertical*** es la ***recta vertical*** a la cual se le aproxima la función dada.

Una función logarítmica es una función definida por la fórmula:
$f(x) = \log_a x$ siendo $a > 0 \ \ y \, a \neq 1$ y $x > 0$ y su dominio es el conjunto $Domf = (0, \infty)$.

Queda como ejercicio calcular las inversas de las funciones 2 y 3 y representarlas gráficamente.

Actividad:
Dadas las funciones logarítmicas:
$1) \, f(x) = \log_2(x - 1) \quad 2) f(x) = \log_2(x + 1) - 4$

a. Determiná el dominio de cada función.
b. Calculá los puntos de intersección del gráfico con los ejes cartesianos.
c. Hallá la ecuación de la asíntota vertical.
d. Representá gráficamente las funciones, corroborando con GeoGebra lo realizado.
e. Determiná el conjunto imagen de la función.
f. Escribí el dominio y el codominio adecuado para que la función sea una función biyectiva, luego calculá la función inversa y representá ambas funciones.

$1) \, f(x) = \log_2(x - 1)$

a. $Domf = (1; \infty)$ recordá que la logaritmación no está definida para números menores que o iguales a cero.
b. Cero: $f(x) = 0$

$\log_2(x - 1) \quad = 0$, por definición de logaritmo:

$2^0 = x - 1$

$1 = x - 1$

$1 + 1 = x - 1 + 1$

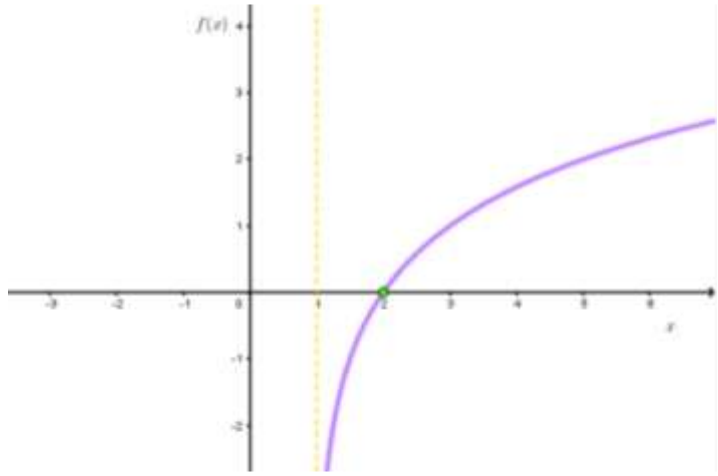
$2 = x$, por lo tanto el punto $(2; 0)$ es el punto de intersección de la gráfica con el eje de abscisas.

Ordenada al origen: $f(0)$

$f(0) = \log_2(0 - 1)$

$f(0) = \log_2(-1)$ la logaritmación no está definida para números negativos.

c. El elemento del dominio que anula al argumento del logaritmo es la asíntota vertical $AV: x = \ 1$.
d.



Representación gráfica de la función $f(x) = \log_2(x-1)$

e. $Imf = \mathbb{R}$

f. $f: (1; \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, la función logarítmica, así definida, es una función biyectiva, su inversa la calculamos de la siguiente manera:

<u>Primer paso:</u>

$y = \log_2(x-1)$ por definición de logaritmo:

$2^y = x - 1$

$2^y + 1 = x - 1 + 1$

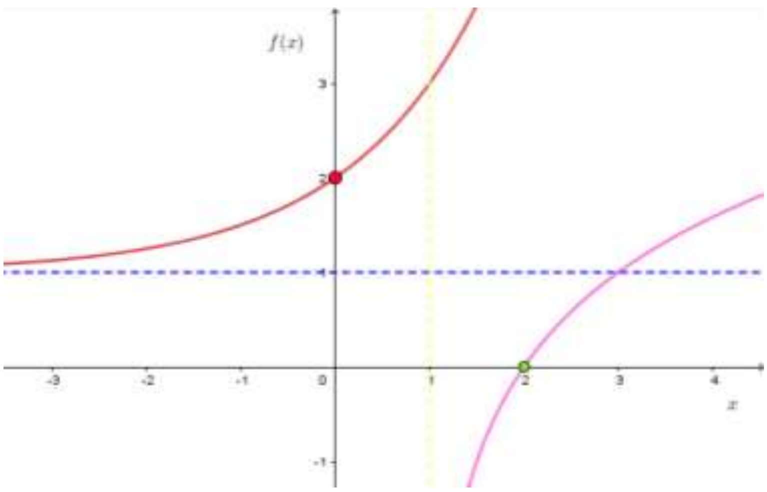
$2^y + 1 = x$

<u>Segundo paso:</u>

$2^x + 1 = y$

<u>Tercer paso</u>:

$f^{-1}(x) = 2^x + 1$



$2) f(x) = \log_2(x+1) - 4$

a. $Domf = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$

b. <u>Cero</u>: $f(x) = 0$

$\log_2(x+1) - 4 = 0$

$\log_2(x+1) - 4 + 4 = 4$

$\log_2(x+1) = 4$

$2^4 = x + 1$

$16 = x + 1$

$16 - 1 = x + 1 - 1$

$x = 15$ el punto de coordenadas $(15; 0)$ es el punto de intersección de la gráfica con el eje de abscisas.

<u>Ordenada al origen</u>: $f(0)$

$f(0) = \log_2(0+1) - 4$

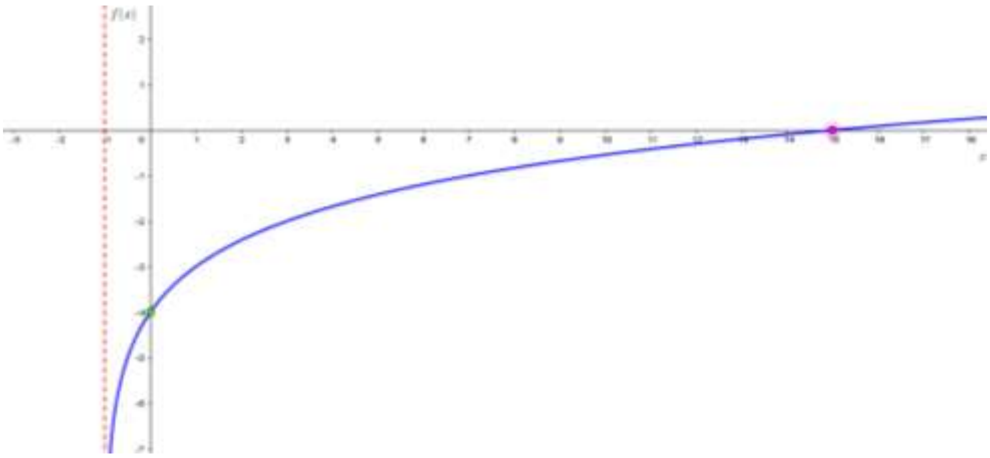
$f(0) = \log_2(1) - 4$

$f(0) = 0 - 4$

$f(0) = -4$ el punto de coordenadas $(0; -4)$ es el punto de intersección de la gráfica con el eje de ordenadas.

c. <u>Asíntota vertical</u> $AV: x = -1$.

d.



Representación gráfica de la función $f(x) = \log_2(x+1) - 4$

e. $Imf = \mathbb{R}$

f. $f: (-1; \infty) \to \mathbb{R}$

g. Así definida, la función logarítmica es una función biyectiva.

Calculamos la función inversa:

<u>Primer paso</u>:

$y = \log_2(x+1) - 4$

$y + 4 = \log_2(x + 1) - 4 + 4$

$y + 4 = \log_2(x + 1)$ por definición de logaritmo:

$2^{y+4} = x + 1$

$2^{y+4} - 1 = x + 1 - 1$

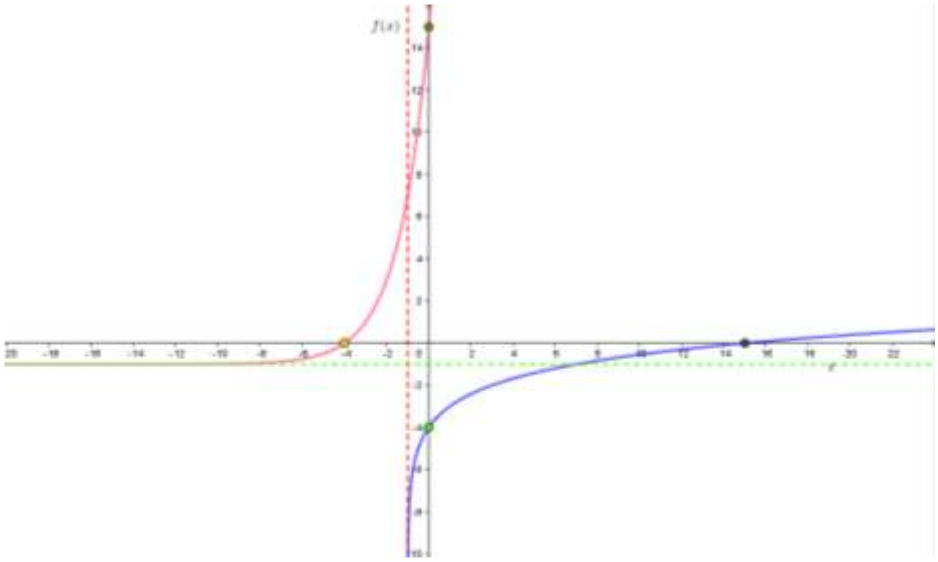
$2^{y+4} - 1 = x$

Segundo paso:

$2^{x+4} - 1 = y$

Tercer paso:

$f^{-1}(x) = 2^{x+4} - 1$



Representación gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_2(x + 1) - 4$ y su inversa $f^{-1}(x) = 2^{x+4} - 1$

Actividad:

Determiná dominio, cero, ordenada al origen, asintota vertical e imagen de las siguientes funciones. Representá gráficamente cada una y luego, determiná la función inversa.

1) $f(x) = \log_3(x - 2) + 1$ 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 2$

3) $f(x) = log_{\frac{3}{2}} x + 2$

……

……

……

RECORRIDO V: TRIGONOMETRÍA

Objetivos:

- Aplicar los conceptos de trigonometría a la resolución de situaciones problemáticas planteadas con triángulos rectángulos y oblicuángulos.
- Resolver identidades trigonométricas.
- Iniciar a los estudiantes en los pasos a seguir en la demostración de propiedades.

Síntesis de Contenidos:

Los principales conceptos que desarrollaremos son:

- Generación de ángulos.
- Ángulos orientados.
- Sistemas de medición angular:
    - sistema sexagesimal.
    - sistema circular o radial.
    - equivalencia entre los sistemas sexagesimal y circular.
- Razones trigonométricas.
- Identidades trigonométricas.
- Resolución de triángulos rectángulos.
- Resolución de triángulos oblicuángulos.

TRIGONOMETRÍA.

El término trigonometría proviene de dos raíces griegas: *trigon*, que significa triángulo y *metra*, medida, e indican el tema principal de esta rama de la Matemática que trata el cálculo de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Según los triángulos que se consideren sean rectilíneos o esféricos, la trigonometría se divide en plana o rectilínea y esférica, respectivamente.

Se atribuye la paternidad de la trigonometría al astrónomo y matemático Hiparco de Nicea. Su desarrollo fue estimulado por el interés en la astronomía y tuvo lugar entre los siglos II a.C. y II d.C.

La ingeniería, la agrimensura, la arquitectura, y otras tantas ramas del conocimiento hacen uso de la trigonometría. Uno de los más importantes avances tecnológicos de las últimas décadas, el sistema de posicionamiento global mediante satélites (GPS) de múltiples aplicaciones militares y civiles, constituye un ejemplo de ello.

GENERACIÓN DE ÁNGULOS.

En trigonometría los ángulos son generados por una semirrecta móvil que gira alrededor de su origen. Así, por ejemplo, si la semirrecta $\overrightarrow{OA}$, que se muestra en la figura 1, gira alrededor del punto fijo O y pasa de la posición inicial $\overrightarrow{OA}$ a otra posición cualquiera $\overrightarrow{OB}$, describe el ángulo $A\hat{O}B$ manteniéndose siempre en el mismo plano.

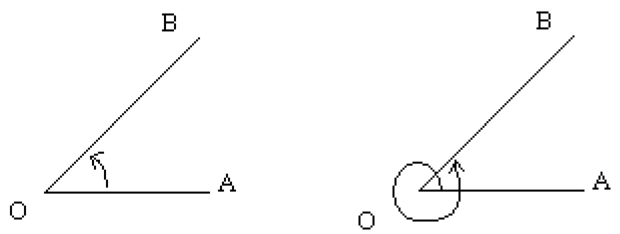


Figura 1

Las semirrectas OA y OB reciben el nombre de *lado inicial* y *lado terminal,* respectivamente.
La semirrecta móvil puede pasar de la posición inicial a la posición final ya sea, directamente o después de haber realizado cierto número de giros completos.
Si designamos con $\hat{\alpha}$ el ángulo descripto al pasar de la posición $\overrightarrow{OA}$ a la $\overrightarrow{OB}$, obtenemos los siguientes ángulos:

$1\ giro\ completo \quad + \quad \hat{\alpha} = \quad 360° + \hat{\alpha}$

$2\ giros\ completos \quad + \quad \hat{\alpha} = \quad 2 \cdot 360° + \hat{\alpha}$

……………………………………………………………………

$n\ giros\ completos \quad + \quad \hat{\alpha} \quad = \quad n\,.360° + \hat{\alpha}$

Estos ángulos tienen sus lados coincidentes y se diferencian en uno o más giros completos, se denominan ***ángulos congruentes respecto de un número entero de giros*** o también ***coterminales***.
Por ejemplo: el ángulo descripto por el minutero de un reloj al cabo de veinte minutos y el ángulo descripto por el mismo minutero al cabo de una hora y veinte minutos son congruentes respecto de un giro completo.

Signos de los ángulos
Al describir un ángulo, la semirrecta móvil puede girar en dos sentidos. Si esta rotación se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj o antihorario, al ángulo α le corresponde el signo positivo; si la rotación se produce en el mismo sentido de las agujas del reloj, el ángulo β tiene signo negativo. Esta elección es puramente convencional, como se indica en la figura 2.

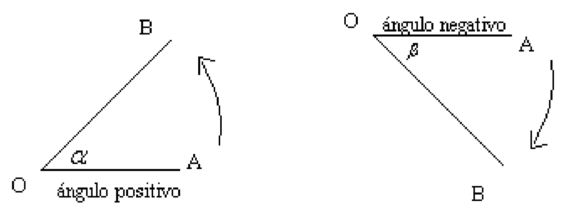


Figura 2

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR.

Sistema sexagesimal:

El sistema de medición de ángulos más usado en la práctica es el sexagesimal y se remonta al tiempo de la Escuela de Alejandría en los principios de la era cristiana.

Los matemáticos griegos, posiblemente copiando a los babilonios, dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, y llamaron a cada una de esas partes un grado. Así pues, la unidad de arco en este sistema es el grado sexagesimal.

Un grado sexagesimal se divide en 60 minutos sexagesimales y cada minuto sexagesimal, en 60 segundos sexagesimales. Para fracciones menores que un segundo sexagesimal se emplean los décimos, centésimos, milésimos, etc. de segundo sexagesimal.

A los arcos de un grado, de un minuto y de un segundo sexagesimales, les corresponden respectivamente ángulos centrales de un grado, un minuto y un segundo sexagesimales.

Por ejemplo, para indicar en este sistema que un ángulo α mide 195 grados, 18 minutos y 42 segundos, se escribe: $\hat{\alpha} = 195^o 18' \ 42''$.

Sistema circular:
La unidad de arco del sistema circular es el radián (rad), que es el arco que tiene una longitud igual a la del radio de la circunferencia a la que pertenece, como se muestra en la figura 3.

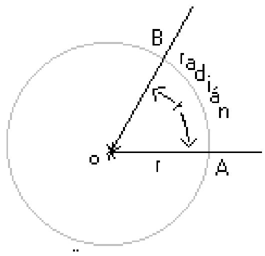


Figura 3

El ángulo central que le corresponde a este arco se llama ángulo de un radián. Dicho de otro modo, el número de radianes de cualquier ángulo central está determinado por el número de veces que el radio está contenido en el arco de circunferencia interceptado.
Siendo *r* el radio de la circunferencia, *l* la longitud del arco y α el ángulo central, las siguientes expresiones, que son válidas sólo para este sistema, nos permiten calcular la amplitud del ángulo y la longitud del arco:

$$\hat{\alpha} = \frac{l}{r} \quad y \quad l = \hat{\alpha}.r$$

El arco se considera como una longitud que se mide en radios de circunferencia y la longitud de la circunferencia está expresada por la fórmula $L = 2\pi r$.
Este sistema se usa en cuestiones teóricas, porque ofrece la ventaja de simplificar la notación.
En las demostraciones es habitual la aplicación de las igualdades siguientes, en las que se sobreentiende que la unidad de medida es el radián.

$Longitud\ de\ la\ circunferencia\ es\ igual\ \ 2\pi$

$Longitud\ del\ cuadrante\ es\ igual\ a\ \frac{\pi}{2}$

$Longitud\ de\ \frac{3}{4}\ de\ la\ circunferencia\ es\ igual\ a\ \frac{3}{2}\pi$

Equivalencia entre los sistemas sexagesimal y circular

Sabiendo que un ángulo recto equivale a 90^o (sistema sexagesimal) y un ángulo recto a $\frac{\pi}{2}$ radianes (sistema circular), resulta que: 90^o equivale a $\frac{\pi}{2}$ rad. De lo anterior se deducen las siguientes igualdades:

$$1^o = \frac{\pi}{180}\ radianes \qquad\qquad 1\ \ radián = \frac{180^o}{\pi}$$

Para la conversión de un ángulo expresado en el sistema sexagesimal al sistema circular utilizamos una regla de tres simple. Por ejemplo, si expresamos en el sistema circular un ángulo de 60°, planteamos:

180° – – – – – – – – – – – – – – π

60° – – – – – – – – – – – – – – x

Entonces: $x = \frac{60^o\pi}{180^o}$

<u>Nota</u>: En el sistema circular, la amplitud del ángulo también puede quedar expresada por un número real sin unidad.

De la misma manera, podemos realizar la conversión de ángulos del sistema circular al sexagesimal.

Para repasar lo dado hasta aquí:

1) Dada una circunferencia de 120 cm de radio y un arco de 132 cm de longitud, ¿Qué ángulo central subtiende? Expresá el resultado en los sistemas de medición angular sexagesimal y circular.

2) El extremo de un péndulo de 40 cm de longitud describe un arco de 5 cm. ¿Cuál es el ángulo de oscilación del péndulo? Expresá en radián y grados sexagesimales.

3) Un ángulo central determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 0,30 m de radio. Determiná el ángulo central en los sistemas circular y sexagesimal.

4) El minutero de un reloj mide 12 cm. ¿Qué distancia en mm recorre la punta del minutero durante 20 minutos?

5) Nuestro planeta da una rotación completa cada 24 horas. ¿Cuánto se demora en rotar a un ángulo de: a) $240^{o}240^{o}$, b) π/6 rad?

6) El planeta Mercurio completa una rotación cada 59 días ¿A través de qué ángulo (medido en grados sexagesimales) rota en: a) 1 día; b) 1 hora; c) 1 minuto?

7) Un aspersor funciona con un mecanismo que le produce un movimiento de giro, de ida y vuelta, de $45^{o}45^{o}$. Si el chorro de agua alcanza 1,20 m; calculá la superficie de césped regada.

<u>Nota:</u> Superficie sector circular: $S_{sc} = \frac{\pi r^2 \hat{\alpha}}{360}$

8) Una milla náutica se define como la longitud del arco subtendido en la superficie terrestre por un ángulo que mide un minuto. Si el diámetro de la Tierra es de 7 927 millas, encontrá la cantidad de millas terrestres que hay en una milla náutica.

9) El mil es una unidad de medida angular empleada por las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos y de otros países. Algunos instrumentos militares están graduados en mils y resulta que 1600 mils = 90^{o}. Otra relación que se utiliza cuando se trabaja con mils, se expresa como sigue: el mil es aproximadamente igual al ángulo subtendido por 1 yarda (yd) a una distancia de 1000 yd (1 yd = 0,913383 m).

El disparo de un tirador está desviado 60 yd hacia la izquierda del blanco. Si su alcance es de 3000 yd, ¿qué corrección en mils, debe hacerse y en qué dirección (derecha o izquierda)?

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

En la figura 4, $B\hat{A}C$ representa un ángulo agudo y $\overrightarrow{BC}$ es una semirrecta perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ trazada desde cualquier punto del lado *AB*. De esta manera se construye el triángulo rectángulo *ACB* en el cual: $\overline{AB}$ es la hipotenusa, $\overline{BC}$ es el cateto opuesto al Â y $\overline{AC}$ es el cateto adyacente al Â.

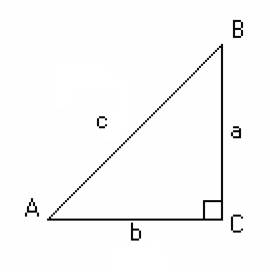


Figura 4

Haciendo uso de estos tres lados, es posible obtener seis razones; cada razón recibe un nombre particular que escribimos en forma abreviada del siguiente modo:

sen Â: se lee seno del ángulo *A*, *cos Â*: se lee coseno del ángulo *A*, *tg Â*: se lee tangente del ángulo *A*, *cotg Â*: se lee cotangente del ángulo

sec Â: se lee secante del ángulo *A*, *cosec Â*: se lee cosecante del ángulo *A*.

Por definición:

$$tg\ \hat{A} = \frac{cateto\ opuesto\ al\ \hat{A}}{cateto\ adyacente\ al\ \hat{A}} = \frac{a}{b}$$

$$cotg\ \hat{A} = \frac{cateto\ adyacente\ al\ \hat{A}}{cateto\ opuesto\ al\ \hat{A}} = \frac{b}{a}$$

$$sec\ \hat{A} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente\ al\ \hat{A}} = \frac{c}{b}$$

$$cosec\ \hat{A} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto\ al\ \hat{A}} = \frac{c}{a}$$

Los valores de las razones trigonométricas dependen únicamente de la amplitud del ángulo y no del tamaño del triángulo rectángulo. En la figura 5, se muestran dos triángulos *ACB* y *AC´B´* rectángulos en el ángulo *A.* Estos triángulos son semejantes por tener el mismo ángulo agudo *A*, entonces las razones de los lados correspondientes son iguales o como también decimos, los lados homólogos son proporcionales.

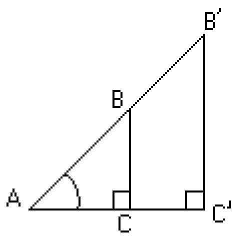


Figura 5

En efecto:
En el triángulo rectángulo *ACB* tenemos que:

$$sen\ \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo *AC´B´* tenemos que:

$$sen\ \hat{A} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}$$

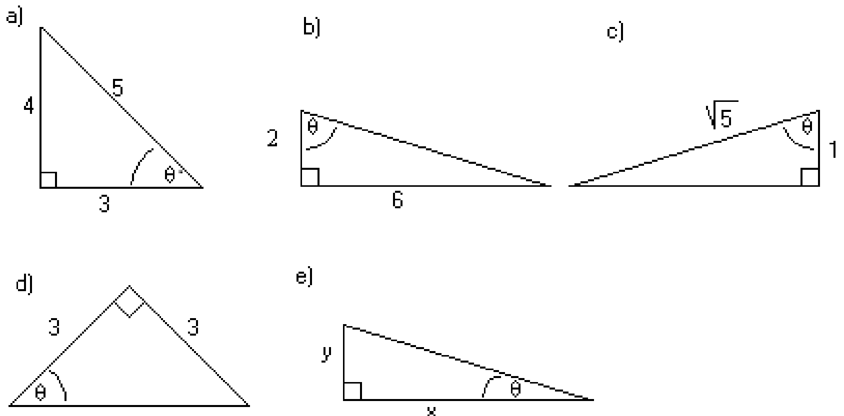
Pero como los primeros miembros de ambas expresiones son iguales, los segundos miembros también lo son y resulta que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}$$

Así encontramos el mismo valor numérico para el seno del ángulo A sin importar cuál sea el triángulo que utilicemos para calcularlo. Una demostración similar podría servirnos como argumento para el resto de las razones trigonométricas.

Para repasar lo dado hasta aquí:

1) Determiná los valores de las seis razones trigonométricas del ángulo ϑ en cada uno de los triángulos:



2) ¿Qué sucede con el valor numérico del seno de un ángulo agudo a medida que el ángulo aumenta su amplitud?¿Y con el valor numérico del coseno de un ángulo agudo en la misma situación?

3) ¿Es *cos 84°* igual al doble de *cos 42°*? ¿Crece el valor numérico del coseno de un ángulo agudo en la misma proporción que crece el ángulo?

4) ¿Qué sucede con el valor numérico de la tangente de un ángulo agudo cuando el ángulo disminuye?

5) Una escalera de 3 m de largo se apoya contra un muro formando un ángulo de 60° con el suelo. ¿A qué altura del muro está apoyada la escalera? ¿A qué distancia del muro está ubicado el pie de la escalera?

6) Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 3,25 cm cada uno y el ángulo en el vértice es de 28°. Determiná la longitud de la base del triángulo.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Del álgebra, podemos recordar ejemplos familiares de algunas identidades tales como:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \; \boldsymbol{Cuadrado\ de\ un\ binomio}$$

$p^2 - q^2 = (p + q).(p - q)$ ***Diferencia de cuadrados***

Entre las razones trigonométricas también existen relaciones importantes; las básicas se denominan *identidades trigonométricas fundamentales* y resultan de fácil memorización. Ellas son: la propiedad fundamental de la trigonometría o relación pitagórica, las identidades del cociente y las identidades recíprocas.

Relación pitagórica

La suma de los cuadrados del seno y coseno de un mismo ángulo es igual a 1.

En símbolos: $\boxed{sen^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\alpha} = 1}$

Demostración:

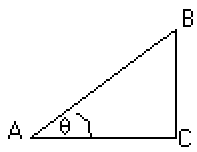


Figura 6: Triángulo rectángulo

$$sen^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\alpha} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = 1$$

Pues por el teorema de Pitágoras se cumple que:

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$$

Identidades de cociente.

La tangente de un ángulo es igual al cociente entre el seno y el coseno del mismo ángulo.

La cotangente de un ángulo es igual al cociente entre el coseno y el seno del mismo ángulo.

En símbolos: $\boxed{tg\,\hat{\alpha} = \frac{sen\,\hat{\alpha}}{cos\,\hat{\alpha}}; \quad cotg\,\hat{\alpha} = \frac{cos\,\hat{\alpha}}{sen\,\hat{\alpha}}}$

Demostración:

$$\frac{sen\,\hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = tg\,\hat{\alpha}$$

Procediendo de manera análoga, podrás demostrar la otra identidad.

Identidades recíprocas

La secante de un ángulo es igual al recíproco del coseno del mismo ángulo.
La cosecante de un ángulo es igual al recíproco del seno del mismo ángulo.
La cotangente de un ángulo es igual al recíproco de la tangente del mismo ángulo.

En símbolos:

$$\sec \hat{\alpha} = \frac{1}{\cos \hat{\alpha}}; \quad \operatorname{cosec} \hat{\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \hat{\alpha}}; \quad \operatorname{cotg} \hat{\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \hat{\alpha}}$$

¿Te animás a demostrar alguna de estas identidades?

Para repasar lo dado hasta aquí:

1) Escribí una expresión más simple en lugar de cada una de las siguientes:

a) $1 - \cos^2 \hat{A}$

b) $1 + \operatorname{cotg}^2 \hat{B}$

c) $1 + \operatorname{tg}^2 \hat{C}$

2) Expresá cada una de las siguientes expresiones en términos de sen Â:

a) $\cos^2 \hat{A}$ b) $\operatorname{tg}^2 \hat{A}$ c) $\sec^2 \hat{A}$

3) Expresá cada una de las siguientes expresiones en términos de cos Â:

a) $\operatorname{tg}^2 \hat{A}$ b) $\operatorname{tg} \hat{A} . \operatorname{sen} \hat{A}$ c) $\operatorname{cotg} \hat{A} . \operatorname{cosec} \hat{A}$

4) Expresá $\operatorname{tg} \hat{\sigma} + \operatorname{cotg} \hat{\sigma}$ en términos de $\operatorname{sen} \hat{\sigma}$ y $\cos \hat{\sigma}$.

5) Expresá $\operatorname{tg}^2 \hat{\sigma} + \operatorname{sen}^2 \hat{\sigma} + \frac{1}{\sec^2 \hat{\sigma}}$ en términos de $\cos \hat{\sigma}$.

6) Calculá las razones trigonométricas directas (seno, coseno y tangente) del triángulo rectángulo isósceles cuyo cateto es la unidad. Trabajá con radicales y racionalizá los denominadores en el caso que sea necesario.

7) Calculá la altura de un triángulo equilátero con lados de longitud 1. Con ella y los otros datos, hallá las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los ángulos de *30°* y *60°*. Trabajá con radicales y racionalizá los denominadores en el caso que sea necesario.

8) Con los resultados obtenidos anteriormente completá el siguiente cuadro:

	30°	*45°*	*60°*
sen			
cos			
tg			

9) Encontrá los valores de las razones trigonométricas que faltan, sabiendo que:

a) *sen* $\hat{A} = \frac{12}{13}$ b) *cos* $\hat{A} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

10) Respondé verdadero (V) o falso (F). En caso de falso, justificá con la respuesta correcta:

a) tg 47° = $\frac{\cos 47^o}{\operatorname{sen} 47^o}$ ☐

b) sen 61° = cos 29° ☐

c) sen ½ = 30° ☐

d) cos $\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$ ☐

e) cos $\frac{\pi}{3} = \sec\frac{3}{\pi}$ ☐

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Al resolver problemas de triángulos rectángulos mediante las razones trigonométricas encontramos con frecuencia los términos ángulo de elevación y ángulo de depresión. Ver figura 7.

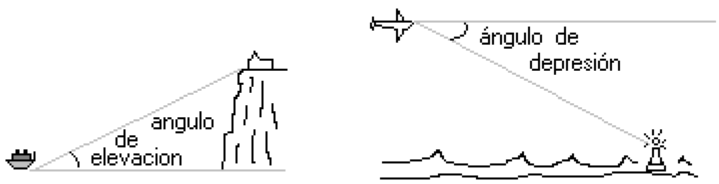


Figura 7

El ***ángulo de elevación*** es el ángulo comprendido entre la semirrecta horizontal que pasa por el ojo del observador y la semirrecta determinada por la visual dirigida hacia un punto que está ubicado por encima de él.

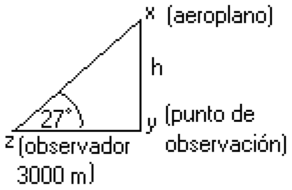
El ***ángulo de depresión*** es el ángulo comprendido entre la semirrecta horizontal que pasa por el ojo del observador y la semirrecta determinada por la visual dirigida hacia un punto que está ubicado por debajo de él.

Veamos el siguiente ejemplo:

Se reporta un aeroplano que está precisamente sobrevolando un puesto de observación que se halla a 3000 m de una batería antiaérea. Desde la batería, el ángulo de elevación del avión es de 27°. Determiná la altura a la que está el avión.

Solución:

En primer lugar, es conveniente para los problemas de este tipo dibujar el esquema de un triángulo rectángulo y consignar los datos; luego seleccionar la razón trigonométrica correspondiente a la situación.
Observamos la figura de análisis y luego aplicamos la razón trigonométrica conveniente según los datos que tenemos:



$$tg27^o = \frac{\overline{xy}}{3000}$$

$$tg\ 27^o \cdot 3000m = \overline{xy}$$

$$1529m = \overline{xy}$$

<u>Respuesta:</u> La altura a la que está el avión que se encuentra sobrevolando el puesto de observación es de 1529 m.

Para repasar lo dado hasta aquí:

1) ¿Cuánto medirá la sombra proyectada por un poste de 7 m si el ángulo de elevación del sol es de 72° 15´?

2) El edificio Chrysler en Nueva York tiene 1046 pies de altura. ¿A qué distancia en metros del edificio estará una persona que sabe que el ángulo de elevación es de 75°? (Dato: 1 pie = 0,30480 m).

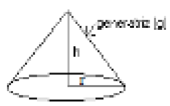
3) La altura de un rectángulo es de 17 cm y su diagonal de 30 cm. Determiná el ángulo que forma la diagonal en la base.

4) En el triángulo rectángulo ACB, con ángulo recto en C, el lado AB es cinco veces mayor que el lado AC. ¿Cuánto mide el ángulo en A?

5) Una escalera se apoya en una pared y tiene su pie a 3 m de la misma. Si alcanza a una ventana que está a 6 m del suelo, ¿qué ángulo determina la escalera con el suelo?

6) ¿Qué sombra proyectará un poste de 8 m de altura cuando el ángulo de elevación del sol es de 35°? ¿Qué longitud de alambre se requiere para asegurar el poste si se amarra a 3 m del pie del poste formando un ángulo de 60° en el suelo?

7) Calculá el ángulo en la base de una sección cónica si su altura es de 16 cm y el radio de la base es de 12 cm. Determiná la generatriz de la sección cónica.



8) Un poste de cable video se mantiene vertical mediante un viento de alambre que hace un ángulo de 25º con el poste y que ejerce una fuerza tensora de 300 kgf sobre el extremo. Hallá las componentes horizontal (F_h) y vertical (F_v).

9) Desde lo alto de un mirador que tiene 25 m de altura, se observan en una misma dirección una escultura y una fuente. La escultura se ve bajo un ángulo de depresión de 30° y la fuente, bajo un ángulo de depresión de 45°. ¿A qué distancia de la escultura se encuentra la fuente?

10) Un asta de bandera está colocada verticalmente en el remate de una torre. Desde un punto situado a 30 m del pie de la torre y frente al asta, los ángulos de elevación al extremo superior y a la base del asta son de 51° y 47°, respectivamente. Calculá la altura de la torre y la altura del asta.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

Se denominan ***triángulos oblicuángulos*** a los triángulos que no son rectángulos, es decir, a los acutángulos y obtusángulos.

Cuando conocemos dos ángulos del triángulo *ABC* podemos calcular el tercero aplicando la propiedad de la suma de los ángulos interiores:

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$$

Para la resolución de triángulos, sean rectángulos u oblicuángulos, se aplican dos propiedades conocidas con el nombre de ***ley de las senos*** y ***ley de los cosenos***.

Ley de los senos
En un triángulo cualquiera de lados *a*, *b*, *c*, y ángulos *A*, *B*, *C*, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\boxed{\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}}$$

Demostración:

Consideremos el triángulo *ABC* acutángulo, y trazamos la altura *h* desde el vértice *A:*

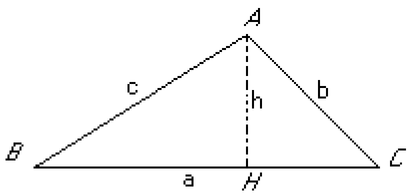


Figura 8

Los triángulos *BHA* y *CHA* son rectángulos. Por lo tanto, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\hat{B} = \dfrac{h}{c} \Rightarrow h = c\,.sen\,\hat{B} \\ sen\,\hat{C} = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b\,.sen\,\hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow c\,.sen\,\hat{B} = b\,.sen\,\hat{C}$$

Luego: $$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Esta es la segunda de las igualdades buscadas.

Si trazamos la altura desde el vértice *C* relacionaríamos los lados *a, b* con sus ángulos opuestos, obteniendo: $$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

Por lo tanto, en cualquier triángulo resulta que:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

La ley de los senos puede enunciarse del siguiente modo:

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos a dichos lados.

Nota: Si demostramos esta propiedad para triángulos obtusángulos, debemos tener en cuenta las mismas consideraciones que en el caso de los triángulos acutángulos pero recordar que el seno de un ángulo obtuso es igual al seno de su suplemento.

Veamos el siguiente ejemplo:
Dado el triángulo *ABC* en el cual el lado *b* mide 18 unidades y los ángulos *A* y *B* miden 105° y 45°, respectivamente. Calculá el lado *c*.

Solución:
Una forma conveniente de aplicar la ley de los senos consiste en escribir el dato que se busca en el numerador de una de las dos razones.
Según nuestros datos, consideremos la expresión:

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Por la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo calculamos el ángulo *C*.

$$\hat{C} = 180^{\circ} - (\hat{A} + \hat{B}) = 30^{\circ}$$

Luego: $\dfrac{c}{18} = \dfrac{sen30^{\circ}}{sen45^{\circ}} \Rightarrow c = \ 13 \ \ unidades$

Ley de los cosenos.

Dado el triángulo acutángulo *ABC* con lados *a*, *b* y *c*. Resulta que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

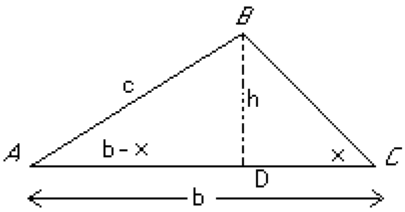


Figura 9

Desde el vértice *B* se traza un segmento *BD* perpendicular al segmento *AC*:

Sea $\overline{BD} = h,$ $\quad \overline{DC} = x$ $\quad$ y $\quad \overline{AD} = b - x$

Demostración:

En el triángulo *BDC*, $h^2 = a^2 - x^2$ (Teorema de Pitágoras)

En el triángulo *BDA*, $h^2 = c^2 - (b - x)^2$

$\therefore c^2 - (b - x)^2 = a^2 - x^2$ (ambas expresiones son iguales a h^2)

$$c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx (1)$$

En el triángulo *DBC*: $\cos \hat{C} = \dfrac{x}{a}$

$$\therefore x = a \ \cos \ \hat{C}$$

y sustituyendo en $\cos \hat{C}$ por x en (1), obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

De la misma manera, trazando una altura desde el vértice *C* o bien desde el vértice *A*, se puede demostrar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

En síntesis, las expresiones que se obtienen son:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cos\hat{A}}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,cos\hat{B}}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\hat{C}}$$

<u>Nota</u>: Si demostramos esta propiedad para triángulos obtusángulos, debemos tener en cuenta las mismas consideraciones que en el caso de los triángulos acutángulos pero recordar que el coseno de un ángulo obtuso es igual al opuesto del coseno de su suplemento.

La ley de los cosenos se enuncia como sigue:

"El cuadrado de cualquiera de los lados de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman".

De cada una de las tres fórmulas anteriores, despejando $cos\,\hat{A}, \cos\ddot{B}\;\; y\; cos\;\hat{C},$ $cos\,\hat{A}, \cos\ddot{B}\;\; y\; cos\;\hat{C},$ se obtiene:

$$\boxed{cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

Actividad:

Una plaza triangular tiene lados de 35 metros y 22 metros que se cortan formando un ángulo de 93° . Calculá el valor del lado restante.

Cálculo de áreas.

Estudiaremos a continuación dos propiedades que nos permitirán calcular el área de un triángulo. Son ellas: la propiedad fundamental y la fórmula de Herón.

<u>Propiedad fundamental del área de un triángulo</u>

El área de un triángulo es igual al semi-producto de las medidas de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido.

Demostración:

Sea *ABC* el triángulo considerado y designemos con *S* su área y con *a, b* y *c* las medidas de los lados. Se trata de demostrar que:

$$A = \frac{1}{2} ab \quad sen\hat{C}$$

$$A = \frac{1}{2} ac \quad sen\hat{B}$$

$$A = \frac{1}{2} bc \quad sen\hat{A}$$

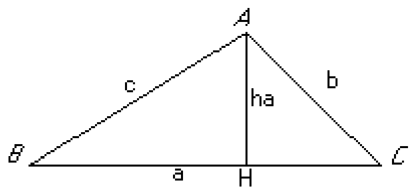


Figura 10

Sabemos, por geometría que el área de un triángulo es igual al semi-producto de la medida de la base por la de la altura. Luego, tomando el lado *BC* como base y trazando la altura correspondiente $\overline{AH} = h_a$, tenemos: $A = \frac{1}{2} a h_a$ (1)

Pero en el triángulo rectángulo *AHC* se tiene:

$$\overline{AH} = \overline{AC} \quad sen\, A\hat{C}H$$

$$\therefore h_a = b \quad sen\hat{C}$$

Por lo tanto, reemplazando en (1) nos queda: $A = \frac{1}{2} ab \quad sen\hat{C}$

Análogamente:

$$A = \frac{1}{2} ac \quad sen\hat{B} \qquad A = \frac{1}{2} bc \quad sen\hat{A}$$

lo que demuestra el teorema.

Fórmula de Herón: El valor del área de un triángulo en función de los lados, está dado por la conocida fórmula de Herón (siglo II a.C.):

$$\boxed{A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}$$

Siendo el semi-perímetro: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Actividad:

1) Calculá el área de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 cm.
2) Dos lados de un triángulo miden 23 cm y 56 cm, y forman un ángulo de 67° 23´ 55´´. Hallá el área del triángulo.

RECORRIDO I: Conjuntos numéricos

1) Justificá la verdad o falsedad de los siguientes enunciados:

a) Todo número natural es real.
b) Todo número racional es irracional.
c) Un número puede ser real sin ser entero.
d) Todo número racional es real.
e) Todo número entero es natural.
f) El opuesto del número natural a es – a, también natural.
g) Sean a y b números enteros, si $|a| = |b|$ entonces $a = b$.
h) Dado el número real a, se cumple siempre que $|a| > 0$.
i) El conjunto de los números enteros tiene primer elemento y no tiene último elemento.

2) Escribí los siguientes números en forma factorizada:

a) 36	e) 60	i) 300
b) 14	f) 450	j) 1350
c) 18	g) 1155	k)1890
d) 54	h) 2040	l) 315

3) Hallá el MCD y el mcm de los siguientes números:

a) 6, 13 y 20	b) 374, 60 y 126	c) 18, 16, 64 y 72
d) 30, 36 y 40	e) 24, 32 y 35	f) 20, 36, 48 y 63
g) 30, 12, 25 y 33	h) 24, 96, 28 y 27	

4) Respondé las siguientes preguntas y justificá en cada caso:

a. ¿Cuándo una fracción es positiva?, ¿cuándo es negativa? y ¿cuándo es igual a cero?

b. ¿Cuándo una fracción es menor que uno?, ¿cuándo es mayor que uno? y ¿cuándo es igual a uno?

c. ¿Entre qué números enteros se encuentra el número $\frac{9}{4}$? Intentá responder sin emplear la calculadora.

5) Respondé las siguientes preguntas, justificando las respuestas:

a. ¿Para qué valores de a es válida la expresión $\sqrt{a^2} = a$?

b. ¿Para qué valores de a es válida la expresión $\sqrt{a^2} = |a|$?

c. ¿Cuándo es cierto que $|-x| = x$?

d. ¿Cuándo es cierto que $|x| = -x$?

6) Resolvé las siguientes operaciones combinadas, en caso de ser necesario, expresá las expresiones decimales como fracciones:

1) $-\{5-(-4)+(-1)-(3+2)\}=$

2) $\{-3+5-[-4+8]-(-1)\}+(-2)=$

3) $-8+[7-(-10)]-\{-5+[-8-(-9)]\}=$

4) $(3^2-2^2):\{(3+2)^2+\left[(-5)^2-5^2\right]:12+10.(-2)\}=$

5) $\{[-3.4]:[-12:(+10)]\}:\{[-5:(+12)].[3.(-4)]\}=$

6) $\sqrt[3]{10^2+(-5)^2}+\sqrt[3]{\sqrt{64}}-\sqrt{\sqrt{49}+\sqrt{4}}-(-1)^7=$

7) $\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{27}+\sqrt{10^2-8^2}\right).(-3)}+(-2)^4:(-.4)^2+\sqrt{400}=$

8) $\sqrt[3]{1-28}-32:\sqrt{4+12}+\left[(3-2.5+5)^2\right]^3=$

9) $-8-2.(4-7)^2+\sqrt[3]{(4-6)^3.(-1)}+(-3)^2+12:(2-5)=$

10) $\left(2-0,\hat{1}.\dfrac{3}{2}\right)^2=$

11) $\dfrac{0{,}13\hat{4}\cdot 0,\widehat{81}}{0{,}005}\cdot 0,\hat{2}=$

12) $$\frac{\sqrt{\left(\frac{5}{3}-\frac{10}{9}\right).\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\right)}}{\frac{5}{6}.\frac{4}{9}}+\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^{-1}}{\frac{7}{4}-\frac{37}{16}}=$$

13) $$\frac{\frac{2}{5}-\left(1-\frac{3}{5}\right)+1:\frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}-1\right)-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}-\left(1:\frac{1}{3}\right)=$$

14)

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.\left(\frac{2}{3}\right).\sqrt{\frac{4}{9}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.3^{-3}}-\left(\frac{5}{2}.\sqrt[3]{\frac{1}{5}-\frac{17}{125}}\right)=$$

15) $$\left[\frac{\frac{2}{5}-\frac{3}{2}}{5-\frac{3}{5}}+\sqrt{1-\frac{3}{4}}\right]^{2}=$$

16)

$$\frac{\frac{3}{8}-\left(2+\frac{1}{4}:2\right).\frac{3}{17}}{\left(\frac{2}{5}-1\right).\left(-\frac{5}{4}+4\right):7}=$$

17)

$$\frac{0{,}6\hat{2}+2{,}1\hat{5}-1{,}\hat{9}}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}:0{,}6}$$

18)

$$\frac{1{,}\hat{2}:\left(4-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{0{,}\hat{5}\cdot 5}}{\left(2{,}\hat{6}-1{,}6\right)\cdot\left(0\hat{8}-0{,}\hat{4}+\frac{1}{11}\right)\cdot\sqrt{13+\frac{4}{9}}}=$$

7) Escribí cada una de las siguientes potencias como radicales, aplicando propiedades en caso de ser necesario:

a) $32^{\frac{1}{5}}=$

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{-1}{2}}=$

c) $\left(-\frac{1}{512}\right)^{\frac{-1}{9}}=$

d) $(0{,}0625)^{\frac{1}{4}} =$

e) $(-8)^{\frac{4}{3}} =$

f) $\left(\dfrac{1}{243}\right)^{\frac{1}{3}} =$

g) $(0{,}125)^{\frac{2}{3}} =$

h) $\left(-\dfrac{32}{243}\right)^{\frac{3}{5}} =$

i) $\dfrac{512^{-\frac{2}{3}}}{81^{\frac{3}{4}}} =$

j) $\dfrac{169^{\frac{3}{2}}}{(-125)^{\frac{2}{3}}} =$

k) $(81)^{-\frac{1}{4}} =$

l) $(-27)^{-\frac{1}{3}} =$

m) $\left[\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{-1}\right]^{-2} =$

8)Escribí estas expresiones con radicales como potenciaciones de base 2:

a) $2\sqrt{2} =$

b) $\sqrt[5]{2^2} =$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}} =$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3}} =$

e) $\sqrt[5]{2} =$

f) $2\sqrt[3]{2} =$

g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} =$

h) $2^2\sqrt[5]{2} =$

9)Resolvé, aplicando las propiedades de la radicación:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{4}} =$

b) $\sqrt{2}.\sqrt{10}.\sqrt{5} =$

c) $\sqrt[4]{2^6} =$

d) $\sqrt{30} : \left(\sqrt{5}.\sqrt{2}\right) =$

e) $\sqrt{3}.\sqrt{2}.\sqrt{6} =$

f) $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

10) Sean $a, b, c, d, m, x, y > 0$. Simplificá las expresiones y expresalas como potenciaciones de modo que el exponente sea un número positivo.

a. $\left[\left(\sqrt{x}\right)^4\right]^3 =$

b. $\left(\dfrac{a^{-2}b^3}{a^3b^{-2}}\right)^5 =$

c. $\dfrac{\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{-3} : (5^6)^{\frac{3}{2}}}{5^9} =$

d. $\dfrac{x^{-2}y^3}{x^3y^{-4}} =$

e. $\dfrac{2^{-4}.4^3}{2^{-5}.8} =$

f. $\dfrac{(a+b)^{-2}}{(a+b)^{-3}} =$

g. $\dfrac{m^3 : (m^{-3}.m^3)^{-2}}{\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{3}}} =$

h. $\dfrac{(a^5)^2.(b^{-6})^{\frac{1}{3}}.c^3}{(a^{-3})^{-2}(b^2)^{-1}(c^2)^{\frac{3}{2}}} =$

i. $\dfrac{(-a^{-5}b^6)^3}{(a^3b^4)^2} =$

11) Realizá las siguientes operaciones con radicales:

a. $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} =$

b. $6\sqrt{10} + 5\sqrt{90} - 3\sqrt{10} =$

c. $\sqrt{2} + \sqrt{32} + 5\sqrt{8} =$

d. $2\sqrt{27} - 4\sqrt{12} =$

e. $\sqrt[8]{128x^4} + \sqrt[8]{16x^7} =$

f. $10\sqrt{3x} - 2\sqrt{75x} + 3\sqrt{243x} =$

g. $\sqrt{x^5} + x\sqrt{x^3} + \sqrt{\sqrt{x^{10}}} =$

12) Racionalizá los denominadores de las siguientes expresiones:

a. $\frac{8x}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{1}{\sqrt{27}}$

c. $\frac{20x}{\sqrt{5x^3}}$

d. $\frac{6}{\sqrt[3]{6}}$

e. $\frac{4}{\sqrt[9]{256y^8}}$

f. $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

g. $\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

h. $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

i. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

j. $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$

k. $\frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{2-x}}$

l. $\frac{1-a}{\sqrt{a}+1}$

m. $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

13) Resolvé las siguientes operaciones combinadas y racionalizá denominadores en caso de ser necesario.

A) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^2 =$

B) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} =$

C) $\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}{3\sqrt{12}-6}} =$

D) $\frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{3}{2}\sqrt{2}.\sqrt{8} - \frac{1}{4}\sqrt{2}.\sqrt{6} - \frac{3}{2}\sqrt{3}} =$

E) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{3}-1}} =$

F) $\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}} =$

14) Hallá los siguientes logaritmos empleando la definición.

a. $\log_3 9 =$ *e.* $\log_5 125 =$ *h.* $\log 0{,}0001 =$

b. $\log_7 7 =$ *f.* $\log_2 \sqrt{2} =$ *i.* $\log_{\sqrt{3}} 9 =$

c. $\log_2 \left(\frac{1}{16}\right) =$ *g.* $\log_{\frac{1}{2}} 4 =$ *j.* $\log_{\sqrt{2}} 0{,}25 =$

d. $\log_8 1 = \log_8 1 =$

15) Transformá en logaritmo cada una de estas potenciaciones:

a. $2^4 = 16$

b. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

c. $10^{-5} = 0{,}00001$

d. $42^0 = 1$

e. $64^{\frac{1}{2}} = 8$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

16) Hallá los siguientes logaritmos utilizando las propiedades de la logaritmación.

a. $log_2(\sqrt{8}\,.4) =$

b. $\log_3 \left(\frac{1}{27^2}\right) =$

c. $\text{Log}\left(0{,}1\,.\sqrt[3]{1000}\right) =$

17) Aplicá las propiedades de la logaritmación para escribir expresiones equivalentes.

a. $\log(2^3.8^2) =$

b. $\log\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{5^4}\right) =$

c. $\log\left[(3\,.\sqrt{2})^{\frac{3}{5}}\right] =$

d. $\log \sqrt[5]{2^6\,.5^{-2}.3} =$

18) Para seguir pensando…

a. La base de un triángulo rectángulo es 4, la altura es $\frac{3}{4}$ de la base. Calculá la hipotenusa y su perímetro.

b. Calculá la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 18 cm.

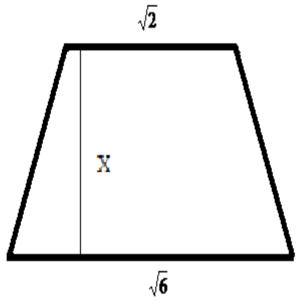
c. Las longitudes de los lados consecutivos de un rectángulo son 8 cm y 6 cm. Determiná la longitud de la diagonal y calculá su área.

d. En un triángulo rectángulo, el cateto **B** es el doble del cateto **C.** Calculá cada uno de sus lados sabiendo que el perímetro es de 4 unidades.

e. El perímetro de un triángulo rectángulo isósceles es $3\sqrt{2}$ unidades. Calculá cada uno de sus lados y dejá expresado el resultado en forma de radical.

f. Expresá el volumen de un cubo de $7\sqrt{7}$ cm de arista como potencia de exponente fraccionario.

g. Si cada una de las figuras tienen una unidad de área. Hallá el valor de la incógnita:



h. El segundo ángulo de un triángulo mide tres veces lo que mide el primero y el tercero mide 12° menos que dos veces el primero. Calculá el valor de los ángulos.

i. Calculá la medida de la diagonal de un rectángulo y el perímetro del mismo, sabiendo que un lado mide $2\sqrt{3}$ cm, y el otro 2 cm menos que éste.

j. La diagonal de un cuadrado es $\sqrt[3]{4}$ cm. ¿Cuál es el perímetro del mismo, expresado como potencia de exponente fraccionario?

19) Dados los números complejos:

$z_1 = 3 + 2i$ $z_2 = -5 + i$ $z_3 = \frac{1}{2} - i$ $z_4 = 6i$

Calculá:

a) $z_1 + z_2 - z_3 =$ **b)** $z_1 + (z_4 - z_2)^2 =$ **c)** $\overline{z_1} + 3.z_4 =$

d) $(z_1.z_2) + 5.(z_2 - 4.z_3) =$ **e)** $\frac{z_1}{z_2} =$ **f)** $\frac{z_1}{z_4} + \overline{z_2} =$

20) Resolvé los siguientes cálculos con números complejos:

a) $\left(1{,}2+\sqrt{5}i\right)+\left(0{,}6+2\sqrt{5}i\right)+\left(-3-\frac{1}{2}i\right)=$

b) $\left(-2\sqrt{3}-i\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}i\right)+\left(\sqrt{27}-\frac{5}{2}i\right)=$

c) $\left(-4+6i\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3}:\left(-1+i^{35}\right)=$

d) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{12}i\right).\sqrt{3}i=$

e) $\left(\frac{1}{2};\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{3}};\frac{1}{3}\right)=$

f) $\left(-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}i\right)-\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}i\right)=$

g) $\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-i\right)\sqrt{2}:\left(-\sqrt{8}-i\right)^{2}=$

h) $\left(-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}i\right)\frac{\left(-3-\frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)}=$

RECORRIDO II: Expresiones algebraicas.

1) Dadas las siguientes expresiones, decidí cuáles son los polinomios y en tal caso, indicá el grado, el coeficiente principal, el término independiente.

$a) -2t^3 + 4t^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{t^2} + 2$

$b)\ \frac{1}{2}t^5 + 6t^4 - \frac{3}{2}t^3 - 2t + 5$

$c)\ \sqrt{t} - 2$

$d)\ \frac{1}{3}t^2 + 2t - 1$

2) Considerá el polinomio $2x^5 + 6x^4 + 4x^2$:

- ¿Cuántos términos tiene?
- Escribí los términos.
- ¿Cuál es el factor común?
- Factorizá el polinomio.

3) Construí un polinomio $R(x)$ que cumplan, en cada caso, las siguientes condiciones:

a) Es de grado 3 y no tiene término lineal.

b) Es de grado 4, el coeficiente principal es -3 y el término lineal es 1. ¿Es único dicho polinomio?

4) Escribí los siguientes polinomios en forma decreciente y completalos:

$a)\ P(x) = \sqrt{2} - 3x^2 + x^5 + 6x - \frac{3}{2}x^3$

$b)\ P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5 + 4x - 6x^4 - \frac{3}{2}x^5$

5) Encontrá a, b, c y d para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales.

$P(x) = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{5}x^3 + 3; \quad Q(x) = (a-1)x^3 + (b+2)x^2 + cx + d$

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad Q(x) = 3(x-1)(x+2)(x-1)$

6) Dados los polinomios:

$P(x) = -3 + 5x^3 - 7x^2 + 3x; \quad Q(x) = 4x^2 - 6x - 4x^4 + 3;$

$R(x) = 3x^3 + 2x; \quad S(x) = 3$ **realizá las siguientes operaciones:**

$a)\ [P(x) + Q(x)].R(x) =$

$b)\ P(x) - [R(x)]^2 =$

$c)\ S(x).R(x) - Q(x) + \frac{1}{2}P(x) =$

7) Hallá en cada caso, el cociente y el resto de dividir $P(x)$ por $Q(x)$, utilizando la regla de Ruffini cuando sea posible.

$a)\ P(x) = 4x^4 + 18x^3 + 29x + 10; \quad Q(x) = 2x^2 + 3x - 1$

$b)\ P(x) = \frac{1}{8}x^5 + 8x^3 - \frac{7}{2}x^6; \quad Q(x) = x^2 + 2x;$

c) $P(x)=\frac{9}{2}x^6-x^4-\frac{5}{3}x^2-5;\ \ Q(x)=x-1$

d) $P(x)=3x^5+x^4-\frac{5}{9}x^2;\ \ Q(x)=x-\frac{1}{2}$

8) ¿Es cierto que existe un polinomio $P(x)$ tal que $6x^6-9x^4+10x^2-15=P(x)(2x^2-3)$? Justificá.

9) Calculá el valor de m para que el resto de la división de $P(x)=4x^4-mx^3+3x^2$ por $Q(x)=x-3$ sea 324.

10) ¿Qué valores deben tener m y n para que el polinomio $Q(x)=x^3+mx^2+nx+6$ sea divisible por $(x-3)$ y $(x+2)$?

11) Determiná si $1; 2; 0;\ \sqrt{2}$ son raíces de los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^3-x^2+x-1$

b) $P(x)=x^4-2(\sqrt{2}+1)x^3+2(\sqrt{2}+1)x^2-4x$

12) Hallá los valores de *a* y *b* en el polinomio *P(x) =* $x^4-a\,x^3+b\,x^2$ para que *x = 3* y *x = - 1* sean dos de sus raíces.

13) Hallá todas las raíces reales de los siguientes polinomios sabiendo que *r* es una de ellas:

$A(x)=x^4-x^3+3x^2-3x,\quad r=1$

$C(x)=2x^3+6x^2-2x-6,\quad r=-3$

$D(x)=3x^4+5x^3-5x^2-5x+2,\quad r=\frac{1}{3}$

14) El polinomio $P(x)=2x^3-18x^2+x-9$ es divisible por $Q(x)=2x^2+1$. Hallá la única raíz real de $P(x)$.

15) Encontrá los valores de *a* tales que al dividir x^2+5x-2 por $x-a$ el resto sea igual a -8.

16) Hallá el resto de la división de los polinomios $A(x)=x^3-3x+2$ y $B(x)=x-1$.

17) Ídem al anterior, pero ahora tomando como divisor $C(x)=x+2$.

18) Indicá si $A(x)$ es divisible por $B(x)$ o por $C(x)$ de los ejercicios 16 y 17 .

19) Hallá el cociente y el resto de la división para los siguientes pares de polinomios.

$A(x)=-x^6+2x^5-3x^3+3,\quad B(x)=x+2$

$A(x)=-x^5+x^4+2x^3-1,\quad B(x)=x-3$

20) Determiná el valor de k en el polinomio $P(x) = -2x^4 + kx^3 - 3x - 2$ sabiendo que el resto de dividir $P(x)$ por $x + 2$ es 5.

21) ¿Para qué números reales *m* el resto de dividir el polinomio $P(x) = 3x^2 + 9x - 26$ por $(x - m)$ $es\ 4$?

22) Factorizá las siguientes expresiones:

$a)\ 12x^3 + 18x$

$b) x^2 - 2x - 8$

$c) 30x^3 + 15x^4$

$d) x^2 - 14x + 48$

$e)\ \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}$

$f) x^4 - \frac{81}{49}$

$g) 2x^2 + 5x + 3$

$h) 9x^2 - 36x - 45$

$i) 49 - 4y^2$

$j) t^2 - 6t + 9$

$k) (a+b)^2 - (a-b)^2 =$

$l)\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 =$

$m) x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) =$

$n) (a^2 - 1).b^2 - 4(a^2 - 1) =$

$o) 8x^3 - 125 =$

$p) x^3 + 2x^2 + x =$

$q) 3x^3 - 27x =$

$r)\ x^4y^3 - x^2y^5 =$

$s)\ 18y^3x^2 - 2xy^4 =$

$t)\ (x-1)(x+2)^2 + (x-1)^2(x$

23) Comprobá la veracidad de las siguientes igualdades, siendo a y b números reales.

1) $ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - (a^2+b^2)]$

2) $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2 = 4a^2b^2$

3) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$

24) Factorizá por completo la siguiente expresión:

$$4a^2c^2 - \left(a^2 - b^2 + c^2\right)^2$$

25) ¿Cuál es la forma totalmente factorizada de la expresión $x^2(x-2) - 4x(x-2) + 4(x-2)$?

26) Para seguir pensando un poco más…

a. La cantidad de individuos de dos poblaciones A y B, responde a las siguientes fórmulas:

$P_A(t) = \dfrac{3}{2}t + 50$

$P_B(t) = t^3 - 12t^2 + 44t + 8$

donde t es el tiempo expresado en semanas. Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana, ¿tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

b. El Servicio Meteorológico utilizó como modelo para la variación de la temperatura en grados centígrados durante cierto día la fórmula $T(t) = 0,04t(t-12)(t-24)$ donde t está medido en horas y $t=0$ corresponde a las 6 horas am. ¿A qué hora la temperatura fue de $0\ ^oC$? ¿A qué hora tomó valores superiores a $0\ ^oC$? ¿A qué hora valores inferiores a $0\ ^oC$?

c. En una isla se introdujeron 112 iguanas. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. El número de iguanas a los *t* años de haberlas dejado en la isla está dado por $I(t) = -t^2 + 22t + 112$.

¿En qué momento la población de iguanas se extingue? Calculá la cantidad de años en los cuales la población de iguanas aumentó. Graficá la función $I(t)$.

27) De las siguientes expresiones, ¿cuáles son expresiones racionales fraccionarias?

$(a)\,\frac{3x}{x^2-1}$ $(b)\,\frac{\sqrt{x+1}}{2x+3}$ $(c)\,\frac{x(x^2-1)}{x+3}$

28) Considerá la expresión $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{x}{(x+1)^2}$;

- **a. ¿cuántos términos tiene esta expresión?**
- **b. encontrá el mínimo común denominador de todos los términos.**
- **c. resolvé y simplificá la expresión en caso de ser posible.**

29) Simplificá la expresión racional fraccionaria e indicá las restricciones correspondientes.

1) $\frac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$ 2) $\frac{4\,(x^2-1)}{12\,(x+2)(x-1)}$

3) $\frac{x-2}{x^2-4}$ 4) $\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$

5) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$ 6) $\frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$

7) $\frac{x+\frac{1}{x+2}}{x-\frac{1}{x+2}}$ 8) $\frac{1+\frac{1}{c-1}}{1-\frac{1}{c-1}}$

9) $\frac{\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x-2}}{x+2}$ 10) $\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$

11) $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ 12) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+1)^{-1}}$

13) $1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ 14) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$

30) Reducí a la mínima expresión las siguientes expresiones racionales fraccionarias:

a) $\frac{(x+1)^3}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2-25}{2x-10}$ c) $\frac{x^2-7x+6}{x^2-x}$

31) Realizá las operaciones indicadas y simplificá, en caso de ser posible.

a) $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+1}$; b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}+\frac{x}{x-1}$; c) $\frac{x^2}{x^2-x+1}-\frac{x+1}{x}$

32) Factorizá, operá algebraicamente y simplificá las siguientes expresiones:

$a)\ \dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x+3}{x^2+4x+4}$

$b)\ \dfrac{6}{2y+6}-\dfrac{3y}{y^2-9}$

$c)\ \dfrac{bx^2-b}{x^2+2x+1}-\dfrac{bx^2+1}{x^2+x}$

$d)\ \left(\dfrac{a}{p+1}-\dfrac{a}{q-1}\right).\dfrac{a-aq^2}{3a^2}$

33) Comprobá las siguientes igualdades:

$a)\ \dfrac{(x^{-1}+y^{-1})^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}:(x^{-2}-y^{-2})^{-1}=1$

$b)\ \left[\dfrac{3x^2+1}{2x^2}-\dfrac{3x+1}{9x^2-1}.\dfrac{(3x-1)^2}{2x}\right]:\dfrac{x^2+2x+1}{4x^3}=\dfrac{2x}{x+1}$

34) Verificá la validez de la igualdad:

$\dfrac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}=-\sqrt{a}-\sqrt{a+b}$

35) Usando el resultado del inciso anterior, operá algebraicamente y simplificá la siguiente expresión:

$$\frac{\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}-\sqrt{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}\right)}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}}$$

RECORRIDO III: Ecuaciones y desigualdades

1) Resolvé las siguientes ecuaciones, indicá la o las soluciones encontradas y realizá el proceso de verificación.

a) $2x-5=4x-2$

b) $x+x+1+x+4=9x-1$

c) $x-9x+5=2x+3$

d) $2x-x+3-4x+9=39$

e) $8x-3=4x-2$

f) $-4x-5=-3x+3$

g) $2x+14-9x=6x-12$

h) $2x+1=3x+5$

i) $0{,}75x-20=2{,}25x-5$

j) $0{,}25x-0{,}75+2{,}25x=1$

k) $(6x-2)x=(2x-1)3x+0{,}1$

l) $3x+1=\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}\right)6$

2) Resolvé las siguientes ecuaciones, aplicando las propiedades de la igualdad. Indicá las restricciones en caso de ser necesario.

a) $3x-10x=8x-30$

b) $36-\frac{4}{9}x=8$

c) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=4$

d) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}=1$

e) $\frac{x+4}{3x-6}-\frac{x-6}{4x-8}=\frac{x+1}{x-2}$

f) $\frac{x}{x-3}+\frac{1}{x-5}=\frac{2}{x^2-8x+15}$

g) $2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=1$

h) $\frac{5x+1}{3x+2}-\frac{7}{x+4}=0$

i) $\sqrt{3x-6}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{9x+4}$

j) $\frac{3x-9}{x}=\frac{3x+4}{x+3}$

k) $\frac{5x-4}{x-2}=\frac{24}{x^2-4}-\frac{3x}{x+2}$

l) $\frac{\frac{1}{6}x}{2x+5}=\frac{x}{3+2x}$

m) $\frac{x-2}{x+1}=\frac{x}{x+1}-\frac{4x}{2x+4}$

n) $\frac{x}{3x+5}-\frac{1}{x+1}=-1$

o) $\frac{(x-2)^2-x^2}{3x}=\frac{2}{x}-4+2x$

p) $\frac{5x}{2x+4}-\frac{x-4}{x^2+4x+4}=\frac{2}{x+2}$

q) $\frac{5-3x}{3x}+\frac{x-2}{1-x}=-\frac{2x-1}{1+x}$

r) $\frac{9x+3}{x+1}=\frac{2x}{3x+1}$

s) $\frac{3x}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{x^2+2+7x}{x^2-4}$

3) Resolvé las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas, realizá la verificación e indicá la solución obtenida.

$a)\ 2^{5-3x}.16 = 512$ $b)\ 4^{2x} = 10$

$c)\ log_4(5x+1) = 3$ $d) 2log_5 x + log_5 8x = 3;\quad x > 0$

$e)\ 2^{3x-2} = 5$ $f)\ 4^x - 2^x = 0$

$g)\ 3^{x+1} - 3^x = 18$ $h) 3.2^{x+2} - 5.2^x = 56$

$i)\ 2^{x^2-1} = 8$

4) Hallá el valor de la incógnita de las siguientes ecuaciones logarítmicas. Verificá dichos valores para determinar la solución:

a) $\log(2x+1) = \log(x+1)$ b) $\log_2 x + 3\log_2 2 = \log_2 \frac{2}{x}$

c) $\log_4(2x+4) - 3 = \log_4 3$ d) $\log x + \log x - 1 = \log 4$

e) $2\log_3(x-1) = \log_3 49$ f) $(\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0$

g) $\log_{\sqrt{3}} x - 2\log_3 x + \log_9 2x = \frac{1}{2}$ h) $\ln x^3 - \ln\sqrt{x} = \frac{5}{2}$

i) $3\ln x - \ln x = \ln 9$ j) $\log_{x+2} 9 + \log_{x+2} 6 = 1$

k) $\log_{x+1} 8 + \log_{x+1} 6 = 1$

5) Si se multiplica un número por 5 se obtiene el mismo resultado que si se le suma 5. ¿Cuál es el número?

6) Para seguir pensando…

a. Calculá la longitud de un pilote sabiendo que su tercera parte está enterrada, su cuarta parte sumergida en el agua y que sobresale de ésta 3 metros.

b. Hallá cinco números enteros consecutivos sabiendo que su suma es 50.

c. Una persona puede hacer un trabajo en seis días y otra lo puede hacer en cuatro días. ¿Cuánto tardarán en hacerlo juntas?

d. La suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos es 31.214 ¿Cuáles son dichos números?

e. Calculá el tiempo que tarda un móvil animado con M.R.U.A. en recorrer 1044 metros, sabiendo que la velocidad inicial es de 40 cm/s y la aceleración es de 6 cm/s^2 .

f. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon las manos. Uno de ellos advirtió que los apretones de manos fueron 66. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

g. En un recinto del zoológico están mezcladas las jirafas con los avestruces. Si en total hay 30 ojos y 44 patas. ¿Cuántas jirafas y cuántos avestruces hay?

h. Hallá la edad de una persona y la de su hijo, sabiendo que la suma de esas edades es la mitad de la que tendrán dentro de 25 años y que la diferencia es la tercera parte de la suma de las que tendrán dentro de 20 años.

i. Una persona le dice a otra: “Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, y cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, nuestras edades sumarán 72 años”. Calculá las edades de ambas.

j. “Si me das una manzana, tendré el doble de las tuyas. Si te doy una de las mías, tendremos igual cantidad” ¿Cuántas manzanas tiene cada uno?

7) Escribí el conjunto solución de las siguientes inecuaciones con números enteros y represéntalo en la recta numérica:

a. $x > 0$

b. $x \geq 5$

c. $x < -5$

d. $x \geq -7$

e. $-2 < x < 3$

8) Resolvé las siguientes inecuaciones con números reales. Escribí y representá gráficamente el conjunto solución como intervalo.

a. $-3x + 1 \geq 10$

b. $-\frac{1}{2}x \leq 4$

c. $-2x + 6 \geq 16$

d. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3} < x + 2$

e. $3x - 2 < 2x + 14$

f. $-3x < 4$

g. $4(x-1) < 2(x+4)$

h. $-\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-1}{2}$

i. $4x + \frac{3}{2} \leq 7x - \frac{1}{3}$

j. $\frac{8-x}{2} < \frac{2x-1}{3}$

9) Hallá el conjunto solución de las siguientes inecuaciones con valores absolutos.

a. $|3x| < 15$

b. $|4 - 2x| < 6$

c. $|2x - 1| \geq 7$

d. $|2-3x|>8$

e. $|5-2x|—5\ \geq 3$

10) Escribí cada una de las siguientes inecuaciones sin el símbolo de valor absoluto. Expresá la solución como intervalo y representá este conjunto en la recta numérica.

a) $|x|\geq 1$ b) $|x-2|<4$ c) $|x+3|\leq 5$

d) $|x+3|>3$ e) $|x-2|\geq 4$ f) $|x-4\ |>6$

g) $|2x-1|<4$ h) $|3x+2|<1$ i) $|2-3x|>8$

11) Hallá el conjunto de números reales cuya distancia al número 2 sea menor que 3 unidades. Expresá la solución como intervalo.

12) Hallá el conjunto de números reales que se encuentran a más de 5 unidades del número -3. Graficá la solución en la recta numérica y expresala como intervalo.

13) Resolvé y clasificá según la solución obtenida, los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando el método de resolución que creas conveniente.

a) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x=3y-1 \\ 4x=6y+4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(y+2x)=x-2(y-2) \\ 4y+3x=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2(y+x)=x-y+6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x+4=3y \\ 9y=12-6x \end{cases}$

14) Determiná para qué valores de $k\in\mathbb{R}$ el sistema $\begin{cases} kx-y=-1 \\ -2x-y=3k \end{cases}$ **, es compatible determinado.**

15) Hallá un valor de $k\in\mathbb{R}$ para que el punto $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ sea solución al sistema de ecuaciones presentado en el ejercicio anterior.

16) Determiná $k\in\mathbb{R}$ de modo tal que el sistema $\begin{cases} y=a(3ax-1) \\ a+y=3x \end{cases}$ **sea:**

a) **compatible determinado.**
b) **compatible indeterminado.**
c) **incompatible.**

RECORRIDO IV: Funciones

GeoGebra *No olvides utilizar el programa GeoGebra, será de gran ayuda.*

1) Determiná el dominio de las siguientes funciones reales de variable independiente real.

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

$b)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

$c)\ f(x) = \dfrac{x-2}{4x^2+4x+1}$

$d)\ f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2+x-2}$

$e)\ f(x) = \dfrac{x}{x^3+8}$

$f)\ f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$g)\ f(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$

$h)\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{9x^2+12x+4}$

$i)\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+4x-5}}$

$j)\ f(x) = \sqrt{x^3-27}$

2) A partir de las funciones reales de variable real:

$$f(x) = 2x^2-1 \qquad g(x) = \frac{x-3}{2} \qquad h(x) = \sqrt{x+2}$$

Determiná si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tu respuesta.

1. $g(0) = 8$

2. La preimagen de $\frac{7}{5}$ en g es 10.

3. $f(2) - h(2) = 5$.

4. La imagen de 7 en h es $\sqrt{7}$.

5. La imagen de 10 en g es 2.

6. La preimagen de 49 en f es 7.

7. El dominio de g es el conjunto de los números reales menos el 5.

8. $Dom h = \mathbb{R}^+$

3) Las siguientes tablas corresponden a valores de dos funciones f y g desconocidas:

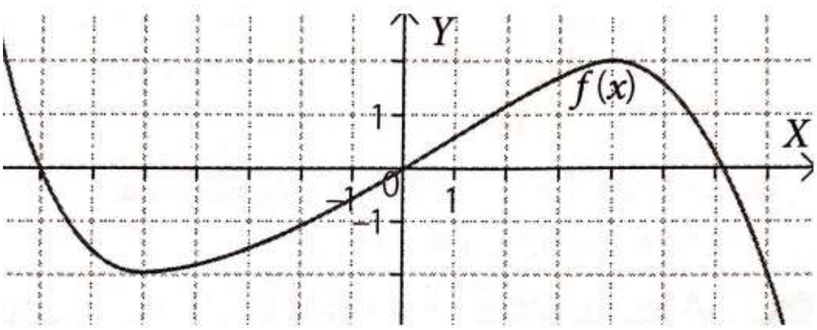
x	0	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	1	-1	3	-3	5	-5	7

x	0	-1	1	-2	2	-3	3
$g(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	1

Se pide:

1. **Representá gráficamente en el plano cartesiano, las funciones f y g.**
2. **A partir de las gráficas, definí las funciones f y g usando una expresión algebraica.**
3. **¿Las funciones f y g son crecientes o decrecientes?**
4. **¿Cuál es el valor de $f(-4) + g(7) \cdot f(5) - g(-6)$?**
5. **Determiná si las funciones son inyectivas, suryectivas o biyectivas.**

4) Observá la gráfica de la función y luego, realizá las actividades indicadas.



a. **¿Para qué valores de x la función es creciente? ¿Para qué valores es decreciente?**
b. **¿La función tiene puntos máximos y mínimos? ¿Cuáles?**
c. **Indicá tres puntos que pertenezcan a la función**
d. **¿La función es inyectiva? ¿Por qué?**

5) Determiná si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente.

a. **La función $f(x) = x^2 - 5$ es sobreyectiva.**
b. **La función $f(x) = 3x - 1$ es biyectiva.**

c. **La función $f(x) = x^2 + 2$ es inyectiva.**

6) Calculá los puntos de intersección de las funciones con los ejes cartesianos, representá gráficamente las siguientes funciones y luego, determiná los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$a) f(x) = 2x - 1$

$b)\ f(x) = \frac{1}{3}x$

$c)\ f(x) = -x + 3$

$d) f(x) = x^2 - 1$

7) Sea la función de variable real, definida por $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$.

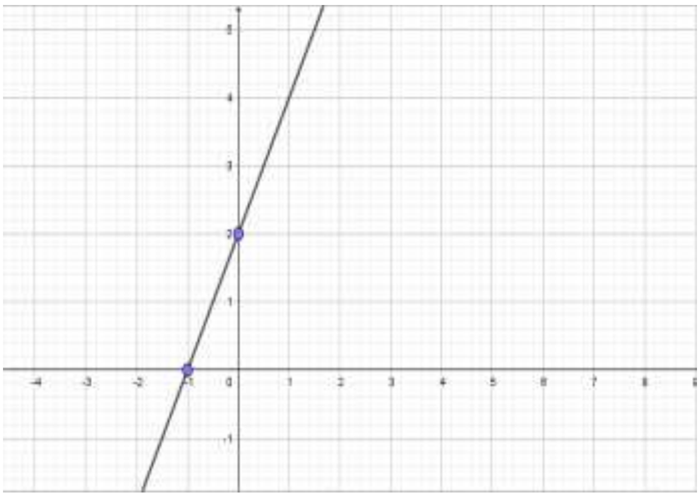
1) Graficá e indicá el domino y la imagen.

2) Hallá $f(6), f(-1) y\ f(0{,}75)$.

3) Determiná $a \in Domf$ tal que $f(a) = 30$.

4) Hallá los valores de $x \in Domf$ tal que $f(x) \geq 9$.

8) **Determiná la pendiente y la ordenada al origen de la función cuya representación gráfica se muestra a continuación. Encontrá la fórmula de la función.**



9) Para seguir pensando…

a) Sea *P* = *P*(*C*) la función que representa el precio de un producto en función del costo del mismo. Si para un determinado producto el precio *P* se obtiene incrementando el costo *C* en un 40 por ciento, ¿es el precio directamente proporcional al costo? En caso afirmativo, hallá la constante de proporcionalidad y escribí la ecuación de la función *P*(*C*). ¿Es *P*(*C*) una función lineal?

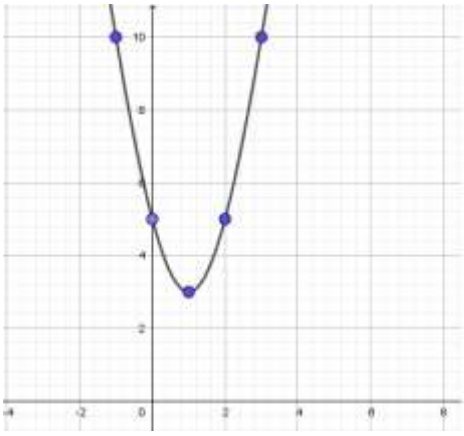
b) El Dr. Cormillot propone desayunar yogur, ensalada de frutas o una combinación de ambos, de modo tal que se consuman 250 calorías. El yogur tiene 110 calorías cada 100 gramos y la ensalada de frutas tiene 85 calorías cada 100 gramos. Si se combinan ambos, sea *x* la cantidad en gramos de yogur e *y* la cantidad en gramos de ensalada de frutas.

i. Escribí la fórmula que relaciona las variables intervinientes.
ii. ¿Qué cantidad de yogur se puede comer si se ingieren 140 gramos de ensalada de frutas?

10) Considerá la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

- ***a.*** **Calculá los puntos de intersección de la función con los ejes cartesianos.**
- ***b.*** **Determiná el valor máximo o mínimo de *f*, según corresponda y el valor de *x* donde alcanza dicho máximo o mínimo.**
- ***c.*** **Realizá el gráfico de *f*.**
- ***d.*** **Indicá el dominio y la imagen de *f*.**
- ***e.*** **Sin ayuda del gráfico de *f*, hallá un punto que pertenezca y otro que no pertenezca a la función.**

11) Escribí la forma polinómica de la parábola que se muestra a continuación, sabiendo que su coeficiente principal es igual a 2.



12) Realizá el estudio completo de las siguientes funciones cuadráticas y luego, represéntalas gráficamente.

a) $y = 2x^2 - 5x + 2$

b) $y = -x^2 + 2x + 3$

c) $y = (x-3)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 6x + 9$

e) $y = 2(x+1)^2 - 2$

13) Escribí las fórmulas de las funciones que respondan a las siguientes características:

a) La gráfica de $y = x^2$ trasladada 3 unidades a la izquierda y $\frac{1}{3}$ unidad hacia abajo.

b) La gráfica de $y = \frac{1}{4}x^2$ desplazada 2 unidades a la izquierda y 1 unidad hacia arriba.

c) La gráfica de $y = (x-3)^2$ desplazada 1 unidad a la izquierda.

d) La gráfica de $y = 2(x-1)^2 + \frac{5}{2}$ desplazada 5 unidades a la izquierda.

14) Graficá las siguientes funciones, calculando primero, los puntos de intersección de la gráfica con los ejes cartesianos y las ecuaciones de las asíntotas. Indicá dominio e imagen. Determiná si se trata de funciones biyectivas; de serlo, calculá sus inversas.

$a)\ f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 2$

$b) f(x) = 3^{x+2} + 1$

$c) f(x) = \log_2(x+2) - 1$

$d) f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + 2$

$e) f(x) = \log_3(2x-1) + 1$

15) Para seguir pensando…

A. El número Q de miligramos (mg) de una sustancia radiactiva que restan después de t años, está dado por: $Q = 100.e^{-0,035t}$

a) Calculá cuántos miligramos hay después de 10 años.
b) ¿Después de cuántos años habrá 20 mg? Proporcioná la respuesta al año más cercano.

B. La población de una ciudad está dada por la ecuación: $P(t) = 10000.e^{0,032t}$, donde t es el número de años transcurridos desde 1980.

a) ¿Cuántos habitantes tenía en 1996?
b) ¿En qué año, su población será el triple que en 1980?

16) Del apartado Actividades del Recorrido III, te proponemos que elijas tres sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas resueltos con anterioridad y que verifiques la solución representando gráficamente las dos funciones intervinientes. Recuerda que las fórmulas intervinientes en el sistema de ecuaciones deben estar expresadas como y en función de x para considerarlas funciones.

RECORRIDO V: Trigonometría

$\mathbf{1}) \ Si \ sen\hat{\alpha} = \frac{4}{5}.$

$\boldsymbol{Calcul}$á: $sen2\hat{\alpha}$; $cos2\hat{\alpha}$ y $tg2\hat{\alpha}$

2) Verificá las siguientes identidades:

$$\frac{tg\hat{\alpha} + cotg\hat{\alpha}}{tg\hat{\alpha} - cotg\hat{\alpha}} = \frac{sec^2\hat{\alpha}}{tg^2\hat{\alpha} - 1} \qquad cotg^2\hat{\alpha}(1 + tg^2\hat{\alpha}) = cosec^2\hat{\alpha}$$

$$2sen^2\hat{\alpha} - 1 = sen^4\hat{\alpha} - cos^4\hat{\alpha} \qquad sen^4\hat{\alpha} = \frac{1 - cos^2\hat{\alpha}}{cosec^2\hat{\alpha}}$$

3) Resolvé cada una de las siguientes situaciones problemáticas, extrayendo los datos que proporciona el problema, dibujando una figura de análisis y justificando cada paso realizado para hallar la solución.

a) En un triángulo rectángulo uno de sus catetos es la tercera parte del otro. Obtené los ángulos agudos de dicho triángulo.

b) Calculá la superficie de un terreno rectangular, sabiendo que un alambrado que lo atraviesa diagonalmente mide 65 metros y forma con uno de los lados del mismo un ángulo de 46° 23´.

c) Calculá el perímetro y la superficie de un triángulo isósceles, sabiendo que la altura correspondiente a la base mide 9,7 cm y uno de los ángulos adyacentes a ella es de 38°.

d) Desde el balcón del primer piso de un edificio se ve un objeto en el suelo ubicado a 7 metros de la pared, bajo un ángulo de depresión de 35° 42´. Desde un balcón del tercer piso del mismo edificio, se ve el mismo objeto bajo un ángulo de depresión de 58° 21´. ¿Cuál es la diferencia de altura entre ambos balcones?

e) Desde un globo de observación situado a 360 metros de altura sobre el nivel del mar se observan dos embarcaciones, una situada al oeste bajo un ángulo de depresión de 34°, y la otra hacia el sur bajo un ángulo de depresión de 31°. Calculá la distancia entre las dos embarcaciones.

f) Desde un avión que vuela a 2000 metros de altura sobre el océano, se observa un punto *P* ubicado en la costa de una isla según un ángulo de depresión de 15° 12´. ¿Cuántos kilómetros deberá recorrer el avión para sobrevolar dicho punto?

g) Para construir un túnel rectilíneo en una montaña que permita vincular a dos localidades *A* y *B*, se elige un punto *C* ubicado a 37 km de *A* y a 44 km de *B*, siendo el ángulo *ACB* de 110°. Hallá la longitud del túnel.

h) ¿Cuál es la altura de una torre, si el ángulo de depresión disminuye de 50° a 18° cuando un observador que se encuentra ubicado a una determinada distancia del pie de la torre, se aleja 90 metros sobre la misma recta?

i) A y B son dos puntos situados en las márgenes opuestas de un río. Desde A se traza una línea $\overline{AC} = 275m$ y se miden los ángulos $\hat{CAB} = 125°48'$ y $\hat{ACB} = 48°50'$. Encontrá la distancia entre los puntos A y B.

j) Dos observadores separados por 1 km están en el mismo plano vertical que pasa por el centro de un globo y cada uno de ellos lo ve con un ángulo de elevación de 69° 15´ y de 39° 23´respectivamente. Calculá la altura del globo en cada uno de los siguientes casos (graficá las situaciones):
1) Si los observadores están en el mismo semiplano con respecto a la vertical.
2) Si los observadores están en distintos semiplano con respecto a la vertical.

k) Desde una altura de 7,2 km el piloto de un helicóptero ve la luz de un helipuerto bajo un ángulo de depresión de 24° 35´. ¿Qué distancia hay entre el helicóptero y la luz?

l) Calculá el perímetro y el área de un paralelogramo siendo una de sus diagonales de 5 cm y sabiendo que forma con los lados del paralelogramo ángulos de 65° y 28°.

m) ¿Cuál es el perímetro de un octógono regular inscripto en una circunferencia de 20 cm de radio?

n) Desde la terraza del más bajo de dos edificios situados en veredas opuestas, se observa que la terraza del otro con un ángulo de elevación de 40°. Si la altura del primero es de 95 metros y la distancia entre los edificios es de 12,5 metros, ¿cuál es la altura del otro?

o) Hallá la altura de una pared si un observador ubicado en un cierto punto ve la parte superior bajo un ángulo de elevación de 15° y al moverse 7 metros, en forma perpendicular a la pared, el ángulo ha aumentado en 25°.

p) Es necesario conocer las distancias de un punto C a otros dos puntos A y B, la que no se puede medir directamente ya que se encuentra atravesada por un caudal de agua. Para ello se decide prolongar 175 metros el segmento $\overline{AC}$

, hasta obtener el punto D y también el segmento $\overline{BC}$, en 225 metros hasta E. Luego se miden las distancias $\overline{AB}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DE}$, obteniéndose 300 m, 326 m y 488 m respectivamente. Con dichos datos, ¿se pueden calcular las distancias que se requerían? En caso de ser la respuesta afirmativa, encontrá esas distancias; en caso de ser negativa, justificá adecuadamente.

q) Se dan dos segmentos de longitudes de 16 cm y 18 cm, y un ángulo de 60°. ¿Puede construirse un triángulo cuyos lados sean congruentes con los segmentos dados y el ángulo sea opuesto a uno de ellos? Analizá las diferentes posibilidades.

r) En un paralelogramo dos lados miden 30 cm y 46 cm, y el ángulo comprendido entre ellos es de 53° 20´. Calculá la medida de cada una de sus diagonales.

s) El perímetro de un cuadrado inscripto en una circunferencia vale 24 m. ¿Cuánto medirá el perímetro del triángulo equilátero inscripto en la misma circunferencia?

t) Hallá el área de un triángulo cuyos lados miden 31 cm, 37 cm y 22 cm.

BIBLIOGRAFÍA.

Mencionamos, a continuación, algunos textos que pueden ser útiles como material de consulta de los distintos recorridos y seguro, te servirán en alguna materia de la carrera. Estos ejemplares se encuentran en la Biblioteca de la Facultad de Ciencia y Tecnología, Sede Oro Verde. Algunos ejemplos y actividades de este material fueron tomados de esta bibliografía.

Demana, F. D.; Waits, B. K.; Foley, G. D. y Kennedy, D. (2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. México: Person Educación.

Kaczor, P; Schaposchnik, E y otros. (1991). *Matemática I, Polimodal.* Buenos Aires, Argentina: Santillana.

Larson, Ron y Edwars, Bruce. (2014) *Cálculo: Tomo I.* Décima edición, 2014. Ciudad de México: Cengage Learning

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. Sexta Edición, 2012. México: Cengage Learning.

Swokowski E. W.; y Cole J. A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning Editores, S. A

Otras fuentes de información:

Organización Khan Academy. Matemática: de 9° a la universidad. Recuperado el 5 de diciembre de 2021 de https://es.khanacademy.org/math/matematicas-es-high-school

Educa Play. Matemática, Educación Secundaria. Recuperado el 5 de diciembre de 2021 de https://es.educaplay.com/

GeoGebra: aplicaciones matemáticas. Recuperado el 5 de diciembre de 2021 de https://www.geogebra.org/?lang=es

Además, te sugerimos consultar las notas, material complementario y actividades interactivas que te servirán para reforzar los temas que necesites. Este material se encuentra publicado en la Plataforma Virtual del Curso de Ingreso Módulo Matemática de la FCyT.