Порождающая и проверочная матрица линейного пространства

~~5 января 2023 г. 1:33~~

В каждом линейном пространстве существуют линейно независимые векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, такие что каждый вектор

$$\mathbf{x}_i = c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + c_2 \cdot \mathbf{x}_2 + c_k \cdot \mathbf{x}_k. \tag{6}$$

Такие векторы называются *базисными векторами* линейного пространства.

Пусть векторы $\mathbf{g}_1 = (g_{11}, \ldots, g_{1n})$, $\mathbf{g}_2 = (g_{21}, \ldots, g_{2n})$, ..., $\mathbf{g}_k = (g_{k1}, \ldots, g_{kn})$ являются базисными векторами для линейного пространства $\mathbf{V}_k$. Тогда каждый вектор $\mathbf{x}$ в $\mathbf{V}_k$ может быть предствлен как линейная комбинация базисных векторов:

$$\mathbf{x} = m_1 \cdot \mathbf{g}_1 + m_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \ldots + m_k \cdot \mathbf{g}_k. \tag{7}$$

Выражение (7) может быть записано как:

$$\mathbf{x} = (m_1, m_2, \ldots, m_k) \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdot & g_{kn} \end{bmatrix} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{G}, \tag{8}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ и $k \times n$ матрица $\mathbf{G}$ имеет в качестве своих строк базисные векторы линейного пространства $\mathbf{V}_k$. Matrix $\mathbf{G}$ называется *порождающей матрицей* линейного пространства $\mathbf{V}_k$.

Произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{V}_k$ удовлетворяет следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} h_{11} \cdot x_1 + \ldots + h_{1n} \cdot x_n = 0, \\ h_{21} \cdot x_1 + \ldots + h_{2n} \cdot x_n = 0, \\ \ldots\ldots \\ h_{r1} \cdot x_1 + \ldots + h_{rn} \cdot x_n = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $r = n - k$, или в матричной записи

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Система уравнений (10) проверяет, что вектор $\mathbf{x}$ принадлежит линейному пространству $\mathbf{V}_k$. Поэтому $\mathbf{H}$ называется *проверочной матрицей* линейного пространства $\mathbf{V}_k$.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{m} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}. \tag{11}$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}. \tag{12}$$