Метод Лагранжевых релаксаций

5 января 2023 г. 1:29

Метод выбора оптимальных параметров алгоритма сжатия, т.е. когда у нас зафиксирован набор параметров, и мы их выбираем, чтобы добиться наилучшего сжатия при заданном искажении или наоборот минимизировать искажение для данного коэффициента сжатия.

Пусть имеем изображение, разделенное на неперекрывающиеся блоки, которые кодируются независимо друг от друга.
Обозначим $r_y^{\psi_i}$ как количество бит и $d_y^{\psi_i}$ искажение как сумму квадратов разностей для блока, когда используется вектор параметров кодирования ψ_i "пси".
Для каждого блока будет свой параметр сжатия. Определим $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_i\}$ как множество векторов, где ψ_i означает, что при кодировании блока b_i используется вектор ψ_i.

SSE для всего изображения:

$$d(\Psi) = \sum_{i=1}^{N} d_i^{\psi_i}.$$

искажение для всего изображения

Количество бит на всё изображение: = сумма бит на каждый блок

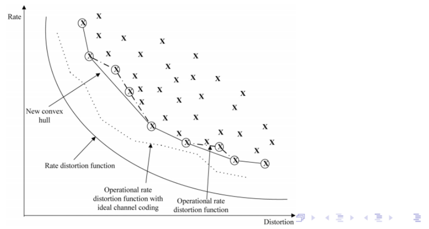
$$r(\Psi) = \sum_{i=1}^{N} r_i^{\psi_i}.$$

Поставим задачу: найти точку на функции скорость-искажение.
Для этого надо найти такой вектор параметров сжатия, что при нем искажение будет минимальным, а сжатие наилучшим (т.е. кол-во бит как можно меньше).
(то же на слайде)--

Для достижения точки на функции скорость-искажение необходимо найти такой вектор параметров кодирования $\Psi^* \in \{\Psi\}$, что

$$\begin{cases} d(\Psi^*) = \min\limits_{\Psi \in \{\Psi\}} d(\Psi) \\ r(\Psi^*) \le r_{max}, \end{cases}$$

где r_{max} – целевое значение количества бит на изображение.



Метод Лагранжевых релаксаций

Теорема 1

Theorem

Для любого $\lambda \ge 0$, вектор параметров $\Psi_\lambda^* \in \{\Psi\}$, минимизирующий

$$d(\Psi) + \lambda \cdot r(\Psi), \tag{1}$$

является решением оптимизационной задачи, если $r_{max} = r(\Psi_\lambda^*)$.

Доказательство.

Предположим, что утверждение не верно, и существует вектор $\Psi \in \{\Psi\}$, такой что $d(\Psi) < d(\Psi_\lambda^*)$ и $r(\Psi) \le r(\Psi_\lambda^*)$. Тогда $d(\Psi) + \lambda \cdot r(\Psi) < d(\Psi_\lambda^*) + \lambda \cdot r(\Psi_\lambda^*)$, т.е., вектор Ψ_λ^* не минимизирует (1), что противоречит утверждению. □

Из утверждения следует, что необходимо найти такое λ, что $r(\Psi_\lambda^*) = r_{max}$.

Для любого $\lambda \ge 0$ вектор параметров сжатия, минимизирующий выражение "искажение+λ *кол-во бит" является решением оптимизационной задачи, если максимальное кол-во бит равно кол-ву бит для данного вектора параметров.

Т.е. надо найти такое λ, что максимальное кол-во бит будет равно кол-ву бит для нашего вектора параметров

Теорема 2

Theorem

Допустим, что для λ_1 и λ_2, векторы $\Psi_{\lambda_1}^*$ и $\Psi_{\lambda_2}^*$, минимизирующие (1) найдены. Тогда, если $r(\Psi_{\lambda_1}^*) > r(\Psi_{\lambda_2}^*)$, то выполняется:

$$\lambda_2 \ge -\frac{d(\Psi_{\lambda_1}^*) - d(\Psi_{\lambda_2}^*)}{r(\Psi_{\lambda_1}^*) - r(\Psi_{\lambda_2}^*)} \ge \lambda_1. \tag{2}$$

Доказательство.

Из предыдущего утверждения следует, что

$$d(\Psi_{\lambda_1}^*) + \lambda_1 \cdot r(\Psi_{\lambda_1}^*) \le d(\Psi_{\lambda_2}^*) + \lambda_1 \cdot r(\Psi_{\lambda_2}^*). \tag{3}$$

Из (3) и $r(\Psi_{\lambda_1}^*) > r(\Psi_{\lambda_2}^*)$ следует, что

$$-\frac{d(\Psi_{\lambda_1}^*) - d(\Psi_{\lambda_2}^*)}{r(\Psi_{\lambda_1}^*) - r(\Psi_{\lambda_2}^*)} \ge \lambda_1.$$

□

Предположим, есть $\lambda1$ и $\lambda2$, для них найдены векторы параметров сжатия, минимизирующие выражение "искажение+λ*кол-во бит" согласно 1 теореме. Тогда если кол-во бит для первого вектора больше, чем для второго, то $\lambda2 \ge \lambda1$.

Доказательство.

Из первого утверждения следует, что

$$d(\Psi^*_{\lambda_2}) + \lambda_2 \cdot r(\Psi^*_{\lambda_2}) \leq d(\Psi^*_{\lambda_1}) + \lambda_2 \cdot r(\Psi^*_{\lambda_1}). \tag{4}$$

Из (4) и $r(\Psi^*_{\lambda_1}) > r(\Psi^*_{\lambda_2})$ следует, что

$$\lambda_2 \geq -\frac{d(\Psi^*_{\lambda_1}) - d(\Psi^*_{\lambda_2})}{r(\Psi^*_{\lambda_1}) - r(\Psi^*_{\lambda_2})}. \tag{5}$$

□

Функция, описывающая сжатие (кол-во бит для вектора параметров сжатия), является неубывающей от аргумента λ.

Еще надо ответить на вопрос, как искать кол-во бит и искажение для вектора параметров.
Нужно найти минимум выражения "искажение+λ*кол-во бит" для заданного вектора.
С учетом того, что все блоки кодируются независимо, справедливо следующее равенство:

Т.е. достаточно минимизировать $r+\lambda d$ для одного блока

как минимизировать?

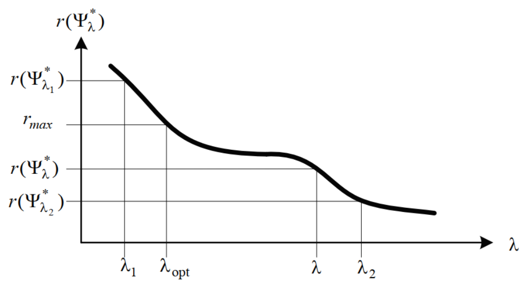
$$\min_{\Psi}\{d(\Psi) + \lambda \cdot r(\Psi)\} = \min_{\Psi} \sum_{i=1}^{N} (r_i^{\psi_i} + \lambda d_i^{\psi_i}) = \sum_{i=1}^{N} \min_{\psi_i} (r_i^{\psi_i} + \lambda d_i^{\psi_i}).$$

Поэтому, для поиска множества векторов параметров $\Psi = \{\psi_i\}$, которые минимизируют (1), достаточно минимизировать $r_i^{\psi_i} + \lambda d_i^{\psi_i}$ для каждого блока независимо.Поэтому

min по всем квантователям

$$\psi_i = \arg\min_k \{r_i^k + \lambda d_i^k\}.$$

λ знаем (это какая-то константа), надо найти подходящий квантователь, который минимизирует. Т.е. вычислить шаг квантования, ψ_i им и будет.
Т.е. для каждого квантователя пробегаем зигзагом, Хаффманом и получаем r, выполняем обратное квантование и считаем d для каждого, сравнивая с оригиналом



С учетом того, что $r(\Psi^*_\lambda)$ – невозрастающая функция, для поиска λ_{opt} может использоваться метод деления отрезка пополам.

Метод Лагранжевых релаксаций

Шаг 1. Найти λ_1 и λ_2, так что неравенства $r(\Psi^*_{\lambda_1}) \leq r_{max} \leq r(\Psi^*_{\lambda_2})$ заведомо выполняются. $\Psi^* \leftarrow \Psi^*_{\lambda_1}$, $n \leftarrow 0$.

Шаг 2.

$\lambda \leftarrow \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$. Вычислить $r(\Psi^*_\lambda)$.

Если $r(\Psi^*_\lambda) \leq r_{max}$ и $r(\Psi^*_\lambda) > r(\Psi^*)$, тогда $\Psi^* \leftarrow \Psi^*_\lambda$.

$n \leftarrow n + 1$.

Шаг 3.

Если $|\lambda_1 - \lambda_2| > \varepsilon$ и $n \leq n_{max}$, тогда
    если $r(\Psi^*_\lambda) \leq r_{max}$, тогда
        $\lambda_1 \leftarrow \lambda$,
    иначе
        $\lambda_2 \leftarrow \lambda$,
    перейти на Шаг 2.
Иначе, множество векторов параметров Ψ^* найдено.