# Спектр изображений. Теорема Котельникова-Найквиста для одномерного сигнала и изображения

5 января 2023 г. 1:28

Справка------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Под ***сигналом*** понимается физический процесс (например, изменяющееся во времени напряжение), отображающий некоторую информацию или сообщение.

- Аналоговые сигналы - это непрерывные функции непрерывного аргумента, например такого как время и/или пространство.
- Дискретные сигналы могут быть дискретными по множеству значений функции или по множеству значений аргумента. Например, если значения аналогового сигнала взяты через определенные интервалы времени, то такой сигнал называется дискретным по времени;
- Если у дискретизованного по времени сигнала отсчеты также принимают значения из некоторого дискретного множества значений, то такой сигнал называется цифровым.

Для того, чтобы поместить аналоговый (непрерывный сигнал) в цифровое устройство необходимо преобразовать его в цифровой сигнал. Аналого-цифровое преобразование (ЦАП) включает в себя две основные операции:

- Операция дискретизации или взятия отсчетов непрерывного сигнала (квантование по времени);
- Операция квантования непрерывного сигнала по уровню.

Преобразование Фурье ($\mathcal{F}$) — операция, сопоставляющая одной функции вещественной переменной другую функцию, также вещественной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты («амплитуды») при разложении исходной функции на элементарные составляющие — гармонические колебания с разными частотами.

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Пусть у нас был исходный непрерывный сигнал (x(t) - непрерывная одномерная функция, описывающая этот сигнал) , мы для него можем вычислить преобразование Фурье, оно же - спектр. Формула:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Здесь $\omega = 2\pi f$ - круговая частота

Эта комплексная функция может быть представлена в виде:

$$X(f) = A(f) e^{j\varphi(f)},$$

где $|A(f)|$ называется амплитудным спектром сигнала или амплитудно-частотной характеристикой сигнала, а $\varphi(f)$ называется фазовым спектром или фазово-частотной характеристикой.

Восстановить сигнал по его спектру можно при помощи обратного преобразования Фурье:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-j\omega t} df.$$

Теорема Котельникова-Найквиста

Гласит, что любую функцию F(t), состоящую из частот от 0 до f0, можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом менее чем через 1/(2*f0) секунд.

ЧАСТОТА ДИСКРИТЕЗАЦИИ В 2 РАЗА БОЛЬШЕ, ЧЕМ МАКСИМАЛЬНАЯ ЧАСТОТА СИГНАЛА (если теорема не будет соблюдена, изображение испортится "волнами" - появится явное искажение - хрень, короче, получится. Так вот, если хрень, то можно её починить путем увеличения частоты дискретизации)

Т.е. другими словами, её суть состоит в том, что непрерывный сигнал с ограниченным спектром можно абсолютно точно представить набором его отдельных значений («отсчетов»), следующих с равными интервалами, при условии, что частота следования этих отсчетов, как минимум, вдвое превышает верхнюю границу спектра указанного сигнала.

Пусть задана функция $x(t)$ и её спектр имеет вид:

сигнал есть, если частота $\leq f_0$

Это пример

$$\begin{cases} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt, & \text{если } |f| \leq f_0. \\ X(f) = 0, & \text{если } |f| > f_0. \end{cases}$$

Тогда эта функция полностью определяется своими мгновенными значениями в моменты, отстоящие друг от друга на $\frac{1}{2f_0}$ секунд:

$$x(t) = \sum_k x\left(\frac{k}{2f_0}\right) \frac{\sin\pi(2f_0 t - k)}{\pi(2f_0 t - k)}.$$

Если рассматривать изображения, надо обратиться к функции яркости

Имея спектр изображения, описываемого функцией яркости, можно восстановить эту функцию яркости при помощи двумерного преобразования Фурье

Спектр $L(\omega_x, \omega_y)$ изображения, описываемого функцией яркости

$I(x, y)$, определяется следующим образом:

Двойной интеграл, т.к. Изображение - двухмерный сигнал, надо вычислять интеграл и по x, и по y

$$L(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dxdy,$$

где $\omega_x$ и $\omega_y$ – круговые пространственные частоты спектра в направлении осей $x$ и $y$.

Спектральная интенсивность изображения:

Вместо амплитудного спектра тут - спектральная интенсивность изображения

$$S(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{x_0 y_0} |L(\omega_x, \omega_y)|^2,$$

где $x_0 y_0$ – площадь прямоугольника, в которое вписано изображение.

Восстановить функцию яркости по его спектру можно при помощи обратного двумерного преобразования Фурье:

$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y.$$

Теорема Котельникова-Найквиста для изображения

Пусть задана функция яркости изображения с определенным спектром. Т.е. мы знаем спектр и ограничение частот по x и по y: если $|f_x| \leq f_x^0$ и $|f_y| \leq f_y^0$, то яркость есть, иначе спектр=0, т.е. нет яркости. В этом случае мы можем однозначно восстановить сигнал: функция полностью определяется своими мгновенными значениями в моменты, отстоящие друг от друга на интервалы $\Delta_x = \frac{1}{2f_x^0}$ и $\Delta_y = \frac{1}{2f_y^0}$ в направлении осей x и y.

$$I(x, y) = \sum_n \sum_k L(n\Delta_x, k\Delta_y) \frac{sin 2\pi f_x^0 (x - n\Delta_x)}{2\pi f_x^0 (x - n\Delta_x)} \cdot \frac{sin 2\pi f_y^0 (y - k\Delta_y)}{2\pi f_y^0 (y - k\Delta_y)}$$