Выпуклые функции и их свойства

3 января 2023 г. 23:41

Множество вещественных векторов R = {x} выпукло, если для любых двух векторов x и x' существует такое число α ∈ [0,1], что новый вектор y = αx + (1 - α)x' тоже принадлежит R
Поскольку множество вероятностных векторов является подмножеством вещественных векторов, справедлива теорема:
Множество вероятностных векторов длины M выпукло
Доказательство:
Имеется множество X = { 1, 2, ..., M }
Рассмотрим два распределения вероятностей:

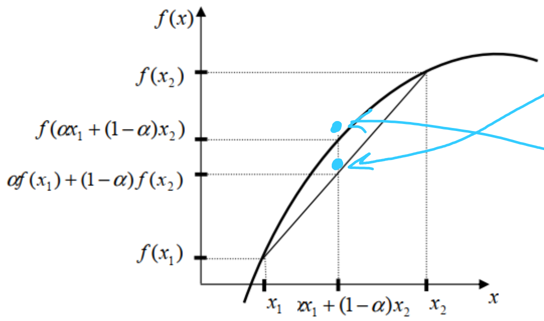
1. $p = \{p_1, \ \ldots, \ p_M\}$
2. $p' = \{p_1{}', \ \ldots, \ p_M{}'\}$

и число α ∈ [0,1]
Т.е. имеем вероятностные векторы p и p', нужно доказать, что вектор $q = \alpha p + (1-\alpha)\,p'$ тоже вероятностный

1. Сначала обратим внимание на то, что $q_i \geq 0$, т.к. векторы p и p' и число α неотрицательны
2. Затем найдем сумму компонент вектора q
   $\sum_{i=1}^{M} q_i = \alpha \sum_{i=1}^{M} p_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{M} p_i{}' = \alpha + 1 - \alpha = 1$

Таким образом, доказано, что вектор q является выпуклым

Функция f(x) выпуклая, если при любых x и x', принадлежащих выпуклой области R, и α ∈ [0,1] выполняется неравенство: $f\left(\alpha x + (1-\alpha)\,x'\right) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)\,f(x')$



1. обозначим x_1, x_2
2. наши среднее значение функций от x_1 и x_2
3. функция от среднего значения выше, чем среднее значение => она выпуклая

Для случая одной переменной: $f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)\,x_2\right) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)\,f(x_2)$
Теорема
Пусть f(x) - выпуклая вверх функция вектора x, определенная на выпуклой области R, и пусть есть константы $\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_M \in [0,1]$ такие, что $\sum_{m=1}^{M} \alpha_m = 1$. Тогда для любых $x_1, \ \ldots, \ x_M \in R$ справедливо неравенство:
$f\left(\sum_{m=1}^{M} \alpha_m x_m\right) \geq \sum_{m=1}^{M} \alpha_m f(x_m)$
Если α_m означает вероятность x_m, то получим неравенство Йенсена: $f\left(E\{x\}\right) \geq E\{f(x)\}$

мат. ожидание
$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

Свойства выпуклых функций:

1. Сумма выпуклых функций - выпуклая функция
2. Произведение выпуклой функции и положительной константы - выпуклая функция
3. Линейная комбинация выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами - выпуклая функция