Теоретическая функция скорость-искажение

5 января 2023 г. 1:27

Есть такая функция: скорость-искажение. Она позволяет решить задачу минимизации скорости кода при данной средней ошибке. (Есть еще обратная версия - функция искажение-скорость, позволяющая решить задачу минимизации ошибки при данной скорости кода).
Эта функция использует перебор аппроксимирующих подмножеств из кодовой книги, то есть привязана к процедуре кодирования.

Чтобы вычислить теоретико-информационную функцию скорость-искажение, не привязанную к процедуре кодирования, введем такое понятие, как взаимная информация - разность собственной информации x и собственной информации x при условии y. Она показывает, сколько информации об x содержится в y.

$$I(x;y) = I(x) - I(x|y) = \log\frac{p(x|y)}{p(x)}$$

Средняя взаимная информация:

$$I(X;Y) = \mathrm{E}[I(x;y)] = \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

Свойства средней взаимной информации:

Симметричность: $I(X;Y) = I(Y;X)$.

Неотрицательность: $I(X;Y) \geq 0$.

Если X и Y независимы, то $I(X;Y) = 0$. т.к. тогда $I(x|y)=I(x)$, т.е. в y нет информации об x

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(XY)$$

Теперь выведем теоретическую функцию скорость-искажение H(D)
Имеем:

1. множество всех векторов x длины n (X^n)
2. аппроксимирующее множество (Y^n)
3. среднее количество информации в Y^n о X^n, предоставленное декодеру ($I(X^n;Y^n)$) - если поделим на n, получим затраты на одну букву ($\frac{1}{n}I\left(X^n;Y^n\right)$)

Обозначим условные вероятности, соответствующие всем возможным способам кодирования: $\phi_n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$
И нас интересуют только такие $\phi_n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$, при которых мера искажения меньше или равна заданной

$$H(D) = \inf_n \min_{\phi_n : D(\phi_n) \leq D} \frac{1}{n} I(X^n;Y^n).$$

Смотрим все затраты на букву, при которых искажение меньше или равно средней ошибке, выбираем вариант, дающий наименьшее количество бит

Это в каком-то смысле энтропия, но энтропия при заданной ошибке

- $H(D) \geq 0$.
- $H(D)$ – невозрастающая функция от D.
- Для стационарного источника без памяти

$$H(D) = \min_{\phi : D(\phi) \leq D} I(X;Y)$$

Прямая и обратная теоремы кодирования для постоянного источника

Теорема

Пусть заданы дискретный алфавит постоянного источника $X = \{x\}$, аппроксимирующий алфавит $Y = \{y\}$ и мера искажения $\{d(x,y), x \in X, y \in Y\}$. Для любого кода со скоростью R и средней ошибкой D имеет место неравенство $R \geq H(D)$.

Теорема

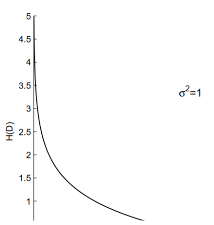
Для дискретного постоянного источника $X = \{x, p(x)\}$, аппроксимирующего множества $Y = \{y\}$ и меры искажения $d(x,y)$, для любых положительных ϵ, δ найдётся достаточно большое число n_0, такое что, при $n \geq n_0$ при любом заданном D найдётся код со скоростью $R \leq H(D) + \delta$ и средним искажением не больше $D + \epsilon$.

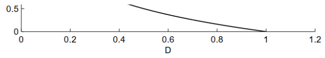
(δ-дельта)

Пример

$H(D)$ для Гауссовского источника

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad H(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}, & 0 \leq D \leq \sigma^2 \\ 0, & D > \sigma^2 \end{cases}$$




0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
D