Свойства, упрощающие вычисление емкости канала связи

Симметричные каналы

Свойство 1. Для симметричного по входу канала без памяти

$$C_0 = \max_{\{p(x)\}} H(Y) - H(Y|x), x \in X.$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - \sum_x p(x) H(Y|x).$$

Поскольку все строки матрицы P одинаковы с точностью до нумерации элементов, все условные энтропии $H(Y|x)$ одинаковы. ДСК:

$$H(Y|x) = -\sum_{y \in Y} p(y|x) \log p(y|x)$$

$$\left.\begin{array}{l} H(Y|0) = -p(0|0)\log p(0|0) - p(1|0)\log p(1|0) = -p\log p - (1-p)\log(1-p) \\ H(Y|1) = -p(0|1)\log p(0|1) - p(1|1)\log p(1|1) = -(1-p)\log(1-p) - p\log p \end{array}\right\}$$

Отсюда следует, что H(Y|x) всегда одна и та же, т.е. const, поэтому можно вынести за сумму. Увидим, что осталась сумма вероятностей, а она всегда =1.

Поэтому $H(Y|X)$ не зависит от входного распределения и максимизация $I(X;Y)$ сводится к максимизации $H(Y)$.

(Формула двоичной энтропии, кстати)

Свойство 2. Для симметричного по входу канала без памяти

$$C_0 \le \log|Y| - H(Y|x), x \in X.$$

Энтропия ограничена сверху логарифмом от мощности алфавита

Свойство 3. Для симметричного по выходу канала без памяти при равновероятных входных символах, выходные символы также равновероятны.

$$p(y) = \sum_x p(x)p(y|x) = \frac{1}{|X|}\sum_x p(y|x).$$

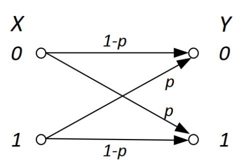
"Модуль" - обозначение мощности алфавита

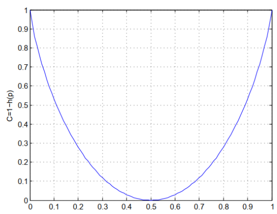
$\sum_x p(y|x)$ это сумма элементов столбца матрицы P. Поскольку все элементы столбцов одинаковы с точностью до перестановки, то суммы столбцов будут одинаковыми, т.е., $p(y) = 1/|Y|$.

Свойство 4. Из свойств 1-3 следует, что для полностью симметричного канала без памяти

$$C_0 = \log|Y| - H(Y|x), x \in X.$$

Пример





Если канал двоично-симметричный, то мы не сможем по нему передать больше, чем 0,5 бита на передаваемый символ.

Если p=0, ошибок в канале нет, пропускная способность=1, т.е. можно и не делать помехоустоичивое кодирование.

Если p=1, вероятность ошибки=1, тогда достаточно сделать инвертор на приемнике, и информация будет успешно передаваться, пропускная способность будет 1.

Если p=0,5, то что бы мы ни делали, по этому каналу ничего передать не сможем

$$C_0 = \log|Y| + \sum_{i=0}^{|Y|-1} p_{i0}\log p_{i0} = 1 - h(p).$$

Двоичный симметричный канал со стираниями

Свойство 5. Канал называется симметричным в широком смысле, если перенумерацией выходных символов его матрица может быть представлна в форме клеточной матрицы:

$$P = [P_1|P_2|...|P_M],$$

в которой каждая из подматриц P_i полностью симметрична (по входу и по выходу).

Свойство 6. Для симметричного в широком смысле канала максимум взаимной информации между входом и выходом достигается при равновероятных буквах входного алфавита.

Матрица переходный вероятностей для ДСК со стираниями:

$$P = \begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & \epsilon & p \\ p & \epsilon & 1-p-\epsilon \end{bmatrix}.$$

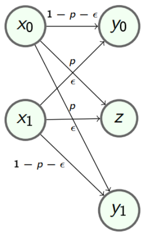
Путем перенумерации выходных символов (перестановкой столбцов) приводим матрицу к виду:

$$P = \left[\begin{array}{cc|c} 1-p-\epsilon & p & \epsilon \\ p & 1-p-\epsilon & \epsilon \end{array}\right],$$

то есть ДСК со стираниями симметричен в широком смысле.

Пример

Двоичный симметричный канал со стираниями



$$P = \begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & \epsilon & p \\ p & \epsilon & 1-p-\epsilon \end{bmatrix}.$$

Равновероятные входные буквы:

$$p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2}$$

Тогда, вероятности y_0, y_1 и z:

$$\begin{cases} p(y_0) = p(y_1) = \frac{1-\epsilon}{2} \\ p(z) = \epsilon \end{cases}$$

Подставим в $I(X;Y)$, получим:

$$C_0 = (1-\epsilon)\left(1 - h\left(\frac{p}{1-\epsilon}\right)\right)$$

При $p = 0$:

$$C_0 = (1-\epsilon).$$

Прямая теорема кодирования для дискретных постоянных каналов

Theorem

Для дискретного постоянного канала с информационной ёмкостью C_0, для любых $\epsilon > 0, \delta > 0$, существует достаточно большое число n_0 такое, что для любого натурального числа $n \geq n_0$ существует код длиной n со скоростью $R \geq C_0 - \delta$, средняя вероятность ошибки которого $P_e \leq \epsilon$.