Равномерное скалярное квантование. Функция скорость-искажение для равномерного скалярного квантования

5 января 2023 г. 1:27

Говоря о сжатии данных с потерями, мы принимаем во внимание ошибки, т.е. искажение данных.

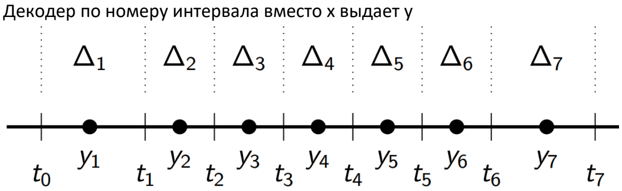
Существует понятие "мера искажения", показывающее различие между множеством сообщений на выходе источника и аппроксимирующим множеством.

За аппроксимацию входного вектора **x** вектором **y** отвечает квантование.

Виды квантования:

- *Скалярное*, если входные символы обрабатываются независимо.
  - Равномерное.
  - Неравномерное.
- *Векторное*, если входные символы обрабатываются блоками.

Равномерное скалярное квантование (скалярное, т.к. выполняется на каждый входной символ, равномерное, т.к. ось разбивается на равные отрезки):
Ось x - все возможные значения, которые могут приходить
При равномерном скалярном квантовании эта ось разбивается на интервалы одинаковой длины (дельты равны, дельта - это шаг квантования).
Что имеется в виду: все x, попадающие в интервал между t0 и t1 попадают в квант 1 и т.д.
Так вычисляется номер кванта. По номеру кванта вычисляется аппроксимирующее значение.
Если знаем номер кванта, т.е. между какими t лежит x, то берем середину этого отрезка и аппроксимируем по нему (y - аппроксимирующее значение)
Таким образом, при квантовании кодер определяет номер интервала и передает его декодеру.
Декодер по номеру интервала вместо x выдает y



$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx = \overset{=f(y_j)}{f(x)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} 1\,dx = f(y_j)\cdot\underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta} = \Delta f(y_j)$$

Для того, чтобы определить ошибку квантования, при малых шагах квантования переходят к непрерывным функциям.
Вводим допущение, что $x \in X$ - непрерывная величина, а Δ принимает небольшие значения (точность квантования высока)
Тогда плотность распределения можно считать постоянной в пределах кванта
Вероятность попадания в квант j будет:

$$p_j = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx \approx \Delta f(y_j)$$

$f(x)$ - плотность распределения x
$f(y_j) \approx f(x)$ - плотность распределения в пределах кванта считается постоянной

Тогда искажение D можно оценить как

$$D = \sum_j \int_{I_j} (x-y_j)^2 f(x)dx \approx \sum_j \int_{I_j} (x-y_j)^2 f(y_j)dx \approx$$
$$\approx \sum_j \frac{p_j}{\Delta} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} (x-y_j)^2 dx = \sum_j \frac{p_j}{\Delta} \frac{(x-y_j)^3}{3}\Big|_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12}$$

D = сумма ошибки по всем квантам.
Ошибка принимается как средняя квадратическая, умноженная на вероятность x (f(x)).

Теперь можно определить, сколько бит потратится:

- $D \approx \frac{\Delta^2}{12}$.
- Скорость можно оценить как

$$R(D) = -\sum_j p_j \log p_j \approx -\sum_j p_j \log(\Delta f(y_j)) =$$
$$= -\sum_j \int_{I_j} f(x) \log(\Delta f(y_j))dx \approx -\sum_j p_j \int_{I_j} f(x) \log(\Delta f(x))dx =$$
$$-\int_X f(x) \log f(x)dx - \log\Delta = h(X) - \log\Delta \approx h(X) - \frac{1}{2}\log(12D),$$

где $h(X) = \int_X f(x) \log f(x)dx$ – дифференциальная энтропия.

Функция скорость-искажение равномерного квантователя при малых Δ задается соотношением

$$R(D) \approx h(X) - \frac{1}{2}\log(12D).$$

-

- Граница Шеннона. Функция скорость-искажение источника случайных независимых сл. величин с дисперсией σ^2 и дифференциальной энтропией $h(X)$ при квадратическом критерии качества удовлетворяет неравенству

$$H(D) \geq h(X) - \frac{1}{2}\log(2\pi e D).$$

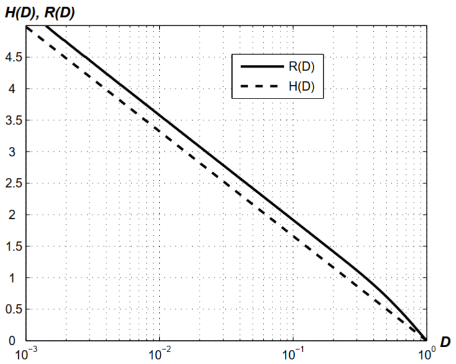
- Выигрыш от других других типов квантования (векторного) при

$\Delta \to 0$ можно оценить как

$$R(D) - H(D) \le h(X) - \tfrac{1}{2}\log(12D) - h(X) + \tfrac{1}{2}\log(2\pi e D) =$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{2\pi e D}{12D} = \frac{1}{2}\log\frac{\pi e}{6} = 0.2546.$$

- В итоге получим, что максимальный выигрыш за счет векторного квантования равен 0.2546 бит на сивмол.

Скалярное квантование для Гауссовского источника



-

Неравномерное скалярное квантование заключается в том, что мы можем использовать распределение величины, которую кодируем, и смотреть, сколько где каких величин находится.
Т.е. если есть квант, в который попадает больше значений, то можно использовать разный шаг квантования. Этот квант, в котором много значений, будем квантовать с маленьким шагом, а другой какой-то, где значений меньше, - с большим. Так можно достигнуть бОльшую точность квантования. Но возникнет проблема, что способ квантования надо передавать. Тогда придется затратить больше бит, это как бы проигрыш. Он в сочетании с выигрышем за счет лучшего квантования не даст особого общего выигрыша, поэтому на практике этот способ обычно не используется.

Неравномерное скалярное квантование