

Синдромное декодирование кодов Хемминга

5 января 2023 г. 1:34

Из свойств проверочной матрицы следует, что $\mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^T = 0$. Поэтому

$$\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^T = (\mathbf{c} + \mathbf{e}) \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}^T, \quad (23)$$

называемый *синдромом* зависит только от вектора ошибки \mathbf{e} и не зависит от кодового слова \mathbf{c} . Если ошибка не произошла, то $\mathbf{s} = \mathbf{0}$.

i	\mathbf{e}_i	$\mathbf{s}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{H}^T$
0	1000000	011
1	0100000	101
2	0010000	110
3	0001000	111
4	0000100	100
5	0000010	010
6	0000001	001

Работа декодера в режиме обнаружения ошибок

Пусть для передачи сообщения $\mathbf{m} = (101)$ использовался расширенный код Хемминга и было сформировано кодовое слово $\mathbf{c} = (1011010)$. Пусть в процессе передачи возникли две ошибки и вектор ошибок $\mathbf{e} = (0010001)$. Тогда на вход декодера канала поступает сообщение $\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{e} = (1001011)$.

Декодер канала вычисляет синдром

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^T = (1001011) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0110).$$

Так как синдром \mathbf{s}^* отличен от нулевого, то декодер канала выносит решение о том, что в канале произошла ошибка.

Пример

Работа декодера в режиме обнаружения ошибок. Число ошибок превышает $d - 1$

Пусть для передачи сообщения $\mathbf{m} = (101)$ было сформировано кодовое слово $\mathbf{c} = (1011010)$. Пусть в процессе передачи возникли четыре ошибки и вектор ошибок $\mathbf{e} = (1110001)$. Тогда на вход декодера канала поступает сообщение $\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{e} = (0101011)$.

Декодер канала вычисляет синдром

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^T = (0101011) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0000).$$

Так как синдром \mathbf{s}^* является нулевым, то декодер канала выносит ошибочное решение о том, что в канале не было ошибок.

