Информационная емкость канала связи

5 января 2023 г. 1:32

Взаимная информация, т.е. кол-во информации в y об x, для пар (x,y) ∈ XY определяется как I(x; y) = I(x) - I(x|y).
То есть это по сути изменение собственной информации об x при получении y.
Средняя взаимная информация для ансамблей определяется как энтропия икса минус условная энтропия икса при игреке, либо наоборот:

$$I(X;Y) = \sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} p(x,y)\log\frac{p(x|y)}{p(x)}.$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

- Средняя взаимная информация неотрицательна (т.е., $I(X;Y) \geq 0$) и симметрична (т.е., $I(X;Y) = I(Y;X)$).
- $I(X;Y) = 0$, если X и Y – независимы, т.е., если $H(Y|X) = H(Y)$, то

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(Y) = 0.$$ (Условная энтропия превратится в безусловную)

- Если X однозначно определяет Y и наоборот, то $H(Y|X) = 0$, и

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y).$$

Информационная емкость каналов связи.

- Пусть используется код длины n. Тогда количество информации, получаемой декодером в среднем составит $I(X^n;Y^n)$ бит, что соответствует скорости передачи информации

$$\frac{1}{n}I(X^n;Y^n) \text{ бит/символ канала.}$$

n сверху - это блок длиной n

- Эта величина зависит от распределения вероятностей на входе канала $p(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}^n$, а также от условных вероятностей $p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}^n, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}^n$. Нужно выбрать $p(\boldsymbol{x})$, так чтобы максимизировать скорость передачи:

$$\max_{\{p(\boldsymbol{x})\}} \frac{1}{n} I(X^n;Y^n).$$

- Кроме этого, нужно выбрать длину кода так, чтобы скорость передачи была как можно больше. В итоге *информационная ёмкость канала* определяется как

$$C_0 = \sup_n \max_{\{p(\boldsymbol{x})\}} \frac{1}{n} I(X^n;Y^n).$$ Предел при устремлении n к бесконечности

Если мы переходим к каналу без памяти, нам не нужно учитывать предыдущий символ.
Информационная ёмкость канала без памяти:

$$C_0 = \max_{\{p(x)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x)\}} (H(X) - H(X|Y)) = \max_{\{p(x)\}} (H(Y) - H(Y|X))$$

$$I(X;Y) = \sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} p(x)p(y|x)\log\frac{p(y|x)}{p(y)}.$$

$$p(y) = \sum_{x\in X} p(x)p(y|x).$$

Словами: есть иксы на входе, есть игреки на выходе и задан канал, который говорит о том, с какой вероятностью какой икс в какой игрек переходит, надо найти такое распределение, которое максимизирует разность H(Y) - H(Y|X)

О ДПК:

- ДПК называется *симметричным по входу*, если все строки матрицы P могут быть получены перестановками элементов первой строки.
- ДПК называется *симметричным по выходу*, если все столбцы матрицы P могут быть получены перестановками элементов первого столбца.
- ДПК называется *полностью симметричным*, если он одновременно симметричен и по входу и по выходу.

(на всякий)
Прямая теорема кодирования для дискретных постоянных каналов

Theorem

Для дискретного постоянного канала с информационной ёмкостью C_0, для любых $\epsilon > 0, \delta > 0$, существует достаточно большое число n_0 такое, что для любого натурального числа $n \geq n_0$ существует код длиной n со скоростью $R \geq C_0 - \delta$, средняя вероятность ошибки которого $P_e \leq \epsilon$.