Úkol 1

1. příklad

Uvažujme operaci $\circ$ definovanou následovně: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$. S využitím uzávěrových vlastností dokažte, nebo vyvraťte, následující vztahy:

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$

(b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$

(c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_2^D$ značí třídu deterministických bezkontextových jazyků, $\mathcal{L}_2$ třídu bezkontextových jazyků a $\mathcal{L}_3$ třídu regulárních jazyků.

Řešení:

(a) **Vztah (a) je platný.**
Důkaz:

- Vztah přepíšeme s využitím definované operace $\circ$:
  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow (L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3) \Leftrightarrow (L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3)$
- Podle věty 3.23[1] třída regulárních jazyků $\mathcal{L}_3$ tvoří množinovou *Booleovu algebru*, z čehož plyne uzavřenost této třídy vůči doplňku a sjednocení.
- Díky uzavřenosti vůči doplňku platí vtah $L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$.
- Konečně díky uzavřenosti vůči sjednocení platí vztah $L_1 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$.
- Potom tedy platí i vztah $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$, který je ekvivalentní vztahu (a). $\square$

(b) **Vztah (b) je platný.**
Důkaz:

- Vztah přepíšeme s využitím definované operace $\circ$:
  $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow (L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D) \Leftrightarrow (L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D)$
- Podle věty 4.27[1] jsou deterministické bezkontextové jazyky $\mathcal{L}_2^D$ uzavřeny vůči doplňku. Díky této větě platí i vztah $L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$.
- Věta 4.27[1] také říká, že deterministické bezkontextové jazyky $\mathcal{L}_2^D$ jsou uzavřeny vůči průniku s regulárními jazyky $\mathcal{L}_3$. Podle této věty tedy platí následující vztah:
  $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow (L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D) \Leftrightarrow (\overline{L_1 \cap \overline{L_2}} \in \mathcal{L}_2^D)$
- S využitím *De Morganova zákona* lze tento vztah upravit na $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_1} \cup \overline{\overline{L_2}} \in \mathcal{L}_2^D$.
- S využitím věty 4.27[1] a věty 3.23[1], která říká, že třída regulárních jazyků $\mathcal{L}_3$ tvoří množinovou *Booleovu algebru*, z čehož plyne uzavřenost této třídy vůči doplňku, můžeme výše uvedený vztah dále upravit na tvar $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$, což je vztah ekvivalentní zadanému vztahu (b). $\square$

(c) **Vztah (c) není platný.**
Důkaz sporem:

- Předpokládejme, že vztah (c) je platný.

[1] Studijní text – https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf.

- Vztah přepíšeme s využitím definované operace $\circ$:
  $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow (L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2) \Leftrightarrow (L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2)$
- Podle věty 2.4[1] platí vztah $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$, proto můžeme výše uvedený vztah upravit na
  $L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$.
- Věta 4.24[1] však říká, že bezkontextové jazyky $\mathcal{L}_2$ nejsou uzavřeny vůči doplňku, tj.
  $L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$, což je **spor**. **Vztah (c) tedy neplatí.** $\square$

2. příklad

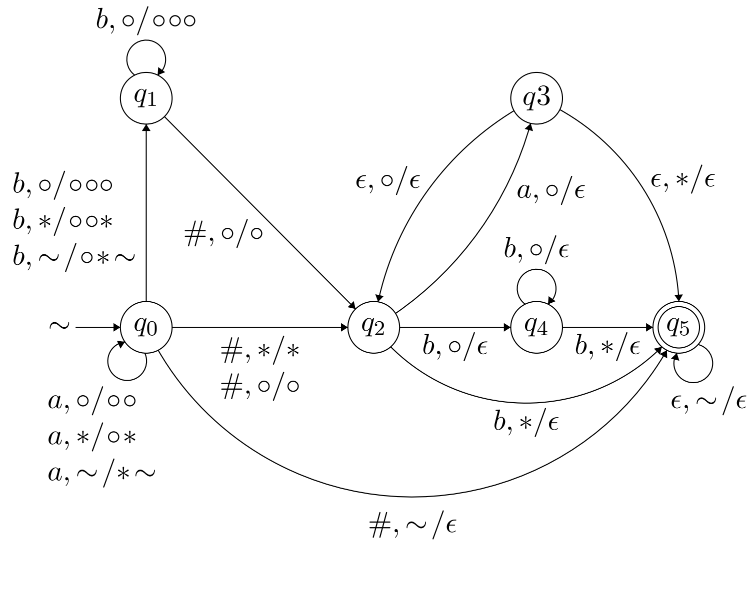
Mějme jazyk L nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný následovně: $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l\}$. Sestrojte deterministický zásobníkový automat M_L takový, že $L(M_L) = L$.

Řešení:

$M_L = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b, \#\}, \{\sim, *, \circ\}, \delta, q_0, \sim, \{q_5\})$, kde $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ je přechodová funkce definovaná následovně:

$$\delta(q_0, a, \sim) = (q_0, *\sim)$$
$$\delta(q_0, a, *) = (q_0, \circ *)$$
$$\delta(q_0, a, \circ) = (q_0, \circ\circ)$$
$$\delta(q_0, b, \sim) = (q_1, \circ * \sim)$$
$$\delta(q_0, b, *) = (q_1, \circ\circ *)$$
$$\delta(q_0, b, \circ) = (q_1, \circ\circ\circ)$$
$$\delta(q_0, \#, \sim) = (q_5, \epsilon)$$
$$\delta(q_0, \#, *) = (q_2, *)$$
$$\delta(q_0, \#, \circ) = (q_2, \circ)$$
$$\delta(q_1, b, \circ) = (q_1, \circ\circ\circ)$$
$$\delta(q_1, \#, \circ) = (q_2, \circ)$$
$$\delta(q_2, a, \circ) = (q_3, \epsilon)$$
$$\delta(q_2, b, \circ) = (q_4, \epsilon)$$
$$\delta(q_2, b, *) = (q_5, \epsilon)$$
$$\delta(q_3, \epsilon, \circ) = (q_2, \epsilon)$$
$$\delta(q_3, \epsilon, *) = (q_5, \epsilon)$$
$$\delta(q_4, b, \circ) = (q_4, \epsilon)$$
$$\delta(q_4, b, *) = (q_5, \epsilon)$$
$$\delta(q_5, \epsilon, \sim) = (q_5, \epsilon)$$

Grafická reprezentace automatu M_L:



3. příklad

Dokažte, že jazyk L z předchozího příkladu není regulární.

Řešení:

Důkaz sporem:

- Předpokládejme, že jazyk L je regulární, tj. $L \in \mathcal{L}_3$.
- Potom dle *Pumping lemma* (věta 3.18[1]) platí:
  $\exists\, k > 0 : \forall\, w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$
  $\Rightarrow (\exists\, x, y, z \in \{a, b, \#\}^* : w = xyz \wedge y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall\, i \geq 0 : xy^iz \in L)$
- Uvažme libovolné k splňující výše uvedené.
- Zvolme $w = a^k\#b^k$. $w \in L$, protože $L = \{a^{i'}b^{j'}\#a^{k'}b^{l'} \mid i' + 2j' = 2k' + l'\}$ a $w = a^kb^0\#a^0b^k$, kde platí $(k + 2 \cdot 0 = 2 \cdot 0 + k) \Rightarrow (k = k)$. Dále platí, že $|w| = 2k + 1 \geq k$.
- Tedy $\exists\, x, y, z \in \{a, b, \#\}^* : a^k\#b^k = xyz \wedge y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall\, i \geq 0 : xy^iz \in L$.
- Uvažme libovolné x, y, z vyhovující výše uvedené podmínce.
- Z toho, že $|xy| \leq k$ a $y \neq \epsilon$ plyne: $x = a^r \wedge y = a^s \wedge z = a^{k-r-s}\#b^k \wedge r \geq 0 \wedge s > 0 \wedge r + s \leq k$.
- Zvolme $i = 2$, potom $xy^2z = a^ra^sa^sa^{k-r-s}\#b^k = a^{k+s}\#b^k \notin L$.
- To je **spor**, protože $k + s \neq k$, protože $s > 0$ a z *Pumping lemma* plyne, že $xy^iz \in L$. Proto **jazyk** L **není regulární**, tj. $L \notin \mathcal{L}_3$. $\square$