Úkol 1

1. příklad

Uvažujme operaci $\circ$ definovanou následovně: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$. S využitím uzávěrových vlastností dokažte, nebo vyvraťte, následující vztahy:

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$

(b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$

(c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_2^D$ značí třídu deterministických bezkontextových jazyků, $\mathcal{L}_2$ třídu bezkontextových jazyků a $\mathcal{L}_3$ třídu regulárních jazyků.

Řešení:

(a) **Vztah (a) je platný.**
Důkaz:

- Vztah přepíšeme s využitím definované operace $\circ$:
$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow (L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3 \Leftrightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3)$
- Podle věty 3.23[1] třída regulárních jazyků $\mathcal{L}_3$ tvoří množinovou *Booleovu algebru*, z čehož plyne uzavřenost této třídy vůči doplňku a sjednocení.
- Díky uzavřenosti vůči doplňku platí vtah $L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$.
- Konečně díky uzavřenosti vůči sjednocení platí vztah $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$, který je ekvivalentní vztahu (a). $\square$

(b) **Vztah (b) je platný.**
Důkaz:

- Vztah přepíšeme s využitím definované operace $\circ$:
$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow (L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Leftrightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D)$
- Podle věty 4.27[1] jsou deterministické bezkontextové jazyky $\mathcal{L}_2^D$ uzavřeny vůči doplňku. Díky této větě platí vztah $L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$.
- Věta 4.27[1] také říká, že deterministické bezkontextové jazyky $\mathcal{L}_2^D$ jsou uzavřeny vůči průniku s regulárními jazyky $\mathcal{L}_3$. Podle této věty tedy platí následující vztah:
$(L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D) \Leftrightarrow (L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_1 \cap \overline{L_2}} \in \mathcal{L}_2^D)$
- S využitím *De Morganova zákona* lze tento vztah upravit na $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_1} \cup \overline{\overline{L_2}} \in \mathcal{L}_2^D$.
- S využitím věty 4.27[1] a věty 3.23[1], která říká, že třída regulárních jazyků $\mathcal{L}_3$ tvoří množinovou *Booleovu algebru*, z čehož plyne uzavřenost této třídy vůči doplňku, můžeme výše uvedený vztah dále upravit na tvar $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$, což je vztah ekvivalentní zadanému vztahu (b). $\square$

(c) **Vztah (c) není platný.**
Důkaz sporem:

- Předpokládejme, že vztah (c) je platný.

[1] Studijní text – https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf.

- Vztah přepíšeme s využitím definované operace $\circ$:
  $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow (L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2)$
- Podle věty 2.4[1] platí vztah $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$, proto můžeme výše uvedený vztah upravit na $L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$.
- Věta 4.24[1] však říká, že bezkontextové jazyky $\mathcal{L}_2$ nejsou uzavřeny vůči doplňku, tj. $L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$, což je **spor**. **Vztah (c) tedy neplatí.** $\square$

2. příklad

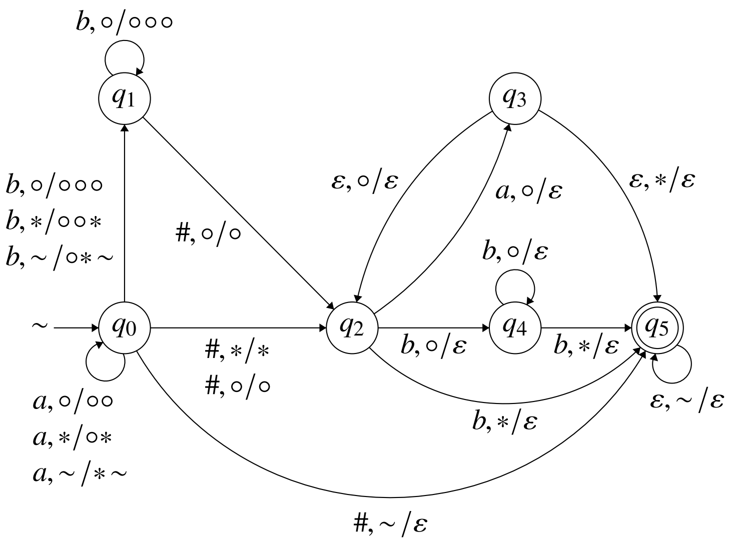
Mějme jazyk L nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný následovně: $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l\}$. Sestrojte deterministický zásobníkový automat M_L takový, že $L(M_L) = L$.

Řešení:

$\mathbf{M_L} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b, \#\}, \{\sim, *, \circ\}, \delta, q_0, \sim, \{q_5\})$, kde
$\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ je přechodová funkce definovaná následovně:

$$\delta(q_0, a, \sim) = (q_0, *\sim)$$
$$\delta(q_0, a, *) = (q_0, \circ *)$$
$$\delta(q_0, a, \circ) = (q_0, \circ\circ)$$
$$\delta(q_0, b, \sim) = (q_1, \circ * \sim)$$
$$\delta(q_0, b, *) = (q_1, \circ\circ *)$$
$$\delta(q_0, b, \circ) = (q_1, \circ\circ\circ)$$
$$\delta(q_0, \#, \sim) = (q_5, \varepsilon)$$
$$\delta(q_0, \#, *) = (q_2, *)$$
$$\delta(q_0, \#, \circ) = (q_2, \circ)$$
$$\delta(q_1, b, \circ) = (q_1, \circ\circ\circ)$$
$$\delta(q_1, \#, \circ) = (q_2, \circ)$$
$$\delta(q_2, a, \circ) = (q_3, \varepsilon)$$
$$\delta(q_2, b, \circ) = (q_4, \varepsilon)$$
$$\delta(q_2, b, *) = (q_5, \varepsilon)$$
$$\delta(q_3, \varepsilon, \circ) = (q_2, \varepsilon)$$
$$\delta(q_3, \varepsilon, *) = (q_5, \varepsilon)$$
$$\delta(q_4, b, \circ) = (q_4, \varepsilon)$$
$$\delta(q_4, b, *) = (q_5, \varepsilon)$$
$$\delta(q_5, \varepsilon, \sim) = (q_5, \varepsilon)$$

Grafická reprezentace automatu $\mathbf{M_L}$:



3. příklad

Dokažte, že jazyk L z předchozího příkladu není regulární.

Řešení:

Důkaz sporem:

- Předpokládejme, že jazyk L je regulární, tj. $L \in \mathcal{L}_3$.
- Potom dle *Pumping lemma* (věta 3.18[1]) platí:
  $\exists\, k > 0 \in \mathbb{N} : \forall\, w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$
  $\Rightarrow \exists\, x, y, z \in \{a, b, \#\}^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall\, i \geq 0 \in \mathbb{N} : xy^iz \in L$
- Uvažme libovolné k splňující výše uvedené.
- Zvolme $w = a^k\#b^k$. $w \in L$, protože $L = \{a^{i'}b^{j'}\#a^{k'}b^{l'} \mid i' + 2j' = 2k' + l'\}$ a $w = a^kb^0\#a^0b^k$, kde platí $k + 2 \cdot 0 = 2 \cdot 0 + k \Rightarrow k = k$. Dále platí, že $|w| = 2k + 1 \geq k$.
- Tedy $\exists\, x, y, z \in \{a, b, \#\}^* : a^k\#b^k = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall\, i \geq 0 \in \mathbb{N} : xy^iz \in L$.
- Uvažme libovolné x, y, z vyhovující výše uvedené podmínce.
- Z toho, že $|xy| \leq k$ a $y \neq \varepsilon$ plyne: $x = a^r \wedge y = a^s \wedge z = a^{k-r-s}\#b^k \wedge r \geq 0 \wedge s > 0 \wedge r + s \leq k$.
- Zvolme $i = 2$, potom $xy^2z = a^ra^sa^sa^{k-r-s}\#b^k = a^{k+s}\#b^k \notin L$.
- To je **spor**, protože $k + s \neq k$, protože $s > 0$ a z *Pumping lemma* plyne, že $xy^iz \in L$. Proto **jazyk L není regulární, tj. L $\notin \mathcal{L}_3$**. $\square$

4. příklad

Navrhněte algoritmus, který pro daný nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodne, zda $\forall\, w \in L(A) : |w| \geq 5$.

Dále demonstrujte běh tohoto algoritmu na automatu $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, kde δ je definována jako

$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_0\}$, $\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}$,
$\delta(q_2, a) = \{q_0, q_3\}$, $\delta(q_3, a) = \{q_0, q_4\}$,
$\delta(q_4, a) = \{q_0\}$.

Řešení:

Algoritmus:

Vstup: Nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Výstup: $\begin{cases} \texttt{TRUE} & \text{pokud } \forall\, w \in L(A) : |w| \geq 5 \\ \texttt{FALSE} & \text{jinak, tj. pokud } \exists\, w \in L(A) : |w| < 5 \end{cases}$

Metoda:

1. Nechť $R_\delta \subseteq Q \times Q$ je binární relace, která popisuje, zda je v automatu A možný přímý přechod mezi danou dvojicí stavů (p, q), definována na základě přechodové funkce δ následovně:
   $R_\delta = \{(p, q) \in Q \times Q \mid \exists\, a \in \Sigma : q \in \delta(p, a)\}$

2. Nechť R_δ^+ je tranzitivní uzávěr relace R_δ.
3. Nechť výstup algoritmu je dán predikátem φ definovaným následovně:
$\varphi : \forall\, q_1, q_6 \in Q : q_1 = q_0 \wedge q_6 \in F \wedge (q_1, q_6) \in R_\delta^+ \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, Q' \subseteq Q : |Q'| = 6 \wedge q_1, q_6 \in Q' \wedge \forall\, 2 \leq i \leq 6 \in \mathbb{N} : \exists\, q_i \in Q' : (q_{i-1}, q_i) \in R_\delta^+$

Demonstrace běhu algoritmu na daném automatu A:

Vstup: Daný automat A.

Metoda:

1. $R_\delta = \{(q_0, q_1), (q_0, q_0), (q_1, q_1), (q_1, q_2), (q_2, q_0), (q_2, q_3), (q_3, q_0), (q_3, q_4), (q_4, q_0)\}$
2. $R_\delta^+ = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \times \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
3. φ = `FALSE`, protože predikát φ je nesplnitelný. Na cestě od počátečního stavu q_0 do koncového stavu q_4 se nenachází dostatečný počet přechodů mezi navzájem různými stavy.

Výstup: `FALSE`, tj. neplatí $\forall\, w \in L(A) : |w| \geq 5$.

5. příklad

Dokažte, že jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 \neq 0 \wedge \#_b(w) \leq 2\}$ je regulární. Postupujte následovně:

- Definujte $\sim_L$ pro jazyk L.
- Zapište rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ a určete počet tříd tohoto rozkladu.
- Ukažte, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$.

Řešení:

- **Prefixová ekvivalence** pro jazyk L, $\sim_\mathbf{L} \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$ je definována následovně:
$(\forall\, u, v \in \{a, b\}^* : u \sim_L v) \Leftrightarrow (\forall\, w \in \{a, b\}^* : uw \in L \Leftrightarrow vw \in L) \Leftrightarrow (\#_a(u) \bmod 2 = \#_a(v) \bmod 2 \wedge$
$\wedge ((\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0) \vee (\#_b(u) = 1 \wedge \#_b(v) = 1) \vee (\#_b(u) = 2 \wedge \#_b(v) = 2) \vee (\#_b(u) > 2 \wedge \#_b(v) > 2)))$
- **Rozklad množiny** všech řetězců nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ jazyka L (Σ^*) podle prefixové ekvivalence $\sim_L$ ($\Sigma^*/\sim_\mathbf{L}$) je následující:
$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\}$
$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 1\}$
$L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 2\}$
$L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) > 2\}$
$L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\}$
$L_6 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 1\}$
$L_7 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 2\}$
$L_8 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) > 2\}$
Počet tříd tohoto rozkladu je 8.
- **Jazyk L je sjednocením tříd $\mathbf{L_5}$, $\mathbf{L_6}$ a $\mathbf{L_7}$, tj. $\mathbf{L = L_5 \cup L_6 \cup L_7}$.**
- Protože má relace prefixové ekvivalence $\sim_L$ konečný index 8 (počet tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$) a jazyk L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného relací $\sim_L$, jak je ukázáno výše, plyne z *Myhill-Nerodovi věty* (věta 3.20[1]) tvrzení, že jazyk L je přijímaný deterministickým končeným automatem, proto **je jazyk L regulární, tj. $\mathbf{L \in \mathcal{L}_3}$**. □