

Úkol 1

1. příklad

Uvažujme operaci \circ definovanou následovně: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$. S využitím uzávěrových vlastností dokažte, nebo vyvráťte, následující vztahy:

- (a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$
- (b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$
- (c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

\mathcal{L}_2^D značí třídu deterministických bezkontextových jazyků, \mathcal{L}_2 třídu bezkontextových jazyků a \mathcal{L}_3 třídu regulárních jazyků.

Řešení:

(a) Vztah (a) je platný.

Důkaz:

- Vztah přepíšeme s využitím definované operace \circ :

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow (L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3 \Leftrightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3)$$
- Podle věty 3.23¹ třída regulárních jazyků \mathcal{L}_3 tvoří množinovou *Booleovu algebru*, z čehož plyne uzavřenost této třídy vůči doplňku a sjednocení.
- Díky uzavřenosti vůči doplňku platí vztah $L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$.
- Konečně díky uzavřenosti vůči sjednocení platí vztah $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$, který je ekvivalentní vztahu (a). □

(b) Vztah (b) je platný.

Důkaz:

- Vztah přepíšeme s využitím definované operace \circ :

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow (L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Leftrightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D)$$
- Podle věty 4.27¹ jsou deterministické bezkontextové jazyky \mathcal{L}_2^D uzavřeny vůči doplňku. Díky této větě platí vztah $L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$.
- Věta 4.27¹ také říká, že deterministické bezkontextové jazyky \mathcal{L}_2^D jsou uzavřeny vůči průniku s regulárními jazyky \mathcal{L}_3 . Podle této věty tedy platí následující vztah:

$$(L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D) \Leftrightarrow (L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_1 \cap \overline{L_2}} \in \mathcal{L}_2^D)$$
- S využitím *De Morganova zákona* lze tento vztah upravit na $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_1} \cup \overline{\overline{L_2}} \in \mathcal{L}_2^D$.
- S využitím věty 4.27¹ a věty 3.23¹, která říká, že třída regulárních jazyků \mathcal{L}_3 tvoří množinovou *Booleovu algebru*, z čehož plyne uzavřenost této třídy vůči doplňku, můžeme výše uvedený vztah dále upravit na tvar $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$, což je vztah ekvivalentní zadanému vztahu (b). □

(c) Vztah (c) není platný.

Důkaz sporem:

- Předpokládejme, že vztah (c) je platný.

¹ Studijní text – <https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf>.

- Vztah přepíšeme s využitím definované operace \circ :
 $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow (L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2)$
- Podle věty 2.4¹ platí vztah $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$, proto můžeme výše uvedený vztah upravit na
 $L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$.
- Věta 4.24¹ však říká, že bezkontextové jazyky \mathcal{L}_2 nejsou uzavřeny vůči doplňku, tj.
 $L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$, což je **spor**. **Vztah (c) tedy neplatí.**

□

2. příklad

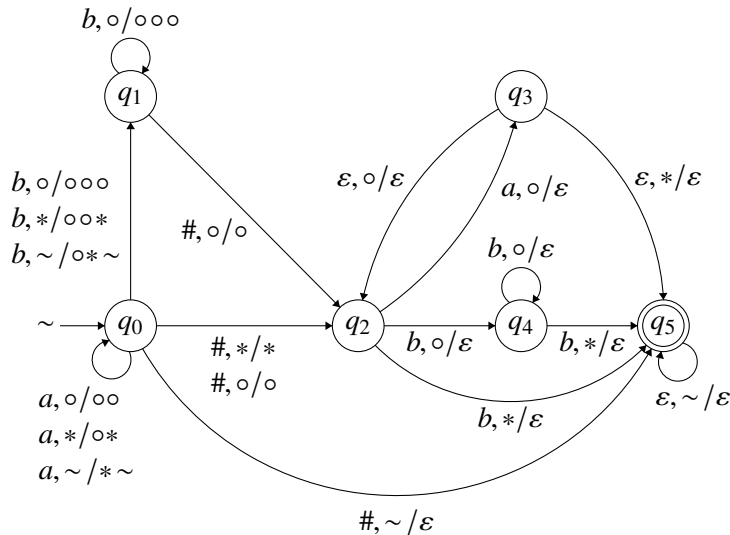
Mějme jazyk L nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný následovně: $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l\}$. Sestrojte deterministický zásobníkový automat M_L takový, že $L(M_L) = L$.

Řešení:

$\mathbf{M}_L = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b, \#\}, \{\sim, *, \circ\}, \delta, q_0, \sim, \{q_5\})$, kde $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$ je přechodová funkce definovaná následovně:

$\delta(q_0, a, \sim) = (q_0, * \sim)$	
$\delta(q_0, a, *) = (q_0, \circ *)$	$\delta(q_1, \#, \circ) = (q_2, \circ)$
$\delta(q_0, a, \circ) = (q_0, \circ \circ)$	$\delta(q_2, a, \circ) = (q_3, \varepsilon)$
$\delta(q_0, b, \sim) = (q_1, \circ * \sim)$	$\delta(q_2, b, \circ) = (q_4, \varepsilon)$
$\delta(q_0, b, *) = (q_1, \circ \circ *)$	$\delta(q_2, b, *) = (q_5, \varepsilon)$
$\delta(q_0, b, \circ) = (q_1, \circ \circ \circ)$	$\delta(q_3, \varepsilon, \circ) = (q_2, \varepsilon)$
$\delta(q_0, \#, \sim) = (q_5, \varepsilon)$	$\delta(q_3, \varepsilon, *) = (q_5, \varepsilon)$
$\delta(q_0, \#, *) = (q_2, *)$	$\delta(q_4, b, \circ) = (q_4, \varepsilon)$
$\delta(q_0, \#, \circ) = (q_2, \circ)$	$\delta(q_4, b, *) = (q_5, \varepsilon)$
$\delta(q_1, b, \circ) = (q_1, \circ \circ \circ)$	$\delta(q_5, \varepsilon, \sim) = (q_5, \varepsilon)$

Grafická reprezentace automatu \mathbf{M}_L :



3. příklad

Dokažte, že jazyk L z předchozího příkladu není regulární.

Řešení:

Důkaz sporem:

- Předpokládejme, že jazyk L je regulární, tj. $L \in \mathcal{L}_3$.
- Potom dle *Pumping lemma* (věta 3.18¹) platí:
 $\exists k > 0 \in \mathbb{N} : \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists x, y, z \in \{a, b, \#\}^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 \in \mathbb{N} : xy^i z \in L$
- Uvažme libovolné k splňující výše uvedené.
- Zvolme $w = a^k \# b^k$. $w \in L$, protože $L = \{a^{i'} b^{j'} \# a^{k'} b^{l'} \mid i' + 2j' = 2k' + l'\}$ a $w = a^k b^0 \# a^0 b^k$, kde platí $k + 2 \cdot 0 = 2 \cdot 0 + k \Rightarrow k = k$. Dále platí, že $|w| = 2k + 1 \geq k$.
- Tedy $\exists x, y, z \in \{a, b, \#\}^* : a^k \# b^k = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 \in \mathbb{N} : xy^i z \in L$.
- Uvažme libovolné x, y, z vyhovující výše uvedené podmínce.
- Z toho, že $|xy| \leq k$ a $y \neq \varepsilon$ plyne: $x = a^r \wedge y = a^s \wedge z = a^{k-r-s} \# b^k \wedge r \geq 0 \wedge s > 0 \wedge r + s \leq k$.
- Zvolme $i = 2$, potom $xy^2 z = a^r a^s a^s a^{k-r-s} \# b^k = a^{k+s} \# b^k \notin L$.
- To je **spor**, protože $k + s \neq k$, protože $s > 0$ a z *Pumping lemma* plyne, že $xy^i z \in L$. Proto **jazyk L není regulární, tj. $L \notin \mathcal{L}_3$** . \square

4. příklad

Navrhněte algoritmus, který pro daný nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodne, zda $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

Dále demonstруйте běh tohoto algoritmu na automatu $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, kde δ je definována jako

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= \{q_1, q_0\}, \delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}, \\ \delta(q_2, a) &= \{q_0, q_3\}, \delta(q_3, a) = \{q_0, q_4\}, \\ \delta(q_4, a) &= \{q_0\}. \end{aligned}$$

Řešení:

Algoritmus:

Vstup: Nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Výstup: $\begin{cases} \text{TRUE} & \text{pokud } \forall w \in L(A) : |w| \geq 5 \\ \text{FALSE} & \text{jinak, tj. pokud } \exists w \in L(A) : |w| < 5 \end{cases}$

Metoda:

1. Nechť $R_\delta \subseteq Q \times Q$ je binární relace, která popisuje, zda je v automatu A možný přímý přechod mezi danou dvojicí stavů (p, q) , definována na základě přechodové funkce δ následovně:
 $R_\delta = \{(p, q) \in Q \times Q \mid \exists a \in \Sigma : q \in \delta(p, a)\}$

2. Nechť R_δ^+ je tranzitivní uzávěr relace R_δ .
3. Nechť výstup algoritmu je dán predikátem φ definovaným následovně:

$$\varphi : \forall q_1, q_6 \in Q : q_1 = q_0 \wedge q_6 \in F \wedge (q_1, q_6) \in R_\delta^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists Q' \subseteq Q : |Q'| = 6 \wedge q_1, q_6 \in Q' \wedge \forall 2 \leq i \leq 6 \in \mathbb{N} : \exists q_i \in Q' : (q_{i-1}, q_i) \in R_\delta^+$$

Demonstrace běhu algoritmu na daném automatu A :

Vstup: Daný automat A .

Metoda:

1. $R_\delta = \{(q_0, q_1), (q_0, q_0), (q_1, q_1), (q_1, q_2), (q_2, q_0), (q_2, q_3), (q_3, q_0), (q_3, q_4), (q_4, q_0)\}$
2. $R_\delta^+ = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \times \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
3. $\varphi = \text{FALSE}$, protože predikát φ je nespílnitelný. Na cestě od počátečního stavu q_0 do koncového stavu q_4 se nenachází dostatečný počet přechodů mezi navzájem různými stavy.

Výstup: FALSE, tj. neplatí $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

5. příklad

Dokažte, že jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 \neq 0 \wedge \#_b(w) \leq 2\}$ je regulární. Postupujte následovně:

- Definujte \sim_L pro jazyk L .
- Zapište rozklad Σ^*/\sim_L a určete počet tříd tohoto rozkladu.
- Ukažte, že L je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^*/\sim_L .

Řešení:

- **Prefixová ekvivalence** pro jazyk L , $\sim_L \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$ je definována následovně:

$$(\forall u, v \in \{a, b\}^* : u \sim_L v) \Leftrightarrow (\forall w \in \{a, b\}^* : uw \in L \Leftrightarrow vw \in L) \Leftrightarrow ((\#_a(u) \bmod 2 = \#_a(v) \bmod 2 \wedge$$

$$\wedge (\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0) \vee (\#_b(u) = 1 \wedge \#_b(v) = 1) \vee (\#_b(u) = 2 \wedge \#_b(v) = 2)) \vee (\#_b(u) > 2 \wedge \#_b(v) > 2))$$
- **Rozklad množiny** všech řetězců nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ jazyka L (Σ^*) podle prefixové ekvivalence \sim_L (Σ^*/\sim_L) je následující:

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\}$$

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\}$$

$$L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 1\}$$

$$L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 1\}$$

$$L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 2\}$$

$$L_6 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 2\}$$

$$L_7 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) > 2\}$$

Počet tříd tohoto rozkladu je 7.

- **Jazyk L je sjednocením tříd L_2, L_4 a L_6 , tj. $L = L_2 \cup L_4 \cup L_6$.**
- Protože má relace prefixové ekvivalence \sim_L konečný index 7 (počet tříd rozkladu Σ^*/\sim_L) a jazyk L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného relací \sim_L , jak je ukázáno výše, plyne z *Myhill-Nerodovi věty* (věta 3.20¹) tvrzení, že jazyk L je přijímaný deterministickým končným automatem, proto **je jazyk L regulární, tj. $L \in \mathcal{L}_3$.** \square