Contents

1 MISC

0! 规定为 1

数域 (域：field)：指一个数集，它对加法、减法、乘法和除法（除数不为零）运算是封闭的，并且包含 0 和 1
换句话说，对数域中任意两个数进行这四种基本运算，其结果仍然属于这个数域。
常见的数域包括有理数域 (Q)、实数域 (R) 和复数域 (C)
一个集合成为数域，需满足以下条件：
1. 包含 0 和 1：数域中必须有加法单位元 0 和乘法单位元 1
2. 封闭性：加法和减法封闭；乘法封闭；除法封闭
非数域例子：自然数集和整数集，不构成数域，因为除法运算不封闭，例如 2/3 不属于自然数或者整数

2 代数基本定理 (Fundamental theorem of algebra)

Also called "d'Alembert–Gauss theorem"
描述为：任何一个复系数的一元 n 次多项式方程 ($n \geq 1$)，至少有一个复数根。

有时候这个定理描述为：任何一个非零的一元 n 次复系数多项式，都正好有 n 个复数根（重根视为多个根）。但实际上，是 "至少有一个根的" 直接结果，因为把多项式除以它的线性因子可以推出。也就是说，任何一个 n 次多项式，都可以因式分解为 n 个复系数一次多项式的乘积 (根据多项式除法)。 Proof?

推论：任何一个非零的一元 n 次复系数多项式，都正好有 n 个复数根（重根视为多个根）。

意义：复数域是代数封闭的；该定理是代数学和近世代数中的一个基础性结论

尽管这个定理被命名为 "代数基本定理"，但它还没有纯粹的代数证明，许多数学家都相信这种证明不存在。另外，它也不是最基本的代数定理；因为在那个时候，代数基本上就是关于解实系数或复系数多项式方程，所以才被命名为代数基本定理。

所有的证明都包含了一些数学分析，至少是实数或复数函数的连续性概念。有些证明也用到了可微函数，甚至是解析函数。

3 多项式除法、多项式余式定理 (Polynomial division, Polynomial remainder theorem)

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \Rightarrow P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

If $D(x) = x - a$, then $P(x) = (x-a)Q(x) + R(x) = (x-a)Q(x) + r$
根据定义，$R(x)$ 的次数小于 1, so $R(x)$ 只能为常数
$\Rightarrow P(a) = (a-a)Q(x) + r = r$
得到**多项式余式定理**：多项式 $P(x)$ 除以 $x - a$ 所得的余式 $= P(a)$

dividend = divisor x quotient + reminder

3.1 Examples

Let $f(x) = x^3 - 12x^2 - 42$, divided by $x - 3$, gives the quotient $x^2 - 9x - 27$, and the remainder -123.
By the polynomial remainder theorem, $f(3) = -123$

寻找多项式的切线？https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F%E9%99%A4%E6%B3%95

？直觉要用微积分，但是这个是啥情况？

4 因式定理 (Factor theorem)

The Factor theorem connects polynomial factors with polynomial roots.(关于多项式的因式和零点的定理)

一个多项式 $f(x)$ 有一个因式 $ax - b$ 当且仅当 $f(\frac{b}{a}) = 0$

普遍应用于因式分解，利用长除法，除以零点 $(x - a)$

Example:

分解因式：$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$
$x = y, y = x, x = z$ 是 0 点, so $k(x-y)(y-z)(x-z)$, let $x = 0, y = 1, z = 2 \Rightarrow k = 3$

5 因式分解

5.1 因式分解定理

数域 F 上的每个次数 ≥ 1 的多项式 $f(x)$ 都可以分解为数域 F 上一些不可约多项式的乘积，并且是唯一的，即：
$f(x) = p_x(x)p_2(2)p_3(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)q_3(x)\cdots q_t(x)$, 其中 $p_i(x)$ 和 $q_j(x)$ 都是数域 F 上的不可约多项式，那么必有 $s = t$，而且可以适当排列因式的次序，使得
$p_i(x) = c_i q_i(x)$

5.2 分解方法

公因式

公式法

分组分解

拆添项

十字交叉

一次因式检验法 (有理根定理)

6 算术基本定理

7 有理根定理 (Rational root theorem)

Also called rational root test, rational zero theorem, rational zero test or p/q theorem

描述：对于 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, 系数 $a_i \in \mathbb{Z}$, and $a_0, a_n \neq 0$.
该定理指出，如果存在有理根 $x = \frac{p}{q}$, written in lowest term(that is p and q are relatively prime, 互质)，满足：
p 是 a_0 的整数因子，i.e. $p|a_0$. 整除符号,Tips[1]
q 是 a_n 的整数因子，i.e. $q|a_n$.

该定理是高斯定理关于多项式分解的一个特例

[1] $a|b$：a 整除 b，b 能被 a 整除，也就是 b 除以非零 a，商是一个整数. i.e. $2|6$

7.1 Proof

Let $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ with $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_0, a_n \neq 0$

Suppose $P(p/q) = 0$ for some coprime $p, q \in \mathbb{Z}$:
$P(\frac{p}{q}) = a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0$
$\Rightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$
$\Rightarrow p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}qp^{n-2} + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \Rightarrow () = -a_0\frac{q^n}{p}$
$\Rightarrow q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}qp^{n-2} + \cdots + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n \Rightarrow () = -a_n\frac{p^n}{q}$
我们注意到，括弧内是整数，因为 a_i 是整数，所以这是关键

p, q 互质，$\frac{p}{q} = \pm\frac{a_0\text{的因子}}{a_n\text{的因子}}$

注意 p, q 为 1 的特殊情况，显而易见 1 永远是第一个选择

关键点：
1. 系数是整数
2. 如果存在有理根，则必符合此定理，否则存在无理根 (如 $\sqrt{89}$) 亦或者复数根

7.2 Example

$x^3 - 7x + 6 = 0$:
有理根有可能是：$\pm\frac{\{1,2,3,6\}}{1} = \pm 1, 2, 3, 6$，恰好 $1, 2, -3$，所以也恰好可以写为：$(x-1)(x-2)(x+3) = 0$

$3x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$, 如果有有理根，则必在 $\pm\frac{1,2}{1,3} = \pm 1, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 中。8 个候选根，需要测试 8 次，最后才知道 $x = 2/3$ 是唯一有理根.
很是繁琐不是？所以可以通过评估 $P(r)$ 来测试缩小范围 (比如使用秦九韶算法?)。
Firstly, if $x < 0$, the P will be negative, so every root is positive
$P(1) = 1$, so 1 is not the root. Moreover, if one sets $x = 1 + t$, so $Q(t) = P(1+t)$, 展开后，三次项是 3，一次项是 1，implies Q must belongs to $\pm 1, \pm\frac{1}{3}$, and P satisfy $x = 1 + t \in 2, 0, 4/3, 2/3$. 再次显示必须为正，两个候选项是 $2, 2/3$, 将 2 带入，显然不是，最后测试 $2/3$

If a, b and $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ are integers, then both $\frac{a^2}{b}$ and $\frac{b^2}{a}$ must be integers.

8 韦达定理 (Vieta's formulas)

Any general polynomial of degree n, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, by the "fundamental theorem of algebra", roots are $x_1, x_2, x_3 \cdots$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2x_3 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

8.1 Proof

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$
展开后比较系数

$$\begin{cases} a_{n-1} = -a_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) \\ a_{n-2} = a_n[(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n] \\ \quad\vdots \\ \quad a_0 = (-1)^n a_n x_1 x_2 \cdots x_n \end{cases}$$

8.2 韦达定理的逆定理

对于一元二次方程

利用圆来研究一元二次方程? http://202.175.82.54/tplan/2006/intro/R027.pdf

8.3 Examples

If $n = 2$(quadratic), $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$ 展开比较即有，也可以用求根公式

if $n = 3$, x_1, x_2, x_3 是 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的三个根, then:
$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = a(x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3 = 0)$, That is
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

9 排列组合 (permutation and combination)

9.1 排列 (permutation)

Permutaion(排列、变换、置换，比如古典密码里的置换) or Arrangement，所以数学符合 P 和 A 都可以。

利用乘法原理：$A_n^k = \overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}^{\text{k factors}} = \frac{n!}{(n-k)!}$
Also use: P_k^n, $P(n,k)$, ${}_nP_k$, ${}^nP_k$, $P_{n,k}$. Note the slight difference: P_k^n and A_n^k

重复排列：从 n 个元素中取出 k 个元素，k 个元素可以重复：$U_k^n = n^k$

9.2 组合 (combination)

Combination just likes permutation, but the order doesn't matter

This formula can be derived from the fact that each k-combination of a set S of n members has permutations so
$P_n^k = C_n^k \times k!$ or $C_n^k = P_n^k/k!$. The C_n^k often denoted by $\binom{n}{k}$

10 二项式定理 (Binomial theorem)

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y2 + \cdots + C_n^n x^0 y^n$$

Examples:

$(x+y)^0 = 1$
$(x+y)^1 = x+y$
$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$
$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

$(x+y)^3 = xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy$, total 2^3 terms

Let $x=y=1$, we have $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$

10.1 Proof

Method 1: 数学归纳法 (inductive proof)

Method 2: 组合方法

$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}^{\text{n terms}}$, n 个括号相乘，从 n 个选出 k 个括号中的 a，再从剩余的 $n-k$ 个括号中选出 $(n-k)$ 个 b，得到一组 $a^k b^{n-k}$，而这种选法共有 C_n^k 种，故总共有 C_n^k 个 $a^k b^{n-k}$；其他同理

10.2 More

$(1+x)^{-1}$

$(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$(1+\frac{1}{n})^n$

Multinomial theorem:
$(x_1 + x_2 \cdots + x_m)^n$

11 绝对值

11.1 绝对值的意义

本质是表示距离，比如数轴上的线段距离，差值的绝对值

第一要务一般是如果去绝对值，从代数上看就是要去讨论

不但要会去绝对值，还要会用绝对值列出题目相应的等式或者不等式，然后去解

又比如 $|3-2x|+|x-3|$ 的最小值，要善于变换，以方便几何上的直观

11.2 最值

$f(x) = |x+1| + |2-x|$ 的最值
$f(x) = |x+1| + |2x-1|$ 的最值，Tips[2]
$f(x) = |x+1| + |x| + |x-2|$ 的最值
$f(x) = |2x-1| + |4x-3|$
$f(x) = ||x-1| - 3|$

11.3 推广

$f(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + |x-a_3| + \cdots + |x-a_n|$ $f(x) = |x+1| + |2x-1|$ 可以化简为：$f(x) = |x+1| + 2|x-\frac{1}{2}| = |x+1| + |x-\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}|$

[2] $|2x-1| = 2|x-\frac{1}{2}|$

奇点偶段，证明方法：从 1 到 3 到 5，从 2 到 4 到 6，以至无穷

12 整除规则 (divisibility rule)

Let $A = \overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1} = a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2}... + a_2 \times 10 + a_1$

12.1 基本判别 (rules)

被 2 整除：
The last digit is even

被 3 整除和被 9 整除:
The sum of digits must be divisible by 3 or 9. Tips[3]

被 4 整除：
The last two digits must be divisible by 4. Tips[4]，后者是关键

被 5 整除：

被 6 整除：

被 7 整除：

被 8 整除：
The last three digits must be divisible by 8

被 9 整除：

被 11 整除：
第一位数 − 第二位数 + 第三位数 −...，最终值如果能被 11 整除，正负交替，从前往后和从后往前一样，负数也可以判定. Tips[5]

被 13 整除：

被 17 整除：

---

[3] $A = a_n \times (9+1)^{n-1} + a_{n-1} \times (9+1)^{n-2}... + a_2 \times (9+1) + a_1$
$= (a_n \times 9^{n-1} + a_{n-1} \times 9^{n-2} + ... + a_2 \times 9) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1)$

[4] $A = \overline{a_n a_{n-1}...a_3} \times 100 + \overline{a_2 a_1}$

[5] $10 = 11 \times 1 - 1, 100 = 11 \times 9 + 1, 1000 = 11 \times 91 - 1$

12.2 proof

被 7 整除
方法 1：三位截断：if $A = \overline{b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$ 能被 7 整除，then: $\overline{a_1a_2a_3} - \overline{b_1b_2b_3}$ 可以被 7 整除
$A/7 = (\overline{b_1b_2b_3} \times 10^3 + \overline{a_1a_2a_3})/7 = 143 \times \overline{b_1b_2b_3} + (\overline{a_1a_2a_3} - \overline{b_1b_2b_3})/7$

方法 2：降位，如五位数变为四位，再变为三位，再两位。
Suppose we have a number $A = \overline{a_1a_2a_3a_4b}$, let $A = \overline{ab}$, while $a = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.
if 能化简为判断 $a + mb$ 能否被 7 整除，则简化成功：

$$\begin{cases} a + mb = 7n_1 \\ 10a + b = 7n_2 \end{cases} \Rightarrow (10m - 1)b = 7(n_1 - n_2)$$

That means $10m - 1$ 必须是 7 的倍数，此时 m 可以为 5 or -2。那么我们就可以简化为判断 $a - 2b$ or $a + 5b$, -2 和 5 正好相差 7.
e.g.
$329 \to 32 - 2 \times 9 = 14$
$4564 \to 456 - 2 \times 4 = 448 \to 44 + 8 \times 5 = 7 \times 12$

推广：
被 11 整除：$(10m - 1)|11$, $m = -1$。当然，被 11 整除还有一个更方便的方法，那就是依次加减
被 13 整除：$(10m - 1)|13$, $m = 4, -7$
被 17 整除：$(10m - 1)|17$, $m = -5$
我们可以看到，m 是一个呈周期循环，太大了就没有意义了，如果一个三位数，最后化简还是三位数，就没有了意义

这种方法用计算机编程来判断很方便

13 MISC

. . . .

$\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4+1}}{x}$ 的 max. tips[6]

. . . .

$x, y > 0$, and $x + 3y = x^3y^2$, min of $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$, tips[7]

. . . .

[6] 1 讨论正负，2 换元，3 分子有理化

[7] 把 $1/y$ 带入