Contents

Part I

MISC

数学基本思想：
抽象能力：会在错综复杂的事物中把握本质
推理能力：会在杂乱无章的事物中理清头绪
建模能力：会在千头万绪的事物中发现规律

数学四大基本思想：
函数与方程、数形结合、分类讨论和转化与化归 (复杂或未知的问题，通过一定的变换，最终归结为已知或更容易解决的问题的思维方法)

数学基本方法：
数形结合、分类讨论、换元、数学归纳法、反证法、类比

数域 (域：field)：指一个数集，它对加法、减法、乘法和除法（除数不为零）运算是封闭的，并且包含 0 和 1
换句话说，对数域中任意两个数进行这四种基本运算，其结果仍然属于这个数域。
常见的数域包括有理数域 (Q)、实数域 (R) 和复数域 (C)
一个集合成为数域，需满足以下条件：
1. 包含 0 和 1：数域中必须有加法单位元 0 和乘法单位元 1
2. 封闭性：加法和减法封闭；乘法封闭；除法封闭
非数域例子：自然数集和整数集，不构成数域，因为除法运算不封闭，例如 2/3 不属于自然数或者整数

丢番图方程，又称为不定方程 (Diophantine equation), Diophantus is a Greek mathematician
丢番图的研究在数论中占有重要地位，如丢番图方程、丢番图集合、丢番图逼近等都是数学的重要领域

最大公约数: GCD(Greatest Common Divisor) or HCF:(Highest Common Factor). e.g. $gcd(3, 9) = 3$, $gcd(-3, 9) = 3$

0! 规定为 1

Part II

定理 Theorem

1 算术基本定理 (Fundamental theorem of arithmetic)

算术基本定理, also called unique factorization theorem(正整数唯一分解定理) and prime factorization theorem，即：每个大于 1 的自然数，要么本身就是素数，要么可以写为 2 个或以上的素数的积，而且这些素因子按大小排列之后，写法仅有一种方式。例如：$1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

算术基本定理是初等数论中一个基本的定理，也是许多其他定理的逻辑支撑点和出发点。
由两部分组成：
1. 分解的存在性
2. 分解的唯一性，即若不考虑排列的顺序，正整数分解为素数乘积的方式是唯一的

这个定理也是为什么 1 不是质数的主要原因, 如果 1 是 prime，$2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = ...$

STATEMENT:
Every positive integer $n > 1$ can be represented in exactly one way as a product of prime powers:
$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$, where $p_1 < p_2 < p_3 ... < p_k$ are primes,and n_i are positive integers.

Since $a^0 = 1$, any positive integer can be uniquely represented as an infinite product taken over all the positive prime numbers, as

$$n = 2^{n1}3^{n2}5^{n3}7^{n4}\cdots = \prod_{i=1}^{\infty} P_i^{n_i}$$

等价命题：If a prime divides the product of two integers, then it must divide at least one of these integers.That is:
If Prime $P|ab$, then, either $P|a$ or $P|b$

Proof:

1. Existence
用反证法：假设存在大于 1 的自然数不能写为素数的乘积，把最小的那个称为 n n 不可为素数，因为 $n = n$，可以写成素数的成绩，因此 n 一定是合数，而每个合数都可以分解为两个严格小于自身而大于 1 的自然数的乘积。设 $n = a \times b$，根据假设，n 是最小的不能写为素数乘积的自然数，$a < n, b < n$，所以 $a = p_1 p_2 \times p_n, b = q_1 q_2 \cdots q_n$, and $n = ab = p_1 p_2 \cdots p_n q_1 q_2 \cdots q_n$ 可以写为素数的乘积，由此产生矛盾，故大于 1 的自然数必可以写为素数的乘积

2. Uniqueness
欧几里得引理：if $p|ab$, either $p|a$ or $p|b$ todo...

2 代数基本定理 (Fundamental theorem of algebra)

Also called "d'Alembert–Gauss theorem"
描述为：任何一个复系数的一元 n 次多项式方程 $(n \geq 1)$，至少有一个复数根。

有时候这个定理描述为：任何一个非零的一元 n 次复系数多项式，都正好有 n 个复数根（重根视为多个根）。但实际上，是"至少有一个根的"直接结果，因为把多项式除以它的线性因子可以推出。也就是说，任何一个 n 次多项式，都可以因式分解为 n 个复系数一次多项式的乘积 (根据多项式除法)。 Proof?

推论：任何一个非零的一元 n 次复系数多项式，都正好有 n 个复数根（重根视为多个根）。

意义：复数域是代数封闭的；该定理是代数学和近世代数中的一个基础性结论

尽管这个定理被命名为“代数基本定理”，但它还没有纯粹的代数证明，许多数学家都相信这种证明不存在。另外，它也不是最基本的代数定理；因为在那个时候，代数基本上就是关于解实系数或复系数多项式方程，所以才被命名为代数基本定理。

所有的证明都包含了一些数学分析，至少是实数或复数函数的连续性概念。有些证明也用到了可微函数，甚至是解析函数。

3 多项式除法、多项式余式定理 (Polynomial division, Polynomial remainder theorem)

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \Rightarrow P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

If $D(x) = x - a$, then $P(x) = (x-a)Q(x) + R(x) = (x-a)Q(x) + r$
根据定义，$R(x)$ 的次数小于 1, so $R(x)$ 只能为常数
$\Rightarrow P(a) = (a-a)Q(x) + r = r$
得到**多项式余式定理**：多项式 $P(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余式 $= P(a)$

dividend = divisor x quotient + reminder

Examples:
Let $f(x) = x^3 - 12x^2 - 42$, divided by $x - 3$, gives the quotient $x^2 - 9x - 27$, and the remainder -123.
By the polynomial remainder theorem, $f(3) = -123$

寻找多项式的切线？https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F%E9%99%A4%E6%B3%95

？直觉要用微积分，但是这个是啥情况？

4 因式定理 (Factor theorem)

The Factor theorem connects polynomial factors with polynomial roots.(关于多项式的因式和零点的定理)

一个多项式 $f(x)$ 有一个因式 $ax-b$ 当且仅当 $f(\frac{b}{a})=0$

普遍应用于因式分解，利用长除法，除以零点 $(x-a)$

Example:

分解因式：$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

$x=y, y=x, x=z$ 是 0 点，so $k(x-y)(y-z)(x-z)$, let $x=0, y=1, z=2 \Rightarrow k=3$

5 因式分解定理

数域 F 上的每个次数 ≥ 1 的多项式 $f(x)$ 都可以分解为数域 F 上一些不可约多项式的乘积，并且是唯一的，即：

$f(x)=p_x(x)p_2(2)p_3(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)q_3(x)\cdots q_t(x)$, 其中 $p_i(x)$ 和 $q_j(x)$ 都是数域 F 上的不可约多项式，那么必有 $s=t$，而且可以适当排列因式的次序，使得

$p_i(x)=c_iq_i(x)$

分解方法: 公因式、公式法、分组分解、拆添项、十字交叉、一次因式检验法 (有理根定理)

6 有理根定理 (Rational root theorem)

Also called rational root test, rational zero theorem, rational zero test or p/q theorem

描述：对于 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$, 系数 $a_i\in\mathbb{Z}$, and $a_0, a_n\neq 0$.

该定理指出，如果存在有理根 $x=\frac{p}{q}$, written in lowest term(that is p and q are relatively prime, 互质)，满足：

p 是 a_0 的整数因子，i.e. $p|a_0$. 整除符号,Tips[1]

q 是 a_n 的整数因子，i.e. $q|a_n$.

该定理是高斯定理关于多项式分解的一个特例

[1] $a|b$：a 整除 b，b 能被 a 整除，也就是 b 除以非零 a，商是一个整数. i.e. $2|6$

Proof:

Let $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ with $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_0, a_n \neq 0$

Suppose $P(p/q) = 0$ for some coprime $p, q \in \mathbb{Z}$:

$P(\frac{p}{q}) = a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0$

$\Rightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$

$\Rightarrow p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}qp^{n-2} + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \Rightarrow () = -a_0 \frac{q^n}{p}$

$\Rightarrow q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}qp^{n-2} + \cdots + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n \Rightarrow () = -a_n \frac{p^n}{q}$

我们注意到，括弧内是整数，因为 a_i 是整数，所以这是关键

p, q 互质，$\frac{p}{q} = \pm\frac{a_0\text{的因子}}{a_n\text{的因子}}$

注意 p, q 为 1 的特殊情况，显而易见 1 永远是第一个选择

关键点：

1. 系数是整数
2. 如果存在有理根，则必符合此定理，否则存在无理根 (如 $\sqrt{89}$) 亦或者复数根

Examples:

$x^3 - 7x + 6 = 0$:

有理根有可能是：$\pm\frac{\{1,2,3,6\}}{1} = \pm 1, 2, 3, 6$，恰好 $1, 2, -3$，所以也恰好可以写为：$(x-1)(x-2)(x+3) = 0$

$3x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$, 如果有有理根，则必在 $\pm\frac{1,2}{1,3} = \pm 1, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 中。8 个候选根，需要测试 8 次，最后才知道 $x = 2/3$ 是唯一有理根.

很是繁琐不是？所以可以通过评估 $P(r)$ 来测试缩小范围 (比如使用秦九韶算法?)。

Firstly, if $x < 0$, the P will be negative, so every root is positive

$P(1) = 1$, so 1 is not the root. Moreover, if one sets $x = 1 + t$, so $Q(t) = P(1 + t)$, 展开后，三次项是 3，一次项是 1，implies Q must belongs to $\pm 1, \pm\frac{1}{3}$, and P satisfy $x = 1 + t \in 2, 0, 4/3, 2/3$. 再次显示必须为正，两个候选项是 $2, 2/3$, 将 2 带入，显然不是，最后测试 2/3

If a, b and $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ are integers, then both $\frac{a^2}{b}$ and $\frac{b^2}{a}$ must be integers.

7 韦达定理 (Vieta's formulas)

Any general polynomial of degree n, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, by the "fundamental theorem of algebra", roots are $x_1, x_2, x_3 \cdots$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2x_3 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

7.1 Proof

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$
展开后比较系数

$$\begin{cases} a_{n-1} = -a_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) \\ a_{n-2} = a_n[(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n] \\ \quad\vdots \\ \quad a_0 = (-1)^n a_n x_1 x_2 \cdots x_n \end{cases}$$

7.2 韦达定理的逆定理

对于一元二次方程

利用圆来研究一元二次方程？http://202.175.82.54/tplan/2006/intro/R027.pdf

7.3 Examples

If $n = 2$(quadratic), $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$ 展开比较即有，也可以用求根公式

if $n = 3$, x_1, x_2, x_3 是 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的三个根, then:
$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = a(x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3 = 0)$, That is
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

8 二项式定理 (Binomial theorem)

$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y2 + \cdots + C_n^n x^0 y^n$

Examples:

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = x + y$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x+y)^3 = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$, total 2^3 terms

Let $x = y = 1$, we have $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$

Proof:

Method 1: 数学归纳法 (inductive proof)

Method 2: 组合方法

$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}^{\text{n terms}}$, n 个括号相乘，从 n 个选出 k 个括号中的 a，再从剩余的 $n-k$ 个括号中选出 $(n-k)$ 个 b，得到一组 $a^k b^{n-k}$，而这种选法共有 C_n^k 种，故总共有 C_n^k 个 $a^k b^{n-k}$；其他同理

More:

$(1+x)^{-1}$

$(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$(1+\frac{1}{n})^n$

Multinomial theorem:

$(x_1 + x_2 \cdots + x_m)^n$

9 鸽巢原理 (Pigeonhole principle)

鸽笼原理，又名狄利克雷抽屉原理、鸽巢原理。

表述 1：若有 n 个笼子和 $n+1$ 只鸽子，所有鸽子都被放在鸽笼里，那么至少有一只笼子有至少 2 只鸽子

表述 2：若有 n 个笼子和 $kn+1$ 只鸽子，所有鸽子都被放在鸽笼里，那么至少有一只笼子有至少 $k+1$ 只鸽子

集合论的表述：若 A 是 $n+1$ 个原色，B 是 n 元集，则不存在从 A 到 B 的单射

推广：如果把 n 个对象分配到 m 个容器中，必有一个容器容纳至少 $\frac{n}{m}$ 个对象

反证法证明此原理

例子：

北京至少有两个人头发数是一样多。常人头发大概是 15 万左右，假定没有人的头发超过 100 万，北京人口大于 100 万。

有 n 个人 (至少两人) 互相握手 (随意找人握)，必有两人握过手的人数相同

这个原理经常在计算机中得到真正的应用，比如哈希表的重复问题是不可避免的，因为 keys 的数目总是比 indices 的数目多，什么算法都不可能解决

这个原理，还证明任何无损压缩算法，在把一些输入变小的同时，作为代价一定有其他的输入增大，否则对于长度为 L 的输入集合，该压缩算法总能将其映射到一个更小的长度小于 L 的输出集合，而这与鸽巢理论相悖 ??....

10 裴蜀定理 (Bézout's identity)

Bézout's identity(Bézout's lemma): Let a and b be integers with greatest common divisor d, Then there exist integers x and y such that $ax + by = d$. Moreover, the integers of the form $az + bt$ are exactly the multiples of d

Part III

MISC

数学基本思想:
抽象能力: 会在错综复杂的事物中把握本质
推理能力: 会在杂乱无章的事物中理清头绪
建模能力: 会在千头万绪的事物中发现规律

数学四大基本思想:
函数与方程、数形结合、分类讨论和转化与化归

数学基本方法:
数形结合、分类讨论、换元、数学归纳法、反证法、类比

数域 (域: field): 指一个数集, 它对加法、减法、乘法和除法（除数不为零）运算是封闭的, 并且包含 0 和 1
换句话说, 对数域中任意两个数进行这四种基本运算, 其结果仍然属于这个数域。
常见的数域包括有理数域 (Q)、实数域 (R) 和复数域 (C)
一个集合成为数域, 需满足以下条件:
1. 包含 0 和 1: 数域中必须有加法单位元 0 和乘法单位元 1
2. 封闭性: 加法和减法封闭; 乘法封闭; 除法封闭
非数域例子: 自然数集和整数集, 不构成数域, 因为除法运算不封闭, 例如 2/3 不属于自然数或者整数

丢番图方程, 又称为不定方程 (Diophantine equation), Diophantus is a Greek mathematician
丢番图的研究在数论中占有重要地位, 如丢番图方程、丢番图集合、丢番图逼近等都是数学的重要领域

最大公约数: GCD(Greatest Common Divisor) or HCF:(Highest Common Factor). e.g. $gcd(3, 9) = 3$, $gcd(-3, 9) = 3$

0! 规定为 1

Part IV

basics

11 反证法 (proof by contradiction)

英国数学家高德菲 · 哈罗德 · 哈代在他的文章《一个数学家的辩白》描述:“欧几里得最喜欢用的反证法，是数学家最精良的武器。它比起棋手所用的任何战术还要好：棋手可能需要牺牲一只兵甚至更多，但数学家却是牺牲整个棋局来获得胜利。”

反证法常用于” 正面证明不容易或不能得出结果” 的情况

Procedure:

1. The proposition to be proved is P

2. We assume P to be false, i.e., we assume $\neg P$

3. It is shown that $\neg P$ implies falsehood. This is typically accomplished by deriving two mutually contradictory assertions. Q and $\neg Q$ and appealing to the law of noncontradiction

4. Since assuming p to be false leads to a contradiction. It's concluded that p is in fact true

Example: $\sqrt{2}$ 是无理数的证明

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，那么就可以写为 $\frac{p}{q}$，其中 p, q 为正整数且互质，那么有: $p = \sqrt{2} \times q$, then $p^2 = 2 \times q^2$, 很显然 p^2 是偶数，而只有偶数的平方才是偶数，所以 p 是偶数。假设 $p = 2s$，then $p^2 = 4s^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2s^2$，从而 q 也是偶数，这与互质矛盾，假设不成立，从而得证。

12 素数、合数

素数 vs 质数

直到清末，prime number 一直被翻译为素数，素数、非素数、合成数都是日译名。汉语中的“素”有“根本”之义，有可能“素”与“数”读音接近，易混淆，用了“质”。但华罗庚的《堆垒素数》和陈景润研究的“哥德巴赫猜想”也是用的素数。现在的一些中小学教材，统一使用的是质数，但又标明了“质数，又叫素数”

为什么规定 1 不是素数?

1 既不是素数也不是合数。加入 1 是素数，那么一个数比如 $1 \times 2^2 \times 3^3$ 也可以写为 $1^2 \times 2^2 \times 3^3$，这样分解就不唯一了

素数：大于 1 的自然数，如果只有 1 与自身两个因数，那么这个数就称为素数。如 $2, 3, 5, 7, 11$ etc。2 是最小的素数，也是素数中唯一的偶数

合数：大于 1 的自然数，如果除了 1 与自身以外，还有其他因数，则称此数为合数。如 $4, 6, 8$ etc.

根据定义，1 既不是素数，也不是合数。全体自然数分为：1、素数、合数。

互质 (互素, coprime)：两个或两个以上的整数的最大公约数是 1

如果数域是正整数，那么 1 与所有正整数互质

如果数域是整数，那么 1 and -1 与所有整数互质，而且他们是仅有的与 0 互质的整数

两个整数 (a, b) 互质，记为：$a \perp b$

专门研究数学的人认为素数是最基本的数，因为任何大于 1 的整数要么是素数，要么是若干素数的积。德国的高斯曾经说过：“数学是科学的皇后，数论是数学的皇冠”。费马曾说过：“全部的数论问题就在于以何种方法来讲一个整数分解质因数”。

素数是有限的还是无限的？这被欧几里得证明了，有了欧几里得定理 (Euclid's theorem)，是数论中的基本定理。

欧几里得定理 (Euclid's theorem)：

《几何原本》第九卷中，有以下陈述：存在着比指定的任意多个素数更多的素数。

也即：素数的个数是无限的。

素数是无限的.

Proof1(欧几里得，不是反证法？):

1. 假设素数是有限的, 那么可以假设素数只有一个有限的集合 S, as $\{p_1, p_2, ...p_n\}$
2. 构造一个新的数: $Q = p_1 \times p_2 \times \cdots p_n + 1$
3. 分析 Q
   a, Q 比 S 中的任意一个素数要大，它不在 S 内
   b, 用集合 S 中的任何一个素数 p_i 去除 Q, 都会余 1
4. 得出矛盾
   a, 意味着 Q 要么本身就是一个新的素数，它不在我们构造的集合 S 内
   b, 要么 Q 是一个合数，它可以被一个比 P_n(我们假设的最大的素数) 还要大的素数整除，根据**算数基本定理**，这意味着存在一个不在 S 内的素数，这个素数比
5. 这与我们最初假设的“素数是有限的”矛盾，因此素数一定有无限多个

Proof2(欧几里得):

考虑正整数 n 的阶乘 $n!$ 可以被 2 到 n 的所有的整数整除，$n! + 1$ 并不能被 2 到 n 的任何自然数所整除，因此 $n! + 1$ 有两种可能性：是素数，或者能被大于 n 的素数 (素数基本定理) 整除，在任何一个 case 中，都表明至少存在一个比 n 大的素数

素数定理, 又称作质数定理, prime number theorem，是素数分布理论的中心定理，是关于素数个数问题的一个命题：

13 排列组合 (permutation and combination)

13.1 排列 (permutation)

Permutaion(排列、变换、置换，比如古典密码里的置换) or Arrangement，所以数学符合 P 和 A 都可以。

利用乘法原理：$A_n^k = \overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}^{\text{k factors}} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Also use: P_k^n, $P(n,k)$, ${}_nP_k$, ${}^nP_k$, $P_{n,k}$. Note the slight difference: P_k^n and A_n^k

重复排列：从 n 个元素中取出 k 个元素，k 个元素可以重复：$U_k^n = n^k$

13.2 组合 (combination)

Combination just likes permutation, but the order doesn't matter

This formula can be derived from the fact that each k-combination of a set S of n members has permutations so
$P_n^k = C_n^k \times k!$ or $C_n^k = P_n^k / k!$. The C_n^k often denoted by $\binom{n}{k}$

14 绝对值

14.1 绝对值的意义

本质是表示距离，比如数轴上的线段距离，差值的绝对值

第一要务一般是如果去绝对值，从代数上看就是要去讨论

不但要会去绝对值，还要会用绝对值列出题目相应的等式或者不等式，然后去解

又比如 $|3-2x|+|x-3|$ 的最小值，要善于变换，以方便几何上的直观

14.2 最值

$f(x) = |x+1| + |2-x|$ 的最值
$f(x) = |x+1| + |2x-1|$ 的最值，Tips[2]
$f(x) = |x+1| + |x| + |x-2|$ 的最值
$f(x) = |2x-1| + |4x-3|$
$f(x) = ||x-1| - 3|$

[2] $|2x-1| = 2|x-\frac{1}{2}|$

14.3 推广

$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\cdots+|x-a_n|$ $f(x)=|x+1|+|2x-1|$ 可以化简为：$f(x)=|x+1|+2|x-\frac{1}{2}|=|x+1|+|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{1}{2}|$

奇点偶段，证明方法：从 1 到 3 到 5，从 2 到 4 到 6，以至无穷

15 整除规则 (divisibility rule)

Let $A=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1}=a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}...+a_2\times 10+a_1$

15.1 基本判别 (rules)

被 2 整除：

The last digit is even

被 3 整除和被 9 整除:

The sum of digits must be divisible by 3 or 9. Tips[3]

被 4 整除：

The last two digits must be divisible by 4. Tips[4]，后者是关键

被 5 整除：

被 6 整除：

被 7 整除：

被 8 整除：

The last three digits must be divisible by 8

被 9 整除：

被 11 整除：

---

[3] $A=a_n\times(9+1)^{n-1}+a_{n-1}\times(9+1)^{n-2}...+a_2\times(9+1)+a_1$
$=(a_n\times 9^{n-1}+a_{n-1}\times 9^{n-2}+...+a_2\times 9)+(a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1)$

[4] $A=\overline{a_n a_{n-1}...a_3}\times 100+\overline{a_2 a_1}$

第一位数 − 第二位数 + 第三位数 −...，最终值如果能被 11 整除，正负交替，从前往后和从后往前一样，负数也可以判定. Tips[5]

被 13 整除:

被 17 整除:

[5] $10 = 11 \times 1 - 1, 100 = 11 \times 9 + 1, 1000 = 11 \times 91 - 1$

15.2 proofs

被 7 整除

方法 1：三位截断：if $A = \overline{b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$ 能被 7 整除，then: $\overline{a_1a_2a_3} - \overline{b_1b_2b_3}$ 可以被 7 整除

$A/7 = (\overline{b_1b_2b_3} \times 10^3 + \overline{a_1a_2a_3})/7 = 143 \times \overline{b_1b_2b_3} + (\overline{a_1a_2a_3} - \overline{b_1b_2b_3})/7$

方法 2：降位，如五位数变为四位，再变为三位，再两位。

Suppose we have a number $A = \overline{a_1a_2a_3a_4b}$, let $A = \overline{ab}$, while $a = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.

if 能化简为判断 $a + mb$ 能否被 7 整除，则简化成功：

$$\begin{cases} a + mb = 7n_1 \\ 10a + b = 7n_2 \end{cases} \Rightarrow (10m - 1)b = 7(n_1 - n_2)$$

That means $10m - 1$ 必须是 7 的倍数，此时 m 可以为 5 or -2。那么我们就可以简化为判断 $a - 2b$ or $a + 5b$, -2 和 5 正好相差 7.

e.g.

$329 \to 32 - 2 \times 9 = 14$

$4564 \to 456 - 2 \times 4 = 448 \to 44 + 8 \times 5 = 7 \times 12$

推广：

被 11 整除：$(10m - 1)|11$, $m = -1$。当然，被 11 整除还有一个更方便的方法，那就是依次加减

被 13 整除：$(10m - 1)|13$, $m = 4, -7$

被 17 整除：$(10m - 1)|17$, $m = -5$

我们可以看到，m 是一个呈周期循环，太大了就没有意义了，如果一个三位数，最后化简还是三位数，就没有了意义

这种方法用计算机编程来判断很方便

16 MISC

. . . .

$\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4+1}}{x}$ 的 max. tips[6]

. . . .

$x, y > 0$, and $x + 3y = x^3y^2$, min of $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$, tips[7]

. . . .

[6] 1 讨论正负，2 换元，3 分子有理化

[7] 把 $1/y$ 带入

17 todo

生日问题 https://zh.wikipedia.org/wiki/