Contents

1 MISC

NZQRC: NaZi QRC(quick response code), $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
N:nature Z:(From German Zahlen) Q:rational number R:real number C:complex
N and Z 是可数的无限集合
$\mathbb{N}$ is $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$ is $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$= 整数 + 分数，可以表达为两个整数比的数，小数不分有限或者循环
$\mathbb{R}$= 有理数 + 无理数

perpendicular 垂直
orthogonal 正交
dot plot 点图
symmetrical 对称
right-tailed 右侧
skew 歪斜，偏的
outlier 异常值，离群值
mean 平均数
median 中位数，排序后的中间值
mode 众数
prod(product)
progression 级数数列
arithmetic progression 等差数列
geometric progression 等比数列
harmonic(和声、音乐般的、谐波) progression 调和级数
mathematical induction 数学归纳法
proper fraction 真分数
improper fraction 假分数

充分和必要,$\rightarrow Q \rightarrow$, Cupid's arrow(丘比特之箭)，充分必要，前后，条件能推导 Q，那就是 Q 的充分条件，如果 Q 能推导出另一个，那么这个条件就是 Q 的必要条件, 前面如果 P->Q->P 会易混

可导 (可微) 连续可积有界：一个导弹连集结，$\rightarrow$

$tan'x = sec^2 x$, 谈话 2seconds

Some basic algebraric formula:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ let $b = -b$ we have $(a-b)$
$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ let $b = -b$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3b^2a + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$
if $a + b + c = 0$ then $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ let $b = -z \Rightarrow a^3 + z^3$
$x^4 + 4y^4 = (x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)$ //Sophie Germain's identity

和角公式的推导，一般从 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ 开始推导，hint[1]

$\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$

e(exponential's first letter), 无理数，自然对数的底数，sometimes called "Euler's number"，$= 2.7182818284590\cdots$
$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$

[1]有几种方法：1. 单位圆，余弦定理 2. 向量 3. 画图

2 直线和平面

2.1 line 直线

In $\mathbb{R}^3$ 过 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线

$L = \{\vec{p}_1 + t(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) | t \in\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + t(x_1 - x_2) \\ y = y_1 + t(y_1 - y_2) \\ z = z_1 + t(z_1 - z_2) \end{cases}$

即是参数式方程

2.1.1 直线 ($\mathbb{R}^3$)

key: 方向向量 (l,m,n)

1. 一般式: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \end{cases}$ 从此也可以推出 s= $\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

2. 标准式 $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$

3. 两点式，两点求出方向向量，转化为标准式

4. 参数式，$\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} = t \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

2.1.2 直线 ($\mathbb{R}^2$)

$Ax + By + C = 0$, 法向量 $\vec{n} : \left[\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right]$, $s : \left[\begin{smallmatrix} -B \\ A \end{smallmatrix}\right]$

斜率为 $-\frac{B}{A}$, and $\left[\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{smallmatrix}\right] = 0$

2.2 Plane 平面

1. 过 $\vec{M}(x_0, y_0, z_0)$, 法向量 $\vec{n}$(A,B,C), $\vec{p}$(x,y,z), 平面可表示为: $t(\vec{x} - \vec{m})$
$\Rightarrow t(\vec{x} - \vec{m}) \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \left[\begin{smallmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \end{smallmatrix}\right] = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

2. 一般式 Ax+By+Cz+D=0

3. 截距式 $\dfrac{x}{A} + \dfrac{y}{B} + \dfrac{z}{C} = 0$

4. 三点式, p_1, p_2, p_3, x_{123}, 先求出法向量 (任两个向量)，用行列式, $\overrightarrow{p_1p_2}$ *and* $\overrightarrow{p_2p_3}$

5. 平面束 Y 通过直线 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z) = 0$, λ and μ 不同时为 0

$\Rightarrow A_1x + B_1y + C_1z + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z) = 0$, same as above? sure

2.3 平面关系

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

1. 平行 $n_1 \parallel n_2$: $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 = \lambda \neq D_1/D_2$

2. 垂直 $n_1 \perp n_2$: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

3. θ: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |n_1||n_2| \cos\theta$

2.4 直线关系 (same as 平面)

1. 平行 $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$

2. 垂直 $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

3. θ:

2.5 直线与平面

1. 平行: $\vec{s} \perp \vec{n} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = 0$

2. 垂直: $\vec{s} \parallel \vec{n} \Rightarrow A/l = B/m = C/n$

3. θ: $\vec{l} \cdot \vec{s} = |l||n| \cos(\pi/2 - \theta) = |l||s| \sin(\theta)$

2.6 距离

Key：两条直线的夹角，可以点积也可以叉积，$\sin\theta$ and $\cos\theta$ convertable

$\vec{s} \cdot \vec{l} = |\vec{s}||\vec{l}| \cos\theta$ 两边取模可求 cos, $\vec{s} \times \vec{l} = |\vec{s}||\vec{l}| \sin(\theta) n$ 两边取模可求 sin，可验证，取模是因为要取锐角

Assume: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为点或者面上的一个点

$L: \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{m}, \Pi: Ax + By + Cz = 0$

1. 点到点

2. 点到直线

$d = |\overrightarrow{M_0M_1}| \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|s|}$

$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $in\ \mathbb{R}^2, \quad L: Ax + By + C = 0$

3. 点到平面

$$d = |M_0M_1| \cos\langle \overrightarrow{M_0M_1}, \vec{n} \rangle = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cy_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4. 平行线、平行平面

$d = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,(while in $\mathbb{R}^2 = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$)，注意 NOT $||D_1| - |D_2||$

2.7 曲线的切线、曲面的切平面

Let 曲线 $\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$

Let 曲面 $\Omega : F(x, y, z) = 0$(**Not** $z = F(x, y)$**, 注意和多元函数极值的区别**)

曲线的切线的方向向量 s（**线对线**）：$(\varphi(t_0), \psi(t_0), \omega(t_0))$, 切线:$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$
曲面的切平面的法向量 n（**面对面**）：$(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0))$

E.g. $z = x^2 + y^2$ 切平面的法向量, hint[2]

[2] $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

3　不等式

算术-几何不等式

算术平均值 $A_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$
几何平均值 $G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots ..x_n}$
$A_n \geq G_n, x_n \in \mathbb{R}_+$，又称均值不等式
证明方法：柯西逆向归纳；归纳；对数函数-琴生不等式

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
Prove：几何证明: 面积和体积; 数学归纳法证明

4 Calculus 微积分

4.1 Misc

$d(uv) = udv + vdu$
$uv = \int udv + \int vdu$

4.2 无穷小

if $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时极限为 0，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小

无穷小是个概念，非正式描述："最终会消失的量"，"绝对值比任何正数都要小的量"
无穷小量不是一个数，是一个变量，0 可以作为无穷小量的唯一一个常量。

$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, β 是比 α 高阶的无穷小
$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, β 是比 α 低阶的无穷小
$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C$, β 和 α 是同阶无穷小，if $C = 1$ 称为等价无穷小

4.3 Limit(极限)

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ and $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

4.3.1 L hospital's rule

if $f(x), g(x)$ 在 $x = c$ 可微, and $g'(x) \neq 0$, then

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

柯西中值 to prove

4.4 Derivative 导数

Left derivative:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Right derivative:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Let: $x - x_0 = \Delta x$, they are same. But the latter is better, especially 左右导数

4.4.1 二阶导数

图像的凹凸性判定：$f''(x) \geq 0$ 是凹的，反之是凸的
任意两点连出的线段在函数图像的下方或者上方，称之为凸凹
等价于：切线在函数的上方是凸的，在函数下方是凹的
也就是 $f'(x)$ 的增减性，可以以 $y = x^2$ 为例, visualize 一条条的切线，便于理解

证明??? how to prove?

4.4.2 导数的乘积法则 (莱布尼兹法则)

$(uv)' = u'v + uv'$

Prove:
$d(u \cdot v) = (u + du) \cdot (v + dv) - u \cdot v = u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv$ 由于 $du \cdot dv$ 可以忽略，因此有
$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$ 两边同时除以 dx 即可

4.4.3 chain rule

$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$
e.g.

$(\frac{1}{1-x})' = [(1-x)^{-1}]' = -1 \cdot (1-x)^{-2}(-x)' = (1-x)^{-2}$

$(tanx)' =$... while it's a good example to understand

4.5 Integral 积分

黎曼可积的条件：有界，几乎处处连续

4.5.1 二重积分

$\iint_D f(x,y)dA = \int_{y=c}^{y=d} \underbrace{\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx}_{\text{function of y}} dy = \int_{y=c}^{y=d} dy \int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx$

e.g.
$\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = \int_{x=0}^{x=2} dx \int_{y=x}^{y=2} e^{-y^2} dy = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=y} e^{-y^2} dxdy$

4.5.2 三重积分

$\iiint_R f dv$, and R is 3-d space, $dv = dxdydz$

$\int_{z=z_1}^{z=z_2}\int_{y=y_1(z)}^{y=y_2(z)}\int_{x=x_1(y,z)}^{x=x_2(y,z)} dxdydz$

e.g.

$f = x^2yz$ and V is $\begin{cases} 2x+y+3z=6 \\ z=2 \\ x=0, y=0 \end{cases} \Rightarrow \int_{y=0}^{y=6}\int_{x=0}^{x=3-\frac{y}{2}}\int_{z=2-\frac{2}{3}x-\frac{y}{3}}^{z=2} fdzdxdy$

4.6 多元微积分 multivariable calculus

偏导数、全微分

偏导数是它关于其中一个变量的导数，而保持其他变量恒定
全导数是所有变量都允许变化

偏导数的符号是 ∂ 是 d 的变体

全微分：$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

4.7 多元函数的极值

$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ 的极值
1. 找出临界点 $\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow (1,1) or (0,0)$
2. 二阶偏导数

$$\begin{cases} f''_{xx}(x_0,y_0) = A = 6x \\ f''_{xy}(x_0,y_0) = B = -3 \\ f''_{yy}(x_0,y_0) = C = 6y \end{cases} \text{ and } \begin{cases} 1.AC - B^2 > 0 \quad and \quad A > 0 \quad min \\ 2.AC - B^2 > 0 \quad and \quad A < 0 \quad max \\ 3.AC - B^2 < 0 \quad notmaxormin \\ 4.AC - B^2 = 0 \quad notsure \end{cases}$$

4.8 条件函数的极值

求函数 $z = x^2 + 2y^2$ 在 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最值
构造 lagrange 函数 $F(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$
let $F'_x = 0 \quad F'_y = 0 \quad F'_\lambda = 0$ 求出驻点，然后再比较

$S = xy + 2(xz + yz)$ 在 $xyz = V$ 下的 min
Let$F = xy + 2(xz + yz) + \lambda(xyz - V)$, let $F'_x \quad F'_y \quad F'_z \quad F'_\lambda = 0$

4.9 介值定理 Intermediate value theorem

中值定理是 mean value theorem

介值定理描述的是连续函数在两点之间的连续性

直觀地比喻，這代表在 $[a,b]$ 區間上可以畫出一個连续曲线，而不讓筆離開紙面

4.9.1 零点定理（波尔查诺定理）

零点定理是介值定理的一种特殊情况 - 如果曲线上兩點的值正负号相反 $(f(a)\cdot f(b)<0)$，其间必定存在一個根，也称勘根定理

4.10 极值定理

如果 f 在 [a,b] 上连续，则它一定取得最大值和最小值，至少一次。
它强化了有界性定理

4.11 微积分基本定理

4.11.1 Theorem prove order

罗尔定理拉格朗日、柯西 $\leftarrow$ 罗尔定理
积分第一中值定理 $\leftarrow$ 拉格朗日中值定理
微积分第一基本定理 $\leftarrow$ 积分第一中值定理 + 夹逼定理
微积分第二基本定理 $\leftarrow$ 积分第一中值定理 + 微积分第一基本定理 + 黎曼积分

4.11.2 第一部分 (微积分第一基本定理)

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 有 $F'(x)=f(x)$

表明不定积分是微分的逆运算，保证某连续函数的原函数的存在性

Prove: 导数的定义 (在 x_1 处的导数)、积分第一中值定理、夹逼定理:
$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，我们有 $F(x_1)=\int_a^{x_1} f(t)dt$ 和 $F(x_1+\Delta x)=\int_a^{x_1+\Delta x} f(t)dt$
$F(x_1+\Delta x)-F(x_1)=\int_a^{x_1+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x_1} f(t)dt=\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)dt$
由积分第一中值定理，在 $(x_1,x_1+\Delta x)$ 存在一个 c，$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x$
故 $F(x_1+\Delta x)-F(x_1)=f(c)\Delta x \Rightarrow \frac{F(x_1+\Delta x)-F(x_1)}{\Delta x}=f(c)$
$\Delta x\to 0$，有 $F'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)$
根据 squeeze 定理，$\lim_{\Delta x\to 0} c=x_1$，带入，有 $F'(x_1)=\lim_{c\to x_1} f(c)=f(x_1)$

4.11.3 第二部分 (微积分第二基本定理，牛顿-莱布尼兹公式)

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

定积分可以用原函数来计算，简化计算

Prove：(矩形面积、积分第一中值定理、黎曼积分) 设 $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n$
$F(b) - F(b) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + \cdots = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n}[F'(c_i)(x_i - x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n}[f(c_i)(\Delta x_i)]$
两面取极限 (黎曼积分)$\lim_{\|\Delta\|\to 0}[F(b) - F(a)] = F(b) - F(a) = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[F(c_i)(\Delta x_i)]$
右侧表达式定义了 f 从 a 到 b 的积分，so，$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

4.12 中值定理 (Mean Value Theorem)

4.12.1 微分中值定理

1. 罗尔定理: 是三个 theorems 的基础，另两个都是基于此证明
f(x) 在 [a,b] 连续,(a,b) 可导，f(a)=f(b)，那么 $\exists c, f'(c) = 0$
Prove: 根据极值定理，证明极值点 (假设 ε 处最大值) 导数为 0
$f'(\varepsilon^-) = \lim_{x\to\varepsilon^-}\frac{f(x)-f(\varepsilon)}{x-\varepsilon} \geq 0$
$f'(\varepsilon^+) = \lim_{x\to\varepsilon^+}\frac{f(x)-f(\varepsilon)}{x-\varepsilon} \leq 0$

2. Lagrange 拉格朗日
f(x) 在 [a,b] 连续,(a,b) 可导，那么 $\exists\xi \in (a,b), f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$
Prove: $g(x) = \frac{f(b)-f(a))}{b-a}(x-a) + f(a) - f(x)$
or let $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b) - f(x)$
Both $g(a) = g(b) = 0$

3. 柯西定理：可推导出洛必达法则
f(x) 在 [a,b] 连续,(a,b) 可导，那么 $\exists\xi \in (a,b), \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
Prove: $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$
or let $h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x) - f(x)$
Both $h(a) = h(b)$

4. 几何意义：
拉格朗日是核心，罗尔定理是其特殊情况，柯西定理是其推广。
罗尔定理：极值点导数为 0；拉格朗日；存在切线与首尾平行；柯西：参数方程下……平行

4.12.2 积分中值定理

第一中值定理：$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续函数，$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 可积切在积分区间不变号, 那么存在一点 ε, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b g(x)dx$

Prove:
$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, 对此求积分:
$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$
if $\int_a^b g(x)dx = 0$, then.... else > 0, $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$, 而 g(x) 为连续函数

$\int_a^b f(x)dx = f(\varepsilon)(b-a)$ 是 $g(x)=1$ 的特殊形式

几何意思：积分面积 = 矩形面积，可以解释为什么可以用矩形代替不规则形状

y

4.13 Taylor's Formula(泰勒公式)

设 n 是正整数，在 a 点 n+1 次可导，那么

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{n!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Just remember $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, **三个 n，导、阶、幂**
If $R_n(x) = o[(x-a)^n]$, Peano form of remainder
If $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)(\theta)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $\theta \in (a,x)$, Lagrange form of remainder

4.13.1 由来

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$，对于足够光滑的函数⋯⋯⋯⋯

4.13.2 意义

一叶知秋

泰勒公式，if only 函数在点展开的级数收敛时才有意义

4.13.3 Taylor series(级数)、Maclaurin series

麦克劳林级数是泰勒级数在 0 点的展开，常用的麦克劳林序列：

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall |x| \leq 1$
$f'(x) = (1-x)^{-2}, f''(x) = 2(1-x)^{-3}, \cdots f^n(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$

$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha} C(\alpha, n)x^n \quad \forall x : |x| < 1, \forall \alpha \in \mathbb{C}$
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \cdots$
$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1]$
$f'(x) = (1+x)^{-1}, f''(x) = -1(1+x)^{-2}, f'''(x) = 1 \cdot 2(1+x)^{-3} \cdots$
$f^{(4)}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3(1+x)^{-4}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

$x^2 = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \cdots$

Notice: $\sin' x = \cos x$, so it's easy to remember

4.14 级数

无穷级数: $s = \lim_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$
S_n(前 n 项和) 收敛，则称级数 s 收敛

级数收敛的必要条件 $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

级数收敛的判定：
1. 比较判别 (v_n 为另一个级数)：
$\lim |\frac{v_n}{u_n}| = A(\text{constant}, \neq 0)$, 同时收敛与发散，比如与标准级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 对比, $p = 1$ 时为调和级数, it's divergent
if $A = 0$, 根据 v_n 的发散或者收敛也可以判断

2. 比值判定 (达朗贝尔)：$\lim |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \rho$, < 1 收敛，> 1 发散，$= 1$ 无法判定

3. 极值判定 (柯西)：$\lim \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 同上

交错级数的判定： $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$
莱布尼兹判定：1.$u_n \leq u_{n+1}$, 即单调递减 2.$\lim u_n = 0$ 同时满足 1、2 则级数收敛

绝对收敛 ($\sum |u_n|$ 收敛)
条件收敛 ($\sum |u_n|$ 发散，$\sum u_n$ 收敛)
绝对收敛的级数一定收敛
条件收敛的正项或者负项构成的级数一定发散

4.14.1 幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

收敛域 ($\lim |\frac{u_{n+1}}{u_n}|$)、收敛半径 ($=$ 收敛域 (是对称的)/2)
两种思路 (最后都要讨论端点)：
1. 达朗贝尔，此法比较易懂, 令 $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| < 1$，求出范围即是收敛域

2. 比较为正统，$|\frac{a_{n+1}}{a_n} = l|$ and $R = 1/l$

Example: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$， hint[3]

4.15 常用

$e^{\ln x} = x$ and $\ln e^x = x$
$\ln(x)' = \frac{1}{x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$
$\sin' x = \cos x$ and $\cos' x = -\sin x$
$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 可以用三角形简单的推导一下
$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ and $arccot' x = -\frac{1}{1+x^2}$
$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$
$\ln'(x + \sqrt{x^2 + a^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
$\ln'(x + \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, hint[4]

4.15.1 换元积分法

它是由链式法则和微积分基本定理推导而来的。

第一类 (配凑)：$\int_a^b f(g)g'dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g)dg$

第二类：$\int_a^b f(x)dx = \int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} f(x(g))x'dg$, Like $\sqrt{x^2 \pm a^2}$,$\sqrt{a^2 - x^2}$.

前提是 f 为可积函数，g 为连续可导函数

e.g.
$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$, In three ways:
1. Let $x = r \sin x$, then $\int_{x=0}^{x=r} \to \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$
2. Let $x = r \cos x$, then $\int_{x=0}^{x=r} \to \int_{\theta=\pi/2}^{\theta=0}$
3. 数形结合: 注意积分上限都要做改变

4.16 MISC

不定积分常用方法：降幂分部积分分母合并

[3] $R = 2$
[4] $\int_2^4 \frac{f(x)}{f(6-x)+f(x)}dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

分部积分（定积分、不定积分）:

$\int udv = uv - \int vdu$ and $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$

Prove: $\frac{d(uv)}{dx} = u'dv + v'du$ 两边求不定积分和定积分

$\int \arctan xdx =$

$\int \sin \sqrt[3]{x} =$

$\int \sec xdx =$ hint[5]

$\int \frac{1}{\sin x + \tan x} =$

$\int x \sin^2 xdx =$

$\int \csc^3 x \sec x =$

$\int \sec^4 xdx$, hint[6]

$\int e^x \cos xdx$, hint[7]

$\int \frac{2x+3}{x^2-5x+4}dx$, hint[8]

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3\sin x + 4\cos x}dx$, hint[9]

$\int e^{\sqrt{x}}dx$

$\int \frac{1}{1+\cos x}dx$, hint[10]

$\int \frac{1}{1+x+x^2}dx$

$\int \frac{x}{1+x^4}dx$

$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

$\int_{-2}^{2}(x^2 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2})\sqrt{4-x^2}dx$, hint[11]

$f(a) = f(b) = 0$, prove $\exists \xi \quad f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$, hint[12]

prove $x = a\sin x + b$, $a > 0, b > 0$, 至少存在一正根，且不超过 $a + b$, ???

$y = x^2$ 绕 y 和 x 轴分别旋转一周形成的曲面 s_1, s_2, 求出两个曲面方程，并求 $y = 4$ 与 s_1 围成的体积。hint[13]

---

[5] $\ln(\sec x + \tan x) + C$

[6] $\sec^2 x \sec^2 xdx \to \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} d\tan x$

[7] $\int \cos xde^x = e^x \cos x + \int e^x \sin xdx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos xdx$

[8] 有定式，$\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1}$

[9] Like above, $3A + 4B$ and $3B - 4A$, find 系数

[10] $\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

[11] 奇偶性

[12] $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \int(-g'(x)) \to \ln f(x) = -g(x) + C$, note $f(a) = f(b) = 0$, cannot log, so further, let $F(x) = f(x) - e^{-g(x)}$

[13] 绕 y 轴，y 不变，$x \to \pm\sqrt{x^2+z^2}$; $v = \int_{y=0}^{y=4} \pi x^2 dy$，看成一个个圆柱体, 而 $y = x^2$

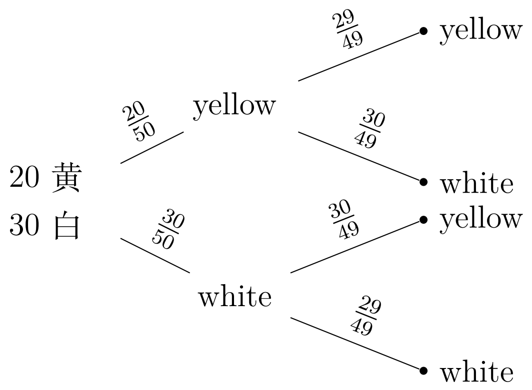
5 概率统计

5.1 tips

Use tree diagram or venn diagram，it will be very easy.

Venn diagram is usually meant for sets, when used in Probability, it must be reconsidered in your mind.
公式类的题多用 venn，叙述性的题多用 tree

But how to describe the tree branch is the most important



树形图的每个分支**不必为同一属类**，**垂直相加 (note must include all father node)** 为 1

5.2 排列、组合

$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

e.g. 0,1,2,3,4,5,6,7 排成三位数. hint[14]

1,1,1,2,2,3(可用来理解 C) 排六位数. hint[15]

捆绑法：5 男 3 女，3 女必须在一起. hint[16]

插空法：8 学生 4 老师，老师不能相邻，且学生在中间. hint[17]

隔板法: n 元素，m 堆，每堆至少一个. hint[18]

[14] 1. loci: 7x7x6; 2.$P_8^3 - P_7^2$; 3. loci $P_7^1 P_7^2$
[15] $P_6^6/3!2!$
[16] $=P_6^6 P_3^3$
[17] -0-0-0-0-0-0-0-0- $=P_8^8 P_7^4$
[18] 相当于 m-1 个木板插入 n-1 个空, C_{n-1}^{m-1}

5.3 Probability

全概率公式：$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$, $A_1\cdots A_n$ 为一个完备事件组

So we have: $P(B)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

贝叶斯定理 (Bayes' theorem): $P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

So we have: $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$

Visualizing bayes theorem[19]
$P(A|B)=\frac{|AB|}{|B|}=\frac{\frac{|AB|}{|U|}}{\frac{|B|}{|U|}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$, that means take B as Universe(U)

$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

5.4 独立和互斥

独立和互斥是两个概念

A 和 B 独立 (independent) $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

SO, when independent $P(A|B)=P(A)$ and $P(B|A)=P(B)$

独立情况下 venn 图大多是 AB 交叉的
互斥情况下 venn 图是不交叉的

5.5 概率空间、分布函数、期望、方差

概率空间 (Ω,F,P)：是概率论的基础，概率的严格定义基于此概念

分布函数：$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt,-\infty<x<\infty$

$F'(x)=f(x)$

期望 (大数定律) 与平均值：期望是样本趋于无穷的极限
例：掷色子 (可以用来理解 E，离散型和连续型)，2,2,2,6,4 average=(2+2+2+6+4)/5=3
而 E 是固定的 $=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+6\cdot\frac{1}{6}=3.5$, 但是 3.5 数值是扔不出的

$$E(X)=\int_{\Omega}XdP=\begin{cases}\sum x_ip_i & \text{离散函数 \textbf{Win XP}}\\ \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx & \text{连续函数}\end{cases}$$
$$E(X^2)=\int_{\Omega}X^2dP=\begin{cases}\sum x_i^2p_i & \text{离散函数}\\ \int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx & \text{连续函数}\end{cases}$$

[19] https://oscarbonilla.com/2009/05/visualizing-bayes-theorem/

$$x = y = 1a - b = b - c = a$$

方差 (Variance): 描述它的"离散程度"，变量离"期望值"的距离

例：色子 2,3,3,4,4, $D = [(2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (4-3.5)^2]/5$

$$DX = E[(X-EX)^2] = E(X^2) - (EX)^2 = \begin{cases} \sum(x_i - EX)^2 p_i & \text{离散} \\ \int(x-EX)^2 f(x)dx & \text{连续} \end{cases}$$

$DX = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(x^2) - 2\mu EX + (EX)^2, \mu = EX$

Why 方差不用绝对值, hint[20]

期望值 E 是线性函数

$E(aX + bY + C) = aE(X) + bE(Y) + C$

$E(XY) = EX \cdot EY$ (XY 的协方差为 0(此时称不相关，两个随机变量独立是一种情况))

$E(E(X)) = E(X)$

$E(X - E(X)) = 0$

$E(g(X)) \neq g(E(x))$ 一般情况下

$D(C) = 0$

$D(aX) = a^2 DX$

$D(aX + C) = a^2 DX$

$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2E\{(X-EX)(Y-EY)\}$

e.g.

Find $E(X^2)$, $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$, hint1[21], hint2[22]

$X \sim B(100, 0.2)$，求 $D(X^2)$, Note: not the $n \times (0,1)$ 分布，概率空间变了，即 $E(g(X)) \neq g(E(x))$ 一般情况下

5.5.1 变异系数（离散系数）coefficient of variation

$c_v = \frac{\sigma}{\mu}$, 无量纲量，概率分布离散程度的归一化量度, 变异系数也称为标准差离率或单位风险，只在平均值不为 0 时有意义, 一般适用于大于零的情况。

变异系数只对由比率标量计算出来的数值有意义。举例来说，对于一个气温的分布，使用开尔文或摄氏度来计算的话并不会改变标准差的值，但是温度的平均值会改变，因此使用不同

[20] 1.positive2. 放大差异 3.x^2 是光滑函数，绝对值不可微 4.polynomial，人们对 polynomial 研究的多，绝对值不是，比如 Tailor

[21] $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$,x$^2 \in \{1,4,9.16.35,36\}$,$E(X^2) = \sum X_i^2 P_i\{X = x_i\} = 1/6 + 4/6 + 9/6 + 16/6 + 36/6 = 15.167$

[22] let $f(x) = x^2$, then $E(x^2) = \sum(x_i)^2 P(X = x_i)$

的温标的话得出的变异系数是不同的。也就是说，使用区间标量得到的变异系数是没有意义的

5.6 常见分布

5.6.1 0-1、Bernulli Trial

同条件下重复、相互独立的试验，只有两种结果，发生或者不发生，如掷硬币
$EX = \mu = \sum X_i P(X = x_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$
$DX = \sigma^2 = (1-p)^2 p + (0-p)^2(1-p) = p(1-p)$

5.6.2 二项分布

N 次独立的 Bernulli Trial, 记为 $X \sim B(n,p)$
N 次实验中正好得到 k 次成功的概率为 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
$E = \sum_{i=1}^n \mu = np$
$D = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = np(1-p)$

e.g.
$B(2,p)$, if $p\{X \geq 1\} = 5/9$, find the p and DX, hint[23]

5.6.3 泊松分布

$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
$E = D = \lambda$, hint[24]

5.6.4 指数分布

$P(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$
$E = 1/\lambda$
$D = 1/\lambda^2$

5.6.5 均匀分布

$f(x) = \frac{1}{b-a}, F(x) = \frac{x}{b-a}$

x 落在任一子区间的概率只与长度有关，而与位置无关。具有下属意义的等可能性??

[23] $1. P\{X \geq 1\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$ 2. $np(1-p)$
[24] $E = \sum_{k=0}^\infty k P_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^\infty k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$

$EX = \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}$
$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$, if you use $D = \int_a^b (x-EX)^2 f(x)dx$ 很繁琐

5.6.6 正态分布、高斯分布

众数 = 中位数 =E=μ

标准正态分布 $\mu = 0$ $\sigma^2 = 1$

5.7 Examples

A 和 B 独立,$P(A \cup B) = 0.8, P(A) = 0.4, P(\bar{B}|A) = ?, hint$[25]

共 50 球，20 黄球，30 白球，两人依次取出不放回，求第二人取黄球的 P，求如第二人黄球第一人黄球的 P, 思考第一人黄球第二人也是黄球的 P, hint[26]

参加考试考生中，本专业学生占 6 成，本专业通过率是 85%，非本专业通过率是 50%。某位考生通过了考试，他是本专业的 P 是多少, hint[27]

10 个产品，4 次品，任取两个 (第一次第二次)，至少一个正品的 P 是多少，hint[28]

快递员，A 到 B 地送货，开汽车或骑电动车，分别记录了 deliver cargo 100times 的时间，开汽车：平均 24 分钟，方差为 36；电动车：平均 34 分钟，方差为 4
quest1: 建议用哪种方式，and why
question2: 如果开车和电动车的送货时间都服从正态分布，如果某次送货有 38 分钟可用，应该选哪种方式，如果有 34 分钟可用，选哪种。
hint[29]

甲乙两种饮料，颜色气味很相似，饮料放在外观相同的 6 个杯子中，每个品牌 3 个杯子作为实验样品。从 6 个杯子中随机选 3 杯作为一次实验，若所选饮料全部为甲，则视为成功。独立进行 5 次实验，求 3 次成功的 P, hint[30]

[25] $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ answer is 1/3

[26] Tree diagram, final answer is 2/5, 19/49, 19/49

[27] 重点是怎么画 tree, tree 的各节点是同性质的吗?? , 考生 {考生-本专业 {考生-通过、考生-未通过}, 考生-非本专业 {考生-通过、考生-未通过}}, answer is 51/71

[28] 1. 1-$\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$ 2. Tree diagram

[29] key1: 变异系数? key2 正态分布的转换到标准正态分布 $N(0,1)$
1.$c_1 = 6/24, c_2 = 2/34$, 表示离散程度，变异系数越小，分布越集中，所以选电动车。
2.$X\ N(24,36)$, $Y\ N(34,4)$, 标准化 $P(X \leq 38) = P(\frac{X-24}{6} \leq \frac{38-24}{6}) = \phi(7/3)$, 另一个是 $\phi(2)$, 故选汽车，选概率大的??

[30] 一次实验成功的 P 为 $\frac{C_3^3}{C_6^3} = 1/20$, 5 次独立实验，$X \sim B(5, 1/20)$,$P\{X = 3\} = C_5^3(1/20)^3(19/20)^2$

6 线性代数 Linear algebra

6.1 Vector

6.1.1 Basic

The fundamental for linear algebra is the vector

Two fundamental vector operations: additon and scalar multiplication

basic vectors: $\hat{\imath}$ and $\hat{\jmath}$

"Span" is the set of all linear combinations: $a\vec{v} + b\vec{w}$

linearly independent:

向量正统的表示为 $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$，有时候 (x,y), $(x, y)^T$, $[x, y]^T$

vector in $\mathbb{R}^2$ coordinate is $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$

vector in $\mathbb{R}^3$ coordinate is $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$ and so on and on

When we say $\vec{a}$ 可以任意位置，座标系内也可以任意位置，但如果用 tuple 表示 (tuple 就是坐标)，那么必须是从原点开始的。

||x|| 范数:Norm, scalar
|x| 绝对值，是实数集上的一个范数，一维向量中 ||x|| = |x|
$x = (x_1, x_2, x_3 ... x_n)^T \Rightarrow ||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}$
欧几里得空间里，内积等价于点积，故：||x||=$\sqrt{x \cdot x}$

6.1.2 Matrix as linear transformation

Matrix is the transformations of space

linear tranformations are a way to move around space such that the grid lines remain parallel and evenly spaced and such that the origin remains fixed

"linear" has two properties: 1.line remain lines, 2. origin remains fixed

e.g. 90° rotation counterwise:

$\hat{\imath}$ $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \rightarrow \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ where $\hat{\imath}$ land and $\hat{\jmath}$ $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \rightarrow \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ where $\hat{\jmath}$ land, so the transormation is

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.1.3 Vector 加减

坐标对应的加减

6.1.4 Dot Product(点积)

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\text{a}||\text{b}|\cos\theta$, |a| 表示模
代数定义: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$
几何定义: 投影 and 余弦定理 (why cos) $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|a||b|\cos\theta$

6.1.5 Cross Product(叉积)

$\vec{a}\times\vec{b} = \|a\|\|b\|\sin(\theta)n$; n is normal **unit** vector
几何意义：平行四边形的面积
右手定则 $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{a}\times\vec{b})$
If $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3)$, (i,j,k) 为基向量

$$U \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & u_1 & v_1 \\ j & u_2 & v_2 \\ k & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = i\left[\begin{smallmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{smallmatrix}\right] - j\left[\begin{smallmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{smallmatrix}\right] + k\left[\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{smallmatrix}\right]$$

6.1.6 Vector Relations(向量关系)

向量平行 $\vec{a} = \lambda\vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda$
向量垂直 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

6.1.7 Linear Independence

$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$，有非全零的 $c_1, c_2, \cdots c_n$ 则线性相关 dependent，否则 independent
即：有一个向量可以用其他向量组合来表示是线性相关

Basis of a subspace. Basis is “minimum” set of vectors that spans the subspace
$V = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n)$. if V is a basics, $\vec{v}_1 \cdots$ are linear indenpendent.
$S = \{[2,3]^T, [7,0]^T\}$, $span(S) = \mathbb{R}^2$

e.g.
$S = (1,-1,2), (1,1,3), (-1,0,2)$, $span(S) = \mathbb{R}^3$? and linear independent?

Prove: $\mathbb{R}^4$ 内，$[1,4,2,-3]^T, [7,10,-4,-1]^T, [-2,1,5,-4]^T$ 是线性相关的。hint[31]

[31] Using defination: let $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\left[\begin{smallmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{smallmatrix}\right] = 0$

6.1.8 MISC

Cauchy–Schwarz inequality: $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$, proof

Triangle inequality: $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$, proof

6.2 方程的解

6.2.1 $Ax = b$

有　解的充要条件：$r(A) = r(A|b)$
唯一解的充要条件：$r(A) = r(A|b) = n$
无穷解的充要条件：$r(A) < r(A|b)$

克莱姆法则 (Cramer's Rule): $|A| \neq 0$ 则方程有解且唯一

基础解系 (化简为行最简，k 不同时为 0):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 + 5x_4 \\ x_2 = -3x_3 - 4x_4 \\ x_3 = 1x_3 + 0x_4 \\ x_4 = 0x_3 + 1x_4 \end{cases} Let \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

6.2.2 $Ax = 0$

Cramer's Rule:
只有零解：$|A| \neq 0$
有非零解：$|A| = 0$

6.3 伴随矩阵

$adj(A) = C^T$ and $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, and M_{ij} 是余子式，C 是代数余子式
即：先代数余子式，再转置

if $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ then $adj(A) = \left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$

6.4 逆矩阵 A^{-1}

可逆的充要条件：$|A| \neq 0$

求法:
1. $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$, A^* 为伴随矩阵
2. $(A|E) \rightarrow (E|A^{-1})$

性质:
$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, how to prove, hint[32]
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

对于转置矩阵
$(\lambda A)^{-T} = \lambda A^T$ $(AB)^T = B^T A^T$, 不同于上，要用矩阵结构去证明

6.5 正交、合同、正定、相似

正交： $AA^T = E$ or $A^T A = E$。xx 交得带 T

合同： $\exists$ 可逆的 $C, B = C^T AC$，则称 A、B 合同。合在一起，T

相似： $P^{-1}AP = B$，称为 A 和 B 相似
必要条件：1. 同样特征值（也意味着 $|A| = |B|$）. 2. rank 相同 3. 迹相同（主对角线的和）

二次型的正定：
二次型：$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i\neq j} a_{ij}x_ix_j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

二次型的正定定义：$x_{1,2,\cdots,n}$ 不全为 0 时，$f(x_1, x_2 \cdots x_n) > 0$
充要条件是：A 的特征值都是正数或者顺序主子式 > 0 或者合同于单位矩阵

所有特征值都是正数的矩阵被称为正定
所有特征值都是非负数的矩阵被称为半正定
所有特征值都是负数的矩阵被称为负定
所有特征值都是非正数的矩阵被称为半负定

例：$x^2 - xy + y^2 \to A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{smallmatrix}\right]$，顺序主子式大于 0

顺序主子式 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = |1| \\ D_2 = \left| \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix} \right| \\ D_3 = \left| \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix} \right| \end{cases}$

6.6 特征值、特征向量

定义：$\exists \lambda$ and α, 使 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 λ 为特征值，而 α 为特征值 λ 的特征向量

[32] $ABB^{-1}A^{-1} = E$, matrix 的结合律,(AB)(B$^{-1}A^{-1)} = E$, also $(AB)(AB)^{-1} = E$, so ...)

特征值求法 $A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow(\lambda E-A)\lambda=0$，齐次线性方程有非零解 $|\lambda E-A|=0$

特征向量求法:λ_i 为一特征值，$(\lambda_i E-A)x=0$ 的解即是, 如果基础解系 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$，特征向量 $=k_1\alpha_1+k_2\alpha\cdots+k_s\alpha$, k 不同时为 0

特点：

1. $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$，即所有特征值的乘积，$|A|\neq 0\Rightarrow A$ 无零特征值

2. 不同的特征值对应的 α 线性无关

6.7 欧式空间、标准正交基

定义了内积的线性空间称为欧式空间，(α,β) 为 α 和 β 的内积

标准正交基：施密特正交化 (所有 β 化，替一个)

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1\\ \beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\cdot\beta_2\\ \vdots\\ \beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1-\cdots\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\cdot\beta_{n-1}\end{cases}$$

6.8 MISC

$|\begin{smallmatrix}A&B\\0&D\end{smallmatrix}|=det(A)det(D)$

$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

反对称矩阵 $A^T=-A$，对角线为零，其他反

单位正交矩阵，A 各行列为单位向量，且两两正交

像即线性映射、线性变换

求直线 $y=3x$ 在矩阵 $\left[\begin{smallmatrix}1&-1\\-1&1\end{smallmatrix}\right]$ 所对应的线性变换下的像的方程。hint[33]

[33]随意取直线两点，比如 $(0,0),(1,3)$, $\left[\begin{smallmatrix}1&-1\\-1&1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$, the other is $\left[\begin{smallmatrix}-2\\2\end{smallmatrix}\right]$, so 新方程经过 $(0,0),(-2,2)$

7 Highschool

对数 log
1. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, prove
2. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

内心：内切圆（内外心都和圆有关）
外心：外接圆
重心：中线（重点高中？重中同音）
垂心：高线

平行线的判定：
1. 同位角相等
2. 平行线的传递性

多边形的对角线条数, hint[34]

多边形内角和, hint[35]

三角形中位线定理：中位线平行于第三边，切为 1/2，how to prove?
直角三角形中，中线 =1/2 斜边, how to prove?

算术平方根和平方根，算术是平方根中的正数那个

反比例函数：$y = \frac{k}{x}, k \neq 0$, but $y = \frac{k}{x+1}$ 不是

7.1 misc

. . . .

菱形：四边相等的四边形
严谨的定义来源于《几何原本》上说，正方形不是菱形
一般定义，正方形是菱形的一种

. . . .

[34]一个顶点 $n-3$，总为 $n(n-3)/2$
[35]数学归纳法，$180(n-2)$

8 MISC

. . . .

$a^3 - b^3$ 因式分解，hint[36]
然后，令 $b = -z \Rightarrow a^3 + z^3$

. . . .

$(x^2 - 7x + 11)^{x^2-13x+42} = 1$ hint[37]

. . . .

$\sqrt[3]{8 + 3\sqrt{21}} + \sqrt[3]{8 - 3\sqrt{21}}$, hint[38]

. . . .

$615 + x^2 = 2^y$ over the integers. hint[39]

. . . .

$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$, hint[40]

. . . .

[Abraham lincon]
If 4 men in 5 days eat 7lb of bread, how much will be sufficient for 16 men in 15 days? hint[41]

. . . .

圆互相垂直的弦，长度 abcd，so, what's the R，hint[42]

. . . .

If a, b, c, d are positive integers, with a sum of 63, what's the maximum value of $ab + bc + cd$. hint[43]

. . . .

---

[36] 转化为立方体体积, $= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

[37] case1:$1^y = 1$, case2:$y^0 = 1$, case3:$(-1)^{2k} = 1$, when using log, 缩小了定义域

[38] let $a = 8 + 3\sqrt{21}, b = 8 - 3\sqrt{21}$ and let the equation $= x$, so $x^3 = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = a + b + 3\sqrt[3]{ab}x = 16 - 15x \Rightarrow x^3 + 15x - 16 = 0$, and obviously $x = 1$ is a solution , so $(x - 1)(x^2 + x + 16) = 0$, but $x^3 = c$ has three solutions, and ...

[39] find patterns. x 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, the last digit pattern of $615 + x^2$ is 5 6 9 4 1 0 1 4 9 6, where the 2^y pattern is 2 4 8 6..., while 4, 6 are sufficient, what's most important is that we find y is even, so y can be set as 2n, $615 = 2^y - x^2 = 3 \times 5 \times 41 = 1 \times 615 = 3 \times 205 = 5 \times 123 = 15 \times 41$, To solve the equations, use $(2^n + x) + (2^n - x) = 2^{n+1}$, better not list all

[40] It's the form of $a^4 + 4b^4$, Sophie-Germain's identity

[41] $4 \times 5 = 20$ man-days ;$16 \times 15 = 240$ man-days, So, $\frac{7}{20} \times 240$ (lb)

[42] $ab = cd, \quad R^2 = (\frac{c+d}{2})^2 + (\frac{a+b}{2} - a)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$

[43] use area model, rectangle, $= (a + b)(c + d) - ad$, the area of ad should be the smallest, and a=d=1,($a + b$ 固定，如果面积最小，d 应最小，对应的，a 也应该最小), max $-c^2 + 61c + 61 \Rightarrow c = 30, 31$

Top Four Secret Weapons:

The fact: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^{bn} = e^{ab} \equiv \lim_{n\to 0}(1+an)^{\frac{b}{n}}$
The list: As $n \to \infty$ $\ln n \ll n^p \ll b^n \ll n! \ll n^n$ and $p > 0, b > 1$
The limit: $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$
Best friend: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ where $|x| < 1$

. . . .

[Facebook interview]
You are waiting for your flight to Seattle, and to pass the time you call 3 friends in Seattle. You independently ask each one if it's raining.
All 3 of them say,"Yes it's raining.", but each on lies with probability 1/3 and tell the truth with probability 2/3
Can you solve for probability it's actually raining in Seattle?
Hint

. . . .

A ladder 垂直立在墙旁，倒下的中心位置的轨迹

Case1: 滑落

Case2: 倒下

. . . .

Pythagoras Pie Puzzle:
Giant pie is divided to 100 guests, Guest 1 get 1%, Guest 2 get 2% of what left, and so on and on. Who get the largest piece of pie? [44]

. . . .

二项式：$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + \cdots C_n^r a^{n-r} b^r \cdots + C_n^n a^0 b^n$, but how to prove?
Let $a = b = 1 \Rightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$
Let $a = 1, b = -1 \Rightarrow C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots = 0 \Rightarrow C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^n/2$

二项式系数最大值：中间一项或者两项 (how to prove?)

e.g.

---

[44]Patterns:

	Get	Left
Guest 1	$\frac{1}{100}$	$\frac{99}{100}$
Guest 2	$\frac{99}{100}\frac{2}{100}$	$\frac{99}{100}\frac{98}{100}$
Guest 3	$\frac{99}{100}\frac{98}{100}\frac{3}{100}$	$\frac{99}{100}\frac{98}{100}\frac{97}{100}$
Guest k	$\frac{99\cdot 98\cdot(99-k+2)}{100^k}\frac{k}{100}$	

Let $\frac{G_{k+1}}{G_k} > 1$（如果得到的不是连续的数值呢？）, the final answer is guest 10

$(x + \frac{4}{x} - 4)^4$ 的常数项, hint[45]

$(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^{50}$ 展开式中 x^3 的系数. hint[46]

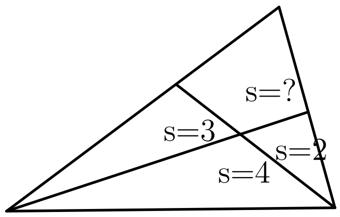
. . . .

zero to the zero power

$x^0 = 1, x \neq 0$, since $x^y/x^y = x^0$

$0^x = 0, x \neq 0$ but, what's 0^0? while, there's no agreement, The most common possibilities are 1 or undefined

. . . .



hint[47]

. . . .

[45] $(\frac{x^2-4x+4}{x})^4$

[46] 1. 等比 2.$C_3^3 + C_4^3 = C_5^4$

[47] 连接顶点到交点, s 分别为 x, y, 面积比（大三角形小三角形）= 底边比（同高）列等式, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{x}{3} = \frac{x+y+2}{3+4}$ ...