

Contents

I MISC	4
II Part1	4
1 算术基本定理	5
2 代数基本定理	6
3 多项式除法、多项式余式定理	7
4 因式定理 (Factor theorem)	7
5 多项式因式分解唯一定理	8
6 有理根定理 (Rational root theorem)	9
7 韦达定理 (Vieta's formulas)	10
7.1 Proof	10
7.2 韦达定理的逆定理	10
7.3 Examples	10
8 二项式定理 (Binomial theorem)	11
9 鸽巢原理 (Pigeonhole principle)	12
10 裴蜀 (贝祖) 定理 (Bézout's identity)	12
11 欧几里得算法、更相减损术	13
11.1 欧几里得算法	13
11.2 更相减损术	14
12 反证法 (proof by contradiction)	15

13 牛顿法 (Newton's method, or Newton-Raphson method)	15
--	----

III Part2 - basics	15
--------------------	----

14 数学符号	16
---------	----

15 环 (Ring)、域 (Field)、数系	16
--------------------------	----

16 素数、合数	17
----------	----

17 向量 (vector)	19
----------------	----

18 指数与对数	19
----------	----

18.1 指数	19
-------------------	----

18.2 对数	20
-------------------	----

19 排列组合 (permutation and combination)	21
---------------------------------------	----

19.1 排列 (permutation)	21
---------------------------------	----

19.2 组合 (combination)	21
---------------------------------	----

20 恒等式 Identity	22
-----------------	----

20.1 等幂和差	23
---------------------	----

21 不等式 inequalities	23
---------------------	----

21.1 柯西不等式 (Cauchy–Schwarz inequality)	23
--	----

22 三角形	24
--------	----

23 三角函数	24
---------	----

24 绝对值	24
--------	----

24.1 最值	24
-------------------	----

24.2 最值推广：奇点偶段	24
--------------------------	----

25 整除规则 (divisibility rule)	24
25.1 基本判别 (rules)	25
25.2 proofs	25
26 todo	27
IV Part3	27
V MISC	27
27 misc	27
28 因式分解	27
29 最值	29

Part I

MISC

数学基本思想：

抽象能力：会在错综复杂的事物中把握本质

推理能力：会在杂乱无章的事物中理清头绪

建模能力：会在千头万绪的事物中发现规律

数学四大基本思想：

函数与方程、数形结合、分类讨论和转化与化归（复杂或未知的问题，通过一定的变换，最终归结为已知或更容易解决的问题的思维方法）

数学基本方法：

数形结合、分类讨论、换元、数学归纳法、反证法、类比

数域（域：field）：

指一个数集，它对加法、减法、乘法和除法（除数不为零）运算是封闭的，并且包含 0 和 1

换句话说，对数域中任意两个数进行这四种基本运算，其结果仍然属于这个数域。

常见的数域包括有理数域 (Q)、实数域 (R) 和复数域 (C)

一个集合成为数域，需满足以下条件：

1. 包含 0 和 1：数域中必须有加法单位元 0 和乘法单位元 1
2. 封闭性：加法和减法封闭；乘法封闭；除法封闭

非数域例子：自然数集和整数集，不构成数域，因为除法运算不封闭，例如 $2/3$ 不属于自然数或者整数

丢番图方程：

丢番图方程，又称为不定方程 (Diophantine equation), Diophantus is a Greek mathematician

丢番图的研究在数论中占有重要地位，如丢番图方程、丢番图集合、丢番图逼近等都是数学的重要领域

最大公约数: GCD(Greatest Common Divisor) or HCF:(Highest Common Factor).

e.g. $\gcd(3, 9) = 3$, $\gcd(-3, 9) = 3$

$0!$ 规定为 1

Part II

Part 1

1 算术基本定理

Fundamental theorem of arithmetic, also called unique factorization theorem(正整数唯一分解定理), or prime factorization theorem.

STATEMENT:

Every positive integer $n > 1$ can be represented in exactly one way as a product of prime powers:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} = \prod_{i=1}^k p_i^{n_i}, \text{ where } p_1 < p_2 < p_3 \cdots < p_k \text{ are primes, and } n_i \text{ are positive integers.}$$

Since $a^0 = 1$, any positive integer can be uniquely represented as an infinite product taken over all the positive prime numbers, as

$$n = 2^{n_1} 3^{n_2} 5^{n_3} 7^{n_4} \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} P_i^{n_i}$$

每个大于 1 的自然数，要么本身就是素数，要么可以写为 2 个或以上的素数的积，而且这些素因子按大小排列之后，写法仅有一种方式。

例如: $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

此定理是初等数论中一个基本定理，也是许多其他定理的逻辑支撑点和出发点。
它把对自然数的研究转化为对其最基本的元素——素数的研究

由两部分组成：

1. 分解存在性
2. 分解唯一性，即若不考虑排列顺序，正整数分解为素数乘积的方式是唯一的

这个定理也是 1 不是质数的主要原因, if 1 is prime, $2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = \dots$

等价命题：

If a prime divides the product of two integers, then it must divide at least one of these integers. That is:

If Prime $P|ab$, then, either $P|a$ or $P|b$

???

Proof:

1. Existence

用反证法：假设存在大于 1 的自然数不能写为素数的乘积，把最小的那个称为 n

n 不可为素数，因为 $n = n$ ，可以写成素数的成绩，因此 n 一定是合数，而每个合数都可以分解为两个严格小于自身而大于 1 的自然数的乘积。设 $n = a \times b$ ，根据假设， n 是最小的不能写为素数乘积的自然数， $a < n, b < n$ ，所以 $a = p_1 p_2 \times p_n, b = q_1 q_2 \cdots q_n$, and $n = ab = p_1 p_2 \cdots p_n q_1 q_2 \cdots q_n$ 可以写为素数的乘积，由此产生矛盾，故大于 1 的自然数必可以写为素数的乘积

2. Uniqueness

欧几里得引理: if $p|ab$, either $p|a$ or $p|b$

todo...

2 代数基本定理

Fundamental theorem of algebra, Also called "d'Alembert–Gauss theorem"

STATEMENT:

Every non-constant single-variable polynomial with complex coefficients has at least one complex root. 任何一个复系数的一元 n 次多项式方程 ($n \geq 1$)，至少有一个复数根。

COROLLARY:

任何一个非零的一元 n 次复系数多项式，都正好有 n 个复数根（重根视为多个根）。

有时候这个定理描述为：任何一个非零的一元 n 次复系数多项式，都正好有 n 个复数根（重根视为多个根）。但实际上，是“至少有一个根的”直接结果，因为把多项式除以它的线性因子可以推出。也就是说，任何一个 n 次多项式，都可以因式分解为 n 个复系数一次多项式的乘积（根据多项式除法）。

Proof?

意义：复数域是代数封闭的（该定理是代数学和近世代数中的一个基础性结论）；保证了任何复系数多项式方程在复数域内总有解，并能完全因式分解为一次因式（即 n 次多项式有 n 个复数根）；It's the basic connection between algebra and geometry

?

尽管这个定理被命名为“代数基本定理”，但它还没有纯粹的代数证明，许多数学家都相信这种证明不存在。另外，它也不是最基本的代数定理；因为在那个时候，代数基本上就是关于解实系数或复系数多项式方程，所以才被命名为代数基本定理。

所有的证明都包含了一些数学分析，至少是实数或复数函数的连续性概念。有些证明也用到了可微函数，甚至是解析函数。

3 多项式除法、多项式余式定理

Polynomial division, Polynomial remainder theorem

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \Rightarrow P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

If $D(x) = x - a$, then $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x) = (x - a)Q(x) + r$

根据定义, $R(x)$ 的次数小于 1, so $R(x)$ 只能为常数

So, $P(a) = (a - a)Q(x) + r = r$

得到**多项式余式定理**的定义: 多项式 $P(x)$ 除以 $x - a$ 所得的余式 $= P(a)$

dividend = divisor x quotient + remainder

Examples:

Let $f(x) = x^3 - 12x^2 - 42$, divided by $x - 3$, gives the quotient $x^2 - 9x - 27$, and the remainder -123 .

By the polynomial remainder theorem, $f(3) = -123$

寻找多项式的切线? <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F%E9%99%A4%E6%B3%95>

? 直觉
要用
微积
分, 但
是这
个是
啥情
况?

4 因式定理 (Factor theorem)

STATEMENT:

Univariate polynomial $f(x)$ has a factor $(x - a)$, iff $f(a) = 0$

COROLLARY:

$f(x)$ has a factor $(ax - b)$, iff $f(\frac{b}{a}) = 0$

That is:

If $f(x)$ has a factor $(x - a)$, then $f(a) = 0$.

If $f(a) = 0$, then $f(x)$ has a factor $(x - a)$

The Factor theorem **connects polynomial factors with polynomial roots.**

关于多项式的因式和零点的定理, 是多项式余式定理的推论

此定理普遍应用于因式分解, 利用长除法, 除以零点 $(x - a)$

思考: 为什么不可以是 $(2x - 2a)$ 之类的呢?

If 我们用长除法, 那么其它项会出现分数, 更复杂了不是

Proofs:

If $(x - a)$ is a factor of $f(x)$, obviously, $f(a) = 0$. So, we only need to prove the converse.

Proof1:

First, we begin with $a = 0$, We write $f(x) = c_0 + c_1x^1 + \cdots + c_nx^n$, since $f(a) = 0$, so $c_0 = 0$, $f(x) = x(c_1x + \cdots + c_nx^{n-1})$, Thus...

Then, we prove the theorem for general a by reducing to the $a = 0$ case.

We observe that $f(x + a)$ is a polynomial with a root at $x = 0$, it follows that $f(x + a) = x \cdot g(x)$ (This is the key step) for certain polynomial $g(x)$.

So, $f(x) = f((x - a) + a) = (x - a)g(x - a)$, thus...

Proof2:

We use the equation: $x^n - y^n$

Since $f(a) = 0$, so we can write $f(x) = \sum_{i=0}^n x^i = c_0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$
 $f(x) = f(x) - f(a) = \sum_i^n (x^i - a^i)$, Observe that every summand had $(x - a)$ as a factor. Thus...

Proof3:

Using Euclidean division of polynomials: Perform a Euclidean division of $f(x)$ by $(x - a)$, $f(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$, where $\deg(R) < \deg(x - a)$. So R is constant. We know that $f(a) = 0 = R$, so $f(x) = (x - a)Q(x)$

5 多项式因式分解唯一定理

STATEMENT:

数域 F 上的每个次数 ≥ 1 的多项式 $f(x)$ 都可以分解为数域 F 上一些不可约多项式的乘积，并且是唯一的，即：

$f(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x) \cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)q_3(x) \cdots q_t(x)$, 其中 $p_i(x)$ 和 $q_j(x)$ 都是数域 F 上的不可约多项式，那么必有 $s = t$ ，而且可以适当排列因式的次序，使得 $p_i(x) = c_i q_i(x)$

实数域 (Real Field, $\mathbb{R}[x]$): 都可以唯一的分解为一次因式和不可约二次因式 ($\Delta < 0$) 的乘积

有理数域 (Rational Field, $\mathbb{Q}[x]$): 分解成的不可约多项式可能是一次、二次或更高次，但要求它们在有理数域内不可再分

分解方法: 公因式、公式法、分组分解、拆添项、十字交叉、一次因式检验法 (有理根定理)

6 有理根定理 (Rational root theorem)

Also called rational root test, rational zero test or p/q theorem. 该定理是高斯定理关于多项式分解的一个特例

STATEMENT:

对于 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, 系数 $a_i \in \mathbb{Z}$, and $a_0, a_n \neq 0$.

如果存在有理根 $x = \frac{p}{q}$, written in lowest term(that is p and q are relatively prime, 互质), 满足:

p 是 a_0 的整数因子, i.e. $p|a_0$. 整除符号, Tips^a

q 是 a_n 的整数因子, i.e. $q|a_n$.

^a $a|b$: a 整除 b , b 能被 a 整除, 也就是 b 除以非零 a , 商是一个整数. i.e. $2|6$

How to memory: Use the simplest way: $2x + 1 = 0$

Proof:

Let $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ with $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_0, a_n \neq 0$

Suppose $P(p/q) = 0$ for some coprime $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(a_np^{n-1} + a_{n-1}qp^{n-2} + \dots + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n \Rightarrow () = -a_0\frac{q^n}{p} \\ q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}qp^{n-2} + \dots + a_0q^{n-1}) = -a_np^n \Rightarrow () = -a_n\frac{p^n}{q} \end{cases}$$

我们注意到, 括弧内是整数, 因为 a_i 是整数, 所以这是关键

p, q 互质, $\frac{p}{q} = \pm \frac{a_0 \text{的因子}}{a_n \text{的因子}}$

注意 p, q 为 1 的特殊情况, 显而易见 ± 1 永远是第一优选择

关键点:

- 系数是整数
- 如存在有理根, 此根则必符合此定理, 否则存在无理根 (如 $\sqrt{89}$) 亦或复数根

Examples:

$$x^3 - 7x + 6 = 0:$$

有理根有可能是: $\pm \frac{\{1, 2, 3, 6\}}{1} = \pm 1, 2, 3, 6$, 恰好 $1, 2, -3$, 所以也恰好可以写为:
 $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$

$3x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$, 如果有有理根, 则必在 $\pm \frac{1, 2}{1, 3} = \pm 1, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 中。8 个候选根, 需要测试 8 次, 最后才知道 $x = 2/3$ 是唯一有理根。

很是繁琐不是? 所以可以通过评估 $P(r)$ 来测试缩小范围 (比如使用秦九韶算法?)。

Firstly, if $x < 0$, the P will be negative, so every root is positive

$P(1) = 1$, so 1 is not the root. Moreover, if one sets $x = 1 + t$, so $Q(t) = P(1+t)$, 展开后, 三次项是 3, 一次项是 1, implies Q must belongs to $\pm 1, \pm \frac{1}{3}$, and P satisfy $x = 1 + t \in 2, 0, 4/3, 2/3$. 再次显示必须为正, 两个候选项是 $2, 2/3$, 将 2 带入, 显然不是, 最后测试 $2/3$

If a, b and $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ are integers, then both $\frac{a^2}{b}$ and $\frac{b^2}{a}$ must be integers.

7 韦达定理 (Vieta's formulas)

Any general polynomial of degree n , $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, by the "fundamental theorem of algebra", roots are $x_1, x_2, x_3 \dots$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \cdots + x_1 x_n) + (x_2 x_3 + x_2 x_4 + \cdots + x_2 x_n) + \cdots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

7.1 Proof

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

展开后比较系数:

$$\begin{cases} a_{n-1} = -a_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) \\ a_{n-2} = a_n[(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n) + (x_2 x_3 + x_2 x_4 + \cdots + x_2 x_n) + \cdots + x_{n-1} x_n] \\ \vdots \\ a_0 = (-1)^n a_n x_1 x_2 \cdots x_n \end{cases}$$

7.2 韦达定理的逆定理

对于一元二次方程

利用圆来研究一元二次方程? <http://202.175.82.54/tplan/2006/intro/R027.pdf>

7.3 Examples

If $n = 2$ (quadratic), $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$ 展开比较即有, 也可以用求根公式。

if $n = 3$, x_1, x_2, x_3 是 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的三个根, then:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3] \end{aligned}$$

That is: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$, $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

8 二项式定理 (Binomial theorem)

$$(x + y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^n x^0 y^n$$

Examples:

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^3 = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy, \text{ total } 2^3 \text{ terms}$$

Let $x = y = 1$, we have $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$

Proof:

Method 1: 数学归纳法 (inductive proof)

Method 2: 组合方法

$(a + b)^n = \overbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}^{\text{n terms}}$, n 个括号相乘, 从 n 个选出 k 个括号中的 a , 再从剩余的 $n - k$ 个括号中选出 $(n - k)$ 个 b , 得到一组 $a^k b^{n-k}$, 而这种选法共有 C_n^k 种, 故总共有 C_n^k 个 $a^k b^{n-k}$; 其他同理

More:

$$(1 + x)^{-1}$$

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n$$

Multinomial theorem:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$$

9 鸽巢原理 (Pigeonhole principle)

鸽笼原理，又名狄利克雷抽屉原理、鸽巢原理。

表述 1：若有 n 个笼子和 $n + 1$ 只鸽子，所有鸽子都被放在鸽笼里，那么至少有一只笼子有至少 2 只鸽子

表述 2：若有 n 个笼子和 $kn + 1$ 只鸽子，所有鸽子都被放在鸽笼里，那么至少有一只笼子有至少 $k + 1$ 只鸽子

集合论的表述：若 A 是 $n + 1$ 个原色， B 是 n 元集，则不存在从 A 到 B 的单射

推广：如果把 n 个对象分配到 m 个容器中，必有一个容器容纳至少 $\frac{n}{m}$ 个对象

反证法证明此原理

例子：

北京至少有两个人头发数是一样多。常人头发大概是 15 万左右，假定没有人的头发超过 100 万，北京人口大于 100 万。

有 n 个人（至少两人）互相握手（随意找人握），必有两人握过手的人数相同

这个原理经常在计算机中得到真正的应用，比如哈希表的重复问题是不可避免的，因为 keys 的数目总是比 indices 的数目多，什么算法都不可能解决

这个原理，还证明任何无损压缩算法，在把一些输入变小的同时，作为代价一定有其他的输入增大，否则对于长度为 L 的输入集合，该压缩算法总能将其映射到一个更小的长度小于 L 的输出集合，而这与鸽巢理论相悖

??....

10 裴蜀（贝祖）定理 (Bézout's identity)

Bézout's identity(lemma): $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists x, y \in \mathbb{Z}, \text{ s.t. } ax + by = gcd(a, b)$

关于未知数 x, y 的线性不定方程： $ax + by = m, a, b, m \in \mathbb{Z}$, 有整数解，当且仅当 m 是 a, b 的最大公约数 d 的倍数。

特别的， $ax + by = 1$ 有整数解，iff(if and only if) a, b 互素

e.g. $2x + 3y = 1$ and $2x + 4y = 1, gcd(15, 69) = 3, 3 = 15 \times (-9) + 69 \times 2$

等式也可用来给最大公约数定义： d 就是最小的可以写为 $ax + by$ 的正整数

多个整数间的裴蜀定理：

if $gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$, then there are integers $x_1, x_2 \dots x_n$,

such that $d = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ has the following properties:

1. d is the smallest positive integer of this form

2. every form of this form is a multiple of d

Proof:

如果 a, b 中有一个是 0, 很容易得证, 以下假设 a, b 都不为 0。

Let $A = \{xa + yb; (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$

首先, $A \cap \mathbb{N}^*$ 不是空集 (至少包含 $|a| |b|$), 由于自然数集合是良序的 (??), A 中存在最小正元素 $d_0 = x_0a + y_0b$ 。考虑 A 中任意一个正元素 $p (= x_1a + y_1b)$ 对 d_0 的带余除法: let $p = qd_0 + r$, $q \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq r < d_0$

$$r = p - qd_0 = x_1a + y_1b - q(x_0a + y_0b) = (x_1 - qx_0)a + (y_1 - qy_0)b \in A$$

so, $r = 0$, , $d_0 | p$. 也就是说 p 都是 d_0 的倍数, 特别的: $d_0 | a$, $d_0 | b$, 因此 d_0 是 a, b 的公约数

另一方面: 对于 a, b 的任意公约数 d , let $a = md$, $b = nd$, so:

$$d_0 = x_0a + y_0b = (x_0m + y_0n)d$$

so $d | d_0$, 所以 d_0 是 a, b 的最大公约数

Proof???

11 欧几里得算法、更相减损术

11.1 欧几里得算法

辗转相除法 (Euclidean algorithm), 是已知最古老的算法, 可追溯至公元前 300 年前。

$$gcd(a, b) = gcd(b, a \ mod \ b)$$

$$a = q_0b + r_0 (0 < r_0 < b)$$

$$b = q_1r_0 + r_1 (0 < r_1 < r_0)$$

$$r_0 = q_2r_1 + r_2 (0 < r_1 < r_2)$$

$$r_1 = q_3r_2 + r_3 (0 < r_3 < r_2)$$

⋮

这里 $b > r_0 > r_1 > r_2 > \dots \geq 0$, 在足够的步之后, 必然会出现余数为 0。(最大公约数有时候也可以去掉括弧, 比如 $gcd(a, b)$ 也可以表示为 (a, b) , 但是后者与坐标重复, 所以……)

$$\text{So, } (a, b) = (b, r_0) = (r_0, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0) = r_n$$

e.g.

$$2419 = 2183 \times 1 + 236,$$

$$gcd(2419, 2183) = gcd(2183, 236)$$

$$2183 = 236 \times 9 + 59,$$

$$gcd(2183, 236) = gcd(236, 59)$$

$$236 = 59 \times 4,$$

$$gcd(236, 59) = 59$$

关键点在于: $a = qb + r$, $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$. Proof:

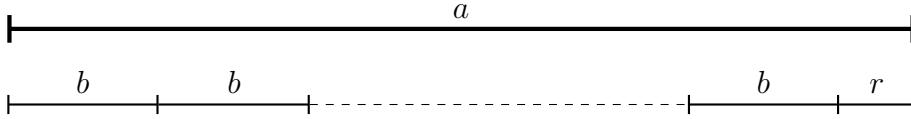
Let t 为 a, b 的一个公因数, then $t|a$, $t|b$, $t|qb$, $r = a - qb$

$\therefore t|(a - qb)$, i.e. $t|r$, $\therefore t$ 也是 b, r 的一个公因数

反之, Let s 为 b, r 的一个公因数, 则 $s|b, s|r$

$\therefore s|(qb + r)$, i.e. $s|a$, $\therefore s$ 也是 a, b 的公因数

So a, b 的全体公因数和 b, r 的全体公因数是一致的, 故它们有共同的最大公因数



上图, 我们从丈量的角度也理解。能同时丈量 a, b 的线段, 都能够量尽 b, r , 反之亦然

带余除法 (除法原理)(欧几里得除法 Euclidean division)(division with remainder).

$a = qb + r$, $0 \leq r < |b|$, 可用数学归纳法证明

多项式的带余除法 (多项式长除法): $A = QB + R$, R 是零多项式, 或者它的次数严格小于 B 的次数

辗转相除法是基于带余除法, 进而定义了欧几里得整环

11.2 更相减损术

更相减损术, 出自《九章算术》

e.g. $\gcd(126, 98)$, 写成分数 $\frac{126}{98}$

第一步: 可半者半之。分子分母约去 2, 得 $\frac{63}{49}$

第二步: 副置分母、子之数, 以少减多, 更相减损, 求其等也。

$(63, 49) \rightarrow (14, 49) \rightarrow (14, 21) \rightarrow (14, 7) \rightarrow (7, 7)$

稍加改进, 便可以直接计算最大公约数:

$(126, 98) \rightarrow (28, 98) \rightarrow (28, 70) \rightarrow (28, 42) \rightarrow (28, 14) \rightarrow (14, 14)$

与欧几里得的辗转相除相比较, 可以把除法看作连续的减法。对于求多个数的最大公因数, 更相减损更具优势:

$$\begin{aligned} \gcd(623, 1424, 801, 1513) &= (623, 1424 - 801, 801 - 623, 1513 - 1424) \\ &= (623, 623, 178, 89) \\ &= (623 - 6 \times 89, 623 - 6 \times 89, 178 - 89, 89) \\ &= (89, 89, 89, 89) \\ &= 89 \end{aligned}$$

12 反证法 (proof by contradiction)

英国数学家高德菲·哈罗德·哈代在他的文章《一个数学家的辩白》描述：“欧洲人最喜欢的反证法，是数学家最精良的武器。它比起棋手所用的任何战术还要好：棋手可能需要牺牲一只兵甚至更多，但数学家却是牺牲整个棋局来获得胜利。”

反证法常用于“正面证明不容易或不能得出结果”的情况

Procedure:

- 1.The proposition to be proved is P
- 2.We assume P to be false, i.e., we assume $\neg P$
- 3.It is shown that $\neg P$ implies falsehood. This is typically accomplished by deriving two mutually contradictory assertions. Q and $\neg Q$ and appealing to the law of noncontradiction
- 4.Since assuming p to be false leads to a contradiction. It's concluded that p is in fact true

Example: $\sqrt{2}$ 是无理数的证明

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，那么就可以写为 $\frac{p}{q}$ ，其中 p, q 为正整数且互质，那么有： $p = \sqrt{2} \times q$, then $p^2 = 2 \times q^2$, 很显然 p^2 是偶数，而只有偶数的平方才是偶数，所以 p 是偶数。假设 $p = 2s$, then $p^2 = 4s^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2s^2$, 从而 q 也是偶数，这与互质矛盾，假设不成立，从而得证。

13 牛顿法 (Newton's method, or Newton-Raphson method)

它是一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法

Part III

Part2 - basics

14 数学符号

乘号曾经用过十几种，现在通用的有两种： \times and \cdot 。前者是英国数学家 William Oughtred 在 1631 年出版的《数学之论》提出的。莱布尼茨认为 \times 和拉丁字母 x 很像，赞成用 \cdot 。

平方根号根号曾经用拉丁文“Radix”的首尾两个字母合并起来使用， $\sqrt{}$ 是笛卡尔在他的《几何学》中第一次使用的，由拉丁字母“r”变化而来。

15 环 (Ring)、域 (Field)、数系

自然数 (natural numbers)(\mathbb{N})：1, 2, 3 … or 0, 1, 2, 3 …

整数 (integer)(\mathbb{Z})：…, -2, -1, 0, 1, 2, …

有理数 (rational number)(\mathbb{Q})：可表示为分数的数

实数 (real number)(\mathbb{R})：所有有理数和无理数的集合，数轴上的所有点

复数 (complex number)(\mathbb{C})

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

最早把自然数公理化的是 19 世纪的数学家 G. Gottlob Frege(算术基础) 和 G. Peano(皮亚诺公设)，即：

1. 0 是自然数
2. 对任一自然数 n ，均有唯一的继元 n^+
3. 0 不是任何自然数的继元
4. 若 m, n 为自然数，若 $m \neq n$ ，则 $m^+ \neq n^+$
5. 若 S 是自然数集 N 的一个子集，且 $0 \in S$, and if $n \in S$, then $n^+ \in S$ ，那么 $S = N$

至今还有 0 是不是自然数的讨论。

回顾数系的扩展：

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ，是为了减法(群)，不过却丧失了“首元”(first element: 0)

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ，是为了除法(域)，但是没了“下一个元”，例如在 \mathbb{Z} 中 1 的下一个元素是 2，但是在 \mathbb{Q} 中 $\frac{1}{2}$ 的下一个元素没有意义。

$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ 并不是为了 $x^2 - 2 = 0$ 有解，而是使得所有的收敛序列均有极限(也即拓扑完备 topologically complete)，不过 \mathbb{R} 缺失了“可数性”(countability)。

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 是为了使非常数的多项式皆有根(即：更确切的说是代数封闭 algebraically closed)，然而 \mathbb{C} 中却没了序关系。

例：为什么正数一定可以开方？

封闭性(闭包)(closure)：指在一个集合中，成员经过特定的代数运算，所得的结

果仍然属于该集合。如果超出该集合范围，则称该集合对此运算不封闭。例如：自然数对加法、乘法封闭，对减法、除法不封闭。也就是封闭性保证了在特定的数域中计算不会生成“意料之外”的数值。

环的具体定义并没有完全统一。一般定义：

给定一个集合 \mathbb{R} 以及定义在 \mathbb{R} 上的二元运算 $+$ and \times 。如果满足八个性质，则称 $(\mathbb{R}, +, \times)$ 构成了一个环。

交换环：如果一个环 \mathbb{R} 还额外满足乘法的交换律

域是环的一种，区别在于域还要求它的非零元素可以做除法，且域的乘法有交换律。比如：有理数域、实数域、复数域等等。

案例： $(x - 2)$ 是不是 $(x - 2)(x - 3)$ 和 $x^2 - 4$ 的最大公因式？那 $(\frac{x}{2} - 1)$ 呢？

分析：在整数环中， $(x - 2)$ 是它们的一个公因式，同时也是最大公因式，但 $(\frac{x}{2} - 1)$ 就不是，因为 $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ 。但如果在有理数域或者实数域， $(\frac{x}{2} - 1)$ 则是它们的一个公因式，事实上，它们的公因式可以有无数个，可以写为 $k(x - 2)$ ，其中 $k \neq 0$, and $k \in \mathbb{Q}$ or $k \in \mathbb{R}$ 。

三次数学危机：

第一次：腰长为 1 的等腰直角三角形的斜边长度无法写成有理数

第二次：微积分引入无穷小而产生的问题

第三次：罗素悖论

多项式的定义：

给定一个环 \mathbb{R} (通常是交换环，可以是有理数、实数、复数等) 以及一个未知数 X ，形同： $a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^n$ 的代数表达式叫做 \mathbb{R} 上的一元多项式，and $a_i \in \mathbb{R}$. 未知数 X 不代表任何值，但是环 \mathbb{R} 上的所有运算都对它适用。多项式的和、积、差仍然是多项式，即多项式组成一个环 $\mathbb{R}[X]$ ，称为 \mathbb{R} 上的(一元)多项式。

16 素数、合数

素数 vs 质数

直到清末，prime number 一直被翻译为素数，素数、非素数、合成数都是日译名。汉语中的“素”有“根本”之义，有可能“素”与“数”读音接近，易混淆，用了“质”。但华罗庚的《堆垒素数》和陈景润研究的“哥德巴赫猜想”也是用的素数。现在的一些中小学教材，统一使用的是质数，但又标明了“质数，又叫素数”

为什么规定 1 不是素数？

1 既不是素数也不是合数。加入 1 是素数，那么一个数比如 $1 \times 2^2 \times 3^3$ 也可以

写为 $1^2 \times 2^2 \times 3^3$, 这样分解就不唯一了

素数: 大于 1 的自然数, 如果只有 1 与自身两个因数, 那么这个数就称为素数。如 2, 3, 5, 7, 11 etc。2 是最小的素数, 也是素数中唯一的偶数

合数: 大于 1 的自然数, 如果除了 1 与自身以外, 还有其他因数, 则称此数为合数。如 4, 6, 8 etc.

根据定义, 1 既不是素数, 也不是合数。全体自然数分为: 1、素数、合数。

互质 (互素, coprime): 两个或两个以上的整数的最大公约数是 1

如果数域是正整数, 那么 1 与所有正整数互质

如果数域是整数, 那么 1 and -1 与所有整数互质, 而且他们是仅有的与 0 互质的整数

两个整数 (a, b) 互质, 记为: $a \perp b$

任何有理数都可以表示为连个互质的整数之比, 也就是一个最简分数。根据有理数定义, 有理数是指可以表示成两个整数之比的数, 而分数的可以通过不断约分最终得到一个分子和分母互质的最简分数

专门研究数学的人认为素数是最基本的数, 因为任何大于 1 的整数要么是素数, 要么是若干素数的积。德国的高斯曾经说过: “数学是科学的皇后, 数论是数学的皇冠”。费马曾说过: “全部的数论问题就在于以何种方法来讲一个整数分解质因数”。

素数是有限的还是无限的? 这被欧几里得证明了, 有了欧几里得定理 (Euclid's theorem), 是数论中的基本定理。

欧几里得定理 (Euclid's theorem):

《几何原本》第九卷中, 有以下陈述: 存在着比指定的任意多个素数更多的素数。也即: 素数的个数是无限的。

Proof1(欧几里得, 不是反证法?):

1. 假设素数是有限的, 那么可以假设素数只有一个有限的集合 S , as $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

2. 构造一个新的数: $Q = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$

3. 分析 Q

a, Q 比 S 中的任意一个素数要大, 它不在 S 内

b, 用集合 S 中的任何一个素数 p_i 去除 Q , 都会余 1

4. 得出矛盾

a, 意味着 Q 要么本身就是一个新的素数, 它不在我们构造的集合 S 内

b, 要么 Q 是一个合数, 它可以被一个比 P_n (我们假设的最大的素数) 还要大的素数整除, 根据算数基本定理, 这意味着存在一个不在 S 内的素数, 这个素数比

5. 这与我们最初假设的“素数是有限的”矛盾, 因此素数一定有无限多个

Proof2(欧几里得):

考虑正整数 n 的阶乘 $n!$ 可以被 2 到 n 的所有的整数整除， $n! + 1$ 并不能被 2 到 n 的任何自然数所整除，因此 $n! + 1$ 有两种可能性：是素数，或者能被大于 n 的素数（素数基本定理）整除，在任何一个 case 中，都表明至少存在一个比 n 大的素数。

素数定理，又称作质数定理，prime number theorem，是素数分布理论的中心定理，是关于素数个数问题的一个命题。素数的出现规律一致困惑着数学家，一个个的看，素数在正整数中的出现没什么规律。可是总体的看，素数的个数竟然有规律可循。

17 向量 (vector)

18 指数与对数

18.1 指数

指数的定义涉及**定义上的扩展**，这是数学最常见的思维方式： a^n 就是 a 自乘 n 次，故 $a^0 (a \neq 0)$ 没有定义。虽然理论上没有定义，但是我们可以加以定义，此定义需要满足两个条件：一是表示唯一确定的值，二是保持原有的运算法则（定律）（这里需要满足指数的五大运算法则）。因此 a^0 别无选择，只可能是 $1 (a^0 = a^{n-n} = a^n/a^n = 1, n \in \mathbb{Z}^+)$ ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ when $n = 0, m \in \mathbb{Z}^+$, $a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$)（所有运算法则都需要验证）。

同理，负整数的指数幂也是完全类似的：

Let $n = -m$, $a^m \cdot a^n (a \neq 0) = a^m \cdot a^{-m} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-m} = 1/a^m$ ，对于此定义还需要验证到其他运算法则。

引进负整数指数幂后，科学记数法才能实现： $N = a \times 10^n (1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z})$
e.g. $0.00034 = 3.4 \times 10^{-4}$

分数指数幂同理也被定义为： $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, (a \geq 0, m, n \in \mathbb{Z}^+)$ 。分数指数幂方便我们把开方和乘方互相转化。一般情况下，将根式变形或化为分数指数幂去处理比较方便。但一般分数指数幂一般限定在 $a > 0$ 的下，所以并不能完全代替根式的计算。

当指数推广到有理数时，为能使 $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{2q}}, p, q \in \mathbb{Z}$ ，就限定了 $a > 0$ ，当 $a < 0$ 情况就变得复杂。如下：

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = [(-8)^2]^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$$

So, generally, 有理数或者实数下，我们把讨论规范在 $a > 0$

无理指数的的幂，中学一般不讨论。

18.2 对数

对数存在定理:

若 a 为不等于 1 的整数，则对于任何正实数 N 都有唯一的实数 α 与之对应，使得 a 的 α 次幂等于 N ，即： $b^\alpha = N$

最基础的运算:

$$\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N \quad \log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$
$$\log_b a = \frac{\log_x a}{\log_x b} \text{(change of base)}$$

对数存在定理是研究对数的理论基础。

16 世纪末至 17 世纪初的时候，当时在自然科学领域（特别是天文学）的发展上经常遇到大量精密而又庞大的数值计算，于是数学家们为了寻求化简的计算方法而发明了对数。对数的发明为当时社会的发展起了重要的影响，简化了行星轨道运算问题。正如科学家伽利略（1564-1642）说：“给我时间，空间和对数，我可以创造出一个宇宙”。又如十八世纪数学家拉普拉斯（1749-1827）亦提到：“对数用缩短计算的时间来使天文学家的寿命加倍”。¹ While, that's true before the invention of computers. 对数的发明就是为了简化运算，把乘除转化为加减。基本步骤就是：取对数、对数计算（查表）、去对数（反查表）。

The inverse of addition is subtraction

The inverse of multiplication is division

The inverse of exponentiation is logarithm.

$y = \log_b x$ (i.e. $b^y = x$), b is the base, and b is a positive real number(if a is not a positive real number, both exponentiation and logarithm can be defined but may take several values). 表达式读做： y 是以 b 为底 x 的对数， b 叫做底， x 叫做真数。

最基础的对数运算是：

$$\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N. \text{ Proof}^2$$

同理：

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$
$$\log_b M^n = n \log_b M (\underbrace{\log_b M \cdots M}_n).$$

乘法可以转化为加法，除法可以转化为减法

¹ <https://baike.baidu.com/>

² 根据对数存在定理，Let $M = b^x, N = b^y$

$$\log_b(MN) = \log_b(b^x b^y) = \log_b(b^{x+y}) = x + y = \log_b b^x + \log_b b^y = \log_a M + \log_b N$$

换底公式 (change of base): $\log_b a = \frac{\log_x a}{\log_x b}$, Proof³

常用对数 (常用对数表)(common logarithm): 以 10 为底的对数叫做常用对数, 简记为: $\log_{10} N = \lg N$ 。理解掌握它的关键是科学计数法 ($\lg(a \times 10^n) = n + \lg a$)。让我们想象一个之前的运算, 比如天体运动、航海数据等等, 设计到大数字的乘法、幂、除法, 乘除可以 \lg 后变为加减, 然后再用对数表反求。在没有计算机之前, 对数确实是一个伟大的发明。

自然对数 (natural logarithm) 是以 e 为底的对数, 简记为: $\log_e N = \ln N$. 常在微积分中使用。

Logarithmic identities:

$$\begin{aligned} b^{\log_b x} &= x & \log_b b^x &= x \\ \log_b a &= \frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{1}{\log_a b} & \log_{b^n} a^m &= \frac{m}{n} \log_b a \\ x^{\frac{\log_b a}{\log_b x}} &= a & x^{\frac{\log_b(\log_b x)}{\log_b x}} &= \log_b x \\ M^{\log_b N} &= N^{\log_b M} \text{ (两边同求 } \log_b \text{)} \end{aligned}$$

对数的作用不仅仅在于计算机之前的大数的运算, 还有其他的意义, 比如估算 2^{123456} 是多少位的数

19 排列组合 (permutation and combination)

19.1 排列 (permutation)

Permutaion(排列、变换、置换, 比如古典密码里的置换) or Arrangement, 所以数学符号 P 和 A 都可以。

利用乘法原理: $A_n^k = \overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{\text{k factors}} = \frac{n!}{(n-k)!}$
Also use: P_k^n , $P(n, k)$, ${}_nP_k$, nP_k , $P_{n,k}$. Note the slight difference: P_k^n and A_n^k

重复排列: 从 n 个元素中取出 k 个元素, k 个元素可以重复: $U_k^n = n^k$

19.2 组合 (combination)

Combination just likes permutation, but the order doesn't matter

This formula can be derived from the fact that each k -combination of a set S of n members has permutations so

$A_n^k = C_n^k \times k!$ or $A_n^k = P_n^k / k!$. The A_n^k often denoted by $\binom{n}{k}$

³ $\log_x a = \log_x b^{\log_b a} = \log_b a \cdot \log_x b$, 得证。

20 恒等式 Identity

The basic ones like:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \text{ 积化和差}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(a-b-c)^2 = \dots$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 + 3(a+b+c)(-ab-ac-bc) + 3abc \text{ 对称多项式}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^2 - 4x^2y^2 \text{ Sophie Germain's identity}$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$$

上述两个可以简称为 444，四次的基本上都是他们的变形，比如：

$$x^4 + 4, \quad x^4 + \frac{1}{4}, \quad x^4 + x^2 + 1, \quad x^4 + 4x^2 + 16$$

$$[x^2 + y^2 + (x+y)^2]^2 = 2[x^4 + y^4 + (x+y)^4] \text{ Candido's identity}$$

$$(f_n^2 + f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)^2 = 2(f_n^4 + f_{n+1}^4 + f_{n+2}^4) \text{ Fibonacci number}$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ab - cd)^2$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = x^n + C_n^1 x^1 y^{n-1} + C_n^2 x^2 y^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} x^{n-2} + C_{n-1}^1 x^{n-1} y^1 + y^n$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}y) \dots n \text{ is odd}$$

20.1 等幂和差

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}) \cdots n \text{ is odd}$$

Proof1: 多项式长除法

Proof2: 等比数列: $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, Let $q = \frac{a}{b}$

等幂和差逆定理:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$$

21 不等式 inequalities

21.1 柯西不等式 (Cauchy-Schwarz inequality)

STATEMENT:

对有限实数序列 $\{x_i, y_i \in \mathbb{R}\}_{i=1}^n$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

That is:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2$$

等式成立时存在实数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 对于任意正整数 $i \in \mathbb{N}$ 有 $y_i = \lambda x_i$

Proof:

构造 $f(t) = (x_1 t + y_1)^2 + \cdots + (x_n t + y_n)^2$, That is

$$f(t) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)t^2 + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) + (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

关于 t 的一元二次方程 $f(t) = 0$, 对于任意实数 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $f(t) \geq 0$, 根据一元二次方程公式解有

$$\Delta = 4(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \leq 0, \text{ 得证。}$$

另一方面: $\Delta = 0$ 时, 正好是有重根的情况, 这时 $x_1 t + y_1 = \cdots = x_n t + y_n = 0$, 得证。

用向量内积去记忆: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$, 其中 $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots), \vec{b} = (y_1, y_2, \dots)$, 取等的时候, 向量是平行的

两个向量的内积, 永远小于这两个向量长度的乘积

点积与内积

22 三角形

23 三角函数

三角函数源于古希腊和古印度的天文测量和几何学，起初是为了解决圆上弧长与弦长的计算。

集合定义有三种：直角三角形定义、直角坐标系定义、单位圆定义。

与圆周率 π 的定义很像，一个角度的正弦值是确定的，也就是直角三角形的对边比斜边的比。

24 绝对值

本质是表示距离，数轴上的两点距离，差值的绝对值。

第一要务一般是指去绝对值，从代数上看就是要去讨论。不但要去绝对值，还要会用绝对值列出题目相应的等式或者不等式，然后去解。

24.1 最值

$f(x) = |x - 1| + |3 - 2x|$ 的最值

$f(x) = |x + 1| + |2x - 1|$ 的最值，Tips⁴

$f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 2|$ 的最值

$f(x) = |2x - 1| + |4x - 3|$

$f(x) = ||x - 1| - 3|$

24.2 最值推广：奇点偶段

$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + \dots + |x - a_n|$

证明方法：从 1 到 3 到 5，从 2 到 4 到 6，以至无穷。

25 整除规则 (divisibility rule)

Let $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} = a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} \dots + a_2 \times 10 + a_1$

⁴ $|2x - 1| = 2|x - \frac{1}{2}| = |x - \frac{1}{2}| + |x - \frac{1}{2}|$

25.1 基本判别 (rules)

被 2 整除: The last digit is even

被 3 整除和被 9 整除: The sum of digits must be divisible by 3 or 9. Tips⁵

被 4 整除: The last two digits must be divisible by 4. Tips⁶

被 8 整除: The last three digits must be divisible by 8

被 11 整除:

第一位数 - 第二位数 + 第三位数 - ...，最终值如果能被 11 整除，正负交替，从前往后和从后往前一样，负数也可以判定. Tips⁷

25.2 proofs

被 7 整除:

方法 1: 三位截断: if $A = \overline{b_1 b_2 b_3 a_1 a_2 a_3}$ 能被 7 整除, then: $\overline{a_1 a_2 a_3} - \overline{b_1 b_2 b_3}$ 可以被 7 整除

$$A/7 = (\overline{b_1 b_2 b_3} \times 10^3 + \overline{a_1 a_2 a_3})/7 = 143 \times \overline{b_1 b_2 b_3} + (\overline{a_1 a_2 a_3} - \overline{b_1 b_2 b_3})/7$$

方法 2: 降位, 如五位数变为四位, 再变为三位, 再两位。

Suppose we have a number $A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 b}$, let $A = \overline{ab}$, while $a = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$.

if 能化简为判断 $a + mb$ 能否被 7 整除, 则简化成功:

$$\begin{cases} a + mb = 7n_1 \\ 10a + b = 7n_2 \end{cases} \Rightarrow (10m - 1)b = 7(n_1 - n_2)$$

That means $10m - 1$ 必须是 7 的倍数, 此时 m 可以为 5 or -2。那么我们就可以简化为判断 $a - 2b$ or $a + 5b$, -2 和 5 正好相差 7.

e.g.

$$329 \rightarrow 32 - 2 \times 9 = 14$$

$$4564 \rightarrow 456 - 2 \times 4 = 448 \rightarrow 44 + 8 \times 5 = 7 \times 12$$

推广:

被 11 整除: $(10m - 1)|11$, $m = -1$ 。当然, 被 11 整除还有一个更方便的方法, 那就是依次加减

被 13 整除: $(10m - 1)|13$, $m = 4, -7$

被 17 整除: $(10m - 1)|17$, $m = -5$

⁵ $A = a_n \times (9+1)^{n-1} + a_{n-1} \times (9+1)^{n-2} \dots + a_2 \times (9+1) + a_1$

$= (a_n \times 9^{n-1} + a_{n-1} \times 9^{n-2} + \dots + a_2 \times 9) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1)$

⁶ $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3} \times 100 + \overline{a_2 a_1}$

⁷ $10 = 11 \times 1 - 1, 100 = 11 \times 9 + 1, 1000 = 11 \times 91 - 1$

我们可以看到， m 是一个呈周期循环，太大了就没有意义了，如果一个三位数，最后化简还是三位数，就没有了意义

这种方法用计算机编程来判断很方便

26 todo

生日问题 <https://zh.wikipedia.org/wiki/>

Part IV

Part3

Part V

MISC

27 misc

坐标的平移

在高考、中考、合格考等考试的手册中，有这些时间点需要规范化语音，比如：提前 35 分钟入场提示，提前 20 分钟宣读考场规则，提前 15 分钟启封试卷袋，提前 5 分钟发试卷，提前 0 分钟也就是到点语音“开始答题”，那么我们可以用数轴上的点来表示， $-35, -20, -15, -5, 0$ ，如果做音频文件，这些点就可以以 -35 为原点，也就是数轴的原点从原来的 0 平移到 -35 ，那么我们得到的关键点为： $0, 15, 20, 30, 35$ 。往左移就是加，往右移就是减。

对于圆锥曲线一般方程： $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (里面的 xy 项是旋转项)，我们总是可以通过平移、旋转，去掉 xy, x, y 项。

直角梯形，对于勾股定理、三角函数的和差

28 因式分解

KEY: 十字交叉、拆添项、有理根定理、欧几里得算法、单位根因式、待定系数法(通常用于四次五次)、换元法

对于二次多项式，首先要考虑的是十字交叉，然后拆添项。二次以上的，可以用以下的一些技巧。

待定系数法：例 $x^4 + 9x^3 + 16x^2 - x - 3$

如上例：有理根定理尝试后发现都不行，也就是应该无有理根，那也意味着没有一次的多项式因式，那么可以假设可以分为两个二次的多项式 $(x^2 + ax - 1)(x^2 + bx + 3)$ ，最后列方程即可。

对于四次五次型的感觉挺合适的，包括上面的一些四次型。

单位根：满足 $z^n = 1$ 的所有复数 z 叫做 n 次单位根

最简单的一种形式是 $x^3 = 1$, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$, $x^2 + x + 1$ 也可叫做单位根因式，很明显 if ω 是 $x^2 + x + 1$ 的根, then $\omega^3 = 1$

其实 $x^3 = -1 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$ 中的 $x^2 - x + 1$ 也是可以用的，比如 $x^4 + x^3 + x^2 + 2$, 将 $x^3 = -1$ 带入正好得 $x^2 - x + 1$ 。

$6x^3 - 11x^2 + x + 4$, 根据有理根定理, 先尝试 ± 1 , 易知 1 是一个根, 那么 $(x - 1)$ 就是其中一个因式, 又根据欧几里得算法, 只要拼凑出 $(x - 1)$ 的项, 那么剩余的肯定也含有 $(x - 1)$ 的项, 所以我们从最高次三次着手, $(6x^3 - 6x^2) - (5x^2 - x - 4)$, 这样不需要长除法, 可以迅速解决。同样的 $x^3 + 2x - 3$ 可配成 $(x^3 - x^2) + (x^2 + 2x - 3)$ or $(x^3 - 1) + (2x - 2)$

$x^4 - 7x^2 + 1$, 根据有理根定理, 尝试 ± 1 后, 发现它没有有理根, 那么我们只能拼凑了, 观察看, 常数项是平方项, 可以从常数项着手, $x^4 + 2x^2 + 1 - 9x^2$ 。

$x^4 - 9x^2 + 64$, 如果把 x^2 看作一个变量, 那么明显 x^2 无解, 有理根定理也不能用了。只能凑了, 常数项是平方项, 那么我们从常数项着手即可。

$x^4 + x^3 + x^2 + 2$, 无有理根, 可以从”444”着手, $(x^4 + 1^2x^2 + 1^2) + x^3 + 1$, 也可以简单尝试 $x^3 = -1$ 正好 $x^2 - x + 1$ 项。

$x^4 + y^4 + (x + y)^4$, 往”444”去凑

$(x^2 - 3x + 4)^2 + x^3 + 2$, 展开明显很复杂, 但是可以分析一下, 常数项是 18, 尝试后有理根定理, 发现也不行, 只能凑, 平方差是能最检查运算的, 凑括弧内的完全平方显得有点拙劣, 尝试拼凑常数项, 一个平方项的凑平方差, 一个立方项凑立方和。i.e. $a^3 - b^2$, Let $a = 3$, $b = 5$

$(x^2 - 1)(x + 3)(x + 6) + 12$, 常数项是 -3 , 尝试后发现没有有理根, 又得东拼西凑了, 注意前面四个因式 $(x - 1)(x - 3)(x - 1)(x + 5) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x - 5)$

$x^7 + x^5 + 1$, 无有理根, 既然是无理根, 观察单位根是否适用, 将 $x^3 = 1$ 代入, 那么降次后正好是 $x + x^2 + 1 = 0$, 那么就往单位根因式 $x^2 + x + 1$ 之类的凑了(或者长除法), $x^5(x^2 + x + 1) - (x^6 - 1)$ 得解

$x^{10} + x^5 + 1$, 单位根因式去检验(三次方为 1), 直接用单位根去除。

$x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$, 容易看出是轮换式, 当 $x = y$ 时原式为 0, 故有因式 $(x - y)$, 同理有 $(y - z)$, $(z - x)$, 再设一个常数项得系数为 -1 。

$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - y^3$, 以 x 为主变量看, 存在孤零零的 $1 - y^3$ 常数项, 所以 y^3

是突破口，尝试前面应该是个立方才行。

29 最值

特征：直角坐标系下，动点与两定点之间的和或者差

$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(x - 8)^2 + 16}$$

1. 利用直角坐标系点与点之间的距离和, $(x-0)^2 + (0-(-2))^2$ and $(x-8)^2 + (0-4)^2$

2. 构造直角三角形 (但是往往与定义域不符, $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(8-x)^2 + 16}$)

此类也可以变形为：已知 $x + y = 12$, 求 $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 9}$ 的最值

$$\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{(x - 8)^2 + 16}, \text{ 三角形两边差}$$

但是如果 x 的系数不同呢？比如: $\sqrt{2x^2 + 4} \pm \sqrt{(x - 8)^2 + 16}$

根据 Google AI 的分析结果来看，初高中范围内没有办法，需要求驻点。

柯西不等式：两个方向，积或者平方和，注意探讨等号

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \text{ or}$$

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x}, \text{ tips}^8$$

$x, y, z > 0$ and $x + y + z = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{25}{z}$ 的最小值, tips⁹

$x, y, z > 0$, $\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+2y^2+4z^2}}$ 的最大值, tips¹⁰

求证: $\sqrt{4x+4} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x} < \sqrt{78}$, tips¹¹

$$\sqrt{x} + \sqrt{27+x} + \sqrt{13-x}, \text{ tips}^{12}$$

已知 $x^2 + y^2 = 3$, 求 $2x + 3y$ 的最大值, tips¹³

$$\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4+1}}{x} \text{ 的 max. tips}^{14}$$

⁸ $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x} \leq \sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{x-1 + 3-x}$, 等号需要讨论.

$$9 (\sqrt{x} + \sqrt{y^2 + \sqrt{z^2}}) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3^2}{\sqrt{y^2}} + \frac{5^2}{\sqrt{z^2}} \right)$$

$$10 (x^2 + \sqrt{2}y^2 + 4z^2) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}^2} + \frac{1}{2^2} \geq (x+y+z) \right)$$

¹¹ 柯西后，讨论等号不成立

¹² 使用柯西需要凑, $\sqrt{13-x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{26-2x}$

$$13 (x^2 + y^2)(2^2 + 3^2) \geq (2x + 3y)^2$$

¹⁴ 1 讨论正负, 2 换元, 3 分子有理化

.....
 $x, y > 0$, and $x + 3y = x^3y^2$, min of $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$, tips¹⁵
.....

¹⁵把 $1/y$ 带入