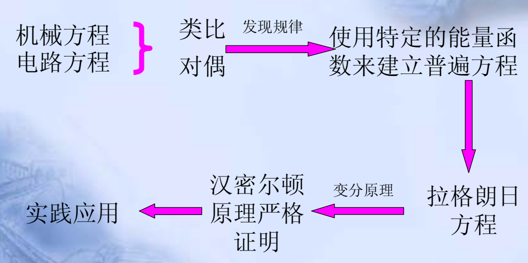
第二章 机电系统模型及其运动方程

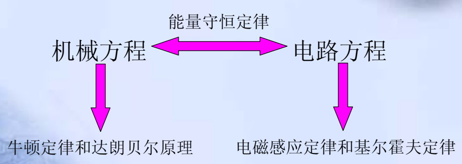
- 第二章全部内容
- 第一章作业解答

本章讲授思路：



运动方程：机械方程、电路方程

- 推导运动方程的方法有两种：
  - 微分原理法



- 变分原理法

  机电系统运动微分方程在形式上是相似的，这说明两类系统的物理量和物理定律之间有相似的对应关系，能不能用一种统一的方法来建立机电系统运动微分方程。考虑到，保守系统中的力与电容电压都可以表示为储能的函数。因而可以用某一特定的能量函数来建立一个普遍的方程——拉格朗日方程，即通过机电系统的某个特定的能量函数的积分求极值来导出它的运动方程，这种方法就是变分原理法。

- **两种优缺点比较：**
  - 微分原理法。描述的是真实运动的普遍规律，其物理概念容易理解和掌握，面对复杂系统，必须有相当的洞察力和直观能力。
  - 变分原理法。采用统一方法机械处理问题，步骤单一和系统化，容易忘掉具体的物理概念。但是系统愈复杂，越能发挥作用，由于是系统的状态函数的积分函数达到极值所应满足的方程是拉格朗日方程，因此该运动方程实际是应用拉格朗日方程。（只适用于完整约束系统）

§2-1 机电类比

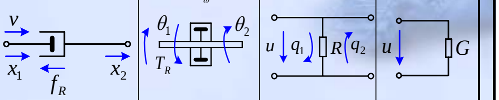
本节目的：

1. 通过机电系统的类比为机械或电路工程师提供一种临时的处理不熟悉系统（如电路对于机械工程师）的灵活方法。
2. 通过机电系统的类比或对偶，能对机电系统的相似性有一个较为深入的了解。为学习建立统一的机电系统运动方程打下基础。

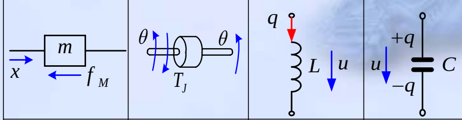
这一节内容较简单不作详细的讲解，给同学们一节课的自学时间，下节课将对表**2-3**和例**2-2**作以下重点讲解

- 注意对偶和类比概念的区别
- 对偶电路不等效
- 一般采用 $f-e$类比

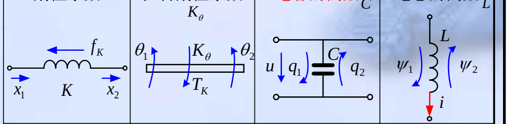
名称		机械系统		电系统	
		平移运动	旋转运动	$f-e$ 类比	$f-i$ 类比
广义变量	坐标	位移 x	角位移 θ	电荷 q	磁链 ψ
	速度	速度 $v=\frac{dx}{dt}$	角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$	电流 $i=\frac{dq}{dt}$	电势 e
	动量	动量 p	角动量 p_ω	磁链 ψ	电荷 q
	力	力 $f=\frac{dp}{dt}$	转矩 $T=\frac{dp_\omega}{dt}$	电势 e	电流 $i=\frac{dq}{dt}$



系统元件	阻力作用	阻力系数 R_v	旋转阻力系数 R_ω	电 阻 R	电 导 G
		阻力 $f_R=R_v v=R_v\frac{d}{dt}(x_1-x_2)$	阻力转矩 $T_R=R_\omega\omega=R_\omega\frac{d}{dt}(\theta_1-\theta_2)$	电压 $u=Ri=R\frac{d}{dt}(q_1-q_2)$	电流 $i=Gu=G\frac{d\psi}{dt}$
		损耗函数 $F=\frac{1}{2}v^2R_v$	损耗函数 $F=\frac{1}{2}\omega^2R_\omega$	损耗函数 $F_R=\frac{1}{2}i^2R$	损耗函数 $F_G=\frac{1}{2}u^2G$



系统元件	惯性作用	质量 m	转动惯量 J	电感 L	电容 C
		惯性力 $f_M=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dp}{dt}$	惯性转矩 $T_J=J\frac{d\omega}{dt}=J\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{dp_\omega}{dt}$	电压 $u=L\frac{di}{dt}=L\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{d\psi}{dt}$	电流 $i=C\frac{du}{dt}=C\frac{d^2\psi}{dt^2}=\frac{dq}{dt}$
		动能 $W=\frac{1}{2}mv^2$	动能 $W=\frac{1}{2}J\omega^2$	储能 $W_m=\frac{1}{2}Li^2$	储能 $W_e=\frac{1}{2}Cu^2$



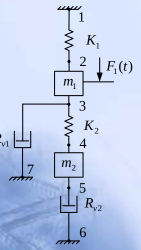
系统元件	弹性作用	刚性系数 K	扭转刚性系数 K_θ	电容的倒数 $\frac{1}{C}$	电感的倒数 $\frac{1}{L}$
		弹力 $f=K(x_1-x_2)$	扭转力矩 $T_K=K_\theta(\theta_1-\theta_2)$	电压 $u=\frac{1}{C}(q_1-q_2)=\frac{q}{C}$	电流 $i=\frac{1}{L}(\psi_1-\psi_2)$
		位能 $V=\frac{1}{2}Kx^2$	位能 $V=\frac{1}{2}K_\theta\theta^2$	储能 $W_e=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	储能 $W_m=\frac{1}{2}\frac{\psi^2}{L}$

机械系统的模拟电路求解步骤

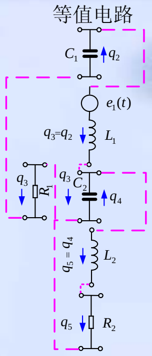
（以例2-2作说明）

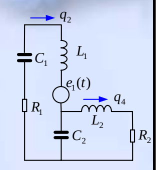
1. 将机械量换成电量，即将机械元件两端的位移 x，换成电荷 q，将各机械元件换成 C、L、R等。
2. 作出各元件的等值电路，并标明各个元件流入电荷的方向。
3. 根据约束关系，把各电路元件连接起来，形成一闭合回路。

机械量换成电量　　等值电路　　元件连接



$x_1=0\rightarrow q_1=0$
$K_1\rightarrow 1/C_1$
$x_2\rightarrow q_2$
$F_1(t)\rightarrow e_1(t)$
$m_1\rightarrow L_1$
$x_3=x_2\rightarrow q_3=q_2$
$K_2\rightarrow 1/C_2$
$x_4\rightarrow q_4$
$R_{v1}\rightarrow R_1$
$x_7=0\rightarrow q_7=0$
$m_2\rightarrow L_2$
$x_5=x_4\rightarrow q_5=q_4$
$R_{v2}\rightarrow R_2$
$x_6=0\rightarrow q_6=0$





§2-2 机电系统的能量和拉格朗日函数

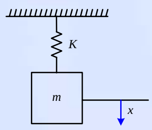
- 前面提到的保守系统中的力与电容电压都可以表示为储能的函数，而机电系统中的电磁力是与耦合磁场能量变化率紧密相关的，因此适当定义一个能量函数，便有可能通过此能量函数写出弹性力、惯性力和电磁力的表达式，并进而写出系统的运动方程。
- 既然微分方程和变分原理法都能导出系统的运动方程，取两个实例来通过微分方程反演出拉格朗日方程。

一. 弹簧质量系统

$$m\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow m\frac{dv}{dt}+kx=0$$

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(mv)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) \qquad T=\frac{1}{2}mv^2\text{；}\qquad kx=\frac{\partial V}{\partial x}\qquad V=\frac{1}{2}Kx^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{\partial V}{\partial x}=0$$



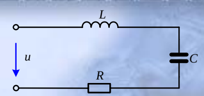
令能量函数（即拉格朗日函数）

$L=T-V$（ T 为系统的动能，V 为系统的位能），带入上式得：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v}L\right)-\frac{\partial}{\partial x}L=0 \qquad \text{式（2-1）}$$

二. 电路

$$u=u_L+u_C+u_R=L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}+Ri$$



电感的储能 $W_L=\frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow u_L=L\frac{di}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial i}W_L\right)$

电容的储能 $W_C=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow u_C=\frac{q}{C}=\frac{\partial}{\partial q}W_C$

电损耗函数 $F=\frac{1}{2}Ri^2 \Rightarrow u_R=\frac{\partial}{\partial i}F$

拉格朗日函数 $L=T-V=W_L-W_C$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial i}L\right)-\frac{\partial}{\partial q}L+\frac{\partial}{\partial i}F=u \qquad \text{式（2-2）}$$

- 讨论

1. 公式（2-2）多了 $\frac{\partial}{\partial i}F$（为电阻压降）和外施电压 u，如果弹簧质量系统也存在机械损耗（以参数 R_v 表示），并始终作用着外施力 F，则式（2-1）也含有相应的项 $R_v v=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2}R_v v^2\right)=\frac{\partial}{\partial i}F$，（ i 表示 v， $\frac{1}{2}R_v v^2$ 也称为损耗函数），而右端也将不为零而为外施力 F。

2. 不论机械系统还是电系统，当系统不存在外施力（电压）和损耗（即所谓保守系统）时，其力（电压）平衡方程式均可由式（2-1）写出；而当系统存在外力作用和损耗时（即所谓非保守系统），其力（电压）方程则可用公式（2-2）写出。
3. 对于保守的机电系统，其拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial i_k}L\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}L=0 \qquad (k=1,\ 2\cdots N)$$

对于非保守的机电系统，其拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial i_k}L\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}L+\frac{\partial}{\partial i_k}F=Q_k \qquad (k=1,\quad 2\cdots N)$$

式（2-3）

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial i_k}L\right)$ —— 广义惯性力

$-\frac{\partial}{\partial q_k}L$ —— 广义惯性力以外的保守力（如广义弹力和电磁力等）

$\frac{\partial}{\partial i_k}F=R_k i_k$ —— 广义阻力

Q_k —— 广义驱动力，如(u,F)

（以上两项为）非保守力

$q_k(k=1,\quad 2\cdots N)$ ——为广义坐标，它们是时间的函数，如(q,x)。

$i_k(k=1,\quad 2\cdots N)$ ——为广义速度，是广义坐标和时间的函数，如(i,v)。

- 方程式（2-3）的含义：系统在动力平衡时，作用在每一广义坐标上的广义力总和等于零。
- 利用拉格朗日方程来描述一个机电系统的运动状态时，首先要选择广义坐标、广义速度和确定拉格朗日函数以及损耗函数等。

三. 广义坐标与拉格朗日函数

1. 广义坐标

定义：能决定系统几何位置的彼此独立的量称为该系统的广义坐标，也称为独立坐标。

- 对于一个完整的约束系统，若系统的自由度为*N*，就有*N*个独立坐标。

讨论：描述一个质点在空间的位置需要三个坐标，但各质点的位置常受到几何或运动的约束，使每个质点的自由度或独立坐标都少于三个。

- 对于运动学系统，除广义坐标外，还要加上坐标的导数——广义速度，才能完整地描述一个系统。书中表2-4就列出了常用机电系统的广义变量、广义速度。
- 广义坐标和广义速度为系统的动力变量。

2. 拉格朗日函数

$$L=T-V$$

一般 L 是广义坐标，广义速度和时间三者的函数，即 $L(q_k,i_k,t)$ 。

T 总动能，是广义坐标，广义速度和时间三者的函数，即 $T(q_k,i_k,t)$。包括机械系统的动能和电系统的磁场能量。对于非线性系统，则为磁共能T'，线性系统则为磁能。

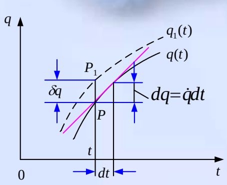
V 总位能，仅是广义坐标的函数，即$V(q_k,t)$ 。包括机械系统的位能和电系统的电场能量。

§2-3 汉密尔顿原理与拉格朗日方程

一. 变分的概念

变分和微分概念的区别

一个自由度的质点系统，其广义坐标为q，质点的真实运动可用单值连续函数 $q=q(t)$ 表示，在时间t时刻的微分是 $dq=\dot{q}dt$ 。



函数$q(t)$在瞬时t的变分则是另一种概念。设函数$q(t)$本身的形式发生微小的改变。

$$\delta q = q_1(t) - q(t) = \alpha\eta(t)$$

α —— 任意微小变动参量；

$\eta(t)$ —— 时间t的任意连续可微函数；

$q_1(t)$ —— 图中虚线所示，表示质点约束允许的真实运动邻近的一种可能运动。

$\delta q = q_1(t) - q(t) = \alpha\eta(t)$ 为函数$q(t)$在时刻t的变分，用线段 $\overline{pp_1}$ 表示。可见，δq 表示在瞬时t时刻质点的可能运动对真实运动的偏差。

变分运算可以与微分和积分交换运算顺序，如

$$\frac{d}{dt}(q_1 - q) = \dot{q}_1 - \dot{q} = \delta_{\dot{q}} = \delta\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

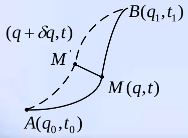
$$\frac{d}{dt}(\delta q) = \delta\left(\frac{d}{dt}q\right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(q_1 - q)dt = \int_{t_1}^{t_2} q_1 dt - \int_{t_1}^{t_2} q dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta q dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} q dt$$

2. 变分原理

定义：是在一定的时间内，从约束许可的一切可能运动中提供一条判断真实运动的准则。例如下图，真实运动路线AMB，虚线AM'B为任意可能路线，该路线为旁路，旁路与正路有相同的起点和终点。变分原理提供一条准则将正路与旁路区别开来，这个准则就是汉密尔顿原理。



二、汉密尔顿原理

定义：对完整约束的保守动力系统，拉格朗日函数在时间t_1和t_2之间的积分函数—泛函I，即$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ 。则系统的真实路线将由泛函I达到极值时所得到的一组微分方程来确定。从数学上，泛函I达到极值的条件是泛函的变分为零，所以汉密尔顿的另一种表达式是：保守动力系统的真实运动路线是使泛函I的变分等于零的路线。

三、拉格朗日方程的导出

任意一条路径：$q_j(t) = q_{j0}(t) + \alpha\eta_j(t)$

$q_{j0}(t)$ —— 为真实路线 。

$\eta_j(t)$ —— 为连续可微的函数，满足：

$$\eta_j(t_1) = 0 \quad \eta_j(t_2) = 0$$

实质上要求旁路和正路有相同的起点和终点。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j,\ q_j',\ t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q_{j0} + \alpha\eta_j(t),\ q_{j0}' + \alpha\eta_j'(t),\ t)dt$$

式中，$q_{jo}(t)$和$\eta_j(t)$一旦选定，I就只是α 的函数，可用普通微积分学中的方法求取极值。

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha} = \int_{t1}^{t2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial\alpha} + \frac{\partial L}{\partial q_j'}\frac{\partial q_j'}{\partial\alpha}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\eta_j(t) + \frac{\partial L}{\partial q_j'}\eta_j'(t)\right)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j'}\eta_j'(t)\right)dt = \frac{\partial L}{\partial q_j'}\eta_j(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_j'}\right)\eta_j(t)dt$$

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)\eta_j(t)dt$$

由于$\eta_j(t)$ 为任意函数，N个坐标为广义坐标，各个坐标之间互不依赖。

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_j}\right)=0 \qquad (j=1,\ \cdots N)$$

式（2-4）

此为 N 维保守系统的拉格朗日方程。

实际的系统均为非保守系统，存在着损耗和外加非保守力。

如果定义损耗函数 $F=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}R_j i_j^{\ 2}$ $\begin{cases} 机械 & \frac{1}{2}R_v v^2, \frac{1}{2}R_\omega \omega^2 \\ 电路 & \frac{1}{2}Ri^2 \end{cases}$

与损耗对应的广义阻力为 $\frac{\partial F}{\partial i_j}=R_j i_j$。

系统的动力平衡方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j-\frac{\partial F}{\partial i_j}=$$ **加在第*j*个端口的一切非保守力。**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}+\frac{\partial F}{\partial i_j}=Q_j$$

式（2-5）

上式表明：对于非保守系统而言，保守系统的拉格朗日方程仍然有效，只要把非保守力考虑进去并对原来的拉格朗日方程加以修正即可。

四．拉格朗日方程的应用条件

1. **所有的广义坐标 q_i 均独立。**
2. **完整约束的运动系统**

几何约束　限制质点（或元件，下同）的坐标，如 $f(x,y,z,t)=0$。

运动约束　不仅限制质点的坐标，而且限制质点速度的投影，如 $f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)=0$。

（1）通过积分转化为几何约束　（2）通过积分不能转化为几何约束

完整约束　几何约束和可以积分的运动约束

完整约束系统　凡是仅受完整约束的系统

自由度数 = 广义坐标的个数

非完整约束　不可积分的运动约束

非完整约束系统　含有非完整约束的系统

自由度数 < 广义坐标的个数

说明：

1. 由*s*个质点组成的完整约束系统，假定受*K*个方程的约束。由于它的运动约束通过积分可转化为几何约束，*K*个约束都可表达成几何约束方程，于是全部3*s*个坐标中只有（3*s*-*K*）个独立坐标，其余*K*个

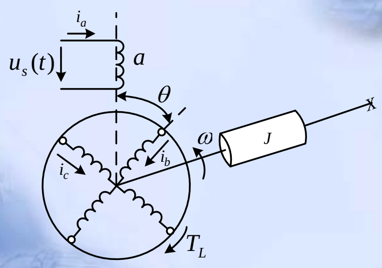
个坐标可表达为（3*s*-*K*）个独立坐标的函数。这（3*s*-*K*）个独立坐标既是系统的自由度数，又是广义坐标的个数。因为动力系统独立的广义坐标变分的个数就是系统的自由度数，所有广义坐标都互相独立。

2. 因非完整约束系统不能全部转化为几何约束，对系统的坐标没有约束，于是只减少系统的自由度数，而不减少系统的独立坐标数，广义坐标不是独立的。

---

3. 通常的电磁铁、继电器、交流电机等都是完整约束系统，都可用拉格朗日方程导出运动方程；但必须指出，换向器电机是非完整约束系统，因为换向器绕组的轴线取决于电刷的位置，在空间是固定的，与绕组转动无关。换向器绕组轴线的坐标不反映其旋转的真实情况，通常称为准坐标。以区别于取决于绕组本身的轴线的真坐标。如用准坐标来表示拉格朗日方程和套用一般的拉格朗日方程，将会产生错误的结果。

§ 2-4 应用举例



- 仔细自学例2-3，最好自己做一遍，书中省略的步骤如下。

$$\frac{\partial L}{\partial i_a}=L_s i_a+Mi_b\cos\theta+Mi_c\sin\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial q_a}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial i_a}=R_s i_a \qquad Q_a=U_s(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_b}=L_r i_b+Mi_a\cos\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial q_b}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial i_b}=R_r i_b \qquad Q_b=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_c}=L_r i_c+Mi_a\sin\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial q_c}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial i_c}=R_r i_c \qquad Q_c=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega}=J\omega \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta}=-Mi_a i_b\sin\theta+Mi_a i_c\cos\theta \qquad \frac{\partial F}{\partial \omega}=R_\omega\omega \qquad Q_0=-T_L$$

解：

1. 确定系统的广义变量

广义变量	绕组a k=1	绕组b k=2	绕组c k=3	转子 k=4
q_k	q_a	q_b	q_c	θ
i_k	i_a	i_b	i_c	ω

2. 确定系统的L函数

动能（**1-105**）： $T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}i_k\sum_{i=1}^{3}L_{ki}i_i+\frac{1}{2}J\omega^2$

$$T=\frac{1}{2}L_s i_a{}^2+\frac{1}{2}L_r i_b{}^2+\frac{1}{2}L_r i_c{}^2+M_{ab}i_a i_b+M_{ac}i_a i_c+\frac{1}{2}J\omega^2$$
$$=\frac{1}{2}L_s i_a{}^2+\frac{1}{2}L_r i_b{}^2+\frac{1}{2}L_r i_c{}^2+Mi_a i_b\cos\theta+Mi_a i_c\sin\theta+\frac{1}{2}J\omega^2$$

位能： $V=0$

L函数： $L=T-V=T$

3. 确定系统的损耗函数和非保守力

损耗函数和非保守力	绕组a k=1	绕组b k=2	绕组c k=3	转子 k=4
R_k	R_s	R_r	R_r	R_ω
Q_k	$U_s(t)$	0	0	$-T_L$

由式（2-67）

$$F=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}R_j i_j{}^2=\frac{1}{2}R_s i_a{}^2+\frac{1}{2}R_r i_b{}^2+\frac{1}{2}R_r i_c{}^2+\frac{1}{2}R_\omega\omega^2$$

4. 代入非保守系统的L方程 ⇨

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}+\frac{\partial F}{\partial i_j}=Q_j \qquad \text{式（2-69）}$$

$$Q_1=U_s(t) \qquad Q_4=-T_L$$

（1）

$$\frac{\partial L}{\partial i_a}=L_s i_a+Mi_b\cos\theta+Mi_c\sin\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial q_a}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial i_a}=R_s i_a \qquad Q_a=U_s(t)$$

$$\Rightarrow L_s\frac{di_a}{dt}+M\cos\theta\frac{di_b}{dt}-Mi_b\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+M\sin\theta\frac{di_c}{dt}+Mi_c\cos\theta\frac{d\theta}{dt}+R_s i_a=U_s(t)$$

（2）

$$\frac{\partial L}{\partial i_b}=L_r i_b+Mi_a\cos\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial q_b}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial i_b}=R_r i_b \qquad Q_b=0$$

$$\Rightarrow L_r\frac{di_b}{dt}+M\cos\theta\frac{di_a}{dt}-Mi_a\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+R_r i_b=0$$

（3）

$$\frac{\partial L}{\partial i_c}=L_r i_c+Mi_a\sin\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial q_c}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial i_c}=R_r i_c \qquad Q_c=0$$

$$\Rightarrow L_r\frac{di_c}{dt}+M\sin\theta\frac{di_a}{dt}+Mi_a\cos\theta\frac{d\theta}{dt}+R_r i_c=0$$

（4）

$$\frac{\partial L}{\partial \omega}=J\omega \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta}=-Mi_a i_b\sin\theta+Mi_a i_c\cos\theta \qquad \frac{\partial F}{\partial \omega}=R_\omega\omega \qquad Q_0=-T_L$$

$$\Rightarrow J\frac{d^2\theta}{dt^2}+Mi_a i_b\sin\theta-Mi_a i_c\cos\theta+R_\omega\omega=-T_L$$

本章作业

- **2-8 2-10 2-11**