Suffix Arrays und BWT

Tobias Harrer

19.11.12

Suffix Arrays

Definition

- Sei T ein String der Länge n über Σ und $T_{i,j}$ mit $(0 < i \leq j \leq n)$ der Substring von i bis einschließlich j, dann ist $T_{i,n}$ ein Suffix von T.
- Das Suffix Array von T ist die Permutation der Startindizes i der lexikografisch geordneten Suffixes $T_{i,n}$ von T.
- Anmerkung: jeder String T endet mit \$, s.d für alle $c \in \Sigma$ gilt $\$ < c$

Suffix Arrays - Beispiel

T = „abacabra$“

i $T_{i,n}$	**lexikografisch geordnet**	
1	abacabra$	$ 9
2	bacabra$	a$ 8
3	acabra$	abacabra$ 1
4	cabra$	abra$ 5
5	abra$	acabra$ 3
6	bra$	bacabra$ 2
7	ra$	bra$ 6
8	a$	cabra$ 4
9	$	ra$ 7

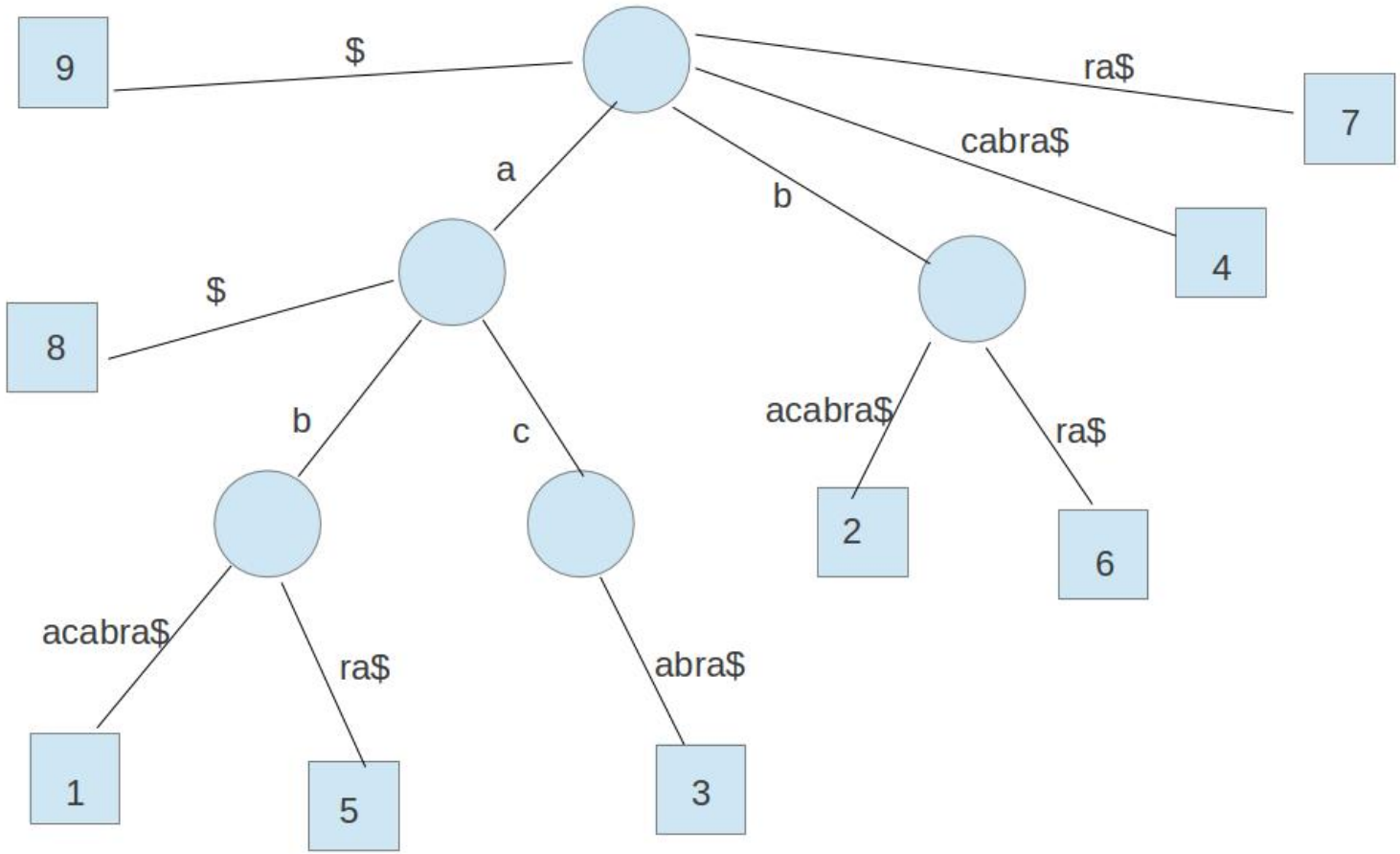
Das Suffix Array von T lautet:

`1 2 3 4 5 6 7 8 9 → i`

`9 8 1 5 3 2 6 4 7 → S(i)`

Suffix Arrays aus Suffix Trees

- Sortierung durch z.B. mergeSort in $\mathcal{O}(n \cdot log(n))$
- Ein Suffix Array kann aus des Blättern eines Suffix Trees durch Tiefensuche hergeleitet werden: T = „abacabra$“



Anwendung von Suffix Arrays

- Finde Pattern p („cab“) in String T („abacabra“)
- Naiver Ansatz: „schiebe“ p über T:

```
abacabra
cab→
...
abacabra
.  .  cab
```

- Problem: $\mathcal{O}(n \cdot m)$

Anwendung von Suffix Arrays

- Vorteil: alle Suffixes lexikografisch sortiert
- p „abr“ist Präfix $T_{1,3}$ des Suffix $T_{5,n}$:

A[i]	$T_{A[i],n}$
9	$
8	a$
1	abacabra$
5	**abr**a$
3	acabra$
2	bacabra$
6	bra$
4	cabra$
7	ra$

- Beste Suchstrategie in sortiertem Array?

Anwendung von Suffix Arrays

- Binäre Suche, Vergleich von „abr“mit $TA[i], A[i] + 2$:

A[i]	$T_{A[i],n}$
9	$
8	a$
1	abacabra$
5	abra$
3	**aca**bra$ „abr“$<$ „aca“$\rightarrow$obere Hälfte
2	bacabra$
6	bra$
4	cabra$
7	ra$

Anwendung von Suffix Arrays

- Binäre Suche, Vergleich von „abr“mit $TA[i], A[i] + 2$:

A[i]	$T_{A[i],n}$
9	$
8	a$
1	**aba**cabra$ „abr“$>$ „aba“$\rightarrow$untere Hälfte
5	abra$
3	acabra$
2	bacabra$
6	bra$
4	cabra$
7	ra$

Anwendung von Suffix Arrays

- Binäre Suche, Vergleich von „abr“mit $TA[i], A[i] + 2$:

A[i]	$T_{A[i],n}$
9	$
8	a$
1	abacabra$
5	**abr**a$ „abr“== „abr“→Treffer!
3	acabra$
2	bacabra$
6	bra$
4	cabra$
7	ra$

- Suche in $\mathcal{O}(m \cdot log(n))$, aber: Sind wir hier schon fertig?
- Gibt es weitere Vorkommen von p = „abr“in T?

Anwendung von Suffix Arrays

- Diesmal Suche von „ab“
- Binäre Suche, Vergleich von „ab“mit $TA[i], A[i] + 1$:

A[i]	$T_{A[i],n}$
9	$
8	a$
1	abacabra$
5	abra
3	**ac**abra$ „ab“$<$ „ac“$\rightarrow$obere Hälfte
2	bacabra$
6	bra$
4	cabra$
7	ra$

Anwendung von Suffix Arrays

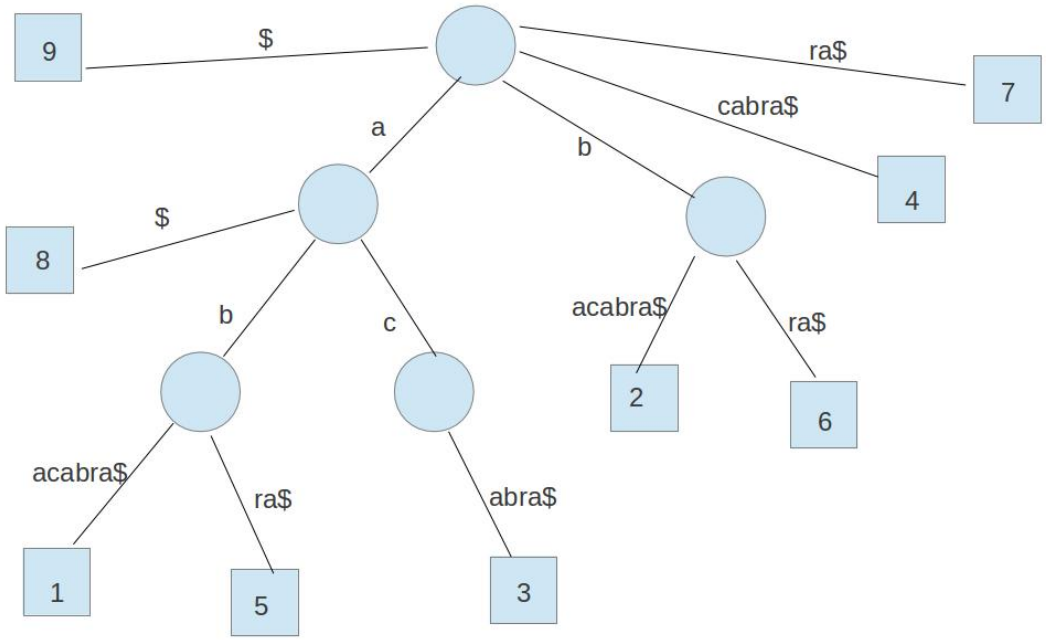
- Binäre Suche, Vergleich von „ab“mit $TA[i], A[i] + 1$:

A[i]	$T_{A[i],n}$
9	$
8	a$
1	**ab**acabra$ „ab“== „ab“→Treffer!
5	abra
3	acabra
2	bacabra$
6	bra$
4	cabra$
7	ra$

- Treffer $T_{1,2}$ erkannt
- Auffinden aller k weiterer Treffer ($T_{5,6}$) im Such Intervall nur sequenziell möglich $\rightarrow \mathcal{O}(m \cdot k + m \cdot log(n))$

Cluster Eigenschaft in Suffix Trees

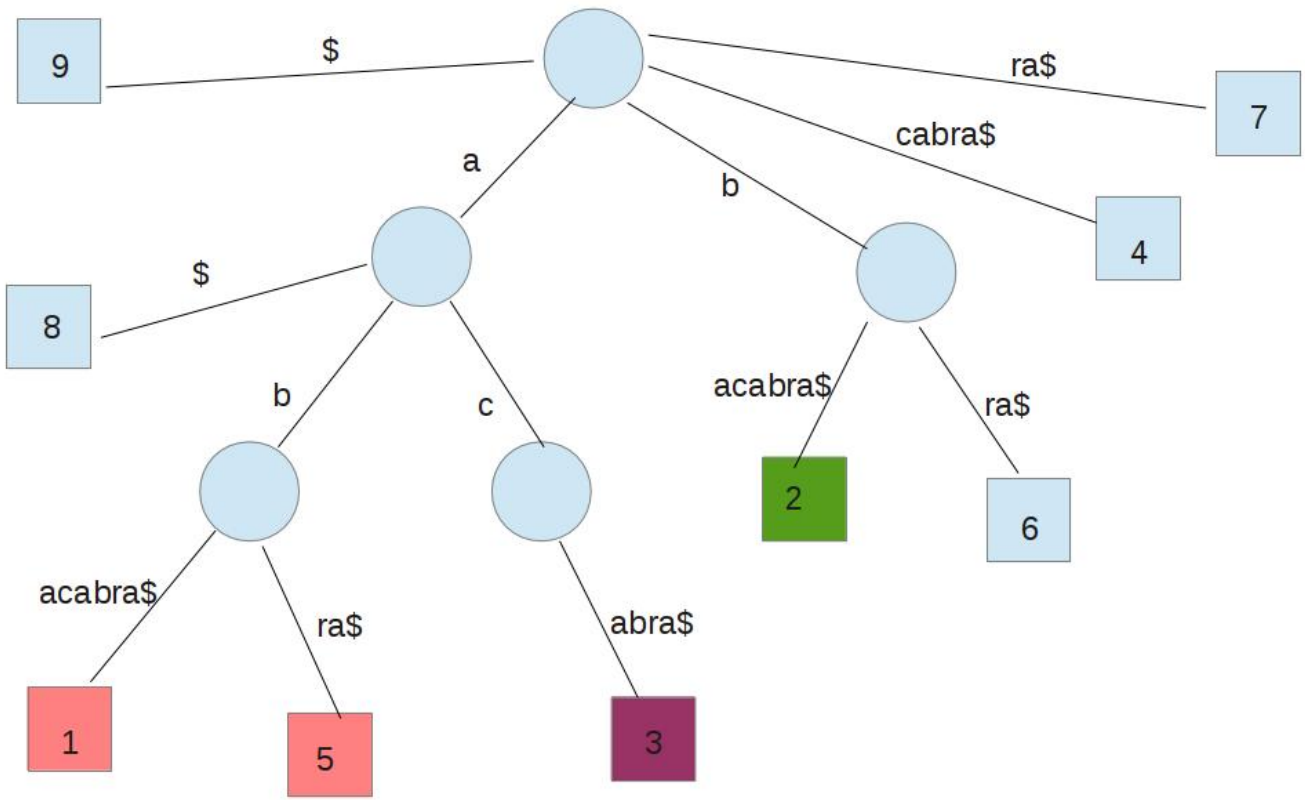
- Wie kann sequenzielle Suche effiezienter werden?
- Rückblick auf die Suffix Trees: *Cluster Property*



- Kind-Suffixes haben Pfad von der Wurzel als LCP

Cluster Eigenschaft und Longest Common Prefix

- Such Intervall entpsricht Teilbaum
- Im Such Intervall *kann* es also LCPs geben: rosa: ”ab", mit lila :”a", mit grün: kein LCP



Suffix Array und Longest Common Prefix

- Sei S ein Such Intervall [O,U], $M = \lfloor \frac{O+U}{2} \rfloor$ = Treffer
- Wir definieren zwei LCPs: oben = $LCP(T_{A[O],n}, T_{A[M],n})$ und unten = $LCP(T_{A[M],n}, T_{A[U],n}))$
- Bei sequenzieller Suche nur Vergleich von $T_{A[i]+|oben|,A[i]+m}$ nötig

Bsp. p = "anna" in T = "annanas_anna$"

A[i]	$T_{A[i],n}$
13	$
8	_anna$
12	a$
4	anas_anna$
9	anna$
1	annanas_anna$
6	as_a_nna$ "anna" $<$ "as_a_" $\rightarrow$ obere Hälfte
11	na$
3	nanas_anna$
5	nasanna$
10	nna$
2	nnanas_anna$
7	s_anna$

Bsp. p = "anna" in T = "annanas_anna$"

A[i]	$T_{A[i],n}$
13	$
8	_anna$
12	a$
4	anas_anna$ "anna" > "anas"→ untere Hälfte
9	anna$
1	annanas_anna$
6	as_anna$
11	na$
3	nanas_anna$
5	nasanna$
10	nna$
2	nnanas_anna$
7	s_anna$

Bsp. p = "anna" in T = "annanas_anna$"

A[i]	$T_{A[i],n}$
13	$
8	_anna$
12	a$
4	anas_anna$
9	anna$
1	annanas_anna$ "anna" == "anna"→ Treffer!
6	as_anna$
11	na$
3	nanas_anna$
5	nasanna$
10	nna$
2	nnanas_anna$
7	s_anna$

- oben = LCP("anna$", "anas_anna$") = "an"
- unten = LCP("anna$", "as_anna$") = "a"

Sequenzielle Suche mit LCP

- nach unten, normal: "anna" $\neq$ "as_a", 4 Zeichenvergleiche
- nach unten, mit LCP: "anna" $\neq$ "as_a", 3 Zeichenvergleiche
- nach oben, normal: "anna" == "anna", 4 Zeichenvergleiche
- nach oben, mit LCP: "anna" == "anna", 2 Zeichenvergleiche
- nach oben, normal: "anna" $\neq$ "anas", 4 Zeichenvergleiche
- nach oben, mit LCP: "anna" $\neq$ "anas", 2 Zeichenvergleiche

Zwischen-Resultat

- Such Intervalle *können* längste gemeinsame Präfixe besitzen
- Im schlechtesrn Fall kein LCP $\rightarrow$ keine Laufzeitverbesserung
- In der Praxis aber schneller als nur binäre Suche.

Zusammenfassung: Binäre Suche in Suffix Arrays

- Finden der n Suffixes in T: $\mathcal{O}(n)$
- Lexikografisches Sortieren des Suffix Arrays: $\mathcal{O}(n \cdot log(n))$
- Binäre Suche eines Patterns in T: $\mathcal{O}(log(n))$
- Insgesamt $\mathcal{O}(n \cdot log(n))$ (oder $m \cdot log(n)$?)

Backward Search

- Grundlage: Suffix Array
- Neu: keine binäre Suche, finden von zB „b“mit Array C[„b“] $= 5$
- Vorheriger Buchstabe $T_{A[i]-1}$ des Suffix $T_{A[i],n}$

Bsp.: Suche von p = „abra“

T = „abacabra$“

i	$A[i]$	$T_{A[i]-1}$	$T_{A[i],n}$
1	9	a	$
2	8	r	a$
3	1	$	abacabra$
4	5	c	abra$
5	3	b	acabra$
6	2	a	bacabra$
7	6	a	bra$
8	4	a	cabra$
9	7	b	ra$

- „abr**a**“von hinten: alle a, von C[„a“]+1 bis C[„b“]

Bsp.: Suche von p = „abra“(Schritt 1)

- Darunter alle „a“mit Vorgänger „r“

i	$A[i]$	$T_{A[i]-1}$	$T_{A[i],n}$
2	**8**	**r**	**a$**
3	1	$	abacabra$
4	5	c	abra$
5	3	b	acabra$

- Weiter zu i = C[„r“]+1 = 9

Bsp.: Suche von p = „abra“(Schritt 2)

- Suche „a**b**ra“in r mit Vorgänger b

i	$A[i]$	$T_{A[i]-1}$	$T_{A[i],n}$
.	.	.	.
5	3	b	acabra$
.	.	.	.
9	**7**	**b**	**ra$**

- b ist bei i = 5 bereits *einmal* in $T_{A[i]-1}$ vorgekommen →suche von C[„b“]+1+*1* bis C[„c“], d.h. bei i = 7

Bsp.: Suche von p = „abra“(Schritt 3)

- Finde alle „**a**bra“in b mit Vorgänger „a“:

i	$A[i]$	$T_{A[i]-1}$	$T_{A[i],n}$
1	9	a	$
.	.	.	.
6	2	a	bacabra$
7	**6**	**a**	**bra$**

- Da bei i = 1 und 6 a bereits *zweimal* in $T_{A[i]-1}$ vorkam $\rightarrow$suche von C[„a“]+1+*2* bis C[„b“], d.h. bei i = 4

Bsp.: Suche von p = „abra“(Schritt 4)

i	$A[i]$	$T_{A[i]-1}$	$T_{A[i],n}$
4	5	c	**abra$**

- Nach 4 Schritten (= Länge m von p) ist das Pattern gefunden $\rightarrow \mathcal{O}(m)$
- Problem: z.B. *wie oft ist „b“in Spalte* $T_{A[i]-1}$ *vor* $i = 5$ erfordert lineares Durchsuchen von $T_{A[i]-1} \rightarrow \mathcal{O}(m \cdot n)$.
- Effizientes Vorgehen nötig, sonst Laufzeit wie bei naiver Suche!

Lösung: Funktion Occ(c,i)

- Die Spalte des Vorgänger-Buchstaben $T_{A[i]-1}$ nennen wir ab jetzt $L_{1,n}$
- Für alle c aus Σ sei B^c ein Bit-Vektor mit $B^c[i] = 1$ falls $L_i = c$
- Eine weitere Funktion $rank_b(B, i)$ liefert die Anzahl von zB b=1 in B vor i, s.d $rank_1(B^c, i) = Occ(c, i)$.
- Dies benötigt linear mehr Speicher, doch der Zugriff durch rank ist konstant, s.d. $\mathcal{O}(m)$ insgesamt garantiert ist.
- Wavelet Trees?

Forward Searching

- Vorherige Position: $LF(i) = C[L_i] + Occ(L_i, i)$
- Während beim Backward Searching ein Suffix auf das vorhergehende abgebildet wird, ist es hier umgekehrt
- Inverse Funktion $\Psi(i) = i'$, s.d. A[i'] = (A[i] mod n)+1 bildet die Pos. eines Suffix auf die seines Nachfolgers ab

Bsp.: Ψ zu T = „abacabra$“

i	$A[i]$	Ψ	newF	$T_{A[i],n}$
1	9	3	1	$
2	8	1	1	a$
3	1	6	0	abacabra$
4	5	7	0	abra$
5	3	8	0	acabra$
6	2	5	1	bacabra$
7	6	9	0	bra$
8	4	4	1	cabra$
9	7	2	1	ra$

Suche von p in T

- Falls $\forall c : c \in \Sigma \Rightarrow c \in T$ ex. σ aufsteigende Zahlenfolgen in Ψ: 3; 1,6,7,8; 5,9; 4; 2;
- Diese zeigen an, wo sich der erste Buchstabe des Suffix ändert. Als Bitvektor newF = 110001011
- Die Suche von p erfolgt binär, wobei p ein Prefix des jew. Suffix ist, welches durch rekursives Folgen von $\Psi(i)$ *ohne das Suffix Array* gefunden werden kann
- Der jew. erste Buchstabe $T_{A[i]}$ des Suffixes $T_{A[i],n}$ wird durch $rank(newF, i)$ ermittelt. Falls zB $rank(newF, i) = 2$ ist c = „a“.

Fazit Forward Searching

- Ψ ersetzt A[i].
- Weder A[i] noch T sind zur Suche von p in T nötig
- Ψ kann durch *gap-encoding* weiter komprimiert werden.

Burrows-Wheeler Transformation

- Die BWT ist eine Permutation von T, s.d. an jeder Stelle des Suffix Arrays der vorherige Buchstabe angehängt wird:

Definition

Sei $T_{1,n}$ ein String und A[1,n] sein Suffix Array. Dann ist die BWT $T^{bwt}_{1,n}$ von T:

$T^{bwt}_i = T_{A[i]-1}$ $\forall 1 \leq i \leq n$ ausser A[i] $= 1 \Rightarrow T^{bwt}_i = T_n =$ \$

Anschauliches Beispiel, T = „abacabra$“

Permutationen	**alph. geordnet**	$F \ldots L = T^{bwt}$
abacabra$	$abacabra	$...a
bacabra$a	a$abacabr	a...r
acabra$ab	abacabra$	a...$
cabra$aba	abra$abac	a...c
abra$abac	acabra$ab	a...b
bra$abaca	bacabra$a	b...a
ra$abacab	bra$abaca	b...a
a$abacabr	cabra$aba	c...a
$abacabra	ra$abacab	r...b

- T^{bwt} = ar$cbaaab
- BWT Permutation besser für weitere Komprimierung von T als T selbst

BWT Rücktransformation

- Da L_i F_i voransteht, kann T aus T^{bwt} wie folgt wiederhergestellt werden:

F...L	nach links	sortiert	L links angehängt
\$...a	...a\$	...\$a	...a\$a
a...r	...ra	...a\$	...ra\$
a...\$	...\$a	...ab	...\$ab
a...c	...ca	...ab	...cab
a...b	...ba	...ac	...bac
b...a	...ab	...ba	...aba
b...a	...ab	...br	...abr
c...a	...ac	...ca	...aca
r...b	...br	...ra	...bra

- Reihe L = T^{bwt} bekannt, F wird aus L alph. sortiert
- Verschieben „nach links“, sortieren
- L = T^{bwt} links „anhängen, sortieren...

BWT Rücktransformation

Nach n Durchgängen ist die Matrix wiederhergestellt:

$abacabra
a$abacabr
abacabra$
abra$abac
acabra$ab
bacabra$a
bra$abaca
cabra$aba
ra$abacab

T ist derjenige String, der mit „$“endet.

Zusammenfassung