Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
2η Σειρά Ασκήσεων

Παπαδόπουλος Χαράλαμπος

03120199

Άσκηση 1:

Το πρόβλημα υπάγεται στην κατηγορία Minimax, δηλαδή προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε το δικό μας κέρδος και ταυτόχρονα να ελαχιστοποιήσουμε το κέρδος του αντιπάλου μας.

Θα χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό.

Θεωρούμε δύο δείκτες:

i -> «Πρώτη» κάρτα

j -> «Τελευταία» κάρτα

Το «κέρδος» της κάθε κάρτας αναπαρίσταται με a[i].

Κάθε φορά που έρχεται ο γύρος μας έχουμε την επιλογή ανάμεσα στις κάρτες i και j. Οπότε η αναδρομική σχέση θα είναι της μορφής:

$$\mathrm{S[i][j]} = \begin{cases} a[i]\,, \quad i = j \\ a[i] + \min(\alpha[i-2][j], a[i-1][j-2])\,, \qquad a[j] + \min(a[i-1][j-1], a[i][j-2])\,, i \neq j \end{cases}$$

Το min οφείλεται στην κίνηση του αντίπαλου παίκτη, ο οποίος επίσης προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το κέρδος μας.

Η τελική τιμή του S θα είναι και το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Πολυπλοκότητα:

Ο πίνακας θα είναι n*n με κάθε κελί να υπολογίζεται σε O(1) άρα πολυπλοκότητα (χρονική <u>και</u> χωρική) $O(n^2)$

Άσκηση 3:

α) Θα αναπαραστήσουμε το σύνολο των ανισοτήτων σε χρησιμοποιώντας έναν κατευθυνόμενο γράφο και εφαρμόζοντας Bellman-Ford.

Έστω G(V, E, w), όπου $V = \{x_{1,} \dots x_n\}$

Τότε, κάθε ανίσωση $x_i - x_j \leq b_{ij} \Rightarrow x_i \leq x_j + b_{ij}$ θα αναπαρασταθεί ως μία ακμή (i, j, w) με φορά <u>από</u> το **j** <u>προς</u> το **i**, βάρους w = b.

Δηλαδή, θέτουμε έναν τυχαίο κόμβο s ως αρχικό, του αναθέτουμε την τιμή 0 και ξεκινάμε να διατρέχουμε τον γράφο.

Το σύστημα S θα είναι ικανοποιήσιμο **ανν** δεν σχηματίζονται κύκλοι αρνητικού μήκους. Σε αυτήν την περίπτωση, αφού ο αλγόριθμος B-F τερματίσει επιτυχώς, θα έχουν ανατεθεί και οι κατάλληλες τιμές στα x_i.

Πολυπλοκότητα:

Εφόσον εφαρμόζουμε Bellman – Ford η πολυπλοκότητα μας θα είναι $O(n * m)$

β) Το ελάχιστο μη-ικανοποιήσιμο υποσύστημα S' θα είναι ο κύκλος αρνητικού μήκους, με το ελάχιστο πλήθος ακμών.

Επεκτείνοντας τον αλγόριθμο του ερωτήματος (α) βρίσκουμε τις ακμές που ανήκουν σε αρνητικό κύκλο.

Έστω ακμή x_{ij} με φορά $i \to j$ που ανήκει σε αρνητικό κύκλο.

Τότε, για κάθε κορυφή x_j εκτελώ BFS για να βρω μονοπάτι από την x_j προς την x_i.

Πολυπλοκότητα:

$$O(n * l)$$

k: πλήθος κόμβων που συμμετέχουν στον κύκλο

l: μήκος μικρότερου αρνητικού κύκλου

γ) Θα κινηθούμε με παρόμοιο τρόπο με προηγουμένως, μόνο που τώρα οι ακμές έχουν βάρη. Οπότε, αντικαθιστώ τον BFS με Dijkstra με συνολική πολυπλοκότητα $O(n^2 logn)$.

Άσκηση 4:

Θέλουμε να βρούμε ροές τέτοιες ώστε για κάθε ακμή e, με ροή f(e), το άθροισμα των ροών σε κάθε μονάδα να ισούται με τη ροή της ακμής να είναι f(e).

1. Αρχικά, ξεκινάμε με f=0f = 0f=0, δηλαδή δεν έχουμε καμία ροή.
2. Εκτελούμε BFS για να εντοπίσουμε μια s-t μονάδα και βρίσκουμε την ελάχιστη ροή που μπορεί να μεταφερθεί.
3. Υπολογίζουμε τη ροή αυτή για τις ακμές της μονάδας s-t, αφαιρούμε τη ροή από τις ακμές του μονοπατιού, και παράλληλα προσθέτουμε αυτήν τη ροή στις ακμές της αντίθετης κατεύθυνσης.
4. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να μη βρίσκουμε άλλο s-t μονοπάτι.

Πολυπλοκότητα:
Αρχικά βρίσκουμε το μονοπάτι με ελάχιστη ροή O(m) μέσω BFS. Η αφαίρεση της ροής γίνεται σε χρόνο O(m). Για κάθε μονάδα που επεξεργαζόμαστε, αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων εξαρτάται από το μέγιστο πλήθος των ροών, η συνολική πολυπλοκότητα είναι $O(m^2)$.

Άσκηση 5:

α) Θα εφαρμόσουμε BFS στο υπολειμματικό δίκτυο για να δούμε αν υπάρχει s-t μονοπάτι.

Αν υπάρχει, η ροή δεν είναι μέγιστη.

Διαφορετικά, η ροή είναι μέγιστη.

Πολυπλοκότητα:

Για την κατασκευή του υπολειμματικού χρειάζομαι $O(m)$ και για το BFS $O(n+m)$.

Άρα, τελικά, $O(n+m)$.