ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ #3

Εισαγωγή

Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ του λόγου του ποσού αποταμίευσης προς το διαθέσιμο εισόδημα με το κατά κεφαλήν διαθέσιμο εισόδημα σε δολάρια μέσα από τη χρήση ενός γραμμικού μοντέλου. Το δείγμα μας αποτελείται από 50 παρατηρήσεις από διάφορες χώρες και αναφέρονται σε έτη από το 1960 έως το 1970.

Το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε θα έχει τη μορφή $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$, ορίζοντας ως εξαρτημένη μεταβλητή Y το λόγο του ποσού αποταμίευσης προς το διαθέσιμο εισόδημα $\underline{\texttt{sr}}$ και ανεξάρτητη X το κατά κεφαλήν διαθέσιμο εισόδημα σε δολάρια $\underline{\texttt{dpi}}$.

Πριν όμως εξάγουμε οποιοδήποτε συμπέρασμα από τη χρήση του γραμμικού μοντέλου, θα πρέπει να το ελέγξουμε ως προς την **καταλληλότητά** του για τα δεδομένα που αναλύουμε με κριτήριο την επαλήθευση των παρακάτω υποθέσεων:

- 1. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως γραμμική τη σχέση των μεταβλητών που μελετάμε;
- 2. Είναι τα κατάλοιπα του μοντέλου ανεξάρτητα μεταξύ τους;
- 3. Έχουν τα κατάλοιπα του μοντέλου μέση τιμή μηδέν και σταθερή διασπορά;
- 4. Ακολουθούν τα κατάλοιπα την κανονική κατανομή;
- 5. Εκλείπουν σημεία αυξημένης επιρροής στις παραμέτρους του μοντέλου;
- → ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΚΩΔΙΚΑ 1: ΑΡΧΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΓΙΑ ΕΛΕΓΧΟ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΗΤΑΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ R

```
# Dependencies
library(faraway)
library (car)
library(ggplot2)
simple.graph <- theme(</pre>
   panel.background = element rect(fill = "#ffffff"),
   panel.grid.major = element line(colour = "#e9e9e9", size = 0.2),
   panel.grid.minor = element blank(),
   axis.line = element line(size = .4, colour = "#222222"),
   axis.title.x = element_text(face = "bold", margin = margin(15, 0, 0, 0)),
   axis.title.y = element text(face = "bold", margin = margin(0, 15, 0, 0)),
   legend.title = element blank(),
    legend.position = "bottom"
 )
# Load dataset
dt <- savings
# Simulate random linear dataset
set.seed(101)
x <- runif(50, 0, 100)
y \leftarrow runif(1, 0, 10) * x + rnorm(50, 0, 10)
ls \leftarrow data.frame(x = x, y = y)
```

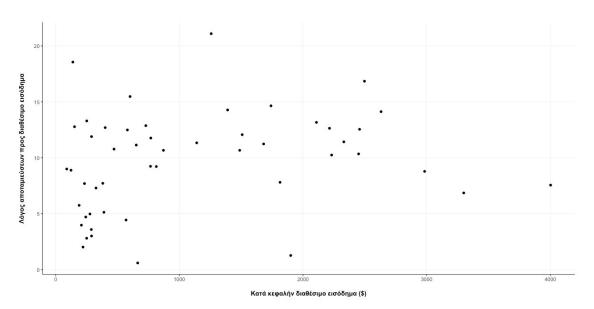
1. Γραμμικότητα

Εξετάζουμε το διάγραμμα διασποράς των δύο μεταβλητών του μοντέλου που θέλουμε να ελέγξουμε (βλ. γράφημα 1.1) στο οποίο διακρίνουμε ενδείξεις απόκλισης από τη γραμμικότητα. Είναι πιθανό η συσχέτιση των δύο μεταβλητών να περιγράφεται καλύτερα από κάποια καμπύλη (βλ. γράφημα 1.2) αντί μιας ευθείας γραμμής (βλ. γράφημα 1.3).

Ιδανικά θα αναμέναμε να παρατηρήσουμε μεγαλύτερη συγκέντρωση των διατεταγμένων ζευγών γύρω από μια νοητή ευθεία (βλ. γράφημα 1.4), κάτι που δεν είναι προφανές στη δική μας περίπτωσή. Δεδομένου όμως του σχετικά μικρού αριθμού παρατηρήσεων και του ετερογενους δείγματος (πολλές διαφορετικές χώρες, διαφορετικά έτη), κρίνεται σκόπιμο να συνεχίσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων πριν αποφασίσουμε για την καταλληλότητα του μοντέλου.

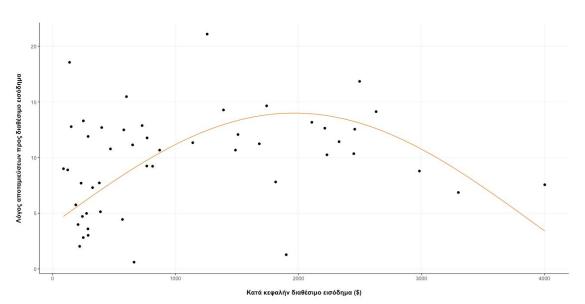
→ ΓΡΑΦΗΜΑ 1.1: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα διατεταγμένα ζεύγη τιμών των μεταβλητών sr και dpi από τα δεδομένα του δείγματος.



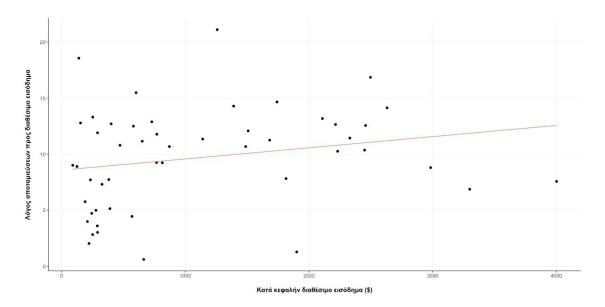
→ ΓΡΑΦΗΜΑ 1.2: ΚΑΜΠΥΛΗ ΜΕ ΠΙΘΑΝΗ ΚΑΛΥΤΕΡΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Στο διάγραμμα απεικονίζεται μια κατα προσέγγιση απόπειρα περιγραφής της συσχέτισης των δεδομένων με μια καμπύλη.



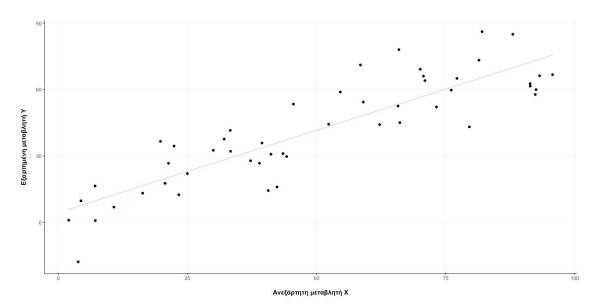
→ ΓΡΑΦΗΜΑ 1.3: ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Στο διάγραμμα απεικονίζεται η ευθεία που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων στα δεδομένα.



→ ΓΡΑΦΗΜΑ 1.4: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα διατεταγμένα ζεύγη τιμών και η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων δύο μεταβλητών προσομοιωμένων με θετική γραμμική συσχέτιση.



ightarrow ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΚΩΔΙΚΑ 2: ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

```
# 1. Linearity
graph.1.1 <- ggplot(dt, aes(dpi, sr)) +
    geom_point() +
    labs(
        x = "Κατά κεφαλήν διαθέσιμο εισόδημα ($)",
        y = "λόγος αποταμιεύσεων προς διαθέσιμο εισόδημα"
    ) + simple.graph
graph.1.2 <- graph.1.1 +
    stat_function(fun = function(x) 10 * sin(0.0008 * x) + 4, col = "#e69138")
graph.1.3 <- graph.1.1 + geom_smooth(method="lm", se=F, col="#e08e79", size=.5)
```

```
graph.1.4 <- ggplot(ls, aes(x, y)) +
  geom_point() +
  geom_smooth(method = "lm", se = F, col = "#c5e0dc", size = .5) +
  labs(
      x="Ανεξάρτητη μεταβλητή X",
      y = "Εξαρτημένη μεταβλητή Y"
    ) + simple.graph</pre>
```

2. Ανεξαρτησία καταλοίπων

Οι παρατηρήσεις του δείγματος **δεν ακολουθούν μια καθορισμένη χρονολογική σειρά**, γι' αυτό δεν έχουμε λόγο να ελέγξουμε το μοντέλο για κάποια πιθανή αυτοσυσχέτιση των καταλοίπων που θα παραβίαζε την υπόθεση της ανεξαρτησίας τους.

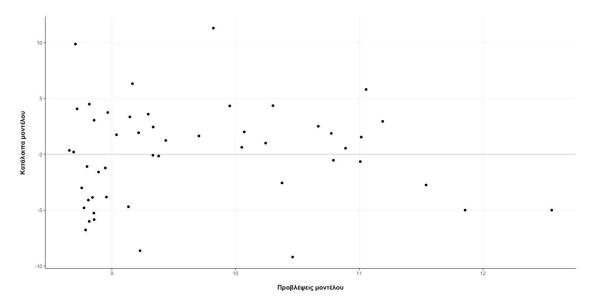
3. Ομοσκεδαστικότητα καταλοίπων

Σε πρώτη εξέταση του διαγράμματος διασποράς των καταλοίπων με τις προβλέψεις του μοντέλου (βλ. γράφημα 3.1) παρατηρούνται ενδείξεις πιθανής απόκλισης από τις υποθέσεις σταθερής διασποράς των καταλοίπων αλλά και μέσης τιμής ίσης με μηδέν. Ιδανικά θα αναμέναμε να παρατηρήσουμε ένα νέφος διατεταγμένος ζευγών, ισομερώς μοιρασμένο γύρω από την τιμή 0 του κάθετου άξονα και χωρίς κάποιο μοτίβο (βλ. γράφημα 3.3).

Διαμοιράζοντας όμως τις προβλέψεις του μοντέλου στο πρώτο διάγραμμα διασποράς σε τεταρτημόρια (βλ. γράφημα 3.2) δεν παρατηρούμε σημαντικές διαφοροποιήσεις της διασποράς των καταλοίπων μεταξύ των τεταρτημορίων¹, κάτι που επιβεβαιώνεται και από τον έλεγχο ομοσκεδαστικότητας των Brown–Forsythe² (F[3, 46]=1.1739, p=0.33).

→ ΓΡΑΦΗΜΑ 3.1: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα διατεταγμένα ζεύγη των προβλεπόμενων από το μοντέλο τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε τιμή της ανεξάρτητης με τα κατάλοιπα (διαφορές μεταξύ των παρατηρούμενων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής από τις προβλεπόμενες).

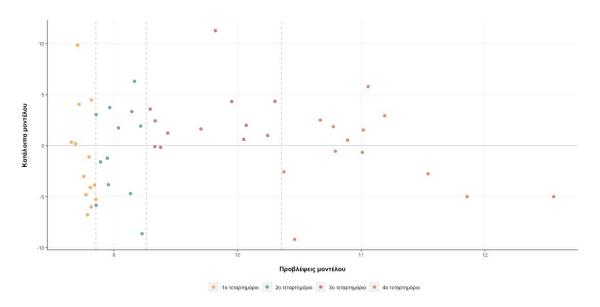


¹ Εκτός από το 3ο τεταρτημόριο όπου πράγματι η διασπορά εμφανίζεται σχετικά μικρότερη.

² Bλ: Brown, Morton B.; Forsythe, Alan B. (1974). "Robust tests for the equality of variances". Journal of the American Statistical Association. 69: 364–367. https://www.jstor.org/stable/2285659

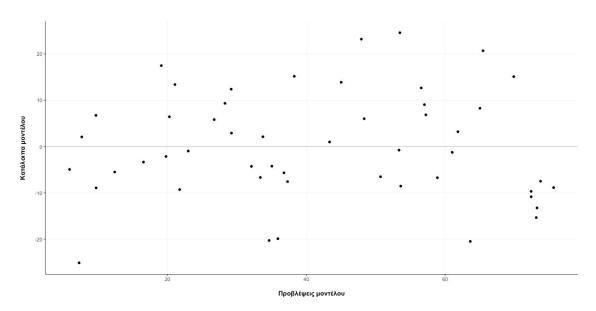
→ ΓΡΑΦΗΜΑ 3.2: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΑΝΑ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Στο διάγραμμα έχουν διαμοιραστεί τα διατεταγμένα ζεύγη που αφορούν τα κατάλοιπα του μοντέλου με τις προβλεπόμενες από το μοντέλο τιμές ανά τεταρτημόριο των προβλεπόμενων τιμών.



→ ΓΡΑΦΗΜΑ 3.3: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΣΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΟ ΔΕΙΓΜΑ

Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα διατεταγμένα ζεύγη τιμών των καταλοίπων με τις προβλεπόμενες τιμές του μοντέλου παλινδρόμησης δύο μεταβλητών προσομοιωμένων με θετική γραμμική συσχέτιση.



ightarrow ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΚΩΔΙΚΑ 3: ΕΛΕΓΧΟΣ ΟΜΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

```
# 3. Homoscedasticity
sr.model <- lm(sr ~ dpi, dt)
sr.model.dt <- data.frame(res = sr.model$residuals, fit = sr.model$fitted.values)
sr.model.dt$qnt <- cut(
    sr.model.dt$fit,
    unique(quantile(sr.model.dt$fit)),
    labels = c("lo τεταρτημόριο", "2ο τεταρτημόριο", "3ο τεταρτημόριο", "4ο
τεταρτημόριο"),
    include.lowest = T)</pre>
```

```
ls.model <- lm(y \sim x, ls)
ls.model.dt <- data.frame(res = ls.model$residuals, fit = ls.model$fitted.values)</pre>
graph.3.1 <- ggplot(sr.model.dt, aes(fit, res)) +</pre>
  geom hline(yintercept = 0, col = "grey", size = .4) +
 geom point() +
 labs(
   x = "Προβλέψεις μοντέλου",
   γ = "Κατάλοιπα μοντέλου"
 ) + simple.graph
graph.3.2 < - graph.3.1 +
 geom vline(xintercept = quantile(sr.model.dt$fit)[2:4], col = "grey", linetype =
"dashed") +
 geom point(aes(col = qnt), size = 2) +
  scale color manual(values=c("#f6b26b", "#76a5af", "#c27ba0", "#e08e79"))
graph.3.3 <- ggplot(ls.model.dt, aes(fit, res)) +</pre>
  geom hline(yintercept = 0, col = "grey", size = .4) +
 geom_point() +
 labs(
   x = "Προβλέψεις μοντέλου",
   y = "Κατάλοιπα μοντέλου"
 ) + simple.graph
leveneTest(sr.model$residuals, sr.model.dt$qnt, center = median)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
     Df F value Pr(>F)
group 3 1.1739 0.33
      46
```

4. Κανονικότητα καταλοίπων

Σε πρώτη εξέταση του διαγράμματος των **ποσοστιαίων σημείων των καταλοίπων** σε σχέση με την κανονική κατανομή (βλ. γράφημα 4.1) δεν μπορούμε να αποκλείσουμε την πιθανότητα απόκλισης της κατανομής των καταλοίπων από την κανονική κατανομή. Ιδανικά θα αναμέναμε να παρατηρήσουμε τα περισσότερα σημεία πολύ κοντά ή πάνω στη διαγώνιο γραμμή του διαγράμματος κάτι που δεν είναι προφανές στη συγκεκριμένη περίπτωση καθώς τα περισσότερα σημεία αποκλίνουν από την διαγώνιο με ένα κυμματοειδές μοτίβο μάλιστα.

Για να ελέγξουμε πιο διεξοδικά την υπόθεση της κανονικότητας των καταλοίπων και να αποφασίσουμε με περισσότερη βεβαιότητα ως προς την καταλληλότητα του μοντέλου θα χρησιμοποιήσουμε έναν πιο ξεκάθαρο ως προς την ερμηνεία του αποτελέσματος έλεγχο:

1. Αρχικά θα μετασχηματίσουμε τα κατάλοιπα του μοντέλου στα τυποποιημένα κατά Student διαγραμμένα κατάλοιπα.³ Έτσι αν η κατανομή των καταλοίπων είναι κανονική (μηδενική υπόθεση του ελέγχου), τότε αναμένουμε οι συγκεκριμενες μετασχηματισμένες τιμές να ακολουθούν την κατανομή t με 48 βαθμούς ελευθερίας.⁴

 $^{^{3} \ \}text{B\lambda. External Studenization: } \\ \text{https://en.wikipedia.org/wiki/Studentized_residual\#Internal_and_external_studentization.} \\$

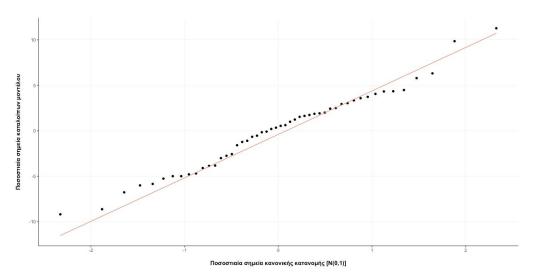
⁴ Αυτό μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, καθώς η προσομοίωση αυτής της κατανομής δεν εξαρτάται από την διασπορά των καταλοίπων.

- Θα κατασκευάσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης 95% για κάθε αντίστοιχο ποσοστιαίο σημείο της t κατανομής με 48 βαθμούς ελευθερίας προσομοιώνοντας 1000 δείγματα με αυτή την κατανομή και τόσες παρατηρήσεις όσες ο αριθμός των καταλοίπων του μοντέλου.
- 3. Τέλος θα κατασκευάσουμε το διάγραμμα των ποσοστιαίων σημείων των τυποποιημένων κατά Student διαγραμμένων καταλοίπων σε σχέση με την κατανομή t με 48 βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτό θα απεικονίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης 95% ανά σημείο ως μια ζώνη γύρω από τη διαγώνιο γραμμή του διαγράμματος (βλ. γράφημα 4.2).

Από την εξέταση του παραπάνω διαγράμματος παρατηρούμε πως όλα τα σημεία του βρίσκονται εντός της ζώνης των διαστημάτων εμπιστοσύνης 95% και άρα δεν απορρίπτουμε την υπόθεση πως τα τυποποιημένα κατά Student διαγραμμένα κατάλοιπα ακολουθούν την κατανομή t με 48 βαθμούς ελευθερίας. Αυτό συνεπάγεται (αν η μεθοδολογία μας είναι σωστή 😧), πως δεν απορρίπτουμε και την υπόθεση πως τα κατάλοιπα του μοντέλου ακολουθούν την κανονική κατανομή.

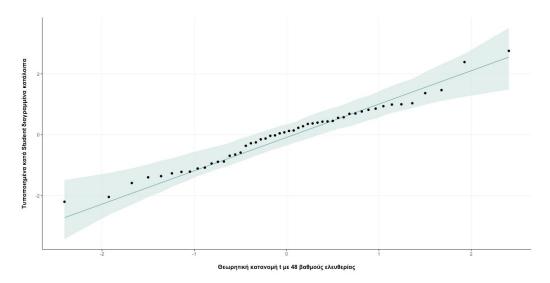
→ ΓΡΑΦΗΜΑ 4.1: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα ποσοστιαία σημεία των καταλοίπων σε σχέση με τα αντίστοιχα ποσοστιαία σημεία της κανονικής κατανομής με

μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.



→ ΓΡΑΦΗΜΑ 4.2: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΤΩΝ ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ t

Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα ποσοστιαία σημεία των τυποποιημένων κατά Student διαγραμμένων καταλοίπων σε σχέση με την θεωρητική κατανομή t με 48 βαθμούς ελευθερίας. Η ζώνη γύρω από τη διαγώνια δείχνει τα διαστήματα εμπιστοσύνης 95% ανά σημείο της t κατανομής.



→ ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΚΩΔΙΚΑ 4: ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

```
# 4. Normality
stud.res <- data.frame(res = sort(rstudent(sr.model)))</pre>
t.params <- list(df = sr.model$df.residual)</pre>
# simulate random samples of size n from t distribution with 48df
n <- length(sr.model$residuals)</pre>
M < -1000
t.sim <- NULL
set.seed(1001)
for (i in 1:M) {
  t.sim <- cbind(t.sim, sort(rt(n, t.params[[1]])))</pre>
# construct pointwise 95% CI of simulated samples
t.upper <- apply(t.sim, 1, (function(x) quantile(x, prob = 0.975)))</pre>
t.lower <- apply(t.sim, 1, (function(x) quantile(x, prob = 0.025)))</pre>
stud.res <- cbind(stud.res, lower = t.lower, upper = t.upper)</pre>
# compute quantile of each residual
fti <- (1:n - 0.5) / n
t.scores <- qt(fti, df = t.params[[1]])</pre>
stud.res <- cbind(stud.res, tscores = t.scores)</pre>
graph.4.1 <- ggplot(sr.model.dt, aes(sample = res)) +</pre>
  stat qq(distribution = qnorm) +
  stat_qq_line(col = "#e08e79") +
  labs(
   x = "Ποσοστιαία σημεία κανονικής κατανομής [N(0,1)]",
    γ = "Ποσοστιαία σημεία καταλοίπων μοντέλου"
  ) + simple.graph
graph.4.2 <- ggplot(stud.res, aes(sample = res)) +</pre>
  geom ribbon(aes(x = tscores, ymin = lower, ymax = upper), fill = "#c5e0dc", alpha
= .5) +
  stat qq line(distribution = qt, dparams = t.params, col = "#76a5af") +
  stat qq(distribution = qt, dparams = t.params) +
  labs(
   x = "Θεωρητική κατανομή t με 48 βαθμούς ελευθερίας",
    y = "Τυποποιημένα κατά Student διαγραμμένα κατάλοιπα"
  ) + simple.graph
```

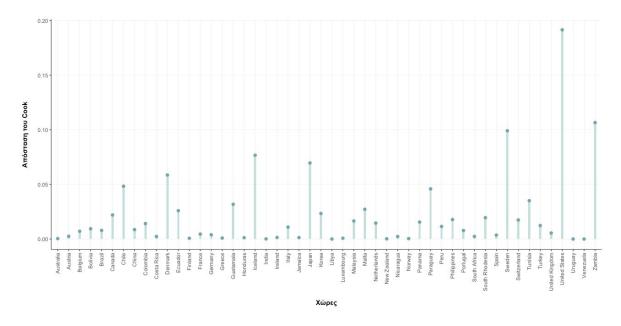
5. Ύπαρξη σημείων επιρροής

Για να ελέγξουμε την πιθανή ύπαρξη **σημείων επιρροής** στο δείγμα μας, που θα μπορούσαν να καταστήσουν το μοντέλο μη-κατάλληλο για τα δεδομένα μας, θα χρησιμοποιήσουμε την **απόσταση του Cook** ως έναν εκτιμητή για το βαθμό επιρροής κάθε σημείο στο μοντέλο.

Στο γράφημα 5.1 παρατηρούμε 3 σημεία που μεγαλύτερη επιρροή από τα υπόλοιπα (αφορούν τις χώρες Σουηδία, Ηνωμένες Πολιτείες και Ζάμπια) αλλά κανένα από αυτά δεν έχει αρκετά υψηλή επιρροή (απόσταση του Cook > 1) ώστε να θεωρήσουμε πως παραβιάζει τις υποθέσεις καταλληλότητας του μοντέλου.

→ ΓΡΑΦΗΜΑ 5.1: ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ COOK

Στο διάγραμμα απεικονίζονται οι υπολογισμένες αποστάσεις του Cook για κάθε ένα από τα διατεταγμένα ζεύγη τιμών των δύο μεταβλητών του μοντέλου.



→ ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΚΩΔΙΚΑ 5: ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΑΡΞΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΠΙΡΡΟΗΣ

```
# 5. Infuential points
sr.cookd <- data.frame(cd = round(cooks.distance(sr.model), 4))
sr.cookd$countries <- rownames(sr.cookd)

graph.5.1 <- ggplot(sr.cookd, aes(x = countries, y = cd)) +
    geom_col(width = 0.2, fill = "#c5e0dc") +
    geom_point(col = "#76a5af", size = 2) +
    theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, hjust = 1, vjust = 0.5)) +
    labs(
        x = "Xώρες",
        y = "Απόσταση του Cook"
    ) + simple.graph</pre>
```

Συμπέρασμα

Παρόλο τις όποιες πιθανές ενδείξεις απόκλισης από τις υποθέσεις καταλληλότητας, κανένα γράφημα που εξετάσαμε και κανένας έλεγχος που πραγματοποιήσαμε δεν μας προσέφερε επαρκείς λόγους για να απορρίψουμε το συγκεκριμένο μοντέλο ως προς την καταλληλότητά του για τα δεδομένα μας. Άρα το μοντέλο κρίνεται κατάλληλο με βάση αυτές τις υποθέσεις.

ΔΕΙΤΕ ΤΟΝ ΠΛΗΡΗ ΚΩΔΙΚΑ ΣΕ R ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΡΓΑΣΙΑ:

https://github.com/harrisrodis/linear-models-lab/blob/master/AS03/AS03.R

ΚΑΤΕΒΑΣΤΕ ΤΗΝ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΕ ΑΡΧΕΙΟ WORD:

https://www.dropbox.com/s/zzxu4en7ky2b5fz/Rodis_S6180128_LMlab_AS03.docx?dl=1