# FBT 5776 – Tópicos Especiais em Tecnologia Bioquímico-Farmacêutica II

# Tema: Desenvolvimento de Microrreatores

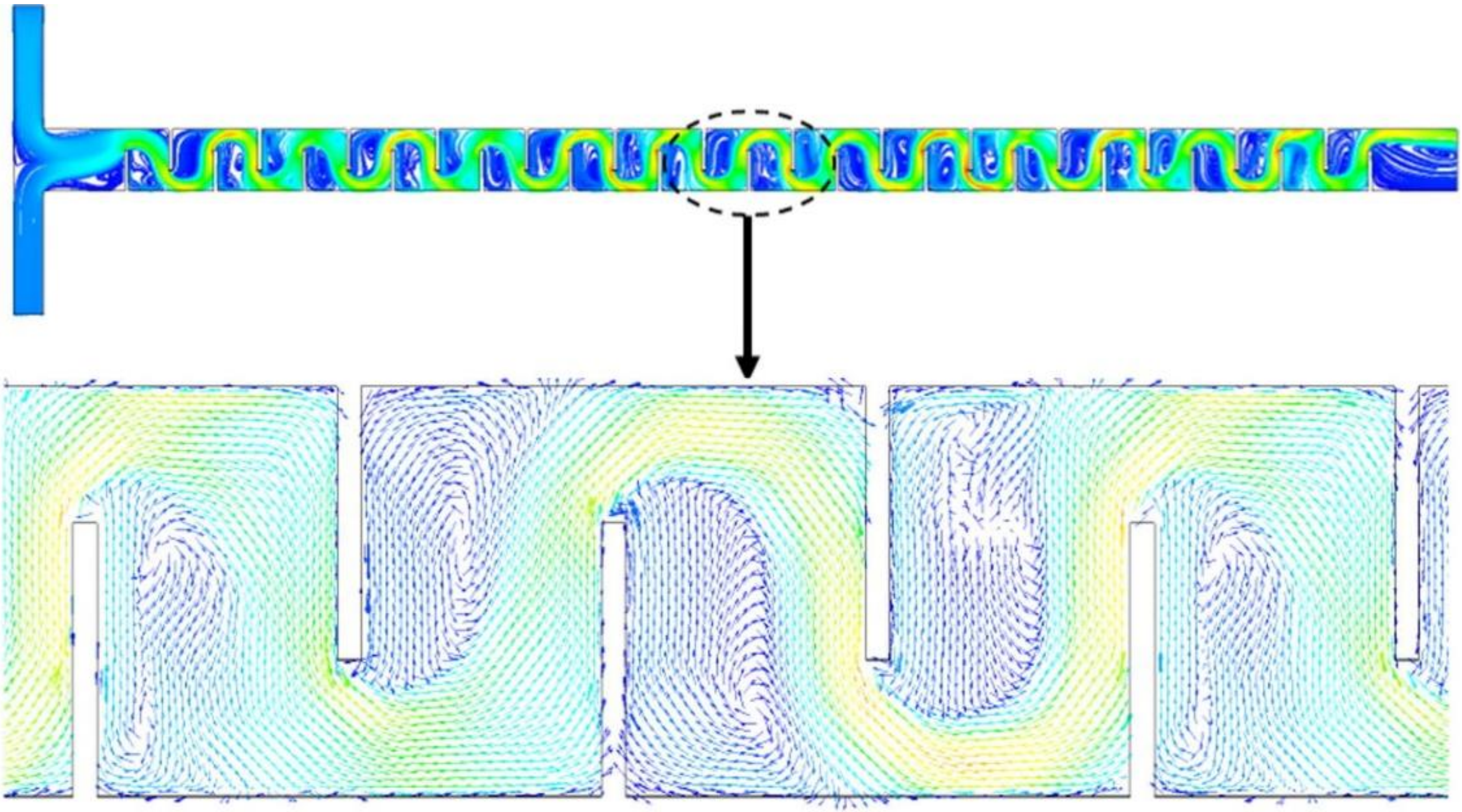
Harrson S. Santana

harrson@unicamp.br

https://www.blogs.unicamp.br/microfluidicaeengenhariaquimica/

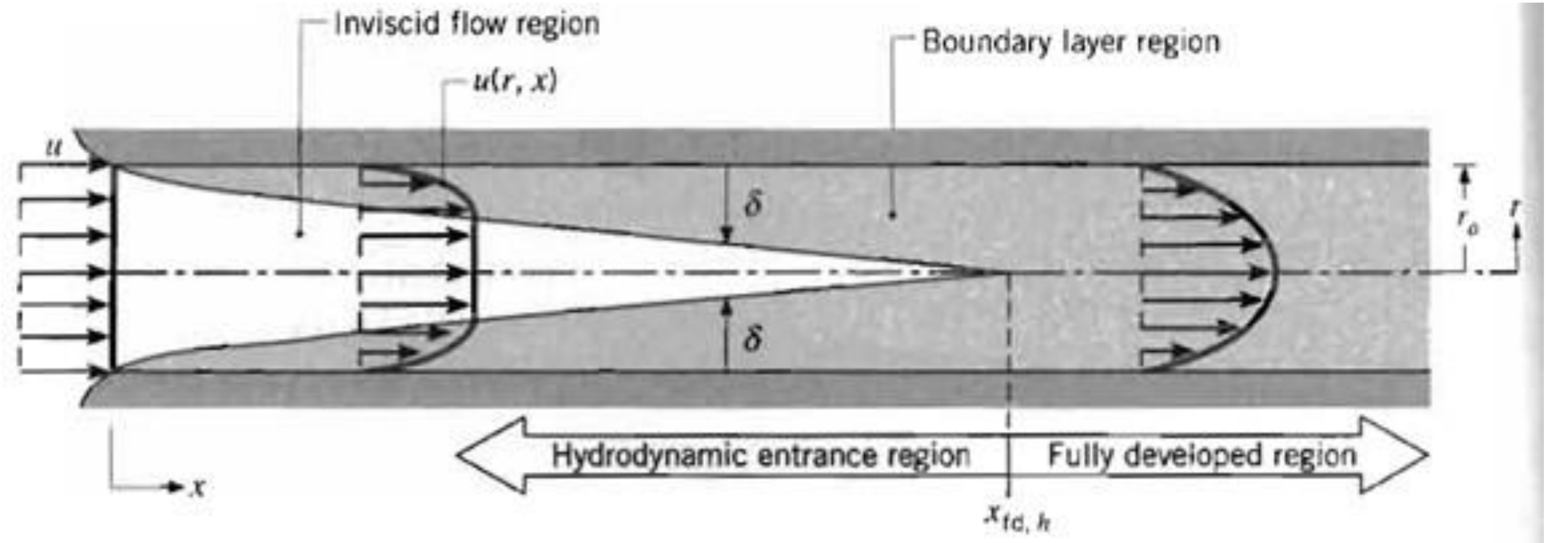
@meqblog

# Fenômenos de Transporte



Santana *et al*., Energy Conversion and Management, v. 141, p.28-39, 2017.

- Desenvolvimento de camada-limite fluidodinâmica laminar em um tubo circular




$$\boxed{\tau = \mu \frac{du}{dy}}$$

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \rightarrow \tau = \mu\dot{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} Tensão \\ de \\ cisalhamento \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Viscosidade \\ dinâmica \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Taxa \\ de \\ deformação \end{bmatrix}$$



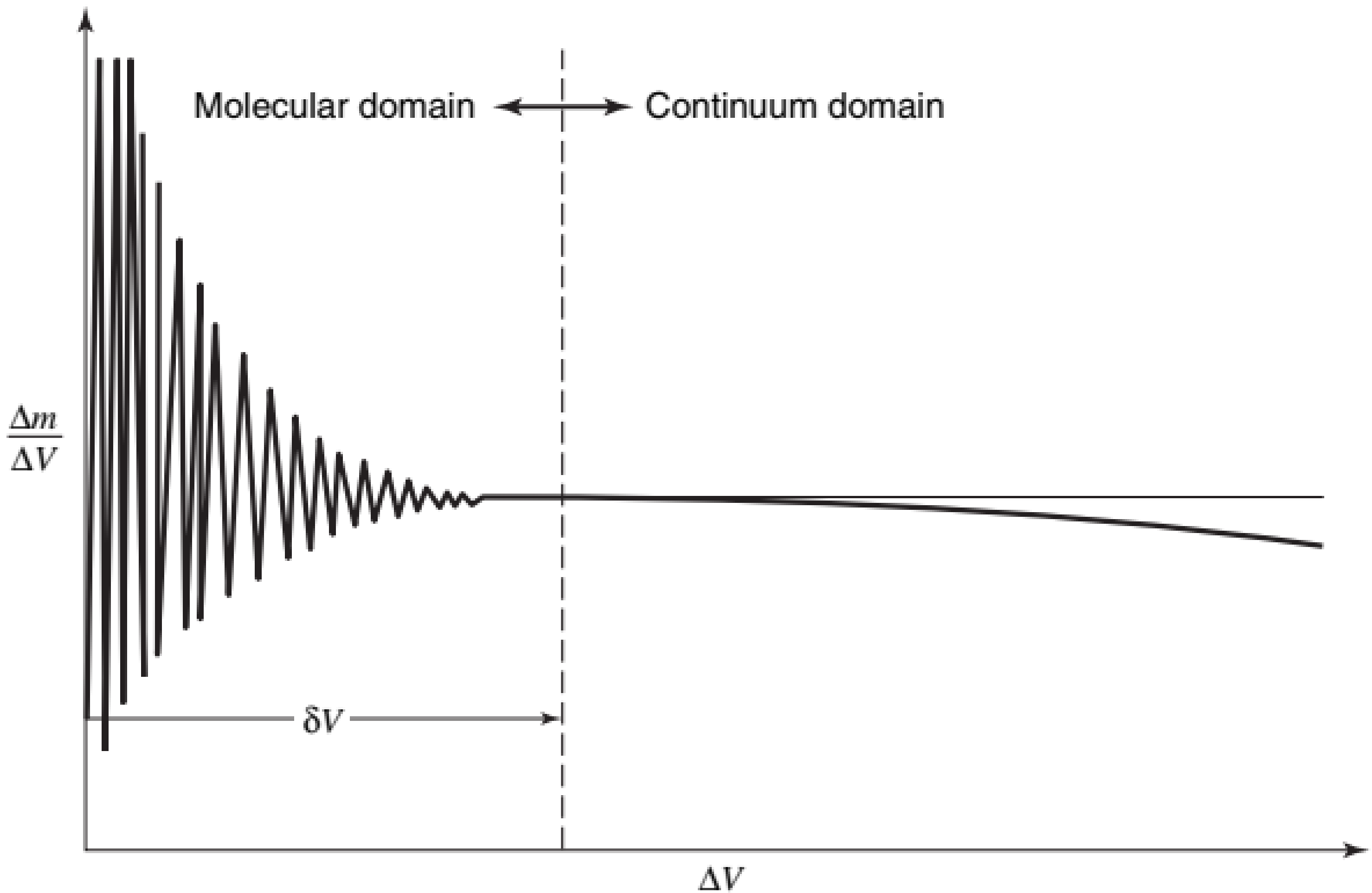
Fonte: *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*, 2007.

# Fenômenos de transporte em microescala

- Fenômenos de transporte em microdispositivo podem ser descritos teoricamente em dois níveis básicos: nível molecular e contínuo.
- O **modelo contínuo** pode descrever a maioria dos fenômenos de transporte em dispositivos com um comprimento de escala variando de micrômetros a centímetros.
- **Modelos moleculares** envolvem fenômenos de transporte na faixa de nanômetros.

# Fenômenos de transporte em microescala

❑ Hipótese do *continuum* em fluidos ilustrada para medir a densidade




Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008.

# Fenômenos de transporte em microescala

- Hipótese do *continuum*

  - ✓ É válido quando o menor volume de fluido de interesse contém um número suficiente de moléculas que torna as médias estatísticas significativas.

  - ✓ Todas as quantidades de interesse, como densidade, velocidade e pressão, são definidas em qualquer lugar no espaço e variam continuamente de um ponto a outro dentro do fluido.

  - ✓ Em um canal de 10 μm possui aproximadamente 30000 moléculas de água – **suficiente para o escoamento ser considerado contínuo**.

# Hipótese do *continuum*

- No nível contínuo, os fenômenos de transporte são descritos como um conjunto de equações de conservação.

- As três equações básicas de conservação são:

  - ✓ *Conservação de massa: **equação de continuidade***
  - ✓ *Conservação do momento: a segunda lei de Newton ou a **equação de Navier-Stokes***
  - ✓ *Conservação de energia: primeira lei da termodinâmica ou **equação de energia**.*

# Hipótese do *continuum*

- No nível contínuo, os fenômenos de transporte são descritos como um conjunto de equações de conservação.

- E para descrever o transporte de espécies:

  - ✓ *Conservação das espécies:* ***equação convectiva/difusiva***

  - ✓ ***Leis das reações químicas***

# Conservação da *Massa*

PENSADOR

Na natureza nada se cria, nada se perde, tudo se transforma.

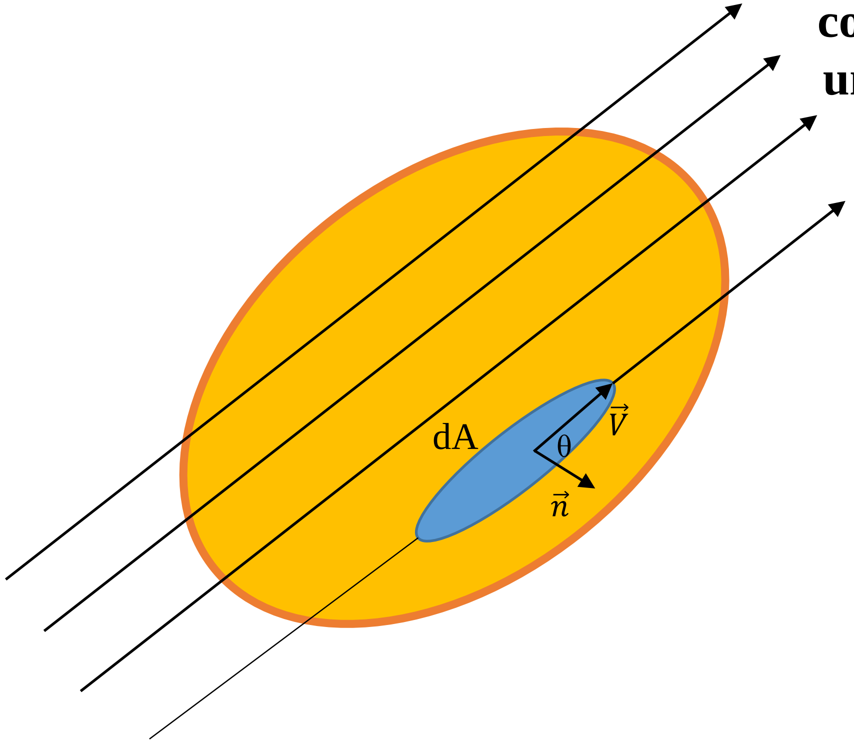
*Antoine Lavoisier*

# Continuidade

## ❑ *Equação da Continuidade ou Conservação da Massa*

- ✓ A lei da conservação da massa estabelece que ela não pode ser criada nem destruída

**Linhas de corrente em um tempo t**

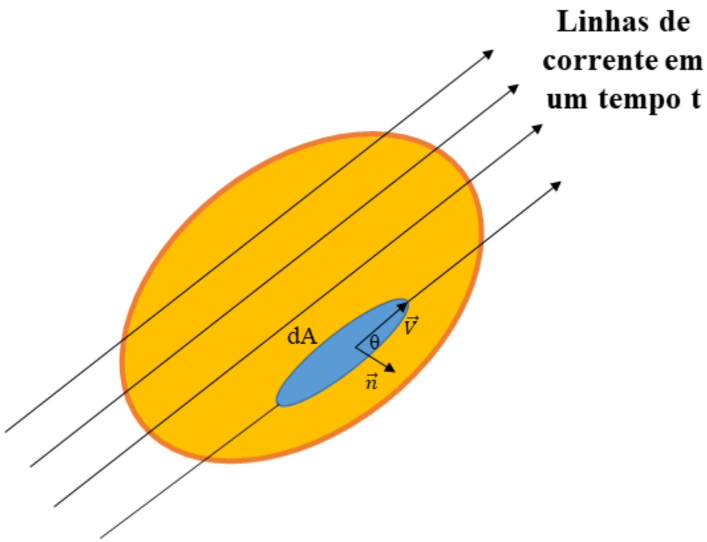



Considerando um volume de controle – região fixa no espaço – localizado em um campo de escoamento de fluido

# Continuidade

## ❑ *Equação da Continuidade ou Conservação da Massa*

$$\left\{\begin{matrix} Taxa\ de\ massa \\ que\ sai\ do\ volume \\ de\ controle \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} Taxa\ de\ massa \\ que\ entra\ no\ volume \\ de\ controle \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} Taxa\ de\ acúmulo\ no \\ volume\ de\ controle \end{matrix}\right\} = 0$$




$$Taxa\ de\ massa \equiv [\rho v A]$$

# Continuidade

- ***Equação da Continuidade ou Conservação da Massa***

  - ✓ Expressão geral para o balanço de massa global – Forma integral

$$\iint_{SC} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} \rho\,dV = 0$$

# Continuidade

## ❑ *Equação da Continuidade ou Conservação da Massa*

- ✓ Expressão geral para o balanço de massa global – Forma integral

$$\iint_{SC} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} \rho dV = 0$$

Fluxo líquido de massa no VC → taxa de massa que sai – taxa de massa que entra

Taxa de acúmulo de massa: variação da massa com o tempo no VC.

# Continuidade

## ❑ ***Equação da Continuidade ou Conservação da Massa***

- ✓ Expressão geral para o balanço de massa global – Forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

# Continuidade

## ❑ *Equação da Continuidade ou Conservação da Massa*

- ✓ Expressão geral para o balanço de massa global – Forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Equação da Continuidade

# Continuidade

## ❑ *Equação da Continuidade ou Conservação da Massa*

- ✓ Expressão geral para o balanço de massa global – Forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\Big\downarrow \; \mathit{Escoamento\ incompressível}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

# Continuidade

## ❑ *Equação da Continuidade ou Conservação da Massa*

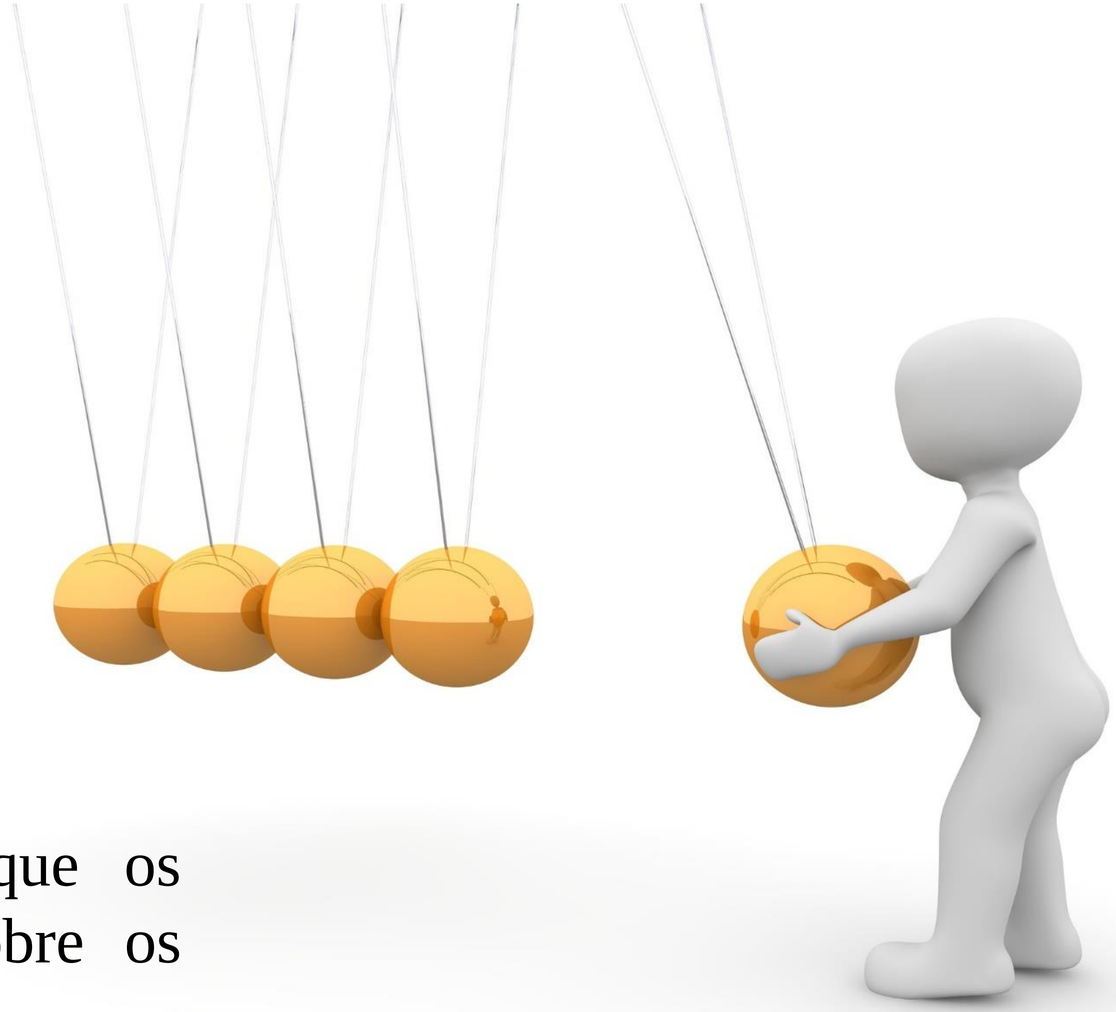
- ✓ Expressão geral para o balanço de massa global – Forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\Big\downarrow \; \mathit{Escoamento\ incompressível}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

# Conservação de *Momentum*



"Se eu vi mais do que os outros, é por estar sobre os ombros dos gigantes."

- Sir Isaac Newton



Fonte das imagens: Pixabay

# Conservação de *Momentum*

## ❑ ***Equação de Navier-Stokes***

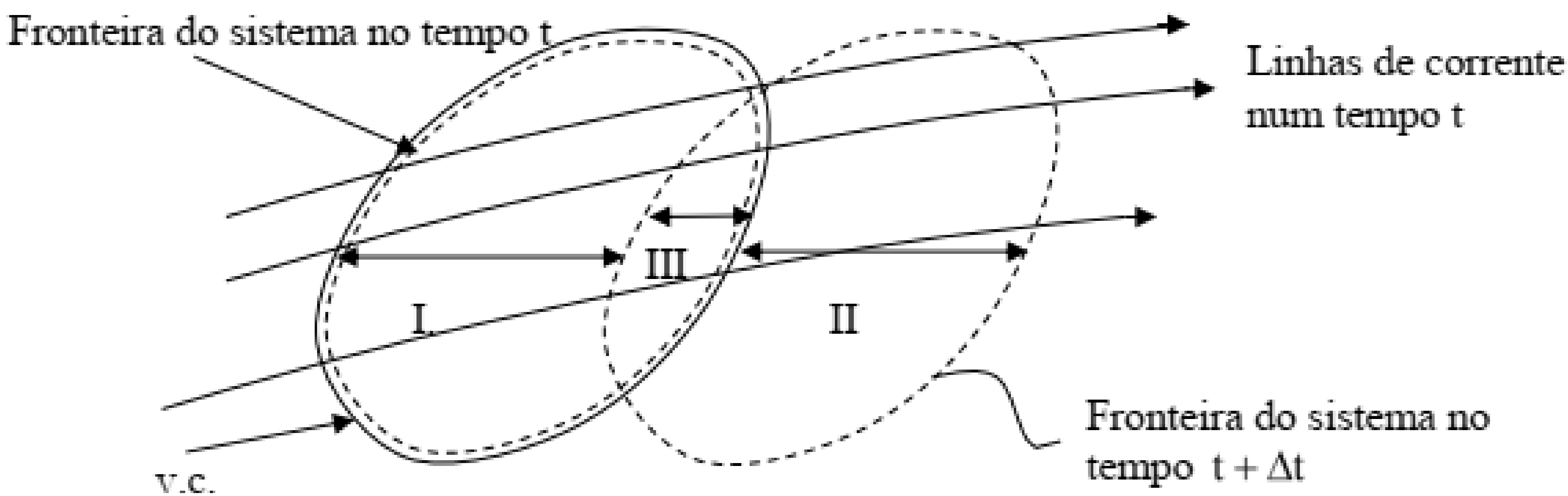
- ✓ A taxa de mudança de momentum de um sistema é igual à somatória das forças que atuam no sistema

$$\sum \vec{F} = \frac{dP}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

# Conservação de *Momentum*

## ❑ *Equação de Navier-Stokes*

- ✓ Seja o volume de controle (v.c) e o sistema que corresponde ao material contido no v.c. no tempo t



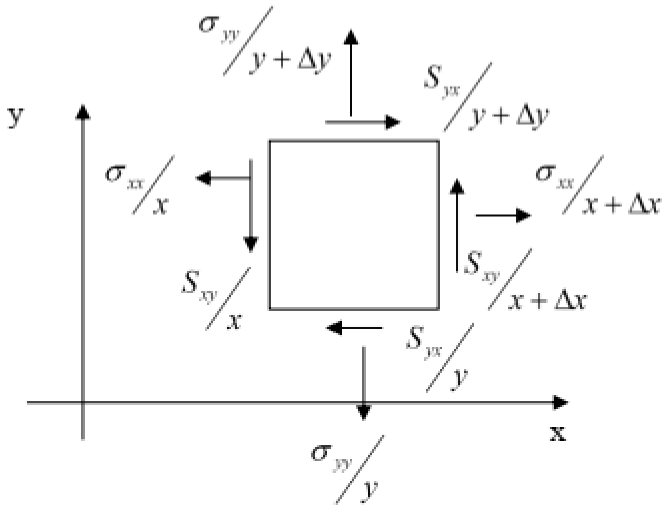

$$\begin{bmatrix} Soma\ das\ forças\ que \\ atuam\ no\ sistema \\ (material\ contido\ no\ v.c.) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Taxa\ de \\ acúmulo\ de \\ m.l.no\ v.c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Taxa\ líquida \\ de\ m.l.no\ v.c. \end{bmatrix}$$

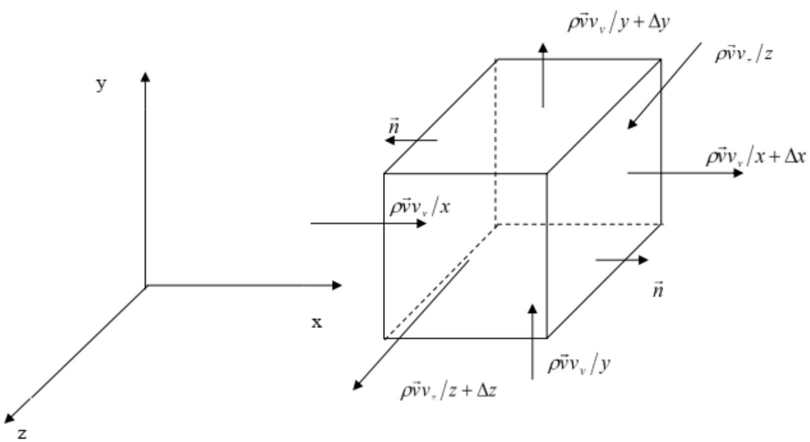


Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008. Adaptado.

# Conservação de *Momentum*

## ❑ *Equação de Navier-Stokes*




Coordenadas cartesianas:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial S_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial S_{zx}}{\partial z}+\rho f_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial S_{zy}}{\partial z}+\rho f_y$$

Componente z - análoga

$$\rho\frac{Dv_x}{Dt}=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial S_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial S_{zx}}{\partial z}+\rho f_x$$

Ou: $$\rho\frac{Dv_y}{Dt}=\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial S_{zy}}{\partial z}+\rho f_y$$

$\vdots$

Na forma vetorial: $\boxed{\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=\nabla.\tilde{T}+\rho\vec{f}}$ Equação de Cauchy



Fonte: *Apostila – FEQ1000 – Escoamento de fluidos*, Profa. Dra. Sandra Cristina Rocha.

# Conservação de *Momentum*

## ❑ *Equação de Navier-Stokes*

✓ Se o fluido for Newtoniano, incompressível e escoamento laminar a Equação de Cauchy torna-se:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{Dv_x}{Dt} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x + \rho f_x \\ \rho \dfrac{Dv_y}{Dt} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y + \rho f_y \\ \rho \dfrac{Dv_z}{Dt} = -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z + \rho f_z \end{cases}$$

**Equações de Navier-Stokes**

# Conservação de *Momentum*

- ***Equação de Navier-Stokes***

  - ✓ Na forma vetorial:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{f} + \mu\nabla^2\vec{v} - \vec{\nabla}P}$$

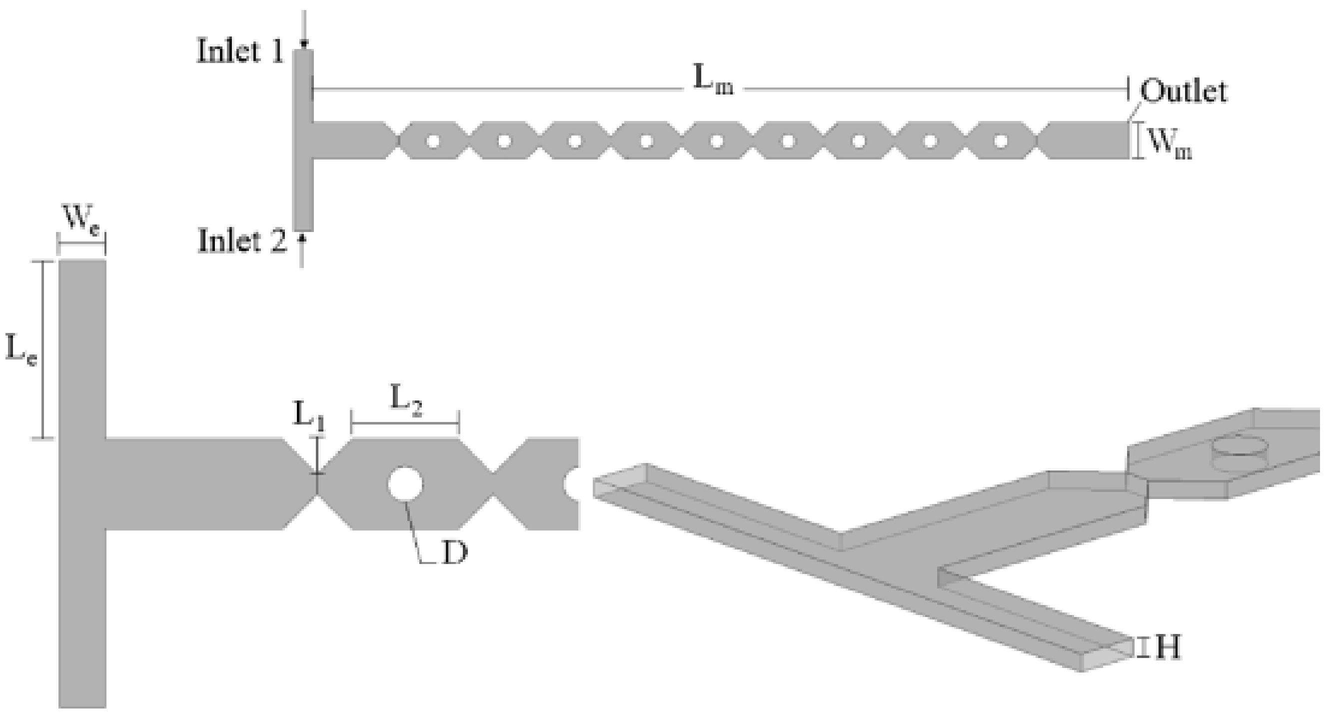
Equação de Navier-Stokes

Equação de Cauchy para fluido Newtoniano, incompressível e escoamento laminar

# Conservação de *Momentum*

## ❑ *Equação de Navier-Stokes*

- ✓ Em microdispositivos, muitas vezes encontramos um fluxo movido pela pressão (*pressure-driven flow*) em um microcanal reto.






Santana *et al.*,Sensors & Actuators B. Chemical, v. 281, p.191-203, 2019.

# Conservação de *Momentum*

- ***Equação de Navier-Stokes***

  - ✓ Considerando um fluxo na direção do eixo $x$ plenamente desenvolvido, como ficaria a Equação de Navier-Stokes?

# Conservação de *Momentum*

## ❑ *Equação de Navier-Stokes*

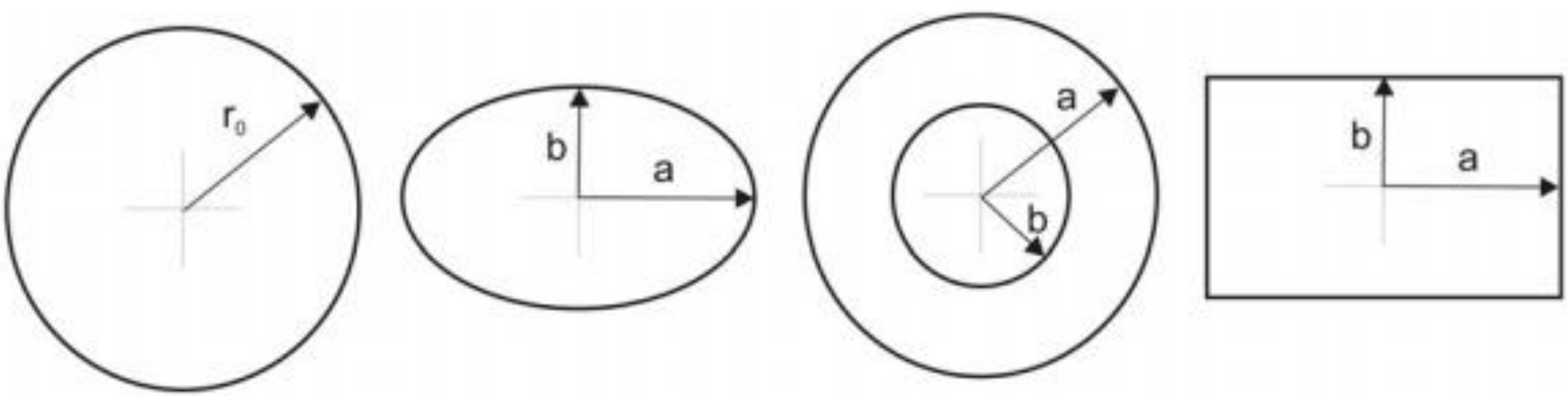
- ✓ Considerando um fluxo na direção do eixo *x* plenamente desenvolvido, como ficaria a Equação de Navier-Stokes?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

# Conservação de *Momentum*

## ❑ *Equação de Navier-Stokes*

- ✓ Aplicando a condição de contorno de não-escorregamento na parede do canal, uma solução analítica pode ser obtida para canais com geometria de seção simples (círculo, elipse, anel concêntrico, retângulo e triângulo equilátero)






Fonte: *Micromixers: Fundamentals, Design and Fabrication*, 2011.

# Conservação de *Momentum*

## ❑ *Equação de Navier-Stokes – canais retos*

**Table 2.2** Analytical solution for velocity field inside a straight channel

| Channel Type | Solution |
|---|---|
| Circle | $u^*(r) = 2\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$ <br> $\overline{u} = \frac{1}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)r^2$ |
| Ellipse | $u^*(y,z) = 2\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)$ <br> $\overline{u} = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ |
| Concentric annulus | $u^*(r) = 2\left[a^2 - r^2 + (a^2 - b^2)\frac{\ln(a/r)}{\ln(b/a)}\right] \Big/ \left[a^2 + b^2 - \frac{a^2 - b^2}{\ln(a/b)}\right]$ <br> $\overline{u} = \frac{1}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left[a^2 + b^2 - \frac{a^2 - b^2}{\ln(a/b)}\right]$ |
| Rectangle | $u^*(y,z) = \frac{48}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left\{1 - \frac{\cosh[(2n-1)\pi z/2a]}{\cosh[(2n-1)\pi b/2a)]}\right\} \times \frac{\cosh[(2n-1)\pi y/2a]}{(2n-1)^3}\right] \Big/ \left\{1 - \frac{192a}{\pi^5 b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tanh[(2n-1)\pi b/2a]}{(2n-1)^5}\right\}$ <br> $\overline{u} = \frac{a^2}{3\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left\{1 - \frac{192a}{\pi^5 b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tanh[(2n-1)\pi b/2a]}{(2n-1)^5}\right\}$ |



Fonte: *Micromixers: Fundamentals, Design and Fabrication*, 2011.

# Conservação de *Momentum*

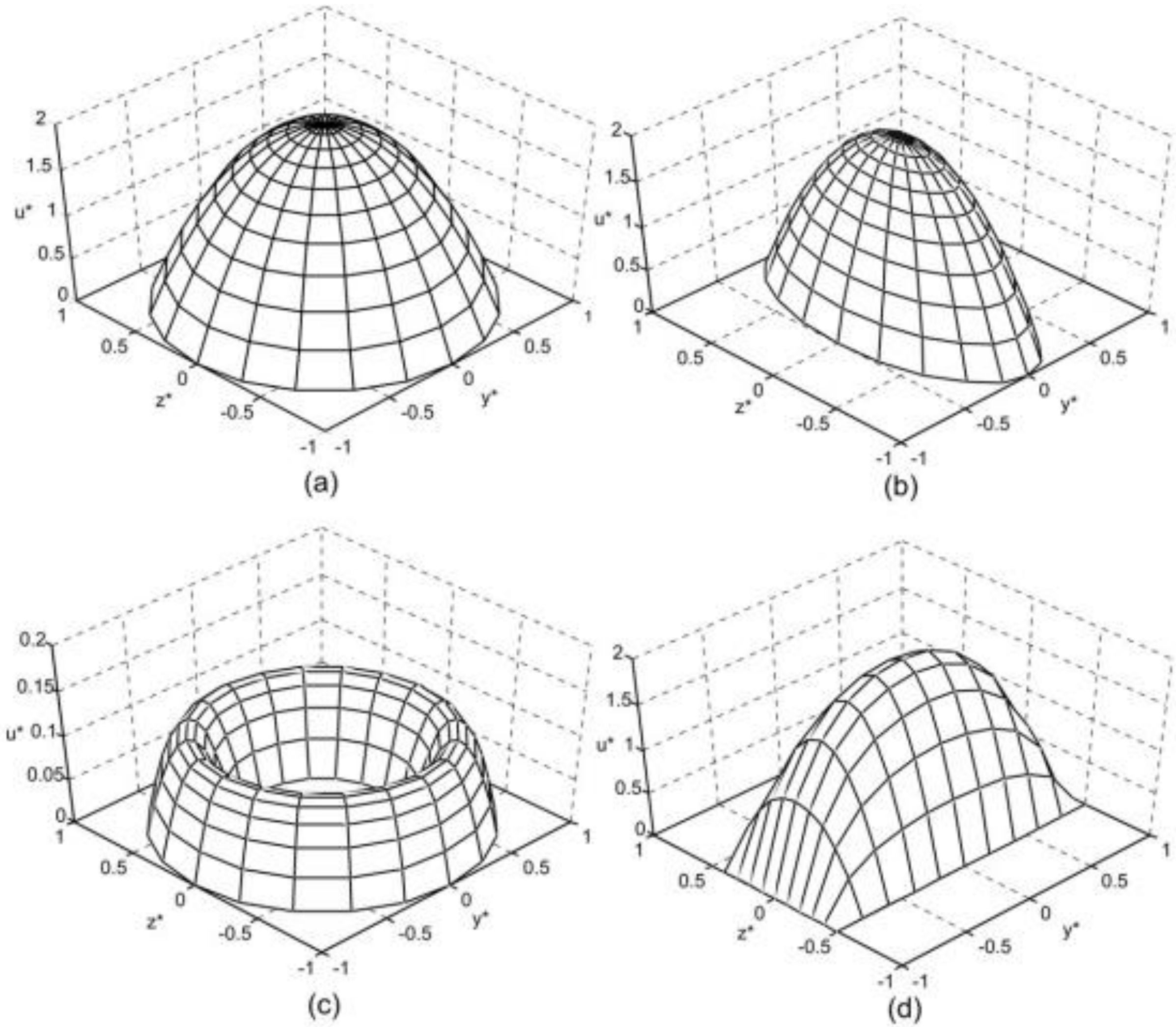
## ❑ *Equação de Navier-Stokes – canais retos*

Círculo

Elipse (a = 2b)

Anel concêntrico (a = 2b)

Retângulo (a = 2b)






Fonte: *Micromixers: Fundamentals, Design and Fabrication*, 2011.

# Conservação de *Energia*

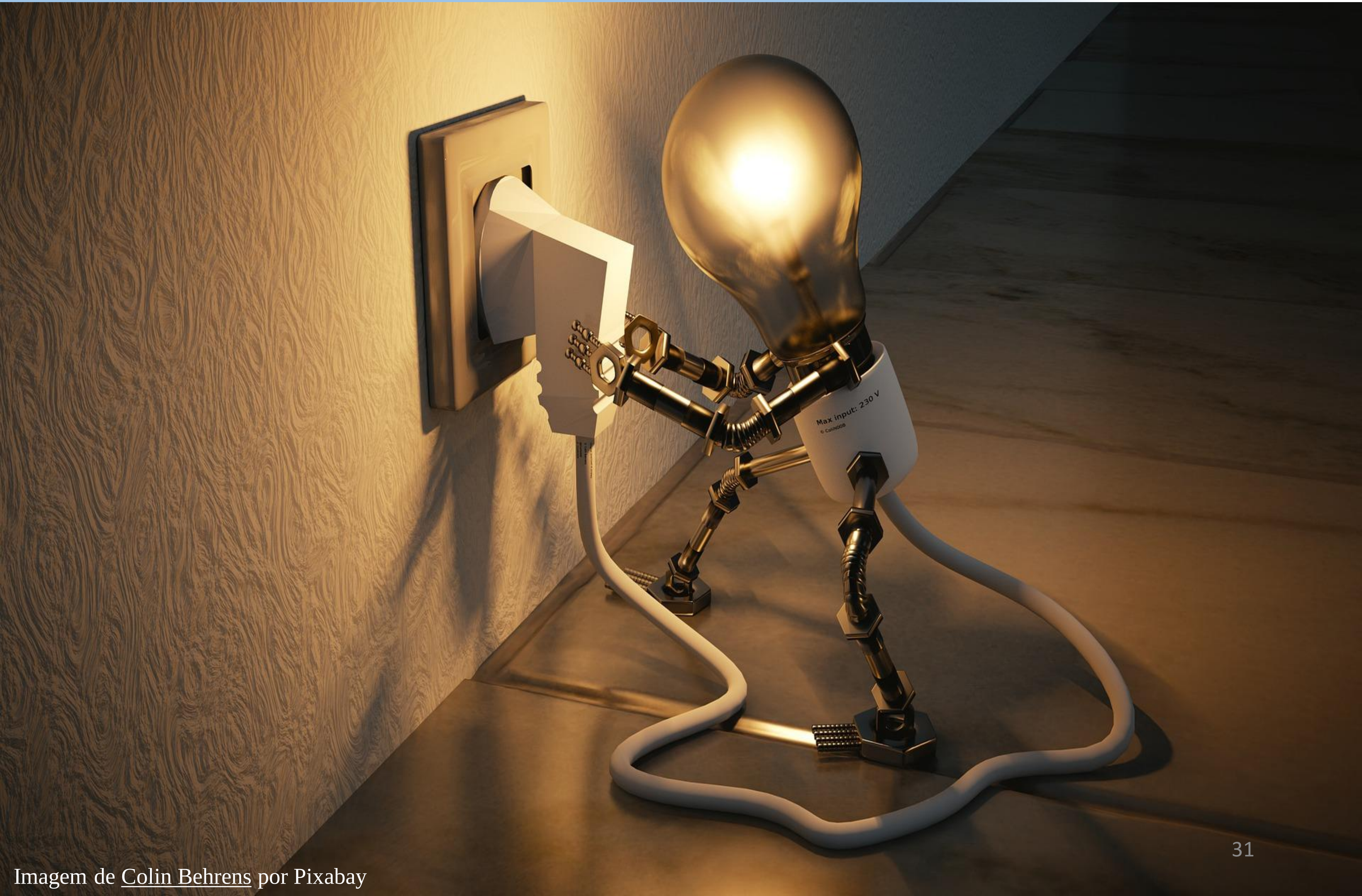



Imagem de Colin Behrens por Pixabay

# Conservação de *Energia*

## ❑ ***Primeira lei da Termodinâmica***

- ✓ A primeira lei da termodinâmica diz que a variação na energia interna de um sistema $\Delta U$é igual à transferência de calor resultante para dentro do sistema $Q$, mais o trabalho resultante realizado no sistema $W$.

$$\Delta U = Q + W$$

$$\delta Q - \delta W = dE$$

1° Lei da Termodinâmica

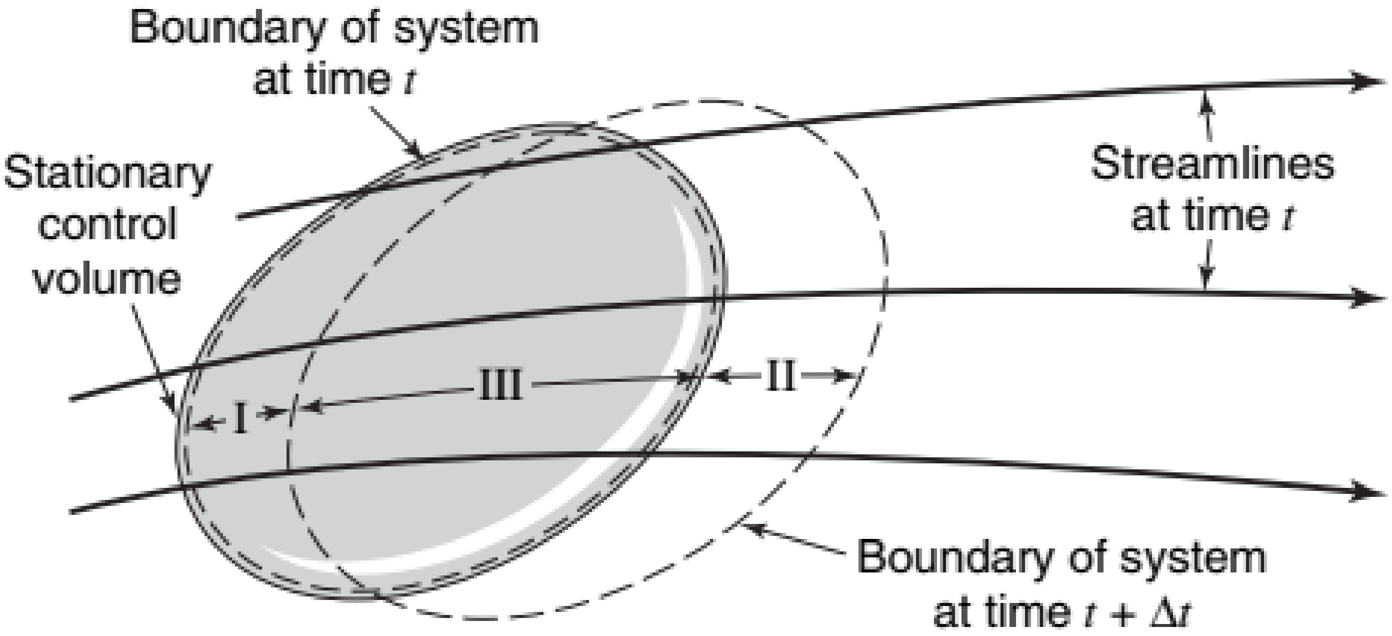
$\delta Q$ é positivo quando o calor é adicionado ao sistema

$\delta W$ é positivo quando o trabalho é feito pelo sistema

# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia*

✓ Relação entre um sistema e um volume de controle em um campo de fluxo de fluido.





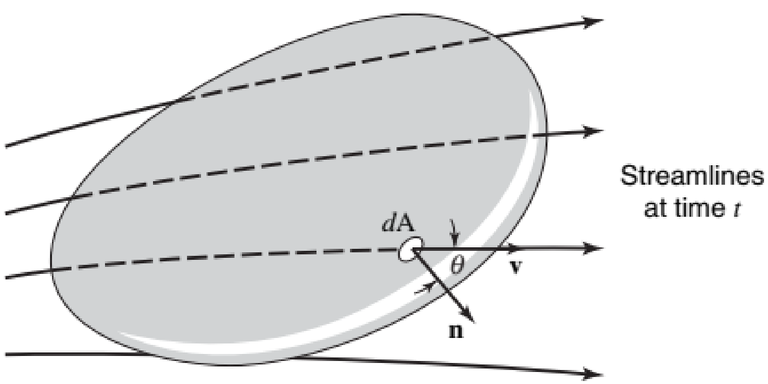

Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008.

# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia*

$$\left\{\begin{matrix} taxa\ de\ adição \\ de\ calor\ para\ o \\ volume\ de\ controle \\ de\ seus\ arredores \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} taxa\ de\ trabalho \\ realizado\ pelo \\ volume\ de\ controle \\ nos\ arredores \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} taxa\ de\ energia \\ que\ saí\ do\ volume\ de\ controle \\ devido\ ao\ escoamento \end{matrix}\right\}$$

$$-\left\{\begin{matrix} taxa\ de\ energia \\ que\ entra\ no\ volume\ de\ controle \\ devido\ ao\ escoamento \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} taxa\ de\ acúmulo \\ de\ energia\ dentro\ do \\ volume\ de\ controle \end{matrix}\right\}$$




Fluxo de fluido através de um volume de controle



Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008.

# Conservação de *Energia*

- ***Equação da Energia***

$$\left\{\begin{matrix} taxa\ de\ adição \\ de\ calor\ para\ o \\ volume\ de\ controle \\ de\ seus\ arredores \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{\delta Q}{dt}$$

$$\left\{\begin{matrix} taxa\ de\ trabalho \\ realizado\ pelo \\ volume\ de\ controle \\ nos\ arredores \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{\delta W}{dt}$$

# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia*

$$\left\{\begin{matrix} taxa\ de\ energia \\ que\ saí\ do\ volume\ de\ controle \\ devido\ ao\ escoamento \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} taxa\ de\ energia \\ que\ entra\ no\ volume\ de\ controle \\ devido\ ao\ escoamento \end{matrix}\right\}$$

$$= \iint_{SC} e\rho(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})dA$$

$$\left\{\begin{matrix} taxa\ de\ acúmulo \\ de\ energia\ dentro\ do \\ volume\ de\ controle \end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} e\rho dV$$

# Conservação de *Energia*

## ❑ ***Equação da Energia***

- ✓ Substituindo todos esses termos, temos:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \iint_{SC} e\rho(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} e\rho dV$$

# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia*

- ✓ Substituindo todos esses termos, temos:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \iint_{SC} e\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} e\rho dV$$

$$\downarrow$$

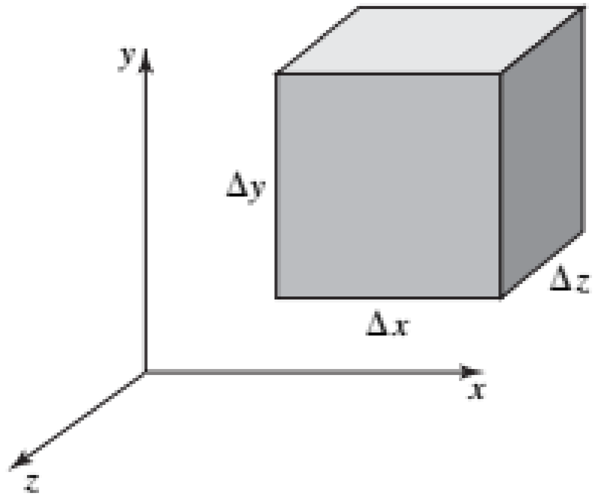
$W \rightarrow trabalho\ de\ eixo,$
$trabalho\ de\ fluxo\ e$
$trabalho\ de\ cisalhamento$

$$\boxed{\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} = \iint_{SC} \left(e + \frac{P}{\rho}\right)\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} e\rho dV + \frac{\delta W_\mu}{dt}}$$

## ❑ *Equação da Energia*

- ✓ Pode-se avaliar os termos da Equação Geral da 1° Lei para um volume de controle diferencial.

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \iint_{SC} \left(e + \frac{P}{\rho}\right) \rho (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} e \rho dV$$



# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia*

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{taxa de adição} \\ \textit{de calor para o} \\ \textit{volume de controle} \\ \textit{de seus arredores} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \frac{\delta Q}{dt} = \left[ k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x} \right]\Delta y\,\Delta z + \left[ k\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y+\Delta y} - k\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y} \right]\Delta x\,\Delta z$$

$$+ \left[ k\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z+\Delta z} - k\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z} \right]\Delta x\,\Delta y + \dot{q}\;\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{taxa de trabalho} \\ \textit{realizado pelo} \\ \textit{volume de controle} \\ \textit{nos arredores} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \frac{\delta W_s}{dt} = 0 \qquad \frac{\delta W_\mu}{dt} = \Lambda\,\Delta x\;\Delta y\;\Delta z$$



Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008.

# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia*

$$\left\{\begin{matrix} taxa\ de\ energia \\ que\ saí\ do\ volume\ de\ controle \\ devido\ ao\ escoamento \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} taxa\ de\ energia \\ que\ entra\ no\ volume\ de\ controle \\ devido\ ao\ escoamento \end{matrix}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\iint_{\text{c.s.}} \left(e + \frac{P}{\rho}\right) \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dA$$

$$= \left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho}\right)\bigg|_{x+\Delta x} - \rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho}\right)\bigg|_{x}\right] \Delta y\ \Delta z$$

$$+ \left[\rho v_y \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho}\right)\bigg|_{y+\Delta y} - \rho v_y \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho}\right)\bigg|_{y}\right] \Delta x\ \Delta z$$

$$+ \left[\rho v_z \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho}\right)\bigg|_{z+\Delta z} - \rho v_z \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho}\right)\bigg|_{z}\right] \Delta x\ \Delta y$$



Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008.

# Conservação de *Energia*

❑ ***Equação da Energia***

$$\begin{Bmatrix} taxa\ de\ acúmulo \\ de\ energia\ dentro\ do \\ volume\ de\ controle \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} e\rho dV$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{v^2}{2} + gy + u\right]\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$



Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008.

# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia*

- ✓ Combinando as equações anteriores na expressão geral da primeira lei, dividindo pelo volume do elemento e avaliando no limite como Δx, Δy e Δz aproximam-se de zero, a equação se torna:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}+\Lambda$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v_x\left(\frac{v^2}{2}+gy+u+\frac{P}{\rho}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v_y\left(\frac{v^2}{2}+gy+u+\frac{P}{\rho}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho v_z\left(\frac{v^2}{2}+gy+u+\frac{P}{\rho}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+gy+u\right)\right]$$

# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia*

- ✓ Introduzindo derivadas substantivas, considerando escoamento incompressível e expressando a função $\Lambda$ em termos de viscosidade (e.g. tensão de cisalhamento), temos a Equação da Energia:

$$\boxed{\nabla \cdot k\nabla T + \dot{q} + \Phi = \rho c_v \frac{DT}{Dt}}$$

# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia – Formas especiais*

- ✓ Assumindo um fluxo incompressível, uma condutividade térmica constante e ignorando a mudança de energia cinética, a equação da energia pode ser simplificada para a equação de convecção de calor:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T$$

# Conservação de *Energia*

## ❑ *Equação da Energia – Formas especiais*

- ✓ Na situação em que não há movimento fluido, toda a **transferência de calor é por condução**. Nesta situação (e.g., sólidos) a equação de energia se torna :

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot k\nabla T + \dot{q}$$

# Conservação da *Massa*

PENSADOR

Na natureza nada se cria, nada se perde, tudo se transforma.

*Antoine Lavoisier*

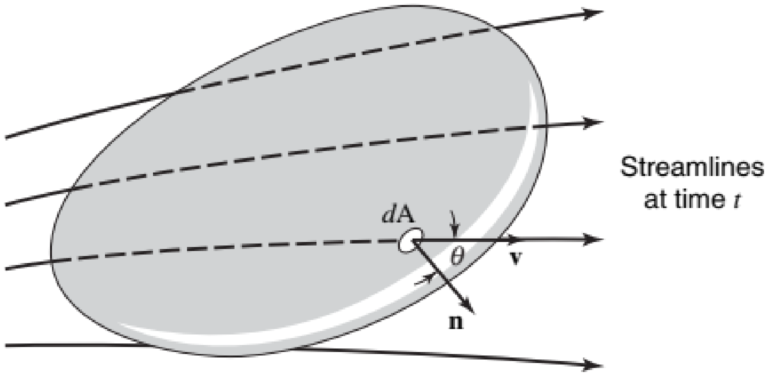
# Conservação da *Massa - Componentes*

# Conservação da *Massa*

## ❑ *Lei de Conservação da Massa*

❖ Massa não pode ser criada nem destruída!

$$\iint_{\text{c.s.}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{c.v.}} \rho \, dV = 0 \qquad (4\text{-}1)$$




Fluxo de fluido através de um volume de controle



Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008.

# Conservação da *Massa*

- ***Lei de Conservação da Massa***

  - Equação da continuidade para o componente A

$$\nabla \cdot \mathbf{n}_A + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0$$

Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008.

# Conservação da *Massa*

❑ ***Lei de Conservação da Massa***

✓ Expressando $\mathbf{n}_A$ como:

$$\mathbf{n}_A = -\rho D_{AB} \boldsymbol{\nabla} w_A + \rho_A \boldsymbol{v}$$

✓ Dividindo pela massa molecular do componente A e rearranjando:

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} c_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \boldsymbol{\nabla}^2 c_A + R_A}$$



Fonte: *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 2008.

# Conservação da *Massa*

## ❑ *Lei de Conservação da Massa*

- ✓ Balanço de massa para n espécies químicas – Exemplo!

$$\rho(U \cdot \nabla Y_{TG}) = \rho D_{TG} \nabla^2 Y_{TG} + M_{WTG}(r_{TG})$$

$$\rho(U \cdot \nabla Y_{A}) = \rho D_{A} \nabla^2 Y_{A} + M_{WA}(3r_{TG})$$

$$\rho(U \cdot \nabla Y_{GL}) = \rho D_{GL} \nabla^2 Y_{GL} + M_{WGL}(-r_{TG})$$

$$\rho(U \cdot \nabla Y_{E}) = \rho D_{E} \nabla^2 Y_{E} + M_{WE}(-3r_{TG})$$