以降では，複素数であることを強調するとき，チルダを付けることにする．

0.1　偏光状態

真空中の Maxwell 方程式は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

である．微分方程式は線型であるから，以降では，$\boldsymbol{E} \to \tilde{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{B} \to \tilde{\boldsymbol{B}}$ とする．なお，実際の物理量としての電場や磁場は実数であるから，

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\right) \tag{0.2}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\boldsymbol{B}}\right) \tag{0.3}$$

とする．さて，**式** (0.1) の第 1 式の両辺に $\boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させると，

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}}\right) \tag{0.4}$$

$$\iff \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}}\right) - \boldsymbol{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{E}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} \tag{0.5}$$

$$\iff \boldsymbol{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{E}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} \tag{0.6}$$

$$\tag{0.7}$$

となる．**式** (0.5) から**式** (0.6) の式変形で**式** (0.1) の第 3 式を用いた．磁場に関しても同様に計算をすると，

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{B}}}{\partial t^2} \tag{0.8}$$

$$\tag{0.9}$$

となる．

さて，**式** (0.6) や**式** (0.8) なる偏微分方程式の解の 1 つに，

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{0.10}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{B}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{0.11}$$

がある．**式** (0.10) と**式** (0.11) を**式** (0.1) の第 2 式に代入すると，

$$\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\boldsymbol{E}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{0.12}$$

$$\mathrm{i}\boldsymbol{k} \times \tilde{\boldsymbol{B}} = -\mathrm{i}\omega \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{0.13}$$

$$\boldsymbol{k} \times \tilde{\boldsymbol{B}} = -\omega \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{0.14}$$

となる．**式** (0.14) の両辺で $\boldsymbol{k}$ との内積を取ると，

$$\boldsymbol{k} \times \left(\boldsymbol{k} \times \tilde{\boldsymbol{B}}\right) = -\omega \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{0.15}$$

$$\iff \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}) = -\omega \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{0.16}$$

$$\iff \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{0.17}$$

となり，電場 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ と波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ が直交することが分かる．磁場についても**式** (0.1) を用いれば，同様に波数ベクトルと直交することが分かる．よって，波の進行方向を z 方向と定義しても一般性を失わないので，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} && (0.18) \\
&= \begin{pmatrix} E_{x0}\cos(kz-\omega t) \\ E_{y0}\cos(kz-\omega t+\phi) \\ 0 \end{pmatrix} && (0.19)
\end{aligned}
$$

とする．

いよいよ，具体的な偏光を考える．**式** (0.19) より，

$$
\begin{cases}
\dfrac{E_x}{E_{x0}} = \cos(kz-\omega t) \\
\dfrac{E_y}{E_{y0}} = \cos(kz-\omega t+\phi)
\end{cases}
\tag{0.20}
$$

と書ける．和積の公式を用いると，

$$
\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right) - \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\cos\phi = -\sin(kz-\omega t)\sin\phi \tag{0.21}
$$

となる．両辺を 2 乗すると，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)\cos\phi + \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2\cos^2\phi &= \bigl(1-\sin^2(kz-\omega t)\bigr)\sin^2\phi && (0.22) \\
\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)\cos\phi + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 &= \sin^2\phi && (0.23)
\end{aligned}
$$

となる．一般に，この 2 次曲線は楕円を描くことが知られている．以下では，2 つの特別な場合を考える．

1. $\phi = m\pi \ m \in \mathbb{Z}$ のとき．このとき，**式** (0.23) は，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{E_x}{E_{x0}} - (-1)^m\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 &= 0 && (0.24) \\
\Longrightarrow \ \frac{E_x}{E_{x0}} &= (-1)^m\frac{E_y}{E_{y0}} && (0.25)
\end{aligned}
$$

となり，m が偶数のときは E_x と E_y は同位相，m が奇数のときは π だけ位相がずれて振動することが分かる．特に $E_x = E_y$ であれば，m が偶数であることを 45° 偏光，m が奇数であることを −45° 偏光という．

2. $\phi = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\pi \ m \in \mathbb{Z}$ のとき．このとき，**式** (0.23) は，

$$
\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = 1 \tag{0.26}
$$

となり，E_x/E_{x0} と E_y/E_{y0} は単位円周上にあるという関係をもつので，円偏光であると分かる．特に $E_x = E_y$ であれば，m が偶数のであることを z 軸正から負方向に見て左周りに回るので左偏光，m が奇数のときは右偏光という．

0.2 偏光行列，Stokes パラメータ，Poincaré 球

前小節までで，真空中を伝搬する電磁場の偏光を記述する方法を示した．本小節では他に，偏光を表す方法を説明する．

1 つのモードの偏光行列は以下のように定義される．

$$
S \coloneqq \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{E}_x^* & \tilde{E}_y^* \end{pmatrix} \tag{0.1}
$$

$$= \begin{pmatrix} \left|\tilde{E}_x\right|^2 & \tilde{E}_x\tilde{E}_y^* \\ \tilde{E}_x^*\tilde{E}_y & \left|\tilde{E}_y\right|^2 \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

多モードの偏光行列は,

$$S \coloneqq \begin{pmatrix} \left\langle\left|\tilde{E}_x\right|\right\rangle^2 & \left\langle\tilde{E}_x\tilde{E}_y^*\right\rangle \\ \left\langle\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right\rangle & \left\langle\left|\tilde{E}_y\right|^2\right\rangle \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

となる．ただし，$\langle\cdot\rangle$ は長時間平均で，σ をモードのラベルとすると，

$$\langle f(x)\rangle \coloneqq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\sum_\sigma f_\sigma(t) \tag{0.4}$$

である．

再び，単一モードの偏光を考える．偏光行列の対角成分が複素共役であることに注意すれば，S は Hermite 行列であることが分かる．**??**での議論を踏まえれば，Pauli 行列は 2×2 の Hermite 行列の基底であるから，

$$S = \sum_i \check{S}_i\hat{\sigma}^i \tag{0.5}$$

と展開できる．内積は対角和で定義されているのだから，

$$\check{S}_i = \frac{\mathrm{tr}\left\{\hat{\sigma}^i S\right\}}{\mathrm{tr}\left\{\left(\hat{\sigma}^i\right)^2\right\}} \tag{0.6}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\hat{\sigma}^i S\right\} \tag{0.7}$$

と書ける．具体的に 4 成分を求めると，

$$\check{S}_0 = \frac{1}{2}\left(\left|\tilde{E}_x\right|^2 + \left|\tilde{E}_y\right|^2\right) \tag{0.8}$$

$$\check{S}_1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y + \tilde{E}_x\tilde{E}_y^*\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right) \tag{0.9}$$

$$\check{S}_2 = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{i}\tilde{E}_x\tilde{E}_y^* + \mathrm{i}\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right) = \mathrm{Im}\left(\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right) \tag{0.10}$$

$$\check{S}_3 = \frac{1}{2}\left(\left|\tilde{E}_x\right|^2 - \left|\tilde{E}_y\right|^2\right) \tag{0.11}$$

古典光学の慣習に従って Stokes パラメータを定義すると，

$$S_0 \coloneqq 2\check{S}_0 = \left|\tilde{E}_x\right|^2 + \left|\tilde{E}_y\right|^2 \tag{0.12}$$

$$S_1 \coloneqq 2\check{S}_3 = \left|\tilde{E}_x\right|^2 - \left|\tilde{E}_y\right|^2 \tag{0.13}$$

$$S_2 \coloneqq 2\check{S}_1 = 2\,\mathrm{Re}\left(\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right) \tag{0.14}$$

$$S_3 \coloneqq 2\check{S}_2 = 2\,\mathrm{Im}\left(\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right) \tag{0.15}$$

となる．Stokes パラメータには，

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0^2 \tag{0.16}$$

なる関係が成立する．

Proof.

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 4\,\mathrm{Re}\left(\tilde{E}_x^* \tilde{E}_y\right)^2 + 4\,\mathrm{Im}\left(\tilde{E}_x^* \tilde{E}_y\right)^2 + \left(\left|\tilde{E}_x\right|^2 - \left|\tilde{E}_y\right|^2\right)^2 \tag{0.17}$$

$$= 4\left|\tilde{E}_x^* \tilde{E}_y\right|^2 + \left|\tilde{E}_x\right|^4 + \left|\tilde{E}_y\right|^4 - 2\tilde{E}_x^* \tilde{E}_y \tilde{E}_x \tilde{E}_y^* \tag{0.18}$$

$$= \left|\tilde{E}_x\right|^4 + \left|\tilde{E}_y\right|^4 + 2\left|\tilde{E}_x\right|^2 \left|\tilde{E}_y\right|^2 \tag{0.19}$$

$$= \left(\left|\tilde{E}_x\right|^2 + \left|\tilde{E}_y\right|^2\right)^2 \tag{0.20}$$

$$= S_0^2 \tag{0.21}$$

□

式 (0.16) より，Stokes パラメータの自由度は実質的に 3 成分であるから，3 次元空間で表すことができる．これが，Poincaré 球である．**表 0.1** として Stokes パラメータ[1]と偏光状態の関係を示す．

表 0.1: Stokes パラメータと偏光状態の関係

Stokes パラメータ	偏光状態
$S_1 = 1$	x 偏光
$S_1 = -1$	y 偏光
$S_2 = 1$	45° 偏光
$S_2 = -1$	-45° 偏光
$S_3 = 1$	左回り偏光
$S_3 = -1$	右回り偏光

0.3 複屈折

物質中の Maxwell 方程式は,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

である．強磁性体でないため，$\mu = \mu_0$ とした．**式** (0.1) において，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{0.2}$$

なる関係があるとする．ただし，ε は 2 階のテンソルであるとする．以下では，結晶の対称性を仮定して，

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

とする．電場が,

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{0.4}$$

[1] 2 準位系の Bloch 球では,

$$u = 2\,\mathrm{Re}\left(\rho_{\mathrm{ba}}^{(-\omega)}\right) \tag{0.22}$$

$$v = 2\,\mathrm{Im}\left(\rho_{\mathrm{ba}}^{(-\omega)}\right) \tag{0.23}$$

$$w = \rho_{\mathrm{bb}} - \rho_{\mathrm{aa}} \tag{0.24}$$

なる関係がある．やはり，Stokes パラメータのインデックスはおかしいと思われる．

と書けるとする．また，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ が，

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

と書けるとする．真空状態での Maxwell 方程式の解析と同じように，$\boldsymbol{E} \to \tilde{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{B} \to \tilde{\boldsymbol{B}}$ とする．**式** (0.1) の第 1 式の両辺に $\boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させると，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{B}}\right) && (0.6)\\
\Longleftrightarrow\ &\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\right) - \boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\boldsymbol{E}} = \mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon\tilde{\boldsymbol{E}}\right) && (0.7)\\
\Longleftrightarrow\ &\left(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\right) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\tilde{\boldsymbol{E}} = -\mu_0\omega^2\varepsilon\tilde{\boldsymbol{E}} && (0.8)\\
\Longleftrightarrow\ &\begin{pmatrix} \left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2\omega^2\right)\tilde{E}_x + k_xk_y\tilde{E}_y + k_xk_z\tilde{E}_z \\ k_xk_y\tilde{E}_x + \left(-k_x^2 - k_z^2 - \mu_0 n_y^2\omega^2\right)\tilde{E}_y + k_yk_z\tilde{E}_z \\ k_xk_z\tilde{E}_x + k_yk_z\tilde{E}_y + \left(-k_x^2 - k_y^2 - \mu_0 n_z^2\omega^2\right)\tilde{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (0.9)\\
\Longleftrightarrow\ &\begin{pmatrix} \left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2\omega^2\right) & k_xk_y & k_xk_z \\ k_xk_y & \left(-k_x^2 - k_z^2 + \mu_0 n_y^2\omega^2\right) & k_yk_z \\ k_xk_z & k_yk_z & \left(-k_x^2 - k_y^2 + \mu_0 n_z^2\omega^2\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (0.10)
\end{aligned}$$

となる．$\tilde{\boldsymbol{E}} \neq \boldsymbol{0}$ の非自明な解が存在する条件は，$\tilde{\boldsymbol{E}}$ にかかる行列の行列式が 0 となることなので，

$$\begin{vmatrix} \left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2\omega^2\right) & k_xk_y & k_xk_z \\ k_xk_y & \left(-k_x^2 - k_z^2 + \mu_0 n_y^2\omega^2\right) & k_yk_z \\ k_xk_z & k_yk_z & \left(-k_x^2 - k_y^2 + \mu_0 n_z^2\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{0.11}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\ &\left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2\omega^2\right)\left(-k_x^2 - k_z^2 + \mu_0 n_y^2\omega^2\right)\left(-k_x^2 - k_y^2 + \mu_0 n_z^2\omega^2\right) + 2k_x^2k_y^2k_z^2\\
&- k_x^2k_z^2\left(-k_x^2 - k_z^2 + \mu_0 n_y^2\omega^2\right) - k_x^2k_y^2\left(-k_x^2 - k_y^2 + \mu_0 n_z^2\omega^2\right) - k_y^2k_z^2\left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2\omega^2\right) = 0 && (0.12)\\
\Longleftrightarrow\ &\mu_0^3 n_x^2n_y^2n_z^2\omega^6 - \mu_0^2\left\{\left(k_y^2 + k_z^2\right)n_y^2n_z^2 + \left(k_x^2 + k_z^2\right)n_x^2n_z^2 + \left(k_x^2 + k_y^2\right)n_x^2n_y^2\right\}\omega^4 + \mu_0\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\left(k_x^2n_x^2 + k_y^2n_y^2 + k_z^2n_z^2\right)\omega^2 = 0 && (0.13)\\
\Longleftrightarrow\ &\mu_0^2\omega^4 - \mu_0\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_z^2} + \frac{k_y^2 + k_z^2}{n_x^2} + \frac{k_z^2 + k_x^2}{n_y^2}\right)\omega^2 + \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\left(\frac{k_x^2}{n_y^2n_z^2} + \frac{k_y^2}{n_z^2n_x^2} + \frac{k_z^2}{n_x^2n_y^2}\right) = 0 && (0.14)
\end{aligned}$$

となる．**式** (0.14) を $\mu\omega^2$ について解くと，

$$\begin{aligned}
\mu_0\omega^2 = &\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_z^2} + \frac{k_y^2 + k_z^2}{n_x^2} + \frac{k_z^2 + k_x^2}{n_y^2}\right)\\
&\pm\sqrt{\frac{-3k_x^2k_z^2 - 3k_y^2k_z^2 - 3k_z^4 + k_x^2k_y^2}{n_x^2n_y^2} + \frac{-3k_y^2k_x^2 - 3k_z^2k_x^2 - 3k_x^4 + k_y^2k_z^2}{n_y^2n_z^2} + \frac{-3k_z^2k_y^2 - 3k_x^2k_y^2 - 3k_y^4 + k_z^2k_x^2}{n_z^2n_x^2}}
\end{aligned} \tag{0.15}$$

となる．$n_x = n_y = n_\mathrm{o}$，$n_z = n_\mathrm{e}$ のとき，**式** (0.15) は，

$$\mu_0\omega^2 = \frac{k_x^2}{n_\mathrm{o}^0} + \frac{k_y^2}{n_\mathrm{o}^0} + \frac{k_z^2}{n_\mathrm{o}^0}, \frac{k_x^2}{n_\mathrm{e}^0} + \frac{k_y^2}{n_\mathrm{e}^0} + \frac{k_z^2}{n_\mathrm{o}^0} \tag{0.16}$$

となり，2 種類の波数ベクトルが許容されることになる．

0.4　波長板の効果