# 偏光を用いた2量子もつれの量子状態トモグラフィによる評価

62200139 青木 陽

March 25, 2025

# Contents

# Chapter 1

# 原理(古典論)

## 1　偏光

以降では，複素数であることを強調するとき，チルダを付けることにする．

### 1.1　偏光状態

真空中の Maxwell 方程式は,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

である．微分方程式は線型であるから，以降では，$\boldsymbol{E} \to \tilde{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{B} \to \tilde{\boldsymbol{B}}$ とする．なお，実際の物理量としての電場や磁場は実数であるから,

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\right) \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\boldsymbol{B}}\right) \tag{1.3}$$

とする．さて，**式** (1.1) の第 1 式の両辺に $\boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させると,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}}\right) \tag{1.4}$$

$$\iff \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}}\right) - \boldsymbol{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{E}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

$$\iff \boldsymbol{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{E}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

$$\tag{1.7}$$

となる．**式** (1.5) から**式** (1.6) の式変形で**式** (1.1) の第 3 式を用いた．磁場に関しても同様に計算をすると,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{B}}}{\partial t^2} \tag{1.8}$$

$$\tag{1.9}$$

となる．

　さて，**式** (1.6) や**式** (1.8) なる偏微分方程式の解の 1 つに,

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{1.10}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{B}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{1.11}$$

がある．**式** (1.10) と**式** (1.11) を**式** (1.1) の第 2 式に代入すると，

$$\begin{align}
\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} &= \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\boldsymbol{E}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{1.12}\\
\mathrm{i}\boldsymbol{k} \times \tilde{\boldsymbol{B}} &= -\mathrm{i}\omega\mu_0\varepsilon_0 \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{1.13}\\
\boldsymbol{k} \times \tilde{\boldsymbol{B}} &= -\omega\mu_0\varepsilon_0 \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{1.14}
\end{align}$$

となる．**式** (1.14) の両辺で $\boldsymbol{k}$ との内積を取ると，

$$\begin{align}
\boldsymbol{k} \times \left(\boldsymbol{k} \times \tilde{\boldsymbol{B}}\right) &= -\omega\mu_0\varepsilon_0 \boldsymbol{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{1.15}\\
\iff \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}) &= -\omega\mu_0\varepsilon_0 \boldsymbol{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{1.16}\\
\iff \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} &= 0 \tag{1.17}
\end{align}$$

となり，電場 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ と波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ が直交することが分かる．磁場についても**式** (1.1) を用いれば，同様に波数ベクトルと直交することが分かる．よって，波の進行方向を $z$ 方向と定義しても一般性を失わないので，

$$\begin{align}
\boldsymbol{E} &= \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.18}\\
&= \begin{pmatrix} E_{x0}\cos(kz-\omega t) \\ E_{y0}\cos(kz-\omega t+\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.19}
\end{align}$$

とする．

いよいよ，具体的な偏光を考える．**式** (1.19) より，

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{E_{x0}} = \cos(kz-\omega t) \\ \dfrac{E_y}{E_{y0}} = \cos(kz-\omega t+\phi) \end{cases} \tag{1.20}$$

と書ける．和積の公式を用いると，

$$\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right) - \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\cos\phi = -\sin(kz-\omega t)\sin\phi \tag{1.21}$$

となる．両辺を 2 乗すると，

$$\begin{align}
\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)\cos\phi + \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2\cos^2\phi &= \left(1-\sin^2(kz-\omega t)\right)\sin^2\phi \tag{1.22}\\
\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)\cos\phi + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 &= \sin^2\phi \tag{1.23}
\end{align}$$

となる．一般に，この 2 次曲線は楕円を描くことが知られている．以下では，2 つの特別な場合を考える．

1. $\phi = m\pi \ m \in \mathbb{Z}$ のとき．このとき，**式** (1.23) は，

$$\begin{align}
\left(\frac{E_x}{E_{x0}} - (-1)^m \frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 &= 0 \tag{1.24}\\
\implies \frac{E_x}{E_{x0}} &= (-1)^m \frac{E_y}{E_{y0}} \tag{1.25}
\end{align}$$

となり，$m$ が偶数のときは $E_x$ と $E_y$ は同位相，$m$ が奇数のときは $\pi$ だけ位相がずれて振動することが分かる．特に $E_x = E_y$ であれば，$m$ が偶数であることを $45^\circ$ 偏光，$m$ が奇数であることを $-45^\circ$ 偏光という．

2. $\phi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \ m \in \mathbb{Z}$ のとき．このとき，式 (1.23) は,

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = 1 \tag{1.26}$$

となり，$E_x/E_{x0}$ と $E_y/E_{y0}$ は単位円周上にあるという関係をもつので，円偏光であると分かる．特に $E_x = E_y$ であれば，$m$ が偶数のであることを $z$ 軸正から負方向に見て左周りに回るので左偏光，$m$ が奇数のときは右偏光という．

## 1.2　偏光行列，Stokes パラメータ，Poincaré 球

前小節までで，真空中を伝搬する電磁場の偏光を記述する方法を示した．本小節では他に，偏光を表す方法を説明する．

1 つのモードの偏光行列は以下のように定義される．

$$S \coloneqq \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x^* & \tilde{E}_y^* \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$$= \begin{pmatrix} \left|\tilde{E}_x\right|^2 & \tilde{E}_x \tilde{E}_y^* \\ \tilde{E}_x^* \tilde{E}_y & \left|\tilde{E}_y\right|^2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

多モードの偏光行列は,

$$S \coloneqq \begin{pmatrix} \left\langle\left|\tilde{E}_x\right|\right\rangle^2 & \left\langle \tilde{E}_x \tilde{E}_y^* \right\rangle \\ \left\langle \tilde{E}_x^* \tilde{E}_y \right\rangle & \left\langle \left|\tilde{E}_y\right|^2 \right\rangle \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

となる．ただし，$\langle\cdot\rangle$ は長時間平均で，$\sigma$ をモードのラベルとすると,

$$\langle f(x) \rangle \coloneqq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \sum_\sigma f_\sigma(t) \tag{1.4}$$

である．

再び，単一モードの偏光を考える．偏光行列の対角成分が複素共役であることに注意すれば，$S$ は Hermite 行列であることが分かる．A での議論を踏まえれば，Pauli 行列は $2 \times 2$ の Hermite 行列の基底であるから,

$$S = \sum_i \check{S}_i \hat{\sigma}^i \tag{1.5}$$

と展開できる．内積は対角和で定義されているのだから,

$$\check{S}_i = \frac{\mathrm{tr}\left\{\hat{\sigma}^i S\right\}}{\mathrm{tr}\left\{\left(\hat{\sigma}^i\right)^2\right\}} \tag{1.6}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\hat{\sigma}^i S\right\} \tag{1.7}$$

と書ける．具体的に 4 成分を求めると,

$$\check{S}_0 = \frac{1}{2}\left(\left|\tilde{E}_x\right|^2 + \left|\tilde{E}_y\right|^2\right) \tag{1.8}$$

$$\check{S}_1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{E}_x^* \tilde{E}_y + \tilde{E}_x \tilde{E}_y^*\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{E}_x^* \tilde{E}_y\right) \tag{1.9}$$

$$\check{S}_2 = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{i}\tilde{E}_x \tilde{E}_y^* + \mathrm{i}\tilde{E}_x^* \tilde{E}_y\right) = \mathrm{Im}\left(\tilde{E}_x^* \tilde{E}_y\right) \tag{1.10}$$

$$\check{S}_3 = \frac{1}{2}\left(\left|\tilde{E}_x\right|^2 - \left|\tilde{E}_y\right|^2\right) \tag{1.11}$$

古典光学の慣習に従って Stokes パラメータを定義すると，

$$S_0 \coloneqq 2\check{S}_0 = \left|\tilde{E}_x\right|^2 + \left|\tilde{E}_y\right|^2 \tag{1.12}$$

$$S_1 \coloneqq 2\check{S}_3 = \left|\tilde{E}_x\right|^2 - \left|\tilde{E}_y\right|^2 \tag{1.13}$$

$$S_2 \coloneqq 2\check{S}_1 = 2\,\mathrm{Re}\left(\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right) \tag{1.14}$$

$$S_3 \coloneqq 2\check{S}_2 = 2\,\mathrm{Im}\left(\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right) \tag{1.15}$$

となる．Stokes パラメータには,

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0^2 \tag{1.16}$$

なる関係が成立する．

*Proof.*

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 4\,\mathrm{Re}\left(\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right)^2 + 4\,\mathrm{Im}\left(\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right)^2 + \left(\left|\tilde{E}_x\right|^2 - \left|\tilde{E}_y\right|^2\right)^2 \tag{1.17}$$

$$= 4\left|\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\right|^2 + \left|\tilde{E}_x\right|^4 + \left|\tilde{E}_y\right|^4 - 2\tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\tilde{E}_x\tilde{E}_y^* \tag{1.18}$$

$$= \left|\tilde{E}_x\right|^4 + \left|\tilde{E}_y\right|^4 + 2\left|\tilde{E}_x\right|^2\left|\tilde{E}_y\right|^2 \tag{1.19}$$

$$= \left(\left|\tilde{E}_x\right|^2 + \left|\tilde{E}_y\right|^2\right)^2 \tag{1.20}$$

$$= S_0^2 \tag{1.21}$$

□

**式** (1.16) より，Stokes パラメータの自由度は実質的に 3 成分であるから，3 次元空間で表すことができる．これが，Poincaré 球である．**表 1.1** として Stokes パラメータ[1]と偏光状態の関係を示す．

**表 1.1: Stokes パラメータと偏光状態の関係**

| Stokes パラメータ | 偏光状態 |
|---|---|
| $S_1 = 1$ | $x$ 偏光 |
| $S_1 = -1$ | $y$ 偏光 |
| $S_2 = 1$ | $45°$ 偏光 |
| $S_2 = -1$ | $-45°$ 偏光 |
| $S_3 = 1$ | 左回り偏光 |
| $S_3 = -1$ | 右回り偏光 |

## 1.3　複屈折

物質中の Maxwell 方程式は,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

[1] 2 準位系の Bloch 球では,

$$u = 2\,\mathrm{Re}\left(\rho_{\mathrm{ba}}^{(-\omega)}\right) \tag{1.22}$$

$$v = 2\,\mathrm{Im}\left(\rho_{\mathrm{ba}}^{(-\omega)}\right) \tag{1.23}$$

$$w = \rho_{\mathrm{bb}} - \rho_{\mathrm{aa}} \tag{1.24}$$

なる関係がある．やはり，Stokes パラメータのインデックスはおかしいと思われる．

である．強磁性体でないため，$\mu = \mu_0$ とした．**式** (1.1) において，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1.2}$$

なる関係があるとする．ただし，$\varepsilon$ は 2 階のテンソルであるとする．以下では，結晶の対称性を仮定して，

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

とする．電場が，

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{1.4}$$

と書けるとする．また，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ が，

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

と書けるとする．真空状態での Maxwell 方程式の解析と同じように，$\boldsymbol{E} \to \tilde{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{B} \to \tilde{\boldsymbol{B}}$ とする．**式** (1.1) の第 1 式の両辺に $\boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させると，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}}\right) && (1.6)\\
\iff &\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\right) - \boldsymbol{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{E}} = \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon \tilde{\boldsymbol{E}}\right) && (1.7)\\
\iff &\left(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\right) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\tilde{\boldsymbol{E}} = -\mu_0 \omega^2 \varepsilon \tilde{\boldsymbol{E}} && (1.8)\\
\iff &\begin{pmatrix} \left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2 \omega^2\right)\tilde{E}_x + k_x k_y \tilde{E}_y + k_x k_z \tilde{E}_z \\ k_x k_y \tilde{E}_x + \left(-k_x^2 - k_z^2 - \mu_0 n_y^2 \omega^2\right)\tilde{E}_y + k_y k_z \tilde{E}_z \\ k_x k_z \tilde{E}_x + k_y k_z \tilde{E}_y + \left(-k_x^2 - k_y^2 - \mu_0 n_z^2 \omega^2\right)\tilde{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (1.9)\\
\iff &\begin{pmatrix} \left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2 \omega^2\right) & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \left(-k_x^2 - k_z^2 + \mu_0 n_y^2 \omega^2\right) & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \left(-k_x^2 - k_y^2 + \mu_0 n_z^2 \omega^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (1.10)
\end{aligned}$$

となる．$\tilde{\boldsymbol{E}} \neq \boldsymbol{0}$ の非自明な解が存在する条件は，$\tilde{\boldsymbol{E}}$ にかかる行列の行列式が 0 となることなので，

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2 \omega^2\right) & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \left(-k_x^2 - k_z^2 + \mu_0 n_y^2 \omega^2\right) & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \left(-k_x^2 - k_y^2 + \mu_0 n_z^2 \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 && (1.11)\\
\iff &\left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2 \omega^2\right)\left(-k_x^2 - k_z^2 + \mu_0 n_y^2 \omega^2\right)\left(-k_x^2 - k_y^2 + \mu_0 n_z^2 \omega^2\right) + 2k_x^2 k_y^2 k_z^2 \\
&\quad - k_x^2 k_z^2\left(-k_x^2 - k_z^2 + \mu_0 n_y^2 \omega^2\right) - k_x^2 k_y^2\left(-k_x^2 - k_y^2 + \mu_0 n_z^2 \omega^2\right) - k_y^2 k_z^2\left(-k_y^2 - k_z^2 + \mu_0 n_x^2 \omega^2\right) = 0 && (1.12)\\
\iff &\mu_0^3 n_x^2 n_y^2 n_z^2 \omega^6 - \mu_0^2\left\{\left(k_y^2 + k_z^2\right) n_y^2 n_z^2 + \left(k_x^2 + k_z^2\right) n_x^2 n_z^2 + \left(k_x^2 + k_y^2\right) n_x^2 n_y^2\right\}\omega^4 + \mu_0\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\left(k_x^2 n_x^2 + k_y^2 n_y^2 + k_z^2 n_z^2\right)\omega^2 = 0 && (1.13)\\
\iff &\mu_0^2 \omega^4 - \mu_0\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_z^2} + \frac{k_y^2 + k_z^2}{n_x^2} + \frac{k_z^2 + k_x^2}{n_y^2}\right)\omega^2 + \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\left(\frac{k_x^2}{n_y^2 n_z^2} + \frac{k_y^2}{n_z^2 n_x^2} + \frac{k_z^2}{n_x^2 n_y^2}\right) = 0 && (1.14)
\end{aligned}$$

となる．**式** (1.14) を $\mu\omega^2$ について解くと，

$$\begin{aligned}
\mu_0 \omega^2 = &\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_z^2} + \frac{k_y^2 + k_z^2}{n_x^2} + \frac{k_z^2 + k_x^2}{n_y^2}\right) \\
&\pm \sqrt{\frac{-3k_x^2 k_z^2 - 3k_y^2 k_z^2 - 3k_z^4 + k_x^2 k_y^2}{n_x^2 n_y^2} + \frac{-3k_y^2 k_x^2 - 3k_z^2 k_x^2 - 3k_x^4 + k_y^2 k_z^2}{n_y^2 n_z^2} + \frac{-3k_z^2 k_y^2 - 3k_x^2 k_y^2 - 3k_y^4 + k_z^2 k_x^2}{n_z^2 n_x^2}}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

となる．$n_x = n_y = n_\mathrm{o}$，$n_z = n_\mathrm{e}$ のとき，**式** (1.15) は,

$$\mu_0 \omega^2 = \frac{k_x^2}{n_\mathrm{o}^2} + \frac{k_y^2}{n_\mathrm{o}^2} + \frac{k_z^2}{n_\mathrm{o}^2}, \frac{k_x^2}{n_\mathrm{e}^2} + \frac{k_y^2}{n_\mathrm{e}^2} + \frac{k_z^2}{n_\mathrm{o}^2} \tag{1.16}$$

となり，2 種類の波数ベクトルが許容されることになる．

### 1.4　波長板の効果

## 2　干渉

WIP

# Chapter 2

# 原理(古典論から量子論へ)

WIP

# Chapter 3

# 原理(量子論)

## 1　レーザ

WIP

## 2　ビームスプリッタ

WIP

## 3　非線型結晶

WIP

## 4　量子状態トモグラフィ

### 4.1　密度行列

密度行列 $\hat{\rho}$ は状態 $|\psi\rangle$ に対して,

$$\hat{\rho} \coloneqq |\rho\rangle\langle\rho| \tag{4.1}$$

と定義される．任意の物理量 $\hat{A}$ の期待値が $\mathrm{tr}\left(\hat{A}\hat{\rho}\right)$ と書けることを示す.

*Proof.* $|\psi\rangle$ の存在する Hilbert 空間の基底全体を $\{|n\rangle\}$ とする.

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle &= \left\langle\psi\middle|\hat{A}\middle|\psi\right\rangle && (4.2)\\
&= \left\langle\psi\middle|\hat{1}\hat{A}\hat{1}\middle|\psi\right\rangle && (4.3)\\
&= \sum_{n,n'}\langle\psi|x\rangle\left\langle x\middle|\hat{A}\middle|x'\right\rangle\langle x'|\psi\rangle && (4.4)\\
&= \sum_{n,n'}\left\langle x\middle|\hat{A}\middle|x'\right\rangle\langle\psi|x\rangle\langle x'|\psi\rangle && (4.5)\\
&= \sum_{n}\left\langle x\middle|\hat{A}\hat{\rho}\middle|x\right\rangle && (4.6)\\
&= \mathrm{tr}\left\{\hat{A}\hat{\rho}\right\} && (4.7)
\end{aligned}$$

□

### 4.2 偏光基底

さて，前小節まででで量子状態トモグラフィーを議論するための道具がそろった．以降では，具体的な偏光を用いた量子状態を再現する方法を議論する．以降で用いる種々の偏光ベクトルを定義しておく．

$$|\mathrm{H}\rangle \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$|\mathrm{V}\rangle \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$|\mathrm{D}\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

$$|\mathrm{D}\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$|\mathrm{L}\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$|\mathrm{R}\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

また，今後の計算のために，自分自身との外積を計算しておく．

$$|\mathrm{H}\rangle\langle\mathrm{H}| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

$$|\mathrm{V}\rangle\langle\mathrm{V}| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

$$|\mathrm{D}\rangle\langle\mathrm{D}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$|\mathrm{A}\rangle\langle\mathrm{A}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

$$|\mathrm{L}\rangle\langle\mathrm{L}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$|\mathrm{R}\rangle\langle\mathrm{R}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

さて，$|\mathrm{H}\rangle$ と $|\mathrm{V}\rangle$ は直交しているので，任意の量子状態 $|\psi\rangle$ は水平偏光 $|\mathrm{H}\rangle$ と垂直偏光 $|\mathrm{V}\rangle$ を基底として，

$$|\psi\rangle = c_{\mathrm{H}}|\mathrm{H}\rangle + c_{\mathrm{V}}|\mathrm{V}\rangle \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \tag{4.13}$$

と書ける．また，このときの密度行列 $\hat{\rho}$ は，

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= |\psi\rangle\langle\psi| & (4.14)\\
&= (c_{\mathrm{H}}|\mathrm{H}\rangle + c_{\mathrm{V}}|\mathrm{V}\rangle)(c_{\mathrm{H}}^*\langle\mathrm{H}| + c_{\mathrm{V}}^*\langle\mathrm{V}|) & (4.15)\\
&= |c_{\mathrm{H}}|^2|\mathrm{H}\rangle\langle\mathrm{H}| + c_{\mathrm{V}}c_{\mathrm{H}}^*\langle\mathrm{V}||\mathrm{H}\rangle + c_{\mathrm{H}}c_{\mathrm{V}}^*\langle\mathrm{H}||\mathrm{V}\rangle + |c_{\mathrm{V}}||\mathrm{V}\rangle\langle\mathrm{V}| & (4.16)\\
&= \begin{pmatrix} |c_{\mathrm{H}}|^2 & c_{\mathrm{H}}c_{\mathrm{V}}^* \\ c_{\mathrm{V}}c_{\mathrm{H}}^* & |c_{\mathrm{V}}|^2 \end{pmatrix} & (4.17)
\end{aligned}$$

と書ける．これは，密度行列が分かれば量子状態を推定することができることを意味している．以降では，具体的な状態ベクトルを直接再現するよりも，多体系を考えたときにより豊かな表現力をもつ密度行列で考える．

### 4.3 密度行列の再構成

さて，実際の実験系で密度行列を再構成する方法について考える．この方法を量子状態トモグラフィーという．我々行うことのできる射影測定は，偏光の測定である．まずは 1 量子の再構成について述べる．**式** (4.17) を求めたときのように $|\mathrm{H}\rangle\langle\mathrm{V}|$ のような項を再構成することは困難であるため，密度行列の Hermite 性と，Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものが正規直交基底をなすことを用いると，状態ベクトルを再構成することと，

$$\hat{\rho} = \sum_{i=0}^{3} u_i \hat{\sigma}^i \tag{4.1}$$

の $\{u_i\}$ を求めることは等価である．さらに，$\hat{\sigma}^i$ は Hermite 演算子の基底になっていることから，係数 $u_i$ は，

$$u_i = \left(\hat{\sigma}^i, \hat{\rho}\right) \tag{4.2}$$
$$= \mathrm{tr}\left\{\left(\hat{\sigma}^i\right)^\dagger \hat{\rho}\right\} \tag{4.3}$$
$$= \mathrm{tr}\left\{\hat{\sigma}^i \hat{\rho}\right\} \tag{4.4}$$
$$= \left\langle \sigma^i \right\rangle \tag{4.5}$$

と変形できる．最後の式変形で**式** (4.7) を用いた．**式** (4.5) の結果は，我々に物理量 $\sigma^i$ の期待値が分かれば，密度行列を再構成することができることを教える．ところが，$\sigma^i$ を直接測定することはできないため，偏光を用いて表す．**式** (4.7) から**式** (4.12) を用いると，

$$\hat{\sigma}^0 = |\mathrm{H}\rangle\langle\mathrm{H}| + |\mathrm{V}\rangle\langle\mathrm{V}| \tag{4.6}$$
$$\hat{\sigma}^1 = |\mathrm{D}\rangle\langle\mathrm{D}| - |\mathrm{A}\rangle\langle\mathrm{A}| = 2|\mathrm{D}\rangle\langle\mathrm{D}| - \hat{\sigma}^0 \tag{4.7}$$
$$\hat{\sigma}^2 = |\mathrm{R}\rangle\langle\mathrm{R}| - |\mathrm{L}\rangle\langle\mathrm{L}| = 2|\mathrm{R}\rangle\langle\mathrm{R}| - \hat{\sigma}^0 \tag{4.8}$$
$$\hat{\sigma}^3 = |\mathrm{H}\rangle\langle\mathrm{H}| - |\mathrm{V}\rangle\langle\mathrm{V}| \tag{4.9}$$

となる．**式** (4.6) から**式** (4.9) より，結局，我々は水平偏光，垂直偏光，45 度偏光，右回り偏光の 4 種類を測定すれば良いことが分かる．それらの測定の期待値を $N_\mathrm{H}$，$N_\mathrm{V}$，$N_\mathrm{D}$，$N_\mathrm{R}$ とすると，

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(N_\mathrm{H} + N_\mathrm{V})\hat{\sigma}^0 + (2N_\mathrm{D} - N_\mathrm{H} - N_\mathrm{V})\hat{\sigma}^1 + (2N_\mathrm{R} - N_\mathrm{H} - N_\mathrm{V})\hat{\sigma}^2 + (N_\mathrm{H} - N_\mathrm{V})\hat{\sigma}^3\right] \tag{4.10}$$

とすればよい．

同様に 2 量子の場合も検討することができる．この計算は非常に煩雑であるため，結果は省略するが，$\sigma^i \otimes \sigma^j$ を Hilbert 空間の基底として展開すればよい．実際には計算機で計算を行い，そのプログラムを付録にて示す．

# Chapter 4

# 実験方法

Chapter 5

# 実験結果

# Chapter 6

# 考察

# 付録 A

# 数学の関係式

ここでは，ベクトル空間と内積空間についての定義を与えたあと，Hermite 行列が Herm($N$) が内積空間となることを示す．ただし，Hermite 行列は，

$$\mathrm{Herm}(N) \in \left\{ \hat{H} \in \mathbb{C}^{N\times N} \mid \hat{H} = \hat{H}^\dagger \right\} \tag{0.1}$$

である．

$V$ が $K$ 上のベクトル空間であることは，以下の条件を全て満たすことである．ただし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$a, b \in K$ とする．

ベクトル空間の定義

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\ \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}$
2. $\exists \boldsymbol{0} \in V\ \forall \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
3. $\forall \boldsymbol{v} \in V\ \exists - \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
4. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
5. $\forall a \in K\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\ a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$
6. $\forall a, b \in K\ \forall \boldsymbol{v} \in V\ (a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$
7. $\forall a, b \in K\ \forall \boldsymbol{v} \in V\ a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v}$
8. $\exists 1 \in K\ \forall \boldsymbol{v} \in V\ 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Herm($N$) は通常の行列の演算規則に従えば，明らかに $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．

内積は，ベクトル空間 $V$ に対して定義された演算 $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ が以下の性質を満たすものである．ただし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$a, b \in \mathbb{C}$ とする．

内積の定義

1. $(\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
2. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})^*$
3. $\forall \boldsymbol{u}\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$
4. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \implies \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

$A, B \in \mathrm{Herm}(N)$ に対して内積を定義するには，対角和を用いて，

$$(A, B) = \mathrm{tr}\big(A^\dagger B\big) \tag{0.2}$$

と定義すればよい．行列の対角和が Herm($N$) の内積になることは非自明なので示す．ただし，$A, B \in \mathrm{Herm}(N) A$ の固有値を $\lambda_1, \ldots \lambda_N$ とする．

*Proof.* 1. $(A, \lambda B) = \mathrm{tr}\left(A^\dagger \lambda B\right) = \lambda\, \mathrm{tr}\left(A^\dagger B\right) = \lambda(A, B)$

2. $(B,A)^* = \mathrm{tr}\left(B^\dagger A\right)^* = \mathrm{tr}\left(\left(B^\dagger A\right)^\dagger\right) = \mathrm{tr}\{A^\dagger B\} = (A,B)$

3. $A$ は Hermite 行列であるから固有値は全て実数で，$(A,A) = \mathrm{tr}\{A^\dagger A\} = \mathrm{tr}\{A^2\} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \geq 0$

4. $(A,A) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 = 0$ となるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$ となるときのみで，そのときは $A$ は $0$ 行列である．

よって，対角和を用いて内積を定義すると，$\mathrm{Herm}(N)$ は内積空間になる． □

Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものは $\mathrm{Herm}(2)$ の正規直交基底となる．ただし，Pauli 行列は,

$$\hat{\sigma}^0 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

$$\hat{\sigma}^1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

$$\hat{\sigma}^2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

$$\hat{\sigma}^3 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.6}$$

と定義される．まず，Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものが $\mathrm{Herm}(2)$ の基底であることを示す．

*Proof.* $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ を用いると,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}a_0\hat{\sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1\hat{\sigma}^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}a_2\hat{\sigma}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}a_3\hat{\sigma}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - \mathrm{i}a_2 \\ a_1 + \mathrm{i}a_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix} \tag{0.7}$$

となり，Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものの線形結合で任意の Hermite 行列が書けることが分かる． □

また，Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものは正規直交基底を成すことが分かる．

*Proof.* Pauli 行列同士の内積について,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{0.8}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{0.9}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{0.10}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{0.11}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.12}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.13}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.14}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.15}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.16}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.17}$$

となり，Pauli 行列は正規直交基底であると分かる．内積の順序入れ替えについては，以上の計算結果が全て実数であることから省略する． □

# 付録 B

# ソースコード

qst-code

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import mpl_toolkits
from matplotlib import cm
from matplotlib.colors import Normalize
import pandas as pd

class HVDR:
    def __init__(self, l):
        self.l = l
    def __mul__(self, other):
        ret = list()
        for x in self.l:
            tmp = list()
            for y in other.l:
                tmp.append(x * y)
            ret.append(tmp)
        return ret

def calc_sigma_pow():
    sigma_0 = HVDR([1, 1, 0, 0])
    sigma_1 = HVDR([-1, -1, 2, 0])
    sigma_2 = HVDR([-1, -1, 0, 2])
    sigma_3 = HVDR([1, -1, 0, 0])
    sigma = [sigma_0, sigma_1, sigma_2, sigma_3]
    sigma_pow = [[None for _ in range(4)] for _ in range(4)]
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            sigma_pow[i][j] = sigma[i] * sigma[j]
    return sigma_pow
def load_data(path):
    polar_dict = {'H': 0, 'V': 1, 'D': 2, 'R': 3}
    raw_data = np.loadtxt(path, dtype = "str", delimiter = ',')
    data = [[None for _ in range(4)] for _ in range(4)]
    for i in range(1, len(raw_data)):
        data[polar_dict[raw_data[i][0]]][polar_dict[raw_data[i][1]]] = int(raw_data[i][2])
    return data
def calc_uij(sigma_pow, data):
    u = [[0 for _ in range(4)] for _ in range(4)]
    for i1 in range(4):
        for j1 in range(4):
            for i2 in range(4):
```

```python
                for j2 in range(4):
                    u[i1][j1] += sigma_pow[i1][j1][i2][j2] * data[i2][j2]
    return u
def calc_sigma_matrix_tensor():
    sigma_num_0 = np.array([[1, 0], [0, 1]])
    sigma_num_1 = np.array([[0, 1], [1, 0]])
    sigma_num_2 = np.array([[0, -1j], [1j, 0]])
    sigma_num_3 = np.array([[1, 0], [0, -1]])
    sigma_num = [sigma_num_0, sigma_num_1, sigma_num_2, sigma_num_3]
    sigma_num_pow = [[None for _ in range(4)] for _ in range(4)]
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            sigma_num_pow[i][j] = np.kron(sigma_num[i], sigma_num[j])
    return sigma_num_pow
def estimate_rho(u, sigma_num_pow):
    rho = [[0 for _ in range(4)] for _ in range(4)]
    rho_trace = 0
    for i1 in range(4):
        for j1 in range(4):
            for i2 in range(4):
                for j2 in range(4):
                    rho[i2][j2] += u[i1][j1] * sigma_num_pow[i1][j1][i2][j2]
    for i in range(4): rho_trace += rho[i][i]
    rho_norm = [[rho[i][j] / rho_trace for j in range(4)] for i in range(4)]
    rho_norm = np.array(rho_norm)
    return rho_norm
def make_graph(rho_norm, data_name):
    rho_real_imag = [rho_norm.real, rho_norm.imag]
    tmp_x = np.arange(4)
    tmp_y = np.arange(4)
    tmp_X, tmp_Y = np.meshgrid(tmp_x, tmp_y)
    label_bra = [
        r"$\left| \rm{HH} \right\rangle$",
        r"$\left| \rm{VH} \right\rangle$",
        r"$\left| \rm{HV} \right\rangle$",
        r"$\left| \rm{VV} \right\rangle$"
    ]
    label_ket = [
        r"$\left\langle \rm{HH} \right|$",
        r"$\left\langle \rm{VH} \right|$",
        r"$\left\langle \rm{HV} \right|$",
        r"$\left\langle \rm{VV} \right|$"
    ]
    x = tmp_X.ravel()
    y = tmp_Y.ravel()
    z = np.zeros_like(x)
    dx = dy = 0.5
    for i in range(2):
        fig = plt.figure()
        ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")
        dz = rho_real_imag[i].ravel()
        norm = Normalize(vmin=-1, vmax=1)
        colors = cm.coolwarm_r(norm(dz))
        alpha = 0.7
        colors[:, 3] = alpha
        ax.bar3d(x, y, z, dx, dy, dz, color=colors, shade=True)
        ax.set_xticks(tmp_x + dx / 2)
        ax.set_xticklabels(label_bra, ha="center")
```

```
        ax.set_yticks(tmp_y + dy / 2)
        ax.set_yticklabels(label_ket, ha="center")
        ax.set_zlim(-0.75, 0.75)
        ax.zaxis.set_tick_params(labelleft=False, labelright=False, labeltop=False, labelbottom=False)
        mappable = cm.ScalarMappable(norm=norm, cmap="coolwarm_r")
        mappable.set_array(dz)
        fig.colorbar(mappable, ax=ax, shrink=0.6, aspect=10, label=r"$\hat{\rho}$")
        title = data_name + "_" + "riemaalg"[i:: 2]
        ax.set_title(title)
        title += ".pdf"
        plt.savefig(title, bbox_inches = "tight")
def main():
    sigma_pow = calc_sigma_pow()
    sigma_num_pow = calc_sigma_matrix_tensor()
    datas = ["data1", "data2"]
    for i in range(2):
        data = load_data(datas[i] + ".csv")
        u = calc_uij(sigma_pow, data)
        rho_norm = estimate_rho(u, sigma_num_pow)
        make_graph(rho_norm, datas[i])
if (__name__ == "__main__"):
    main()
```