## 0.1 Herm($N$)

本小節では，ベクトル空間と内積空間についての定義を与えたあと，Hermite 行列が Herm($N$) が内積空間となることを示す．ただし，Hermite 行列は,

$$\mathrm{Herm}(N) \in \left\{ \hat{H} \in \mathbb{C}^{N\times N} \mid \hat{H} = \hat{H}^\dagger \right\} \tag{0.1}$$

である．

$V$ が $K$ 上のベクトル空間であることは，以下の条件を全て満たすことである．ただし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$a, b \in K$ とする．

**ベクトル空間の定義**

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\ \ \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}$
2. $\exists \boldsymbol{0} \in V\ \forall \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
3. $\forall \boldsymbol{v} \in V\ \exists -\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
4. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\ \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
5. $\forall a \in K\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\ \ a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$
6. $\forall a, b \in K\ \forall \boldsymbol{v} \in V\ \ (a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$
7. $\forall a, b \in K\ \forall \boldsymbol{v} \in V\ \ a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v}$
8. $\exists 1 \in K\ \forall \boldsymbol{v} \in V\ \ 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Herm($N$) は通常の行列の演算規則に従えば，明らかに $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．

内積は，ベクトル空間 $V$ に対して定義された演算 $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ が以下の性質を満たすものである．ただし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$a, b \in \mathbb{C}$ とする．

**内積の定義**

1. $(\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
2. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})^*$
3. $\forall \boldsymbol{u}\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$
4. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \implies \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

$A, B \in \mathrm{Herm}(N)$ に対して内積を定義するには，対角和を用いて,

$$(A, B) = \mathrm{tr}\left(A^\dagger B\right) \tag{0.2}$$

と定義すればよい．行列の対角和が Herm($N$) の内積になることは非自明なので示す．ただし，$A, B \in \mathrm{Herm}(N) A$ の固有値を $\lambda_1, \ldots \lambda_N$ とする．

1. $(A, \lambda B) = \mathrm{tr}\left(A^\dagger \lambda B\right) = \lambda\, \mathrm{tr}\left(A^\dagger B\right) = \lambda(A, B)$
2. $(B, A)^* = \mathrm{tr}\left(B^\dagger A\right)^* = \mathrm{tr}\left(\left(B^\dagger A\right)^\dagger\right) = \mathrm{tr}\left\{A^\dagger B\right\} = (A, B)$
3. $A$ は Hermite 行列であるから固有値は全て実数で，$(A, A) = \mathrm{tr}\left\{A^\dagger A\right\} = \mathrm{tr}\left\{A^2\right\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \geq 0$
4. $(A, A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 = 0$ となるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$ となるときのみで，そのときは $A$ は 0 行列である．

よって，対角和を用いて内積を定義すると，Herm($N$) は内積空間になる．


62200139 青木 陽

# 1　Pauli 行列

Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものは Herm(2) の正規直交基底となる．ただし，Pauli 行列は,

$$\hat{\sigma}^0 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$$\hat{\sigma}^1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$\hat{\sigma}^2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$\hat{\sigma}^3 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

と定義される．まず，Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものが Herm(2) の基底であることを示す．$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ を用いると，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}a_0\hat{\sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1\hat{\sigma}^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}a_2\hat{\sigma}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}a_3\hat{\sigma}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - \mathrm{i}a_2 \\ a_1 + \mathrm{i}a_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

となり，Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものの線形結合で任意の Hermite 行列が書けることが分かる．Pauli 行列同士の内積について，

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{1.7}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{1.8}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{1.9}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{1.10}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{1.11}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{1.12}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{1.13}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{1.14}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{1.15}$$

となり，Pauli 行列は正規直交基底であると分かる．また，$N \geq 4$ 以上の偶数について，Pauli 行列のテンソル積を用いて基底を定義すれば，トレースの性質より一般に Herm($N$) の正規直交基底が Pauli や，そのテンソル積であることが分かる．

## 1.1　密度行列

密度行列 $\hat{\rho}$ は状態 $|\psi\rangle$ に対して，

$$\hat{\rho} \coloneqq |\rho\rangle\langle\rho| \tag{1.1}$$

と定義される．まず，任意の物理量の期待値が

### 1.2 偏光基底

### 1.3 密度行列の再構成