以降では，複素数であることを強調するとき，チルダを付けることにする．

0.1　偏光状態

真空中の Maxwell 方程式は，

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

である．微分方程式は線型であるから，以降では，$\boldsymbol{E} \to \tilde{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{B} \to \tilde{\boldsymbol{B}}$ とする．さて，**式** (**??**) の第 1 式の両辺に $\nabla\times$ を作用させると，

$$\nabla \times \left(\nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{0.2}$$

0.2　Pauli 行列

本小節では，ベクトル空間と内積空間についての定義を与えたあと，Hermite 行列が Herm(N) が内積空間となることを示す．ただし，Hermite 行列は，

$$\mathrm{Herm}(N) \in \left\{ \hat{H} \in \mathbb{C}^{N \times N} \mid \hat{H} = \hat{H}^\dagger \right\} \tag{0.1}$$

である．

V が K 上のベクトル空間であることは，以下の条件を全て満たすことである．ただし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$a, b \in K$ とする．

ベクトル空間の定義

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \ \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}$
2. $\exists \boldsymbol{0} \in V \ \forall \boldsymbol{v} \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
3. $\forall \boldsymbol{v} \in V \ \exists - \boldsymbol{u} \ \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
4. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
5. $\forall a \in K \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \ a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$
6. $\forall a, b \in K \ \forall \boldsymbol{v} \in V \ (a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$
7. $\forall a, b \in K \ \forall \boldsymbol{v} \in V \ a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v}$
8. $\exists 1 \in K \ \forall \boldsymbol{v} \in V \ 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Herm(N) は通常の行列の演算規則に従えば，明らかに $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．

内積は，ベクトル空間 V に対して定義された演算 $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ が以下の性質を満たすものである．ただし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$a, b \in \mathbb{C}$ とする．

内積の定義

1. $(\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
2. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})^*$
3. $\forall \boldsymbol{u} \ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$
4. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \implies \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

$A, B \in \mathrm{Herm}(N)$ に対して内積を定義するには，対角和を用いて，

$$(A, B) = \mathrm{tr}\big(A^\dagger B\big) \tag{0.2}$$

と定義すればよい．行列の対角和が $\mathrm{Herm}(N)$ の内積になることは非自明なので示す．ただし，$A, B \in \mathrm{Herm}(N) A$ の固有値を $\lambda_1, \ldots \lambda_N$ とする．

Proof. 1. $(A, \lambda B) = \mathrm{tr}\left(A^\dagger \lambda B\right) = \lambda \,\mathrm{tr}\left(A^\dagger B\right) = \lambda(A, B)$

2. $(B, A)^* = \mathrm{tr}\left(B^\dagger A\right)^* = \mathrm{tr}\left(\left(B^\dagger A\right)^\dagger\right) = \mathrm{tr}\left\{A^\dagger B\right\} = (A, B)$

3. A は Hermite 行列であるから固有値は全て実数で，$(A, A) = \mathrm{tr}\left\{A^\dagger A\right\} = \mathrm{tr}\left\{A^2\right\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \geq 0$

4. $(A, A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 = 0$ となるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$ となるときのみで，そのときは A は 0 行列である．

よって，対角和を用いて内積を定義すると，$\mathrm{Herm}(N)$ は内積空間になる． □

Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものは $\mathrm{Herm}(2)$ の正規直交基底となる．ただし，Pauli 行列は，

$$\hat{\sigma}^0 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

$$\hat{\sigma}^1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

$$\hat{\sigma}^2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

$$\hat{\sigma}^3 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.6}$$

と定義される．まず，Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものが $\mathrm{Herm}(2)$ の基底であることを示す．

Proof. $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ を用いると，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a_0 \hat{\sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 \hat{\sigma}^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_2 \hat{\sigma}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_3 \hat{\sigma}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - \mathrm{i} a_2 \\ a_1 + \mathrm{i} a_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix} \tag{0.7}$$

となり，Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものの線形結合で任意の Hermite 行列が書けることが分かる． □

また，Pauli 行列を $\sqrt{2}$ で割ったものは正規直交基底を成すことが分かる．

Proof. Pauli 行列同士の内積について，

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{0.8}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{0.9}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{0.10}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{0.11}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.12}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.13}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.14}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.15}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.16}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}^3\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\right\} = 0 \tag{0.17}$$

となり，Pauli 行列は正規直交基底であると分かる．内積の順序入れ替えについては，以上の計算結果が全て実数であることから省略する． □

0.3 Stokes パラメータ，偏光行列，Poincaré 球，Jones ベクトル

0.4 複屈折

0.5 波長板の効果