

論文まとめノート

Haruki AOKI

更新日: May 31, 2025

Contents

1	Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation	2
2	Realization of Quantum Toffoli Gate with Trapped Ions	5
3	Coherent control of a local phonon in trapped ions using dynamical decoupling	6
4	Cavity-Enhance Solid-state Nuclear Spin Gyroscope	7
5	Electromagnetically induced transparency in mechanical effects of light	10
6	Enhancing optomechanical force sensing utilizing synthetic magnetism	14
7	Quantum entanglement in two-photon Rabi Stark Model	17

Chapter 1

Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation

種類 Article

閲覧日 13th May 2025

キーワード

文献番号 [1]

関連論文 特になし.

1.1 量子 Langevin 方程式

着目系 \hat{H}_{sys} , 熱浴 \hat{H}_{B} , それらの相互作用 \hat{H}_{int} の全体を考える. 全体のハミルトニアンは,

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{sys}} + \hat{H}_{\text{B}} + \hat{H}_{\text{int}} \quad (1.1.1)$$

である. 熱浴は Boson 場であるとして, 熱浴のハミルトニアンと相互作用のハミルトニアンは,

$$\hat{H}_{\text{B}}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hbar \omega \hat{b}^{\dagger}(\omega, t) \hat{b}(\omega, t) \quad (1.1.2)$$

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hbar i \kappa(\omega) \left(\hat{b}^{\dagger}(\omega, t) \hat{c}(t) - \hat{c}^{\dagger}(t) \hat{b}(\omega, t) \right) \quad (1.1.3)$$

とする. $\hat{b}(\omega, t)$ は時刻 t における, 周波数モード ω の消滅演算子であり,

$$\left[\hat{b}(\omega, t), \hat{b}^{\dagger}(\omega', t) \right] = \delta(\omega - \omega') \quad \left[\hat{b}(\omega, t), \hat{b}(\omega', t) \right] = 0 \quad (1.1.4)$$

であるとする. また, \hat{c} は着目系の演算子のうち, 熱浴と相互作用するものである. さて, 熱浴の演算子 $\hat{b}(\omega, t)$ や, 着目系の任意の物理量 $\hat{a}(t)$ の時間発展を考えよう. Heisenberg の方程式より,

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{b}(\omega, t), \hat{H}(t) \right] \quad (1.1.5)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{b}(\omega, t), \hat{H}_{\text{B}}(t) \right] - \frac{i}{\hbar} \left[\hat{b}(\omega, t), \hat{H}_{\text{int}}(t) \right] \quad (1.1.6)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hbar \omega' \left(\hat{b}(\omega, t) \hat{b}^\dagger(\omega', t) \hat{b}(\omega', t) - \hat{b}^\dagger(\omega', t) \hat{b}(\omega', t) \hat{b}(\omega, t) \right) \quad (1.1.7)$$

$$- \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hbar i \kappa(\omega') \left(\hat{b}(\omega, t) \hat{b}^\dagger(\omega', t) \hat{c}(t) - \hat{b}^\dagger(\omega', t) \hat{c}(t) \hat{b}(\omega, t) \right) \quad (1.1.8)$$

$$= -i\omega \hat{b}(\omega, t) + \kappa(\omega) \hat{c}(t) \quad (1.1.9)$$

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{b}(\omega, t), \hat{H}(t)] \quad (1.1.10)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{sys}}(t)] - \frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{int}}(t)] \quad (1.1.11)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{sys}}(t)] + \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega) \left(\hat{b}^\dagger(\omega, t) [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] \hat{b}(\omega, t) \right) \quad (1.1.12)$$

である．まず， $\hat{b}(\omega, t)$ に関する非斉次微分方程式，

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial t} = -i\omega \hat{b}(\omega, t) + \kappa(\omega) \hat{c}(t) \quad (1.1.13)$$

を未定係数法で解く．斉次式は，

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial t} = -i\omega \hat{b}(\omega, t) \quad (1.1.14)$$

であるので，斉次解は，

$$\hat{b}(\omega, t) = e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0(\omega), \quad \hat{b}_0(\omega) := \hat{b}(\omega, t_0) \quad (1.1.15)$$

である．未定係数法では，時間に依存しない $\hat{b}_0(\omega)$ を時間依存する項とみなして，元の微分方程式に代入するのであった．すると，

$$e^{-i\omega(t-t_0)} \frac{\partial \hat{b}_0}{\partial t} - i\omega(t-t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0(\omega, t) = -i\omega e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0(\omega) + \kappa(\omega) \hat{c}(t) \quad (1.1.16)$$

$$\iff \frac{\partial \hat{b}_0}{\partial t} = \kappa(\omega) e^{i\omega(t-t_0)} \hat{c}(t) \quad (1.1.17)$$

$$\implies \hat{b}_0(\omega, t) = \kappa(\omega) \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega(t'-t_0)} \hat{c}(t') \quad (1.1.18)$$

と書ける．よって，

$$\hat{b}(\omega, t) = e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0(\omega) + e^{-i\omega(t-t_0)} \kappa(\omega) \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega(t'-t_0)} \hat{c}(t') \quad (1.1.19)$$

$$\iff \hat{b}(\omega, t) = e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0(\omega) + \kappa(\omega) \int_{t_0}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \hat{c}(t') \quad (1.1.20)$$

である． $\hat{a}(t)$ に関する微分方程式は，式 (1.1.20) を用いて，

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{sys}}(t)] + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) \left\{ e^{i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0^\dagger(\omega) [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - e^{-i\omega(t-t_0)} [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] \hat{b}_0(\omega) \right\} \quad (1.1.21)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\kappa(\omega)]^2 \int_{t_0}^t dt' \left(e^{i\omega(t-t')} \hat{c}^\dagger(t') [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] e^{-i\omega(t-t')} \hat{c}(t') \right) \quad (1.1.22)$$

となる．

式 (1.1.22) に第 1 Markov 近似を行う．すなわち，

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \quad (1.1.23)$$

とする．

ところで、1 を Fourier 変換すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi\delta(t-t') \quad (1.1.24)$$

となる。また、デルタ関数は偶関数であるから、

$$\int_{t_0}^t dt' c(t')\delta(t-t') = \int_0^{t-t_0} d\tau c(t-\tau)\delta(\tau) \quad (1.1.25)$$

$$= \int_0^{\infty} d\tau \delta(t-\tau)\delta(\tau) \quad (1.1.26)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta(t-\tau)\delta(\tau) \quad (1.1.27)$$

$$= \frac{1}{2} c(t) \quad (1.1.28)$$

となる。また、初期状態での熱浴の演算子 $\hat{b}_0(\omega) = \hat{b}(\omega, 0)$ の Fourier 変換を、

$$\hat{b}_{\text{in}}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0 \quad (1.1.29)$$

と定義する。これらの記法を用いると式 (1.1.22) は、

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{sys}}(t)] + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) \left\{ e^{i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0^\dagger(\omega) [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - e^{-i\omega(t-t_0)} [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] \hat{b}_0(\omega) \right\} \quad (1.1.30)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\kappa(\omega)]^2 \int_{t_0}^t dt' \left(e^{i\omega(t-t')} \hat{c}^\dagger(t') [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] e^{-i\omega(t-t')} \hat{c}(t') \right) \quad (1.1.31)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{sys}}(t)] + \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \left[\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0^\dagger \right\} [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0^\dagger \right\} \right] \quad (1.1.32)$$

$$+ \frac{\gamma}{2\pi} \left[\int_{t_0}^t dt' \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \right\} \hat{c}^\dagger(t') [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - \int_{t_0}^t dt' \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \right\} [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] \hat{c}(t') \right] \quad (1.1.33)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{sys}}(t)] + \sqrt{\gamma} [\hat{b}_{\text{in}}(t) [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(t)] \quad (1.1.34)$$

$$+ \gamma \left[\int_{t_0}^t dt' \delta(t-t') \hat{c}^\dagger(t') [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - \int_{t_0}^t dt' \delta(t-t') [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] \hat{c}(t') \right] \quad (1.1.35)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{sys}}(t)] + \sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}}(t) [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - \sqrt{\gamma} [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(t) + \frac{\gamma}{2} \hat{c}^\dagger(t) [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] - \frac{\gamma}{2} [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] \hat{c}(t) \quad (1.1.36)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{sys}}(t)] - [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] \left(\sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}} + \frac{\gamma}{2} \hat{c} \right) + \left(\sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}}^\dagger + \frac{\gamma}{2} \hat{c}^\dagger \right) [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] \quad (1.1.37)$$

となる。よって、 $\hat{a}(t)$ の時間発展は、

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hat{H}_{\text{sys}}(t)] - [\hat{a}(t), \hat{c}^\dagger(t)] \left(\sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}}(t) + \frac{\gamma}{2} \hat{c}(t) \right) + \left(\sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(t) + \frac{\gamma}{2} \hat{c}^\dagger(t) \right) [\hat{a}(t), \hat{c}(t)] \quad (1.1.38)$$

と書ける。

第 1 Markov 近似を行った式 (1.1.22) は次の 4 つの特徴を持つ。

1. 着目系に関して減衰項が存在する。着目系が調和振動子モデルのハミルトニアンを持ち、その周波数は ω_0 の整数倍であるとする。熱浴と相互作用する着目系の演算子は \hat{a} であり、またそれだけのとき $\hat{c}(t) = \hat{a}(t)$ として式 (1.1.38) は、

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t)] - [\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] \left(\sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}}(t) + \frac{\gamma}{2} \hat{a}(t) \right) + \left(\sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(t) + \frac{\gamma}{2} \hat{a}^\dagger(t) \right) [\hat{a}(t), \hat{a}(t)] \quad (1.1.39)$$

$$\iff \frac{d\hat{a}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \hat{a}(t) - \sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}}(t) - \frac{\gamma}{2} \hat{a}(t) \quad (1.1.40)$$

となり、第 1 項は周波数 ω_0 で振動する項、第 2 項は減衰する項である。

2. \hat{b}_{in} はノイズ項である。初期状態 \hat{b}_{in} に依存せず、式 (1.1.22) は成立する。

伊藤積分以降、わからない。数理物理の分野になるから深追いしないことにした。

Chapter 2

Realization of Quantum Toffoli Gate with Trapped Ions

種類 Article

閲覧日 14th May 2025

キーワード Trapped-ion, Toffoli gate, Quantum Computer

文献番号 [\[2\]](#)

関連論文 [\[3\]](#), [\[4\]](#)

Chapter 3

Coherent control of a local phonon in trapped ions using dynamical decoupling

種類 Article

閲覧日 14th May 2025

キーワード Trapped-ion, Dynamical decoupling

文献番号 [2]

関連論文 Qudit への応用 [5], 論文の元のアイデア [6]

3.1 行ったこと

ダイナミカルデカップリングを用いて、ホッピングによる状態遷移から量子ビットを守る.

3.2 モチベーション

イオントラップ系は、イオンの内部状態の2準位系とボゾンの運動状態が結合した系である. そのうち、運動状態を用いた量子計算であるボゾンサンプリングが量子コンピュータの1つとして注目されている. ボゾンサンプリングは、 $\#P$ 困難問題の1つである Slater 行列式を計算することに期待されている. イオンを線状に並べて計算を行う方式では、イオンの運動状態が Coulomb 力によって相互作用をする. そのハミルトニアンは,

$$\hat{H}_{\text{hop}} = \frac{\kappa_{12}}{2} (\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2) \quad (3.2.1)$$

である. このホッピングによって系の状態が変わってしまうことを、パルスを打って時間反転することで打ち消そうとすることが今回のモチベーションである.

Chapter 4

Cavity-Enhance Solid-state Nuclear Spin Gyroscope

種類 Article

閲覧日 17th May 2025

キーワード Nitrogen Vacancy, Cavity QED

文献番号 [7]

関連論文 核スピンを用いた角速度センシング [8], 核スピンと電子スピンを用いた角速度の保存 [9]

4.1 行ったこと

1. 反転分布なしのメーザを nNV-cQED 系で実現.
2. NV の電子スピン-核スピン-共振器系を用いた, NV を用いた角速度センシングの精度の 3 桁改善.
3. 角速度のベクトルセンシング.
4. 核スピンの環境系によるノイズを影響を電子スピンの補正する共磁力計の実現.

4.2 詳細

4.2.1 ドライブ・プローブ干渉

NV の電子スピン-核スピン系のハミルトニアンは,

$$\hat{H}_{\text{NV}} = D\hat{S}_z^2 + \gamma_e\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B} + Q\hat{I}_z^2 - \gamma_n\hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{B} + \hat{\mathbf{S}}\mathcal{A}\hat{\mathbf{I}} \quad (4.2.1)$$

と書ける. ただし, \hat{S}_z は電子スピンの演算子, \hat{I}_z は核スピンの演算子, \mathcal{A} は対角的な超微細構造のテンソルである. どちらもスピン 1 系であり, $|1\rangle := |m_s = 0, m_I = -1\rangle$, $|2\rangle := |m_s = 0, m_I = 0\rangle$, $|e\rangle := |m_s = 1, m_I = -1\rangle$ のような Λ 型準位として用いる.

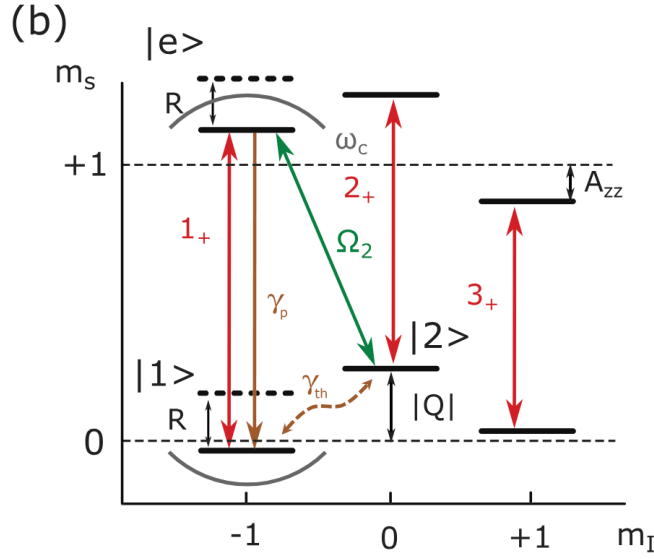


図 4.1: 今回用いる NV の準位図. 横軸が核スピン, 縦軸が電子スピンを表している.

N 個の NV が集まったアンサンブルを考える. プローブとして, 共振器 (マイクロ波) のモード \hat{a} は, エネルギー差が ω_c である $|1\rangle$ と $|e\rangle$ と結合しているとするまた $|2\rangle$ と $|e\rangle$ を遷移する Rabi 周波数が Ω_2 となるように周波数 ω_d のドライブ光が入っているとする. 共振器の結合 g が共振器の緩和レート κ や電子スピンのデコヒーレンスレート Γ よりも十分大きい, $C = 4g^2/(\kappa\Gamma) \sim 20$ の強結合領域を考える. ω_c と ω_d の離調 Δ が 0 になると, 電磁誘導透過 (EIT) が起こる.

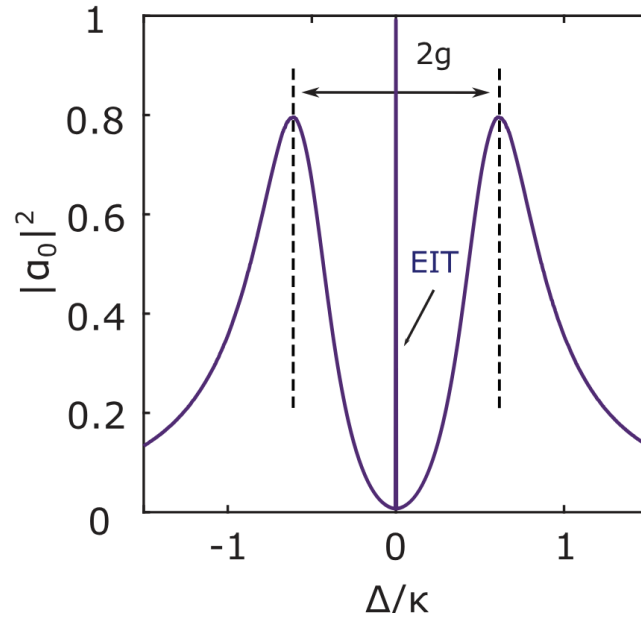


図 4.2: EIT の様子. $|\alpha|_0$ が NV センターの吸収強度を表す. この現象は 2 つの場の量子干渉ととらえることができる.

さらに Rabi 周波数を大きくすると, 透過するだけでなく, プローブ光が増強されること (MWI) が分かる.

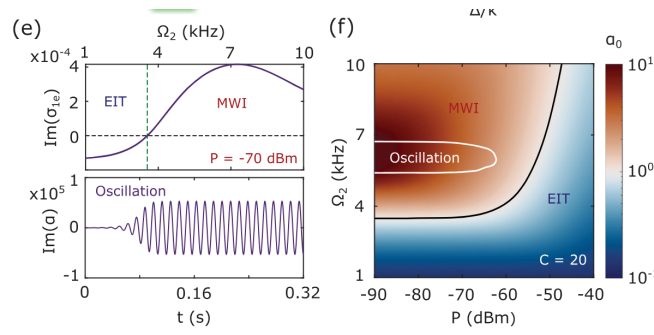


図 4.3: (e): Rabi 周波数を大きくすると EIT から MWI へと切り替わることがわかる. (f): プローブ光の強度と Rabi 周波数による, EIT と MWI の関係.

4.2.2 角速度センシング

角速度 \mathbf{R} で回っているとき, ハミルトニアンに $\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{I}}$ の項を足せば良く, エネルギーシフトを意味する. この原理を用いると, 従来の感度が $\eta_{\text{exp}} = 4.7 \text{ mdeg/s}/\sqrt{\text{Hz}}$ であったものが, MWI の領域では $1.5 \text{ deg/s}/\sqrt{\text{Hz}}$, EIT の領域では $3.5 \text{ mdeg/s}/\sqrt{\text{Hz}}$ となる. なお, Standard Quantum Limit (SQL) は今回のサンプルの場合, $0.04 \text{ mdeg/s}/\sqrt{\text{Hz}}$ であり, 改善の余地がある一方, ショットノイズ限界からは 3 桁改善した結果である.

4.2.3 共磁力計による精度改善

電子スピンのように同様の原理で測定を行うことで補正を行った.

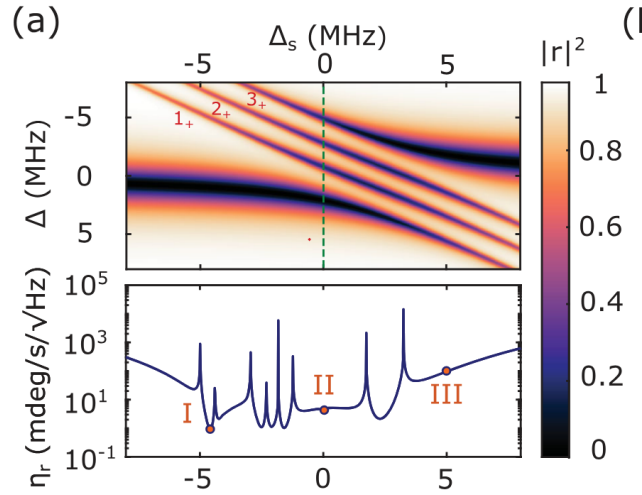


図 4.4: 上: 2 つの離調 Δ と Δ_s による共振器の透過率 $|r|^2$. 下: $\Delta_s = 0 \text{ MHz}$ としたときの感度.

$\Delta = -4.7 \text{ MHz}$ で感度 $\eta_r = 1 \text{ mdeg/s}/\sqrt{\text{Hz}}$ を達成して, 単純な角速度センシングよりも改善していることが分かる. 実効的には 3 つ目の核スピンを用いて改善と言っているが, ということがよくわからない.

Chapter 5

Electromagnetically induced transparency in mechanical effects of light

種類 Rapid communications

閲覧日 24th May 2025

キーワード EIT, OMIT

文献番号 [10]

関連論文 Λ 型エネルギーの EIT[11], 実験実証 [12]

5.1 行ったこと

オプトメカニクス系における Electromagnetically induced transparency (EIT), OMIT を予言した.

5.2 原理

系のハミルトニアンを,

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{c}^\dagger\hat{c} + \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_m^2\hat{q}^2\right) + i\hbar\varepsilon_c(\hat{c}^\dagger e^{-i\omega_c t} - \hat{c}e^{i\omega_c t}) + i\hbar(\hat{c}^\dagger\varepsilon_p e^{-i\omega_p t} - \hat{c}\varepsilon_p^* e^{i\omega_p t}) - \chi_0\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{q} \quad (5.2.1)$$

とする. \hat{c} は共振器内光子の消滅演算子, \hat{q}, \hat{p} は共振器の振動に関する量子化した位置と運動量, ε_c はポンプ光のエネルギー, ε_p はプローブ光のエネルギーである. なお, 結合定数 $\chi_0 = \hbar\omega_0/L$ において, L は共振器長である. 系のセットアップは図 5.1 の通り.

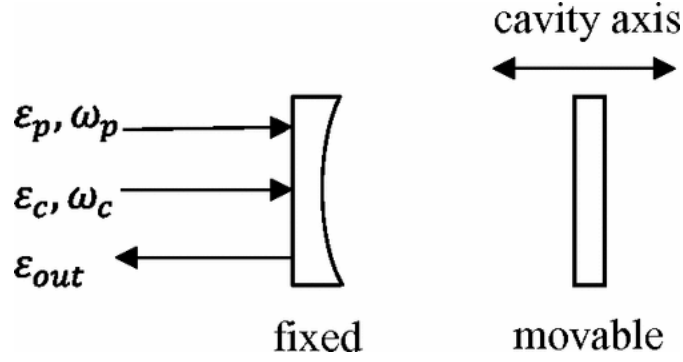


図 5.1: 系のセットアップ

演算子, \hat{q} , \hat{p} , \hat{c} の時間発展を考える. ただし,

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad [\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1 \quad (5.2.2)$$

である.

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{q}, \hat{H}] \quad (5.2.3)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{q}, \frac{\hat{p}^2}{2m} \right] \quad (5.2.4)$$

$$= \frac{\hat{p}}{m}, \quad (5.2.5)$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{p}, \hat{H}] \quad (5.2.6)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{p}, \frac{1}{2} m \omega_m^2 \hat{q}^2 \right] + \frac{i}{\hbar} \chi_0 \hat{c}^\dagger \hat{c} [\hat{p}, \hat{q}] \quad (5.2.7)$$

$$= -m \omega_m^2 \hat{q} + \chi_0 \hat{c}^\dagger \hat{c}, \quad (5.2.8)$$

$$\frac{d\hat{c}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{c}, \hat{H}] \quad (5.2.9)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\hat{c}, \hbar \omega_0 \hat{c}^\dagger \hat{c}] - \frac{i}{\hbar} [\hat{c}^\dagger, i \hbar \varepsilon_c \hat{c}^\dagger e^{-i\omega_c t}] - \frac{i}{\hbar} [\hat{c}^\dagger, i \hbar \varepsilon_p e^{-i\omega_p t}] - \frac{i}{\hbar} [\hat{c}, \chi_0 \hat{c}^\dagger \hat{c}] \hat{q} \quad (5.2.10)$$

$$= -i\omega_0 \hat{c} + \varepsilon_c e^{-i\omega_c t} + \varepsilon_p e^{-i\omega_p t} + \frac{i}{\hbar} \chi_0 \hat{c} \hat{q}. \quad (5.2.11)$$

式 (5.2.11) については, 周波数 ω_c で回転する座標で見ると, $\tilde{c} = \hat{c} e^{-i\omega_c t}$ とすればよく,

$$\frac{d\tilde{c}}{dt} = i\omega_c \tilde{c} - i(\omega_0 - \chi_0 \hat{q}) \tilde{c} + \varepsilon_c + \varepsilon_p e^{i(\omega_c - \omega_p t)} \quad (5.2.12)$$

となる. 期待値を取る. さらに, 恣意的にダンピング項を入れる. すなわち, 式 (5.2.8) の右辺に $-\gamma \hat{p}$ を足し, 式 (5.2.12) の右辺に $-\kappa \tilde{c}$ を足す. まとめると,

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m}, \quad (5.2.13)$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = -m \omega_m^2 \langle \hat{q} \rangle + \chi_0 \langle \hat{c}^\dagger \rangle \langle \tilde{c} \rangle - \gamma_m \langle \hat{p} \rangle, \quad (5.2.14)$$

$$\frac{d\tilde{c}}{dt} = -\left[\kappa + i\left(\omega_0 - \omega_c - \frac{\chi_0}{\hbar} \langle \hat{q} \rangle \right) \right] \langle \tilde{c} \rangle + \varepsilon_c + \varepsilon_p e^{i(\omega_c - \omega_p t)}. \quad (5.2.15)$$

また, 光子の入出力関係から,

$$\varepsilon_{\text{out}}(t) + \varepsilon_p e^{-i\omega_p t} + \varepsilon_c e^{-i\omega_c t} = 2\kappa \langle \tilde{c} \rangle \quad (5.2.16)$$

が成立する. さて, ポンプ光が存在しないときの入出力関係式を考える. $\varepsilon_c = 0$ とすると, 式 (5.2.16) は,

$$\varepsilon_{\text{out}}(t) + \varepsilon_p e^{-i\omega_p t} = 2\kappa \langle \tilde{c} \rangle \quad (5.2.17)$$

となる．なお、 $\langle \hat{c} \rangle$ の時間変化は式 (5.2.15) ではなく、式 (5.2.11) を用いて、

$$\left\langle \frac{d\hat{c}}{dt} \right\rangle = - \left[\kappa + i \left(\omega_0 - \frac{\chi_0}{\hbar} \langle \hat{q} \rangle \right) \right] \langle \hat{c} \rangle + \varepsilon_p e^{-i\omega_p t} \quad (5.2.18)$$

と書き換えられる．ポンプ光が存在しないとき、可動鏡の平均位置はプローブ光による変位であるから、

$$\langle \hat{q} \rangle = L \frac{\hbar \omega_p}{\hbar \omega_0} = L \frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{\hbar \omega_p}{\chi_0} \quad (5.2.19)$$

となる．また、定常状態について考えれば、

$$\left\langle \frac{d\hat{c}}{dt} \right\rangle = 0. \quad (5.2.20)$$

結局、

$$\langle \hat{c} \rangle = \frac{\varepsilon_p e^{-i\omega_p t}}{\kappa + i(\omega_0 - \omega_p)} \quad (5.2.21)$$

となる．これを用いると、共振器内の平均光子数を入力、外部の光子数を出力とした伝達函数を考えることができる．特に、プローブ光の周波数での応答を考えたいので、

$$\varepsilon_T = \frac{2\kappa \langle \hat{c} \rangle}{\varepsilon_p e^{-i\omega_p t}} \quad (5.2.22)$$

を伝達函数とする．もちろん、ポンプ光が存在しないときは、

$$\varepsilon_T = \frac{1}{\kappa + i(\omega_0 - \omega_p)} \quad (5.2.23)$$

である．ポンプ光が存在するときの伝達函数について求めることは出来なかったが、論文では行われており、

$$\varepsilon_T = \frac{2\kappa}{d(\delta)} [(\delta^2 - \omega_m^2 + i\gamma_m \delta)(\kappa - i(\Delta + \delta)) - 2i\omega_m \beta] \quad (5.2.24)$$

$$(5.2.25)$$

where,

$$d(\delta) := (\delta^2 - \omega_m^2 + i\gamma_m) \left((\kappa - i\delta)^2 + \Delta^2 \right) + 4\Delta\omega_m\beta, \quad (5.2.26)$$

$$\delta := \omega_p - \omega_c, \quad (5.2.27)$$

$$\Delta := \omega_0 - \omega_c - \frac{2\beta\chi_0}{\omega_m}, \quad (5.2.28)$$

$$\beta := \frac{\chi_0^2 |\tilde{c}_0|^2}{2m\hbar\omega_m}, \quad (5.2.29)$$

$$\tilde{c}_0 := \frac{\varepsilon_c}{\kappa + i\Delta}. \quad (5.2.30)$$

おそらくここがこの論文の革新的な仕事なのだろう．伝達函数の実部を \mathcal{V}_p 、虚部を $\tilde{\mathcal{V}}_p$ とする．伝達函数を、

$$\varepsilon_T = \frac{A_+}{x - x_+} + \frac{A_-}{x - x_-} \quad (5.2.31)$$

と書く．実部は、出力光の強度、虚部は位相を表す．

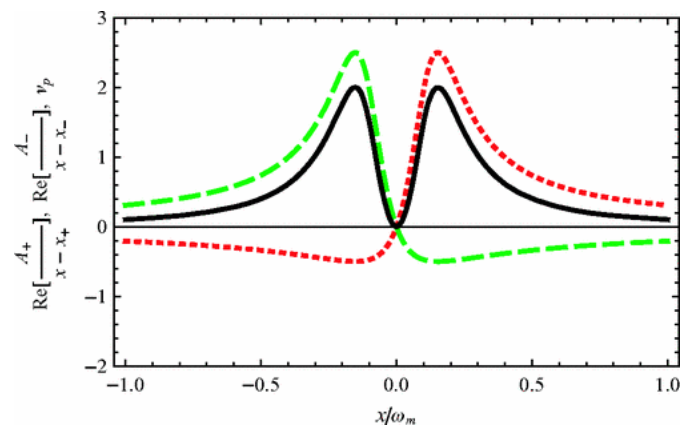


図 5.2: 黒が伝達函数の実部. 赤が式 (5.2.31) の第 1 項の実部, 赤が第 2 項の実部.

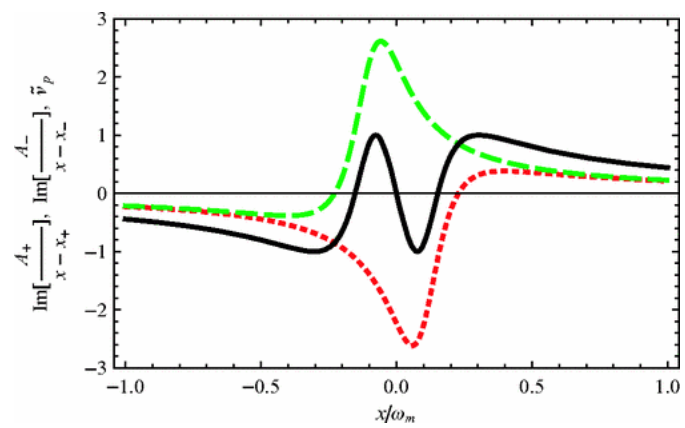


図 5.3: 黒が伝達函数の虚部. 赤が式 (5.2.31) の第 1 項の虚部, 赤が第 2 項の虚部.

Chapter 6

Enhancing optomechanical force sensing utilizing synthetic magnetism

種類 Article

閲覧日 26th May 2025

キーワード optomechanical sensing, synthetic magnetism

文献番号 [13]

関連論文 エンタングルメントの論文 [14], オプトメカニクスのブライトとダーク [15], 超伝導での微小な力の測定 [16], Synthetic magnetism に関する理論計算 [14], 人工磁場に関する超伝導量子ビットでの測定 [17], 量子 Langevin 方程式 [18], 実現可能なオプトメカニクス系 [19]

6.1 行ったこと

フォノンホッピングを人工磁場とみなしてオプトメカニクス系を用いて, SQL(Standard quantum limit) を超えた測定の理論提案.

6.2 モデル

系のモデルは以下の通り.

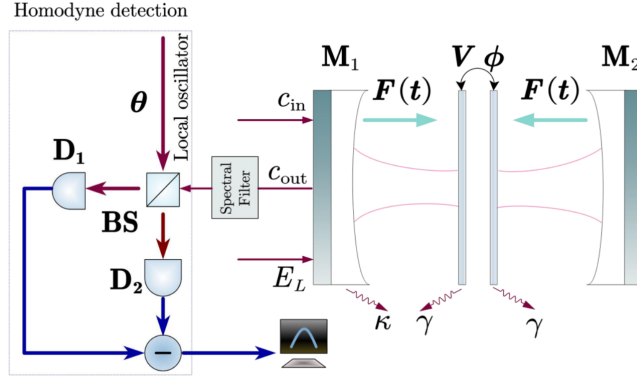


図 6.1: 系のセットアップ. 共振器中に 2 つの機械振動ミラーがある. 共振器内のフォトンのモードが \hat{c} , 機械振動ミラーのフォノンモードが \hat{b} である. 2 つのミラーの結合強度が F であり, 位相 ϕ が付く. 系は外部から古典的なコヒーレント光によって駆動されて, 強度は E_L である. 共振器にはノイズ \hat{c}_{in} が入る. また, 共振器からは \hat{c}_{out} の光が出る. 共振器モードの緩和は κ であり, フォノンモードの緩和は γ である. 検出は, ローカルオシレータ光と θ だけ位相を付けてホモダイン検出を行う.

ドライブする光の周波数 ω_L で回転する座標系でのハミルトニアンは, ω_c をフォトンの振動数として, $\Delta := \omega_c - \omega_L$ とすれば,

$$\hat{H} = \hbar \Delta \hat{c}^\dagger \hat{c} + \hbar \sum_{i=1,2} \left[\omega_m \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + g \hat{c}^\dagger \hat{c} (\hat{b}_i + \hat{b}_i^\dagger) \right] \quad (6.2.1)$$

$$+ \hbar V \left(e^{i\phi} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + e^{-i\phi} \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \right) \quad (6.2.2)$$

$$- x_{\text{ZPF}} F(t) \sum_{i=1,2} (\hat{b}_i + \hat{b}_i^\dagger) + i \hbar E_L (\hat{c}^\dagger - \hat{c}) \quad (6.2.3)$$

と書ける. 第 1 項は回転座標系上でのフォトンモード, 第 2 項はフォノンモード, 第 3 項はフォノン・フォトン相互作用, 第 4 項は人工磁場によるフォノンホッピング, 第 5 項は機械振動ミラーのポテンシャル, 第 6 項はレーザ光と共振器モードとの古典的な相互作用. さらに,

$$\hat{X}_i := \frac{\hat{b}_i^\dagger + \hat{b}_i}{\sqrt{2}}, \quad \hat{P}_i := i \frac{\hat{b}_i^\dagger - \hat{b}_i}{\sqrt{2}}, \quad i = 1, 2 \quad (6.2.4)$$

とすると,

$$\hat{H} = \hbar \Delta \hat{c}^\dagger \hat{c} + \frac{\hbar \omega_m}{2} \sum_{i=1,2} (\hat{X}_i^2 + \hat{P}_i^2) + \hbar g \hat{c}^\dagger \hat{c} (\hat{X}_1 + \hat{X}_2) \quad (6.2.5)$$

$$+ \hbar V \left[(\cos \phi \hat{X}_1 + \sin \phi \hat{P}_1) \hat{X}_2 + (\cos \phi \hat{P}_1 - \sin \phi \hat{X}_1) \hat{P}_2 \right] \quad (6.2.6)$$

$$+ i \hbar E_L (\hat{c}^\dagger - \hat{c}) - F_{\text{ext}} (\hat{X}_1 + \hat{X}_2) \quad (6.2.7)$$

と書ける. 種々の交換関係を用いて量子 Langevin 方程式を計算すると,

$$\dot{\hat{c}} = -(i\Delta + \kappa) \hat{c} - i g \hat{c} (\hat{X}_1 + \hat{X}_2) + E_L + \sqrt{2\kappa} \hat{c}_{\text{in}} \quad (6.2.8)$$

$$\dot{\hat{X}}_1 = \omega_m \hat{P}_1 + V \sin \phi \hat{X}_2 + V \cos \phi \hat{P}_2 \quad (6.2.9)$$

$$\dot{\hat{X}}_2 = \omega_m \hat{P}_2 - V \sin \phi \hat{X}_1 + V \cos \phi \hat{P}_1 \quad (6.2.10)$$

$$\dot{\hat{P}}_1 = -\omega_m \hat{X}_1 - g \hat{c}^\dagger \hat{c} - V \cos \phi \hat{X}_2 + V \sin \phi \hat{P}_2 \quad (6.2.11)$$

$$- \gamma \hat{P}_1 + \sqrt{2\gamma} f_{\text{in},1} \quad (6.2.12)$$

$$\dot{\hat{P}}_2 = -\omega_m \hat{X}_2 - g \hat{c}^\dagger \hat{c} - V \cos \phi \hat{X}_1 - V \sin \phi \hat{P}_1 \quad (6.2.13)$$

$$- \gamma \hat{P}_2 + \sqrt{2\gamma} f_{\text{in},2} \quad (6.2.14)$$

となる．平衡点周りで考え，微小変位の記号を省略すると，

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{X}_c \\ \hat{P}_c \\ \hat{X}_1 \\ \hat{P}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa & \Delta' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta' & -\kappa & -G' & -G' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \sin \phi & \omega_m & V \cos \phi \\ 0 & 0 & -V \sin \phi & 0 & V \cos \phi & \omega_m \\ -G' & 0 & -\omega_m & -V \cos \phi & -\gamma & V \sin \phi \\ -G' & 0 & -V \cos \phi & -\omega_m & -V \sin \phi & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_c \\ \hat{P}_c \\ \hat{X}_1 \\ \hat{P}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2\kappa}\hat{X}_{\text{in}} \\ \sqrt{2\kappa}\hat{P}_{\text{in}} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2\gamma}f_{\text{in},1} \\ \sqrt{2\gamma}f_{\text{in},2} \end{pmatrix} \quad (6.2.15)$$

である．以降，

$$\hat{\mathbf{u}}(t) := \begin{pmatrix} \hat{X}_c \\ \hat{P}_c \\ \hat{X}_1 \\ \hat{P}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} -\kappa & \Delta' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta' & -\kappa & -G' & -G' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \sin \phi & \omega_m & V \cos \phi \\ 0 & 0 & -V \sin \phi & 0 & V \cos \phi & \omega_m \\ -G' & 0 & -\omega_m & -V \cos \phi & -\gamma & V \sin \phi \\ -G' & 0 & -V \cos \phi & -\omega_m & -V \sin \phi & -\gamma \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{n}}_{\text{in}} := \begin{pmatrix} \sqrt{2\kappa}\hat{X}_{\text{in}} \\ \sqrt{2\kappa}\hat{P}_{\text{in}} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2\gamma}f_{\text{in},1} \\ \sqrt{2\gamma}f_{\text{in},2} \end{pmatrix} \quad (6.2.16)$$

とする．改めて，

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = A\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{n}}_{\text{in}} \quad (6.2.17)$$

である．Fourier 変換すると，

$$\hat{\mathbf{u}} = (-i\omega\hat{1} - A)^{-1} \hat{\mathbf{n}}_{\text{in}} \quad (6.2.18)$$

と書ける．今回はホモダイン検出を行うので，LO 項と \hat{c}_{in} の位相差を θ とすると， \hat{X}_c のモードの入出力関係式を用いると，

$$\hat{P}^o(\theta, \omega) := A_1 \hat{X}_c^{\text{in}} + A_2 \hat{P}_c^{\text{in}} + A_3 f_{\text{in},1} + A_4 f_{\text{in},1} \quad (6.2.19)$$

として，得られるパワースペクトルは，

$$S(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \frac{e^{i(\omega+\tilde{\omega})t}}{4\pi} \left\langle \hat{P}^o(\theta, \omega) \hat{P}^o(\theta, \tilde{\omega}) + \hat{P}^o(\theta, \tilde{\omega}) \hat{P}^o(\theta, \omega) \right\rangle \quad (6.2.20)$$

によって得られる．また，センシングしたい力の信号 $S_{\text{F}_{\text{ex}}}$ に，熱ノイズ S_{th} とその他のノイズ $N_{\text{add}}^{\theta, \phi}$ が加わり，応答関数 $R_m^{\theta, \phi}$ を掛けたものとなる．我々は， R を大きくして， N や S_{th} は小さくしたい．途中の計算は追っていない．おそらく，式 (6.2.19) の計算が主な仕事なのだろう．

Chapter 7

Quantum entanglement in two-photon Rabi Stark Model

種類 Article

閲覧日 31th May 2025

キーワード 2 光子 Rabi モデル, 量子エンタングルメント

文献番号 [20]

関連論文 2 光子 Rabi モデルの提唱 [21], Rabi-Stark 効果の論文 [22], Rabi モデルの解析解 [23], イオントラップ系での実験 [24]

7.1 行ったこと

2 光子 Rabi-Stark モデルでの, ボゾン場と 2 準位系のエンタングルメントの数値計算による評価.

7.2 モデル

まず, Rabi-Stark モデルとは, Boson 場と 2 準位系が相互作用する全体系に, さらに AC-Stark 効果により 2 準位系のエネルギーをシフトしたモデルである. 系のハミルトニアンは,

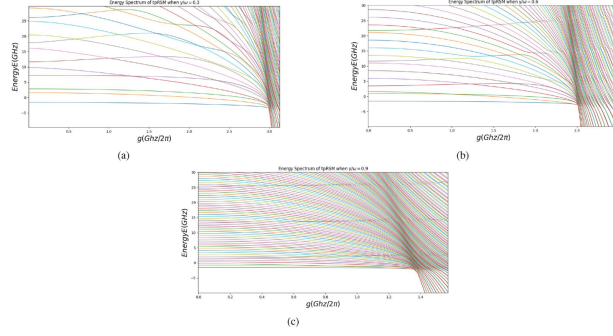
$$\hat{H}_{\text{QRSM}} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \gamma \hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (7.2.1)$$

である. さらに, 相互作用を 2 光子過程にの場合, 相互作用項は,

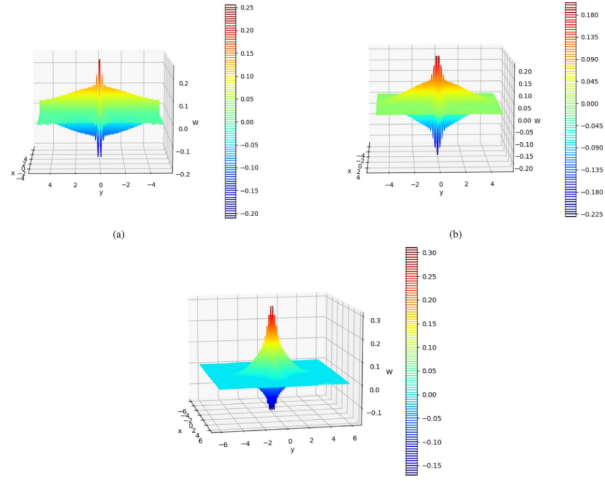
$$\hat{H}_{2\text{pRSM}} = -\left(\frac{\omega_0}{2} + \gamma \hat{a}^\dagger \hat{a}\right) + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2) \hat{\sigma}_z \quad (7.2.2)$$

と入る. これをシミュレーションしている.

7.3 結果

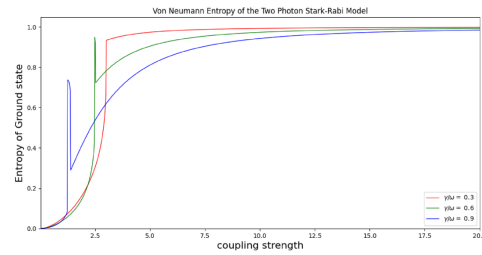


これは、AC-Stark シフトの強度 γ ごとに、結合の強さ g を変えたときのエネルギー準位の変化図. (a) は $\gamma/\omega = 0.3$, (b) は $\gamma/\omega = 0.6$, (c) は $\gamma/\omega = 0.9$. どれも、ある結合強度 g のとき、エネルギー準位が異常に近くなっていることが分かる.



これは Boson 場に関して部分トレースを取ったときの Wigner 関数. AC-Stark シフトが弱い時は Gauss 関数様になっている一方、強い時は Lorentz 関数のように壊れていることが分かる.

Fig.3 The von Neumann entropy S of the 2pRSM as a function of the coupling strength g for various values of the Stark coupling strength γ . In particular, we use the following values: $\gamma/\omega = 0.3$ (red line), $\gamma/\omega = 0.6$ (green line), and $\gamma/\omega = 0.9$ (blue line).



これは、系の von Neumann エントロピーを表していて、それぞれ、ピークが立っていることが分かる. von Neumann エントロピーは、系のもつれている度合いを評価する量である.

積読

- [12] Optomechanically induced Transparency
- [15] Two-colour interferometry and switching through optomechanical dark mode excitation
- [13] ~~Enhancing optomechanical force sensing utilizing synthetic magnetism~~
- [25] Kerr-enhanced optomechanical cooling in the unresolved-sideband regime
- [26] Strong Intrinsic Longitudinal Coupling in Circuit Quantum Electrodynamics
- [14] Noise-Tolerant Optomechanical Entanglement via Synthetic Magnetism
- [27] Suppression of Rabi oscillations in hybrid optomechanical systems
- [6] Scalable Implementation of Boson Sampling with Trapped Ions
- [28] Observation of Hopping and Blockade of Bosons in a Trapped Ion Spin Chain
- [29] Bose-Einstein Condensation and Strong-Correlation Behavior of Phonons in Ion Traps
- [30] Quantum enhanced radio detection and ranging with solid spins
- [31] Optomechanical Transducers for Long-Distance Quantum Commuunications
- [32] Optomechanical Dark Mode
- [33] Telecom-Wavelength Quantum Repeater Node Based on a Trapped-Ion Processor
- [15] Two-colour interferometry and switching through optomechanical dark mode excitation
- [34] Control and readout of a 13-level trapped ion qudit
- [35] ~~Quantum entanglement in two-photon Rabi Stark model~~

参考文献

- [1] C. W. Gardiner and M. J. Collett, “Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation”, *Phys. Rev. A* **31**, 3761 (1985).
- [2] R. Ohira, S. Kume, and K. Toyoda, “Coherent control of a local phonon in trapped ions using dynamical decoupling”, *Phys. Rev. A* **106**, 042603 (2022).
- [3] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, S. Gulde, M. Riebe, G. P. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, W. Hänsel, J. Eschner, C. Roos, and R. Blatt, “How to realize a universal quantum gate with trapped ions”, *Appl. Phys. B* **77**, 789 (2003).
- [4] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, M. Riebe, S. Gulde, G. P. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C. F. Roos, J. Eschner, and R. Blatt, “Realization of the Cirac–Zoller controlled-NOT quantum gate”, *Nature* **422**, 408 (2003).
- [5] R. T. Sutherland and S. D. Erickson, “Passive dynamical decoupling of trapped-ion qubits and qudits”, *Phys. Rev. A* **109**, 022620 (2024).
- [6] C. Shen, Z. Zhang, and L.-M. Duan, “Scalable Implementation of Boson Sampling with Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 050504 (2014).
- [7] H. Wang, S. Wu, K. Jacobs, Y. Duan, D. R. Englund, and M. E. Trusheim, “Cavity-Enhanced Solid-State Nuclear Spin Gyroscope”, *Phys. Rev. Lett.* **134**, 183603 (2025).
- [8] A. Ajoy and P. Cappellaro, “Stable three-axis nuclear-spin gyroscope in diamond”, *Phys. Rev. A* **86**, 062104 (2012).
- [9] H. Wang, K. L. Tiwari, K. Jacobs, M. Judy, X. Zhang, D. R. Englund, and M. E. Trusheim, “A spin-refrigerated cavity quantum electrodynamic sensor”, *Nat. Commun.* **15**, 10320 (2024).
- [10] G. S. Agarwal and S. Huang, “Electromagnetically induced transparency in mechanical effects of light”, *Phys. Rev. A* **81**, 041803 (2010).
- [11] M. Fleischhauer and M. D. Lukin, “Dark-State Polaritons in Electromagnetically Induced Transparency”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5094 (2000).
- [12] S. Weis, R. Rivière, S. Deléglise, E. Gavartin, O. Arcizet, A. Schliesser, and T. J. Kippenberg, “Optomechanically Induced Transparency”, *Science* **330**, 1520 (2010).
- [13] D.-h. Xu, Z. Liu, and C.-s. Yu, “Enhancing optomechanical force sensing utilizing synthetic magnetism”, *Phys. Rev. A* **111**, 053508 (2025).
- [14] D.-G. Lai, J.-Q. Liao, A. Miranowicz, and F. Nori, “Noise-Tolerant Optomechanical Entanglement via Synthetic Magnetism”, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 063602 (2022).
- [15] D. P. Lake, M. Mitchell, B. C. Sanders, and P. E. Barclay, “Two-colour interferometry and switching through optomechanical dark mode excitation”, *Nature communications* **11**, 2208 (2020).
- [16] K. Xu, Y.-R. Zhang, Z.-H. Sun, H. Li, P. Song, Z. Xiang, K. Huang, H. Li, Y.-H. Shi, C.-T. Chen, X. Song, D. Zheng, F. Nori, H. Wang, and H. Fan, “Metrological Characterization of Non-Gaussian Entangled States of Superconducting Qubits”, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 150501 (2022).
- [17] F. Massel, S. U. Cho, J.-M. Pirkkalainen, P. J. Hakonen, T. T. Heikkilä, and M. A. Sillanpää, “Multimode circuit optomechanics near the quantum limit”, *Nature communications* **3**, 987 (2012).
- [18] R. Benguria and M. Kac, “Quantum Langevin Equation”, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1 (1981).
- [19] M. Eichenfield, R. Camacho, J. Chan, K. J. Vahala, and O. Painter, “A picogram-and nanometre-scale photonic-crystal optomechanical cavity”, *nature* **459**, 550 (2009).

- [20] Z. Boutakka, Z. Sakhi, and M. Bennai, “Quantum Entanglement in Two-Photon Rabi Stark model”, *Appl. Phys. B* **131**, 113 (2025).
- [21] M. Hammani, Z. Sakhi, and M. Bennai, “On the Two-Photon Quantum Rabi model at the critical coupling strength”, *Opt. Quantum Electron.* **56**, 102 (2023).
- [22] A. L. Grimsco and S. Parkins, “Cavity-QED simulation of qubit-oscillator dynamics in the ultrastrong-coupling regime”, *Phys. Rev. A* **87**, 033814 (2013).
- [23] D. Braak, “Integrability of the Rabi Model”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 100401 (2011).
- [24] L. Cong, S. Felicetti, J. Casanova, L. Lamata, E. Solano, and I. Arrazola, “Selective Interactions in the Quantum Rabi model”, *Phys. Rev. A* **101**, 032350 (2020).
- [25] N. Diaz-Naufal, L. Deeg, D. Zoepfl, C. M. F. Schneider, M. L. Juan, G. Kirchmair, and A. Metelmann, “Kerr-enhanced optomechanical cooling in the unresolved-sideband regime”, *Phys. Rev. A* **111**, 053505 (2025).
- [26] C. A. Potts, R. C. Dekker, S. Deve, E. W. Stribis, and G. A. Steele, “Strong Intrinsic Longitudinal Coupling in Circuit Quantum Electrodynamics”, *Phys. Rev. Lett.* **134**, 153603 (2025).
- [27] T. Holz, R. Betzholtz, and M. Bienert, “Suppression of Rabi oscillations in hybrid optomechanical systems”, *Phys. Rev. A* **92**, 043822 (2015).
- [28] S. Debnath, N. M. Linke, S.-T. Wang, C. Figgatt, K. A. Landsman, L.-M. Duan, and C. Monroe, “Observation of Hopping and Blockade of Bosons in a Trapped Ion Spin Chain”, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 073001 (2018).
- [29] D. Porras and J. I. Cirac, “Bose-Einstein Condensation and Strong-Correlation Behavior of Phonons in Ion Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 263602 (2004).
- [30] X.-D. Chen, E.-H. Wang, L.-K. Shan, S.-C. Zhang, C. Feng, Y. Zheng, Y. Dong, G.-C. Guo, and F.-W. Sun, “Quantum enhanced radio detection and ranging with solid spins”, *Nat. Commun.* **14**, 1288 (2023).
- [31] K. Stannigel, P. Rabl, A. S. Sørensen, P. Zoller, and M. D. Lukin, “Optomechanical Transducers for Long-Distance Quantum Communication”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 220501 (2010).
- [32] C. Dong, V. Fiore, M. C. Kuzyk, and H. Wang, “Optomechanical Dark Mode”, *Science* **338**, 1609 (2012).
- [33] V. Krutyanskiy, M. Canteri, M. Meraner, J. Bate, V. Krcmarsky, J. Schupp, N. Sangouard, and B. P. Lanyon, “Telecom-Wavelength Quantum Repeater Node Based on a Trapped-Ion Processor”, *Phys. Rev. Lett.* **130**, 213601 (2023).
- [34] P. J. Low, B. White, and C. Senko, “Control and readout of a 13-level trapped ion qudit”, *npj Quantum Information* **11**, 1 (2025).
- [35] Z. Boutakka, Z. Sakhi, and M. Bennai, “Quantum entanglement in two-photon Rabi Stark model”, *Appl. Phys. B* **131**, 1 (2025).