Chapter 1

基本的要請と準備

本章では，これから議論する場の量子論の準備を行う．断りの無い限り，$c = \hbar = 1$ なる自然単位系を用いる．場の量子論は，既存の量子力学などの物理法則あるいは方程式を **Poincaré 変換**に対して不変な形に書き直す理論である．ただし，Poincaré 変換は，Lorentz 変換と時空並進変換のことである．

1.1　記法

まず，微小な時空間上の 2 点，(t, x, y, z)，$(t + \mathrm{d}t\,, x + \mathrm{d}x\,, y + \mathrm{d}y\,, z + \mathrm{d}z)$ に対して，世界長さ $\mathrm{d}s^2$ を考える．

$$\mathrm{d}s^2 \coloneqq \mathrm{d}t^2 - \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right) \tag{1.1.1}$$

4 次元時空座標を，

$$x^\mu \coloneqq (t, x, y, z) \tag{1.1.2}$$
$$x_\nu \coloneqq (t, -x, -y, -z) \tag{1.1.3}$$

と定義する．Einstein の縮約を使っていることに注意する．計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$，$\eta^{\mu\nu}$ を，

$$x_\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu \tag{1.1.4}$$
$$x^\nu = x_\mu \eta^{\mu\nu} \tag{1.1.5}$$

となるように定義する．計量テンソルを用いれば，

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{1.1.6}$$
$$= \mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu\,\eta^{\mu\nu} \tag{1.1.7}$$

と書ける．$\eta_{\mu\nu}$ は，上付き添え字が k 個，下付き添え字が l 個あるものに対して，添え字を上付き添え字を $k + l - 2$ 個，下付き添え字を $k + l + 2$ 個にするものだと考えてよい．なお，負の添え字の数は，添え字の上下を逆転させたものと考える．同様に，$\eta^{\mu\nu}$ は，上付き添え字が k 個，下付き添え字が l 個あるものに対して，添え字を上付き添え字を $k + l + 2$ 個，下付き添え字を $k + l - 2$ 個にするものだと考えてよい．

次に，全微分は，

$$\partial_\nu \coloneqq \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{1.1.8}$$
$$\partial^\nu \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_\nu} \tag{1.1.9}$$

と定義される．

1.2　Poincaré 変換

Poincaré 変換は，Lorentz 変換のパラメータを Λ^μ_ν，時空並進のパラメータを a^μ とすると，

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1.2.1}$$

と書ける．微小変位は，

$$\mathrm{d}x'^{\mu} = \mathrm{d}(\Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}) \tag{1.2.2}$$
$$= \Lambda^{\mu}_{\nu}\,\mathrm{d}x^{\nu} \tag{1.2.3}$$

と書けるから，世界長さ $\mathrm{d}s^2$ は，

$$\mathrm{d}s'^2 = \eta_{\rho\lambda}\,\mathrm{d}x'^{\rho}\,\mathrm{d}x'^{\lambda} \tag{1.2.4}$$
$$= \eta_{\rho\lambda}(\Lambda^{\rho}_{\nu}\,\mathrm{d}x^{\nu})\big(\Lambda^{\lambda}_{\mu}\,\mathrm{d}x^{\mu}\big) \tag{1.2.5}$$
$$= \eta_{\rho\lambda}\Lambda^{\rho}_{\nu}\Lambda^{\lambda}_{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu}\,\mathrm{d}x^{\mu} \tag{1.2.6}$$

となる．今，Poincaré 変換に対して方程式は不変であることが要請されているのであった．**式** (1.1.6) で与えられる世界長さを与える方程式も Poincaré 変換に対して不変であるべきだから，

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2 \tag{1.2.7}$$
$$\Leftrightarrow \eta_{\rho\lambda}\Lambda^{\rho}_{\nu}\Lambda^{\lambda}_{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu}\,\mathrm{d}x^{\mu} = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu} \tag{1.2.8}$$
$$\Leftrightarrow \eta_{\rho\lambda}\Lambda^{\rho}_{\nu}\Lambda^{\lambda}_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \tag{1.2.9}$$
$$\Leftrightarrow \eta_{\rho\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\big(\Lambda^{-1}\big)^{\nu}_{\ \rho} \tag{1.2.10}$$
$$\Leftrightarrow \eta_{\rho\lambda} = \eta_{\mu\nu}\big(\Lambda^{-1}\big)^{\nu}_{\ \rho}\big(\Lambda^{-1}\big)^{\mu}_{\ \lambda} \tag{1.2.11}$$

である．ただし，

$$\Lambda^{\rho}_{\nu}\big(\Lambda^{-1}\big)^{\nu}_{\ \rho} = \big(\Lambda^{-1}\big)^{\nu}_{\ \rho}\Lambda^{\rho}_{\nu} = 1 \tag{1.2.12}$$

なる関係を用いた．まとめると，x^{μ} と x_{μ} の変換性は**図 1.1** のようになる．

$$\begin{tikzcd}
x^{\mu} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\Lambda"'] & x_{\mu} \arrow[d, "\Lambda^{-1}"] \\
x'^{\mu} \arrow[r, "\eta"'] & x'_{\mu}
\end{tikzcd}$$

図 1.1: x^{μ} と x_{μ} の変換性

x^{μ} から x'_{μ} への変換が well-defined であることは非自明なので確かめておこう．まず，$x^{\mu} \to x_{\mu} \to x'_{\mu}$ のとき，

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu}x^{\nu} \tag{1.2.13}$$
$$x'_{\mu} = x_{\lambda}\big(\Lambda^{-1}\big)^{\lambda}_{\ \mu} \tag{1.2.14}$$

次に，$x^{\mu} \to x'^{\mu} \to x'_{\mu}$ のとき，**式** (1.2.10) より，

$$\eta_{\rho\lambda}\Lambda^{\rho}_{\nu} = \eta_{\rho\lambda}\big(\Lambda^{-1}\big)^{\lambda}_{\ \mu} \tag{1.2.15}$$

であることを用いると，

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\rho}x^{\rho} \tag{1.2.16}$$
$$x'_{\mu} = \eta_{\mu\nu}x'^{\nu} \tag{1.2.17}$$
$$= \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\rho}x^{\rho} \tag{1.2.18}$$
$$= \eta_{\rho\lambda}x^{\rho}\big(\Lambda^{-1}\big)^{\lambda}_{\ \mu} \tag{1.2.19}$$
$$= x_{\lambda}\big(\Lambda^{-1}\big)^{\lambda}_{\ \mu} \tag{1.2.20}$$

となり，η と Λ による変換は well-defined であることが分かる．

また，全微分について，

$$\partial'^{\nu} \coloneqq \frac{\partial}{\partial x'_{\nu}} \tag{1.2.21}$$

$$= \frac{\partial x_{\rho}}{\partial x'_{\nu}} \frac{\partial}{\partial x_{\rho}} \tag{1.2.22}$$

$$= \left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \rho} \right]^{-1} \partial_{\rho} \tag{1.2.23}$$

$$= \Lambda^{\nu}_{\rho} \partial^{\rho} \tag{1.2.24}$$

$$\partial'_{\nu} \coloneqq \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \tag{1.2.25}$$

$$= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \tag{1.2.26}$$

$$= \left(\Lambda^{\nu}_{\rho}\right)^{-1} \partial_{\rho} \tag{1.2.27}$$

$$= \partial_{\rho} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho}_{\ \nu} \tag{1.2.28}$$

なる関係がある．Lorentz 変換を Poincaré 変換に変更しても定数の微分は 0 なので，同様である．

1.3 スカラー・ベクトル・テンソル

本節ではスカラー・ベクトル・テンソルを定義する．Lorentz 変換のパラメータを Λ とする．

1.3.1 スカラー

スカラーは Lorentz 変換に対して不変な量である．すなわち，

$$S \mapsto S =: S' \tag{1.3.1}$$

なる量である．

1.3.2 ベクトル

ベクトルは 2 種類あり，Lorentz 変換によって時空座標を変換したときに，時空座標 x^{μ} と同じように変換される反変ベクトルと，x_{μ} と同じように変換される共変ベクトルに分けられる．すなわち，

$$A^{\mu} \mapsto \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu} =: A'^{\mu} \tag{1.3.2}$$

$$B_{\mu} \mapsto B_{\nu} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu} =: B'_{\mu} \tag{1.3.3}$$

において，A^{μ}，A'^{μ} が反変ベクトル，B_{μ}，B'_{μ} が共変ベクトルである．

1.3.3 テンソル

テンソルは 3 種類あり，Lorentz 変換によって時空座標を変換したときに，時空座標 x^{μ} を 2 回変換したとき同じように変換される 2 階の反変テンソル，時空座標 x^{μ} を 1 回変換してから 1 回逆変換したとき同じように変換される 2 階の混合テンソル，時空座標 x_{μ} を 2 回変換したとき同じように変換される 2 階の共変テンソルの 3 つに分けられる．すなわち，

$$T^{\mu\nu} \mapsto \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\lambda} T^{\rho\lambda} =: T'^{\mu\nu} \tag{1.3.4}$$

$$T^{\mu}_{\nu} \mapsto \Lambda^{\mu}_{\rho} T^{\rho}_{\lambda} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\lambda}_{\ \nu} =: T'^{\mu}_{\ \nu} \tag{1.3.5}$$

$$T_{\nu\mu} \mapsto T^{\rho}_{\lambda} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho}_{\ \mu} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\lambda}_{\ \nu} =: T'_{\nu\mu} \tag{1.3.6}$$

の 3 つがある．3 つのテンソルの間には，

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu}_{\lambda} \eta^{\nu\lambda} = T_{\rho\lambda} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda} \tag{1.3.7}$$

なる関係がある．

Chapter 2

Klein-Gordon方程式

2.1 Klein-Gordon 方程式の「導出」

非相対論的・古典的エネルギーの関係式,

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{2.1.1}$$

の両辺に波動函数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ 掛けて

$$E \to \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.1.2}$$
$$\boldsymbol{p} \to -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla} \tag{2.1.3}$$

なる変換を行えば,

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{2.1.4}$$
$$\Rightarrow E\psi(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\psi(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.1.5}$$
$$\Rightarrow \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})^2\psi(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.1.6}$$
$$\Rightarrow \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi \tag{2.1.7}$$

となり，Schrödinger 方程式を得る．

　では相対論的なエネルギーの関係式,

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \tag{2.1.8}$$

を変換すると，どのようになるだろう．自然単位系を用いているため，静止エネルギーの 2 乗について $m^2c^4 = m^2$ となっていることに注意する．**式** (2.1.8) の両辺に波動函数 $\psi(x^\mu)$ 掛けて，**式** (2.1.2)，**式** (2.1.3) を用いれば,

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \tag{2.1.9}$$
$$E\psi(x^\mu) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\psi(x^\mu) + m^2\psi(x^\mu) \tag{2.1.10}$$
$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi(x^\mu) = \left[(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})^2 + m^2\right]\psi(x^\mu) \tag{2.1.11}$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x^\mu) = -\boldsymbol{\nabla}^2\psi(x^\mu) + m^2\psi(x^\mu) \tag{2.1.12}$$
$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi(x^\mu) = 0 \tag{2.1.13}$$

が成立する．

Klein-Gordon 方程式が Poincaré 変換に対して不変であるためには,

$$\left(\partial'_\nu \partial'^\nu - m^2\right)\psi'(x^\mu) = 0 \tag{2.1.14}$$

$$\Leftrightarrow \left(\partial_\rho \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho \partial^\rho - m^2\right)\psi'(x'^\mu) = 0 \tag{2.1.15}$$

$$\Leftrightarrow \left(\partial_\rho \partial^\rho - m^2\right)\psi'(x'^\mu) = 0 \tag{2.1.16}$$

であることより,

$$\psi'(x'^\mu) = \psi(x^\mu) \tag{2.1.17}$$

が成立すればよい．このような函数 $\psi(x)$ のことをスカラー函数という．

Chapter 3

Maxwell方程式

3.1　ゲージ場の導入

自然単位系で Maxwell の方程式を書くと,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.1.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{3.1.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{3.1.4}$$

となる．ρ は電荷密度，$\boldsymbol{j}$ は電流密度である．**式** (3.1.1) なる $\boldsymbol{B}$ は,

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3.1.5}$$

である．**式** (3.1.5) を**式** (3.1.2) に代入すると,

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{3.1.6}$$

となる．**式** (3.1.6) ようなベクトルは,

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla A^0 \tag{3.1.7}$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.1.8}$$

となる．**式** (3.1.5) と**式** (3.1.8) をまとめて書くと,

$$\begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\ \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 \\ \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 \end{pmatrix} \tag{3.1.9}$$

$$\begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial_0 A^1 + \partial_1 A^0 \\ \partial_0 A^2 + \partial_2 A^0 \\ \partial_0 A^3 + \partial_3 A^0 \end{pmatrix} \tag{3.1.10}$$

となる．

3.2　場の強さ

場の強さ $F^{\mu\nu}$ なるテンソルを,

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{3.2.1}$$

と定義する．

場の強さに関する性質をいくつか示す．まず，場の強さ $F^{\mu\nu}$ は反対称テンソルであることを示す．

Proof.

$$F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \tag{3.2.2}$$
$$= -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \tag{3.2.3}$$
$$= -F^{\mu\nu} \tag{3.2.4}$$

であるから，$F^{\mu\nu}$ は反対称テンソルである． □

電場と磁場は場の強さを用いて簡単に書くことが出来る．まず，磁場について $(\rho, \mu, \nu) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$ として，

$$B^\rho = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu \tag{3.2.5}$$
$$= -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \tag{3.2.6}$$
$$= -F^{\mu\nu} \tag{3.2.7}$$

と書ける．次に，電場について $\nu \in \{1,2,3\}$ として，

$$E^\nu = -\left(\partial_0 A^\nu + \partial_\nu A^0\right) \tag{3.2.8}$$
$$= -\left(\partial^0 A^\nu - \partial^\nu A^0\right) \tag{3.2.9}$$
$$= -F^{0\nu} \tag{3.2.10}$$

と書くことができる．

$M^{\rho\mu\nu}$ を，

$$M^{\rho\mu\nu} := \partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} \tag{3.2.11}$$

と定義する．$M^{\rho\mu\nu}$ が完全反対称テンソルであることを示す．

Proof. 計算において，$F^{\mu\nu}$ が反対称テンソルであることを用いる．3 種類の添え字の入れ替えを考える．

1.
まず，$M^{\rho\mu\nu}$ から 1 番目の添え字 ρ と 2 番目の添え字 μ を入れ替えた量 $M^{\mu\rho\nu}$ を考えると，

$$M^{\mu\rho\nu} = \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\rho F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} \tag{3.2.12}$$
$$= -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\nu F^{\rho\mu} \tag{3.2.13}$$
$$= -\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu} = -M^{\rho\mu\nu} \tag{3.2.14}$$

となる．

2.
次に，$M^{\rho\mu\nu}$ から 2 番目の添え字 μ と 3 番目の添え字 ν を入れ替えた量 $M^{\rho\nu\mu}$ を考えると，

$$M^{\rho\nu\mu} = \partial^\rho F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} + \partial^\mu F^{\rho\nu} \tag{3.2.15}$$
$$= -\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\nu F^{\rho\mu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} \tag{3.2.16}$$
$$= -\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu} = -M^{\rho\mu\nu} \tag{3.2.17}$$

となる．

3.
最後に，$M^{\rho\mu\nu}$ から 2 番目の添え字 μ と 3 番目の添え字 ν を入れ替えた量 $M^{\nu\mu\rho}$ を考えると，

$$M^{\nu\mu\rho} = \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\rho F^{\nu\mu} \tag{3.2.18}$$
$$= -\partial^\mu F^{\rho\nu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\rho F^{\mu\nu} \tag{3.2.19}$$
$$= -\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu} = -M^{\rho\mu\nu} \tag{3.2.20}$$

となりる．

以上より，$M^{\rho\mu\nu}$ はどの 2 つの添え字を入れ替えても反対称であるから，完全反対称テンソルである． □

次に，場の強さを用いると**式** (3.1.1) と**式** (3.1.2) は,

$$M^{\rho\mu\nu} = 0 \tag{3.2.21}$$

と書けることを示す.

Proof. $M^{\rho\mu\nu}$ は完全反対称テンソルであるので，いずれか 2 つの添え字が同じであれば $M^{\rho\mu\nu} = 0$ であるので，**式** (3.2.21) は自明に成立する．また，添え字の入れ替えで負号がつくので，$\rho < \mu < \nu$ を課しても対称性を失わない．よって，

$$(\rho, \mu, \nu) \in \{(0,1,2), (0,1,3), (0,2,3), (1,2,3)\} \tag{3.2.22}$$

のみを考えればよい．場の強さを**式** (3.2.7) と**式** (3.2.10) を用いて電磁場で書き直すと，

1. $(\rho, \mu, \nu) = (0,1,2)$ のとき.

$$\begin{aligned} M^{012} &= \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} && (3.2.23) \\ &= -\partial^0 B^3 + \partial^1 E^2 - \partial^2 E^1 && (3.2.24) \\ &= -\partial_0 B^3 - \left(\partial_1 E^2 - \partial_2 E^1\right) && (3.2.25) \\ &= -\left[\frac{\partial B^3}{\partial t} + \frac{\partial E^2}{\partial x^1} - \frac{\partial E^1}{\partial x^2}\right] && (3.2.26) \\ &= 0 && (3.2.27) \end{aligned}$$

となる．なお，Maxwell の方程式の第 2 式である**式** (3.1.2) の z 成分が 0 となることを用いた.

2. $(\rho, \mu, \nu) = (0,1,3)$ のとき.

$$\begin{aligned} M^{013} &= \partial^0 F^{13} + \partial^1 F^{30} + \partial^3 F^{01} && (3.2.28) \\ &= \partial^0 B^2 + \partial^1 E^2 - \partial^3 E^1 && (3.2.29) \\ &= \partial_0 B^2 + \left(\partial_3 E^1 - \partial_1 E^3\right) && (3.2.30) \\ &= \frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{\partial E^1}{\partial x^3} - \frac{\partial E^3}{\partial x^1} && (3.2.31) \\ &= 0 && (3.2.32) \end{aligned}$$

となる．なお，Maxwell の方程式の第 2 式である**式** (3.1.2) の y 成分が 0 となることを用いた.

3. $(\rho, \mu, \nu) = (0,2,3)$ のとき.

$$\begin{aligned} M^{023} &= \partial^0 F^{23} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} && (3.2.33) \\ &= -\partial^0 B^1 + \partial^2 E^3 - \partial^3 E^2 && (3.2.34) \\ &= -\partial_0 B^1 - \left(\partial_3 E^2 - \partial_2 E^3\right) && (3.2.35) \\ &= -\left[\frac{\partial B^1}{\partial t} + \left(\frac{\partial E^2}{\partial x^3} - \frac{\partial E^3}{\partial x^2}\right)\right] && (3.2.36) \\ &= 0 && (3.2.37) \end{aligned}$$

となる．なお，Maxwell の方程式の第 2 式である**式** (3.1.2) の x 成分が 0 となることを用いた.

4. $(\rho, \mu, \nu) = (1,2,3)$ のとき.

$$\begin{aligned} M^{123} &= \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} && (3.2.38) \\ &= -\partial^1 B^1 - \partial^2 E^2 - \partial^3 E^3 && (3.2.39) \\ &= 0 && (3.2.40) \end{aligned}$$

となる．なお，Maxwell の方程式の第 1 式である**式** (3.1.1) が 0 となることを用いた.

□