0.1 ゲージ場の導入

自然単位系で Maxwell の方程式を書くと,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{0.1.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{0.1.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{0.1.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{0.1.4}$$

となる．ρ は電荷密度，$\boldsymbol{j}$ は電流密度である．**式** (0.1.1) なる $\boldsymbol{B}$ は,

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{0.1.5}$$

である．**式** (0.1.5) を**式** (0.1.2) に代入すると,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{0.1.6}$$

となる．**式** (0.1.6) ようなベクトルは,

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} A^0 \tag{0.1.7}$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} A^0 - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{0.1.8}$$

となる．**式** (0.1.5) と**式** (0.1.8) をまとめて書くと,

$$\begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\ \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 \\ \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 \end{pmatrix} \tag{0.1.9}$$

$$\begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial_0 A^1 + \partial_1 A^0 \\ \partial_0 A^2 + \partial_2 A^0 \\ \partial_0 A^3 + \partial_3 A^0 \end{pmatrix} \tag{0.1.10}$$

となる．

0.2 場の強さ

場の強さ $F^{\mu\nu}$ なるテンソルを,

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{0.2.1}$$

と定義する．

場の強さに関する性質をいくつか示す．まず，場の強さ $F^{\mu\nu}$ は反対称テンソルであることを示す．

Proof.

$$\begin{aligned} F^{\nu\mu} &= \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu && (0.2.2) \\ &= -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu && (0.2.3) \\ &= -F^{\mu\nu} && (0.2.4) \end{aligned}$$

であるから，$F^{\mu\nu}$ は反対称テンソルである． □

電場と磁場は場の強さを用いて簡単に書くことが出来る．まず，電場について $\nu \in \{1, 2, 3\}$ として,

$$E^\nu = -\big(\partial_0 A^\nu + \partial_\nu A^0\big) \tag{0.2.5}$$

$$= -\left(\partial^0 A^\nu - \partial^\nu A^0\right) \tag{0.2.6}$$
$$= -F^{0\nu} \tag{0.2.7}$$

次に，磁場について $(\rho, \mu, \nu) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$ として，

$$B^\rho = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu \tag{0.2.8}$$
$$= -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \tag{0.2.9}$$
$$= -F^{\mu\nu} \tag{0.2.10}$$

と書ける．

$M^{\rho\mu\nu}$ を，

$$M^{\rho\mu\nu} := \partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} \tag{0.2.11}$$

と定義する．$M^{\rho\mu\nu}$ が完全反対称テンソルであることを示す．

Proof. 計算において，$F^{\mu\nu}$ が反対称テンソルであることを用いる．3 種類の添え字の入れ替えを考える．

1.
   まず，$M^{\rho\mu\nu}$ から 1 番目の添え字 ρ と 2 番目の添え字 μ を入れ替えた量 $M^{\mu\rho\nu}$ を考えると，

$$M^{\mu\rho\nu} = \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\rho F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} \tag{0.2.12}$$
$$= -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\nu F^{\rho\mu} \tag{0.2.13}$$
$$= -\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu} = -M^{\rho\mu\nu} \tag{0.2.14}$$

   となる．

2.
   次に，$M^{\rho\mu\nu}$ から 2 番目の添え字 μ と 3 番目の添え字 ν を入れ替えた量 $M^{\rho\nu\mu}$ を考えると，

$$M^{\rho\nu\mu} = \partial^\rho F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} + \partial^\mu F^{\rho\nu} \tag{0.2.15}$$
$$= -\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\nu F^{\rho\mu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} \tag{0.2.16}$$
$$= -\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu} = -M^{\rho\mu\nu} \tag{0.2.17}$$

   となる．

3.
   最後に，$M^{\rho\mu\nu}$ から 2 番目の添え字 μ と 3 番目の添え字 ν を入れ替えた量 $M^{\nu\mu\rho}$ を考えると，

$$M^{\nu\mu\rho} = \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\rho F^{\nu\mu} \tag{0.2.18}$$
$$= -\partial^\mu F^{\rho\nu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\rho F^{\mu\nu} \tag{0.2.19}$$
$$= -\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu} = -M^{\rho\mu\nu} \tag{0.2.20}$$

   となりる．

以上より，$M^{\rho\mu\nu}$ はどの 2 つの添え字を入れ替えても反対称であるから，完全反対称テンソルである． □

次に，場の強さを用いると**式** (0.1.1) と**式** (0.1.2) は，

$$M^{\rho\mu\nu} = 0 \tag{0.2.21}$$

と書けることを示す．

Proof. $M^{\rho\mu\nu}$ は完全反対称テンソルであるので，いずれか 2 つの添え字が同じであれば $M^{\rho\mu\nu} = 0$ であるので，**式** (0.2.21) は自明に成立する．また，添え字の入れ替えで負号がつくので，$\rho < \mu < \nu$ を課しても対称性を失わない．よって，

$$(\rho, \mu, \nu) \in \{(0,1,2),(0,1,3),(0,2,3),(1,2,3)\} \tag{0.2.22}$$

のみを考えればよい．

1. $(\rho, \mu, \nu) = (0,1,2)$ のとき．

$$M^{012} = \tag{0.2.23}$$

□