量子光学ノート

harry_arbrebleu

August 23, 2024

Contents

Chapter 1

Gaussビームの振る舞い

ここでは，Maxwell 方程式に従う電磁波のうち，強度分布が Gauss ビームになるものについて考える．Gauss ビームは強度分布が Gauss 分布に従う電磁波である．以下の議論により，そのような電磁波は直進することが分かる．

1.1 物質中の Maxwell 方程式

物質中の Maxwell 方程式は,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0} \tag{1.1.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.1.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{i} + \mu_r \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.1.4}$$

ただし，ϵ_0，μ_0 は真空中の誘電率と真空中の透磁率，ϵ_r，μ_r は物質の比誘電率と物質の比透磁率である．また，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ は電場と磁場，$\boldsymbol{i}$ は電流密度，ρ は電荷密度である．$\rho = 0$，$\boldsymbol{i} = 0$ のときを考えると,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.1.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.1.6}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_r \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.1.8}$$

となる．**式** (1.1.7) に左から $\boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させると,

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1.9}$$

$$\Leftrightarrow -\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1.10}$$

となる．**式** (1.1.10) に**式** (1.1.8) を代入すると,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1.11}$$

となる．ただし，$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$，$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ である．

1.2 Gauss ビームでの電場の表式

仮定より，今考えている電磁波は Gauss ビームであるから円筒座標系 (r, θ, z) を用いて，**式** (1.1.11) を議論する．$\boldsymbol{E}$ が z 軸正方向に進行する波とすると,

$$E(r, \theta, z, t) = E_0(r, z) \exp\left(i(kz - \omega t)\right) \tag{1.2.1}$$

と書ける．ただし，$k = 2\pi/\lambda = n\omega/c$ である．

1.2.1 ラプラシアンの計算

式 (1.2.1) のラプラシアンについて．

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.2.1}$$

である．(x, y, z) から (r, θ, z) への変換を考える．チェーンルールにより，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{1.2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{1.2.3}$$

$$\tag{1.2.4}$$

である．$\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ について考える．

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right) \tag{1.2.5}$$

$$= \left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\right\}\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right\} \tag{1.2.6}$$

式 (1.2.1) が θ に対して変化しないことに注意すると， (1.2.7)

$$= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r}\right) \tag{1.2.8}$$

となる．同様の計算により，

$$\begin{aligned}\nabla^2 E =& \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \qquad (1.2.9)\\ =& \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r}\right)\\ &+ \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial E}{\partial r}\right)\\ &+ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \qquad (1.2.10)\end{aligned}$$

$$\tag{1.2.11}$$

である．座標変換を考えると，

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{1.2.12}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta \tag{1.2.13}$$

であるから，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \tag{1.2.14}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \tag{1.2.15}$$

である．**式** (1.2.14) と**式** (1.2.15) を**式** (1.2.10) に代入すると，

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \tag{1.2.16}$$

を得る．**式** (1.2.16) を**式** (1.1.11) に用いて，**式** (1.2.10) の表記を用いると，

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_0}{\partial r}+\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}+2\mathrm{i}\frac{\partial E_0}{\partial z}=0 \tag{1.2.17}$$

となる．$\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}$ が他の項に比べて小さく無視できるとしたとき，

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_0}{\partial r}+2\mathrm{i}\frac{\partial E_0}{\partial z}=0 \tag{1.2.18}$$

となり，種々の条件を加えて**式** (1.2.18) について解く．

1.2.2 一様媒質中での Gauss ビーム

電磁波が屈折率 n で一様な媒質中を伝播するとする．このとき，$E_0(r,z)$ は，

$$E_0(r,z)=\exp\left(\mathrm{i}P(z)+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right) \tag{1.2.1}$$

と書ける．**式** (1.2.1) を**式** (1.2.18) に代入する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_0}{\partial r^2}&=\exp\left(\mathrm{i}P(z)\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}\exp\left(\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right)\right] &(1.2.2)\\
&=\left[\left(\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}\right)^2 r^2+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}\right]\exp\left(\mathrm{i}P(z)+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right) &(1.2.3)\\
\frac{1}{r}\frac{\partial E_0}{\partial r}&=\frac{\mathrm{i}k}{q(z)}\exp\left(\mathrm{i}P(z)+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right) &(1.2.4)\\
2\mathrm{i}k\frac{\partial E_0}{\partial z}&=2\mathrm{i}k\left[\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{i}kr^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{q(z)}\right)\right]\exp\left(\mathrm{i}P(z)+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right) &(1.2.5)
\end{aligned}$$

となる．**式** (1.2.18) に代入して，r^2 の係数を比較すると，

$$\begin{cases}
\left(\dfrac{1}{q(z)}\right)^2+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{1}{q(z)}\right)=0\\
\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\mathrm{i}}{q(z)}
\end{cases} \tag{1.2.6}$$

を得る．