量子光学ノート

harry_arbrebleu

September 17, 2024

Contents

Chapter 1

Gaussビームの振る舞い

ここでは，Maxwell 方程式に従う電磁波のうち，強度分布が Gauss ビームになるものについて考える．Gauss ビームは強度分布が Gauss 分布に従う電磁波である．以下の議論により，そのような電磁波は直進することが分かる．

1.1　物質中のMaxwell方程式

物質中の Maxwell 方程式は,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_r\epsilon_0} \tag{1.1.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.1.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_r\mu_0\boldsymbol{i}+\mu_r\epsilon_r\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.1.4}$$

ただし，ϵ_0，μ_0 は真空中の誘電率と真空中の透磁率，ϵ_r，μ_r は物質の比誘電率と物質の比透磁率である．また，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ は電場と磁場，$\boldsymbol{i}$ は電流密度，ρ は電荷密度である．$\rho=0$，$\boldsymbol{i}=0$ のときを考えると,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{1.1.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.1.6}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_r\epsilon_r\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.1.8}$$

となる．**式** (**??**) に左から $\boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させると,

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.1.9}$$

$$\Leftrightarrow -\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.1.10}$$

となる．**式** (**??**) に**式** (**??**) を代入すると,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E}-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1.1.11}$$

となる．ただし，$n=\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$，$c=1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ である．

1.2　Gaussビームでの電場の表式

仮定より，今考えている電磁波は Gauss ビームであるから円筒座標系 (r,θ,z) を用いて，**式** (**??**) を議論する．$\boldsymbol{E}$ が z 軸正方向に進行する波とすると,

$$E(r,\theta,z,t)=E_0(r,z)\exp\left(i(kz-\omega t)\right) \tag{1.2.1}$$

と書ける．ただし，$k = 2\pi/\lambda = n\omega/c$ である．

1.2.1　ラプラシアンの計算

式 (**??**) のラプラシアンについて．

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.2.1}$$

である．(x, y, z) から (r, θ, z) への変換を考える．チェーンルールにより，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{1.2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{1.2.3}$$

$$\tag{1.2.4}$$

である．$\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ について考える．

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right) \tag{1.2.5}$$

$$= \left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\right\}\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right\} \tag{1.2.6}$$

式 (**??**) が θ に対して変化しないことに注意すると，　(1.2.7)

$$= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r}\right) \tag{1.2.8}$$

となる．同様の計算により，

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \tag{1.2.9}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial r}\right) \\ &\quad + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial E}{\partial r}\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

$$\tag{1.2.11}$$

である．座標変換を考えると，

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{1.2.12}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta \tag{1.2.13}$$

であるから，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \tag{1.2.14}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \tag{1.2.15}$$

である．**式** (**??**) と**式** (**??**) を**式** (**??**) に代入すると，

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \tag{1.2.16}$$

を得る．**式** (??) を**式** (??) に用いて，**式** (??) の表記を用いると，

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_0}{\partial r}+\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}+2\mathrm{i}\frac{\partial E_0}{\partial z}=0 \tag{1.2.17}$$

となる．$\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}$ が他の項に比べて小さく無視できるとしたとき，

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_0}{\partial r}+2\mathrm{i}\frac{\partial E_0}{\partial z}=0 \tag{1.2.18}$$

となり，種々の条件を加えて**式** (??) について解く．

1.2.2 一様媒質中での Gauss ビーム

電磁波が屈折率 n で一様な媒質中を伝播するとする．このとき，$E_0(r,z)$ は，

$$E_0(r,z)=\exp\left(\mathrm{i}P(z)+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right) \tag{1.2.1}$$

と書ける．**式** (??) を**式** (??) に代入する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_0}{\partial r^2}&=\exp\left(\mathrm{i}P(z)\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}\exp\left(\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right)\right] &(1.2.2)\\
&=\left[\left(\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}\right)^2 r^2+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}\right]\exp\left(\mathrm{i}P(z)+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right) &(1.2.3)\\
\frac{1}{r}\frac{\partial E_0}{\partial r}&=\frac{\mathrm{i}k}{q(z)}\exp\left(\mathrm{i}P(z)+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right) &(1.2.4)\\
2\mathrm{i}k\frac{\partial E_0}{\partial z}&=2\mathrm{i}k\left[\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{i}kr^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{q(z)}\right)\right]\exp\left(\mathrm{i}P(z)+\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}r^2\right) &(1.2.5)
\end{aligned}$$

となる．**式** (??) に代入して，r^2 の係数を比較すると，

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{q(z)}\right)^2+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{1}{q(z)}\right)=0\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\mathrm{i}}{q(z)}\end{cases} \tag{1.2.6}$$

を得る．**式** (??) を解くと，

$$\begin{cases}q(z)=z+q_0\\ p(z)=\mathrm{i}\ln\left(1+\dfrac{z}{q_0}\right)\end{cases} \tag{1.2.7}$$

を得る．

1.3