0.0.1　電磁場のハミルトニアン

前節での議論により，系のハミルトニアンは，

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \int \mathrm{d}^3 k \sum_{\sigma=1}^{2} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k\sigma}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}\right) \tag{0.0.1}$$

と書けるのであった．以下では，簡単のために，1 方向成分・シングルモードの波を考える．

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\right) \tag{0.0.2}$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{0.0.3}$$

と書ける．屈折率が n の物質中では[1]，

$$\hat{H}_{n,\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n}\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{0.0.4}$$

と書ける．

0.0.2　ビームスプリッタ

2 入力 2 出力のビームスプリッタを考える．E_1 と E_2 の電場が入射して，E'_1 と E'_2 が出力されるとする．古典的に考えると，

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.5}$$

と書ける．このまま電場演算子を中心に議論を勧めることはいささか冗長である．なぜならば，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}^{\dagger}_1$ は複素共役の関係にあるのだから，片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ．よって，

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.6}$$

と書ける．B はビームスプリッタ行列という．光子数が保存することから，

$$\hat{a}^{\dagger}_1\hat{a}_1 + \hat{a}^{\dagger}_2\hat{a}_2 = \hat{a}'^{\dagger}_1\hat{a}'_1 + \hat{a}'^{\dagger}_2\hat{a}'_2 \tag{0.0.7}$$

$$= \left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right)^{\dagger}\left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right)^{\dagger}\left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) \tag{0.0.8}$$

$$= \left(B^{*}_{11}\hat{a}^{\dagger}_1 + B^{*}_{12}\hat{a}^{\dagger}_2\right)\left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B^{*}_{21}\hat{a}^{\dagger}_1 + B^{*}_{22}\hat{a}^{\dagger}_2\right)\left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) \tag{0.0.9}$$

$$= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}^{\dagger}_1\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}^{\dagger}_2\hat{a}_2 + \left(B^{*}_{11}B_{12} + B^{*}_{21}B_{22}\right)\hat{a}^{\dagger}_1\hat{a}_2 + \left(B^{*}_{12}B_{11} + B^{*}_{21}B_{21}\right)\hat{a}^{\dagger}_2\hat{a}_1 \tag{0.0.10}$$

$$= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}^{\dagger}_1\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}^{\dagger}_2\hat{a}_2 + \left(B^{*}_{11}B_{12} + B^{*}_{21}B_{22}\right)\hat{a}^{\dagger}_1\hat{a}_2 + \left(B^{*}_{11}B_{12} + B^{*}_{21}B_{22}\right)^{*}\hat{a}^{\dagger}_2\hat{a}_1 \tag{0.0.11}$$

となり，

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B^{*}_{11}B_{12} + B^{*}_{21}B_{22} = 0 \end{cases} \tag{0.0.12}$$

$$\Leftrightarrow B^{\dagger}B = \begin{pmatrix} B^{*}_{11} & B^{*}_{21} \\ B^{*}_{12} & B^{*}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.0.13}$$

となればよい．つまり，ビームスプリッタ行列 B がユニタリ行列であれば良い．また，ユニタリ行列は一般に，

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.14}$$

[1] 謎である．屈折率により波動は変化しないはずである．

と分解できる．実際,

$$
\begin{aligned}
U &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} && (0.0.15) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2}\sin\Theta/2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\cos\Theta/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} && (0.0.16) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Psi)/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin\Theta/2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos\Theta/2 \end{pmatrix} && (0.0.17)
\end{aligned}
$$

であり，$\psi = \Psi + \Phi$，$\phi = \Psi - \Phi$ とすると,

$$
U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\Theta/2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi/2}\cos\Theta/2 \end{pmatrix} \tag{0.0.18}
$$

と書けて,

$$
U^\dagger U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi/2}\cos\Theta/2 & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\Theta/2 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2}\cos\Theta/2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\Theta/2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi/2}\cos\Theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.0.19}
$$

となり，ユニタリであることが分かる．