0.0.1 電磁場のハミルトニアン

前節での議論により，系のハミルトニアンは，

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \int \mathrm{d}^3 k \sum_{\sigma=1}^{2} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\left(\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k\sigma}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\right) \tag{0.0.1}$$

と書けるのであった．以下では，簡単のために，1 方向成分・シングルモードの波を考える．

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) \tag{0.0.2}$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{0.0.3}$$

と書ける．屈折率が n の物質中では[1]，

$$\hat{H}_{n,\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{0.0.4}$$

と書ける

0.0.2 ビームスプリッタ行列

2 入力 2 出力のビームスプリッタを考える．E_1 と E_2 の電場が入射して，E_1' と E_2' が出力されるとする．古典的に考えると，

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.5}$$

と書ける．このまま電場演算子を中心に議論を進めることはいささか冗長である．なぜならば，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_1^\dagger$ は複素共役の関係にあるのだから，片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ．よって**式** (0.0.5) を量子化して，消滅演算子 $\hat{a}_1$，$\hat{a}_2$ を用いて表せば，

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1' \\ \hat{a}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.6}$$

と書ける．2 つの消滅演算子の交換関係は，

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta^i_j \tag{0.0.7}$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \tag{0.0.8}$$

である．B はビームスプリッタ行列という．光子数が保存することから，

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 &= \hat{a}_1'^\dagger\hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger\hat{a}_2' && (0.0.9)\\
&= \left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right)^\dagger\left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right)^\dagger\left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) && (0.0.10)\\
&= \left(B_{11}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{12}^*\hat{a}_2^\dagger\right)\left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B_{21}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{22}^*\hat{a}_2^\dagger\right)\left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) && (0.0.11)\\
&= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{12}^*B_{11} + B_{21}^*B_{21}\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 && (0.0.12)\\
&= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)^*\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 && (0.0.13)
\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22} = 0 \end{cases} \tag{0.0.14}$$

[1] 謎である．屈折率により波動は変化しないはずである．

$$\Leftrightarrow B^\dagger B = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.0.15}$$

となればよい．つまり，ビームスプリッタ行列 B がユニタリ行列であれば良い．**??**での議論によりビームスプリッタ演算子は,

$$B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.16}$$

と書ける．ところが,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.17}$$

は 2 つの入力電場 E_1，E_2 に位相差をかけること,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.18}$$

は 2 つの出力電場 E_1'，E_2' に位相差をかけること,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2} \tag{0.0.19}$$

は 2 つの出力電場場 E_1'，E_2' に共通するグローバル位相を書けることに対応するから，実験のセットアップとして,

$$\Lambda = \Psi = \Phi = 0 \tag{0.0.20}$$

とすることができる．また，透過率 T と反射率 R を,

$$\sqrt{T} \coloneqq \cos(\Theta/2) \tag{0.0.21}$$

$$\sqrt{R} \coloneqq -\sin(\Theta/2) \tag{0.0.22}$$

と定義すれば，ビームスプリッタ行列 B は,

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{0.0.23}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \tag{0.0.24}$$

と書ける．

$$T + R = 1 \tag{0.0.25}$$

が成立することに注意する．

0.0.3 ビームスプリッタハミルトニアン

ビームスプリッタ行列を再び考えよう．今度は入力電場と出力電場の位相差が存在することにして，$\Lambda = 0$ のみ課しておく．するとビームスプリッタ行列は,

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{0.0.26}$$

と書ける．ビームスプリッタ行列を用いて,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1' \\ \hat{a}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.27}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2)\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2)\hat{a}_2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2)\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2)\hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.28}$$

$$
= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.29}
$$

と書ける．出力それぞれでの光の強度は，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_2^\dagger$ や $\hat{a}_1^\dagger$ と $\hat{a}_2$ が交換することを思い出せば，

$$
\hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2\right)^\dagger \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2\right) \tag{0.0.30}
$$

$$
= T\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + R\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - \sqrt{T}\sqrt{R}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.31}
$$

$$
\hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2\right)^\dagger \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2\right) \tag{0.0.32}
$$

$$
= R\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + T\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \sqrt{T}\sqrt{R}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.33}
$$

となる．**式** (0.0.31) と**式** (0.0.33) について，第 1 項と第 2 項はそれぞれモード 1 の入力光子数，モード 2 の入力光子数に対応する．これらの重ね合わせに依って位相が変化して，そのパラメータは T である．相互作用を表す項は第 3 項であるから，ビームスプリッタによる相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ を，

$$
\hat{H}_{\mathrm{int}} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.34}
$$

と定義する．

また，以下の演算子を定義する．

$$
\hat{L}_0 \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.35}
$$

$$
\hat{L}_1 \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{0.0.36}
$$

$$
\hat{L}_2 \coloneqq \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{0.0.37}
$$

$$
\hat{L}_3 \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.38}
$$

$\hat{L}_2$ と $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ の関係を調べよう．唐突だが，

$$
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} \tag{0.0.39}
$$

考える．**式** (0.0.39) の第 1 成分について，Baker-Campbell-Hausdorff の公式より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] + \frac{1}{2!}\left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right] \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right] + \frac{1}{4!}\left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right]\right] + \cdots
\end{aligned} \tag{0.0.40}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{a}_1 + (-\mathrm{i}\Theta)\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right] \\
&\quad + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right]\right] + \cdots
\end{aligned} \tag{0.0.41}
$$

となる．$\hat{L}_2$ と $\hat{a}_1$，$\hat{L}_2$ と $\hat{a}_2$ との交換関係についてそれぞれ，

$$
\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right), \hat{a}_1\right] \tag{0.0.42}
$$

$$
= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_2\left[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1\right] - \hat{a}_2^\dagger[\hat{a}_1, \hat{a}_1]\right) \tag{0.0.43}
$$

$$
= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\hat{a}_2 \tag{0.0.44}
$$

$$
\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] = \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right), \hat{a}_2\right] \tag{0.0.45}
$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger[\hat{a}_2, \hat{a}_2] - \hat{a}_1\left[\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2\right]\right) \tag{0.0.46}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\hat{a}_1 \tag{0.0.47}$$

となる．ただし，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_2$ が交換することを用いた．よって，

$$\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1 \hat{a}_2 \tag{0.0.48}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right] = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2 \hat{a}_1 \tag{0.0.49}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3 \hat{a}_2 \tag{0.0.50}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right]\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4 \hat{a}_1 \tag{0.0.51}$$

であるから**式** (0.0.41) は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + (-\mathrm{i}\Theta)\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right] \\
&\quad + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right]\right] + \cdots &(0.0.52)\\
&= \hat{a}_1 + (-\mathrm{i}\Theta)(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1\hat{a}_2 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\hat{a}_1 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\hat{a}_2 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4\hat{a}_1 + \cdots &(0.0.53)\\
&= \hat{a}_1 + \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1\hat{a}_2 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2\hat{a}_1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3\hat{a}_2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4\hat{a}_1 + \cdots &(0.0.54)\\
&= \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \cdots\right]\hat{a}_1 + \left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \cdots\right]\hat{a}_2 &(0.0.55)\\
&= \cos(\Theta/2)\hat{a}_1 + \sin(\Theta/2)\hat{a}_2 &(0.0.56)
\end{aligned}$$

となる．同様に，**式** (0.0.39) の第 2 成分について，

$$\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1 \hat{a}_1 \tag{0.0.57}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2 \hat{a}_2 \tag{0.0.58}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3 \hat{a}_1 \tag{0.0.59}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right]\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4 \hat{a}_2 \tag{0.0.60}$$

なる関係を用いると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_2 + (-\mathrm{i}\Theta)\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right] \\
&\quad + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right]\right] + \cdots &(0.0.61)\\
&= \hat{a}_2 + (-\mathrm{i}\Theta)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1\hat{a}_1 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\hat{a}_2 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\hat{a}_1 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4\hat{a}_2 + \cdots &(0.0.62)\\
&= \hat{a}_2 - \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1\hat{a}_1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2\hat{a}_2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3\hat{a}_1 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4\hat{a}_2 + \cdots &(0.0.63)
\end{aligned}$$

$$= -\left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \cdots\right]\hat{a}_1 + \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \cdots\right]\hat{a}_2 \tag{0.0.64}$$

$$= -\sin(\Theta/2)\hat{a}_1 + \cos(\Theta/2)\hat{a}_2 \tag{0.0.65}$$

である．よって，**式** (0.0.39) は，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} = \begin{pmatrix}\cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2)\\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \tag{0.0.66}$$

と書ける．**式** (0.0.66) の解釈を考えよう．相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ の定義は，

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.67}$$

であった．$\Phi = \pi/2$ とすると，

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.68}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{i}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \mathrm{i}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.69}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{0.0.70}$$

$$= \hat{L}_2 \tag{0.0.71}$$

と書ける．さらに，**式** (0.0.66) において，$\Theta = -t/\hbar$ とすれば，

$$\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}_{\mathrm{int}}}{\hbar}t\right)\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}_{\mathrm{int}}}{\hbar}t\right) = \begin{pmatrix}\cos(-t/2\hbar) & \sin(-t/2\hbar)\\ -\sin(-t/2\hbar) & \cos(-t/2\hbar)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \tag{0.0.72}$$

となる．左辺は，

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \tag{0.0.73}$$

なる消滅演算子のペアを時間発展演算子で挟んでいる格好である．となれば，右辺は Heisenberg 描像で表した消滅演算子であろう[2]．

[2]右辺に出てくる行列はビームスプリッタ行列でないことに注意する．確かに 2 つの入力電場間の位相ずれや，2 つの出力電場間の位相ずれがないと仮定したとき，ビームスプリッタ演算子は**式** (0.0.24) と書ける．しかし，$\Phi = \pi/2$ なる仮定のもと議論している．このような入力電場の位相ずれ Φ に対して，出力電場の位相ずれ Ψ をうまく定めれば**式** (0.0.24) の形を実現することができると思うかもしれないが，その試みははかなく終わる．そのような Ψ は，$\pi/2 + \Psi = 2n\pi$ かつ $\pi/2 - \Psi = 2m\pi$，$n, m \in \mathbb{Z}$ としなければいけないが，2 式を足して，$\pi = 2(n+m)\pi$ となり，そのような n，m は存在しない．要するに，**式** (0.0.66) の右辺の行列はビームスプリッタ行列ではないのだ．なお，テキストでの (1.106) は何を言いたいのかわからない．