量子光学・量子情報科学ノート

Haruki Aoki and Hiroki Fukuhara

更新日: February 1, 2025

Contents

Chapter 1

量子光学

量子力学は物理量 $\hat{A}$ の期待値 $\langle A \rangle = \left\langle \psi \middle| \hat{A} \middle| \psi \right\rangle$ を検討する学問である．本章は以下のような構成である．まず, Schödinger 描像と Heisenberg 描像や電場の量子化について説明する．また，量子もつれにおいて重要なビームスプリッタを紹介する．次に，量子光学において重要なコヒーレント状態とスクイーズド状態について議論する．続いて密度演算子を定義したあと，今まで議論した状態を具体的に測定するための方法として，バランス型ホモダイン測定を紹介する．最後に本章で議論したことを全て用いる，量子もつれとその検証について議論する．

1.1 Schödinger 描像と Heisenberg 描像

WIP

1.2 調和振動子

本節では, 1 次元調和振動子モデルでハミルトニアンが書けるときの波動函数の表示を求める．波動函数とは, Schrödinger 方程式,

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \tag{1.2.1}$$

を満たす $|\psi\rangle$ について，

$$\psi(x) \coloneqq \langle x|\psi\rangle \tag{1.2.2}$$

となるように（一般化）座標 x へ射影したものである．式 (1.2.1) に対して $\langle x|$ を左から書ければ,

$$\left\langle x \middle| \hat{H} \middle| \psi \right\rangle = E\psi(x) \tag{1.2.3}$$

となるのだから，左辺を計算して $\psi(x)$ に演算子がかかる形に変形すれば，波動函数を求めることができる．本ノートにおいて，$\hat{\cdot}$ を演算子として，その固有値を $\cdot$，固有ベクトル (固有函数) を $|\cdot\rangle$ と書く．

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle \tag{1.2.4}$$

$$\hat{p} |x\rangle = p |x\rangle \tag{1.2.5}$$

である．また，$\hat{x}$ や $\hat{p}$ は物理量であり，Hermite 演算子だからその固有ベクトルは,

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x' - x) \tag{1.2.6}$$

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p' - p) \tag{1.2.7}$$

と規格化してあり,

$$\int \mathrm{d}x \, |x\rangle\langle x| = \hat{1} \tag{1.2.8}$$

$$\int \mathrm{d}p \, |p\rangle\langle p| = \hat{1} \tag{1.2.9}$$

が成立する．なお，特に断らない限り積分範囲は $-\infty$ から ∞ である．

1.2.1 ハミルトニアン

古典的な 1 次元調和振動子のハミルトニアン H は,

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2m}p^2 \tag{1.2.10}$$

である．ただし，質量を m，固有角周波数を ω，座標を x，運動量を p とした．x と p は正準共役な変数の組であるから，$x \to \hat{x}$，$p \to \hat{p}$ として，

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}^2 &(1.2.11)\\
&= \hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega}\hat{p}^2\right) &(1.2.12)\\
&= \hbar\omega\left[\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right) - \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}[\hat{x},\hat{p}]\right] &(1.2.13)\\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) &(1.2.14)
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\hat{a} \coloneqq \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right) \tag{1.2.15}$$

$$\hat{a}^\dagger \coloneqq \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right) \tag{1.2.16}$$

と定義した．$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の交換関係を調べる．

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right) - \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right) \tag{1.2.17}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}) - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) &(1.2.18)\\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{x},\hat{p}] &(1.2.19)\\
&= 1 &(1.2.20)
\end{aligned}$$

となる．

個数演算子 $\hat{n}$ を,

$$\hat{n} \coloneqq \hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{1.2.21}$$

と定義する．個数演算子 $\hat{n}$ は,

$$\hat{n}^\dagger = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{1.2.22}$$

であるから，Hermite 演算子であり，実固有値とそれに属する固有ベクトルが存在する．

$$\hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \tag{1.2.23}$$

を考える．まず，**式** (1.2.23) に左から $\langle n|$ をかけると,

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{n}|n\rangle &= n\,\langle n|n\rangle &(1.2.24)\\
\iff \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle &= n &(1.2.25)\\
\iff |\hat{a}\,|n\rangle|^2 &= n &(1.2.26)
\end{aligned}$$

である．Hibert 空間は内積空間であるから，

$$|\hat{a}\,|n\rangle|^2 \geq 0 \tag{1.2.27}$$

であるので，$n \geq 0$ となる．

次に，**式** (1.2.23) に左から $\hat{a}^\dagger$ をかける．

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle &= \hat{a}^\dagger n\,|n\rangle && (1.2.28)\\ \iff \hat{a}^\dagger\big(\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1\big)\,|n\rangle &= n\hat{a}^\dagger\,|n\rangle && (1.2.29)\\ \iff \hat{n}\big(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\big) &= (n+1)\big(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\big) && (1.2.30)\\ & && (1.2.31) \end{aligned}$$

となる．よって，$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle$ は固有値が $n+1$ の $\hat{n}$ の固有ベクトルであるから，

$$\begin{aligned} |n+1\rangle &\coloneqq \frac{1}{C_{n,+}}\hat{a}^\dagger\,|n\rangle && (1.2.32)\\ & && (1.2.33) \end{aligned}$$

と定義する．$C_{n,+}$ は規格化定数である．

$$\begin{aligned} 1 = \langle n+1|n+1\rangle &= \frac{1}{|C_{n,+}|^2}\left\langle n\middle|\hat{a}\hat{a}^\dagger\middle|n\right\rangle && (1.2.34)\\ &= \frac{1}{|C_{n,+}|^2}\left\langle n\middle|\big(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\big)\middle|n\right\rangle && (1.2.35)\\ &= \frac{n+1}{|C_{n,+}|}^2 && (1.2.36) \end{aligned}$$

より，

$$C_{n,+} = \sqrt{n+1} \tag{1.2.37}$$

としても矛盾しない．よって，

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{1.2.38}$$

となる．

最後に，**式** (1.2.23) に左から $\hat{a}$ をかける．

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle &= \hat{a}n\,|n\rangle && (1.2.39)\\ \iff \big(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\big)\hat{a}\,|n\rangle &= n\hat{a}\,|n\rangle && (1.2.40)\\ \iff \hat{n}(\hat{a}\,|n\rangle) &= (n-1)(\hat{a}\,|n\rangle) && (1.2.41) \end{aligned}$$

となる．よって，$\hat{a}\,|n\rangle$ は固有値が $n-1$ の $\hat{n}$ の固有ベクトルであるから，

$$\begin{aligned} |n-1\rangle &\coloneqq \frac{1}{C_{n,-}}\hat{a}\,|n\rangle && (1.2.42)\\ & && (1.2.43) \end{aligned}$$

と定義する．$C_{n,-}$ は規格化定数である．

$$\begin{aligned} 1 = \langle n-1|n-1\rangle &= \frac{1}{|C_{n,-}|^2}\left\langle n\middle|\hat{a}^\dagger\hat{a}\middle|n\right\rangle && (1.2.44)\\ &= \frac{n}{|C_{n,-}|^2} && (1.2.45) \end{aligned}$$

より，

$$C_{n,-} = \sqrt{n} \tag{1.2.46}$$

としても矛盾しない．よって，

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{1.2.47}$$

となる．式 (1.2.47) より，n は非負整数であるべきである．もし，$n = 0.5$ であるなら，式 (1.2.47) は，

$$\hat{a}\,|0.5\rangle = \sqrt{0.5}\,|-0.5\rangle \tag{1.2.48}$$

となり，$n \geq 0$ を満たさない．一方，n が非負整数であるなら，$n = 0$ のとき，

$$\hat{a}\,|0\rangle = 0 \tag{1.2.49}$$

となり，$n \geq 0$ が満たされる．

1.2.2 Hermite 多項式

以降の議論で用いるために, 特殊函数の 1 つである Hermite 多項式を紹介しておこう. Hermite 多項式は Strum-Liouville 演算子のうちの 1 つの演算子の固有函数であり，実数全体で定義された実数函数 $H_n(s)$ に対して，

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} - 2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + 2n\right)H_n(s) = 0 \tag{1.2.50}$$

なる $H_n(s)$ である．なお，n は非負整数である．なお，$H_n(s)$ は適当な回数だけ微分可能であるとする．また，$H_n(s)$ が張る空間 V の内積は，$f, g \in V$ として，

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, f(s)g(s)\mathrm{e}^{-s^2} \tag{1.2.51}$$

である[1]．Hermite 多項式は，適切に境界条件が設定された (Hermite 性のある)Strum-Liouville 演算子の固有函数であり，そのような演算子の固有函数は直交基底となり，完全系を成すことが知られていて，実際，

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(s)H_n(s)\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_n^m \tag{1.2.52}$$

のように直交する．

1.2.3 波動函数を用いた Schrödinger 方程式

以下では，波動函数を用いた Schrödinger 方程式である，

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x) = E\psi(x) \tag{1.2.53}$$

を得る．

　式 (1.2.3) に式 (1.2.11) で示した $\hat{H}$ の表式を代入して，

$$\frac{1}{2}m\omega^2\left\langle x\middle|\hat{x}^2\middle|\psi\right\rangle + \frac{1}{2m}\left\langle x\middle|\hat{p}^2\middle|\psi\right\rangle = E\psi(x) \tag{1.2.54}$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) + \frac{1}{2m}\left\langle x\middle|\hat{p}^2\middle|\psi\right\rangle = E\psi(x) \tag{1.2.55}$$

となる．$\left\langle x\middle|\hat{p}^2\middle|\psi\right\rangle$ は以下のレシピで計算できる．

---

[1] Strum-Liouville 演算子の形，

$$\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\} + q(x)\right]$$

と，Strum-Liouville 演算子の固有函数が張る空間の内積が，

$$\int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

と書けることを思い出せば，内積に e^{-s^2} なる重み函数が入ることは自然なことである．

1. $f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x)$
2. $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$
3. $\langle x|p\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi p}}\exp\left(\mathrm{i}\dfrac{xp}{\hbar}\right)$
4. $\left\langle x\middle|\hat{p}^2\middle|\psi\right\rangle$ の計算

$\delta(x)$ はデルタ函数であり，積分して初めて意味を持つ函数である．

1. $f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x)$

   左辺を積分して右辺になればよい．ただし，$f(x)$ は，

   $$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \tag{1.2.56}$$

   であるとする．実際に，

   $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) &= [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x) && (1.2.57)\\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x) && (1.2.58)\end{aligned}$$

   であるから，

   $$f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x) \tag{1.2.59}$$

   である．

2. $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$

   $\langle x|[\hat{x},\hat{p}]|x'\rangle$ を 2 種類の方法で計算する．まず，愚直に計算すると，

   $$\begin{aligned}\langle x|[\hat{x},\hat{p}]|x'\rangle &= \langle x|\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x}|x'\rangle && (1.2.60)\\ &= x\langle x|\hat{p}|x'\rangle - x'\langle x|\hat{p}|x'\rangle && (1.2.61)\\ &= (x-x')\langle x|\hat{p}|x'\rangle && (1.2.62)\end{aligned}$$

   である．一方，$[\hat{x},\hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ を用いれば，

   $$\begin{aligned}\langle x|[\hat{x},\hat{p}]|x'\rangle &= \mathrm{i}\hbar\langle x|x'\rangle && (1.2.63)\\ &= \mathrm{i}\hbar\delta(x-x') && (1.2.64)\end{aligned}$$

   2 つの方法で計算した $\langle x|[\hat{x},\hat{p}]|x'\rangle$ である**式** (1.2.62) と**式** (1.2.64) を等号で結んで，**式** (1.2.59) で示したデルタ函数の微分を用いて表現すれば，

   $$\begin{aligned}\langle x|\hat{p}|x'\rangle &= \mathrm{i}\hbar\frac{\delta(x-x')}{x-x'} && (1.2.65)\\ &= -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x-x')}\delta(x-x') && (1.2.66)\\ &= \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'}\delta(x-x') && (1.2.67)\end{aligned}$$

   となる．

   さて，$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle$ を計算しよう．$|x\rangle$ の完全性と，**式** (1.2.67) で示した関係を用いれば，

   $$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \left\langle x\middle|\hat{p}\hat{1}\middle|\psi\right\rangle \tag{1.2.68}$$

$$= \langle x|\,\hat{p}\int \mathrm{d}x'\,|x'\rangle\langle x'|\,|\psi\rangle \tag{1.2.69}$$

$$= \int \mathrm{d}x'\,\langle x|\hat{p}|x'\rangle\,\langle x'|\psi\rangle \tag{1.2.70}$$

$$= \mathrm{i}\hbar\int \mathrm{d}x'\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-x')\right]\phi(x') \tag{1.2.71}$$

$$= \mathrm{i}\hbar\left\{[\delta(x-x')\psi(x')]_{-\infty}^{\infty} - \int \mathrm{d}x'\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'}\phi(x')\delta(x-x')\right\} \tag{1.2.72}$$

$$= -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x) \tag{1.2.73}$$

を得る．

3. $\langle x|p\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi p}}\exp\left(\mathrm{i}\dfrac{xp}{\hbar}\right)$

$\langle x|\hat{p}|p\rangle$ を 2 種類の方法で計算する．まず，愚直に計算すると，

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = p\,\langle x|p\rangle \tag{1.2.74}$$

$$= pp(x) \tag{1.2.75}$$

となる．ただし $p(x)$ は $|p\rangle$ の x への射影である．一方，**式** (1.2.73) で示した関係で $|\psi\rangle \to |p\rangle$ を用いると，

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) \tag{1.2.76}$$

となる．**式** (1.2.75) と**式** (1.2.76) より，

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) = pp(x) \tag{1.2.77}$$

$$\Rightarrow p(x) = C\exp\left(\mathrm{i}\frac{xp}{\hbar}\right) \tag{1.2.78}$$

となる．C は規格化定数である．

さて，C を求めるために，$\langle x|x'\rangle$ を計算すると，

$$\delta(x-x') = \langle x|x'\rangle \tag{1.2.79}$$

$$= \langle x|\int \mathrm{d}p\,|p\rangle\langle p|\,|x'\rangle \tag{1.2.80}$$

$$= \int \mathrm{d}p\,p(x)p(x') \tag{1.2.81}$$

$$= |C|^2\int \exp\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}(x-x')p}{\hbar}\right) \tag{1.2.82}$$

となる．ところで，デルタ函数の Fouirer 変換とその逆変換が，

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1.2.83}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.2.84}$$

と書けることより，**式** (1.2.84) において，

$$\omega \to \frac{p}{\hbar} \tag{1.2.85}$$

$$t \to x - x' \tag{1.2.86}$$

と変換すれば，

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{d}p\exp\left(\mathrm{i}\frac{x-x'}{\hbar}p\right) \tag{1.2.87}$$

となるので，係数を比較して，

$$|C|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \tag{1.2.88}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{1.2.89}$$

となる．よって，

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{xp}{\hbar}\right) \tag{1.2.90}$$

となる．

4. $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ の計算

さて，いよいよ $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ を計算する道具がそろった．**式** (1.2.90) を用いながら計算すると，

$$\begin{aligned}
\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle &= \langle x|\hat{p}^2\hat{1}|\psi\rangle && (1.2.91)\\
&= \langle x|\,\hat{p}^2 \int \mathrm{d}p\,|p\rangle\langle p|\,|\psi\rangle && (1.2.92)\\
&= \int \mathrm{d}p\,p^2\,\langle x|p\rangle\,\langle p|\psi\rangle && (1.2.93)\\
&= \int \mathrm{d}p\,p^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{xp}{\hbar}\right)\langle p|\psi\rangle && (1.2.94)\\
&= \int \mathrm{d}p\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2\langle x|p\rangle\right\}\langle p|\psi\rangle && (1.2.95)\\
&= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2 \int \mathrm{d}p\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\langle x|p\rangle\right\}\langle p|\psi\rangle && (1.2.96)\\
&= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\langle x|\left[\int \mathrm{d}p\,|p\rangle\langle p|\right]|\psi\rangle && (1.2.97)\\
&= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\langle x|\psi\rangle && (1.2.98)\\
&= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) && (1.2.99)
\end{aligned}$$

となる．

式 (1.2.99) を**式** (1.2.55) に代入すれば，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) + \frac{1}{2m}\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = E\psi(x) && (1.2.100)\\
\iff\ &\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) + \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = E\psi(x) && (1.2.101)\\
\iff\ &\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x) = E\psi(x) && (1.2.102)
\end{aligned}$$

となる．

1.2.4 Schrodinger の解法

いささか唐突だが，波動函数が，

$$\psi(x) = f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \tag{1.2.103}$$

$$s := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \tag{1.2.104}$$

と書けたとする．$f(s)$ が Hermite 多項式となることを示す．

式 (1.2.102) の両辺を $-\dfrac{\hbar^2}{2m}$ で割って，x から s に変数変換[2]すると，

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x)=E\psi(x) \tag{1.2.105}$$

$$\iff \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2+\frac{2mE}{\hbar}\right]\psi(x)=0 \tag{1.2.106}$$

$$\iff \left[\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-\frac{\hbar}{m\omega}s^2+\frac{2mE}{\hbar^2}\right]f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=0 \tag{1.2.107}$$

$$\iff \left[\frac{m\omega}{\hbar}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-\frac{\hbar}{m\omega}s^2+\frac{2mE}{\hbar^2}\right]f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=0 \tag{1.2.108}$$

$$\iff \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-s^2+\frac{2E}{\hbar\omega}\right)f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=0 \tag{1.2.109}$$

と書ける．第 1 項について，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}f(s)\exp\left(-\dfrac{s^2}{2}\right)$ を計算しよう．Leibniz 則より，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)&=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}s^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)+2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right)+f(s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right) && (1.2.110)\\&=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}s^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)-2s\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)+f(s)\left(s^2-1\right)e\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) && (1.2.111)\\&=\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+\left(s^2-1\right)\right)f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) && (1.2.112)\end{aligned}$$

と計算できるから，**式** (1.2.109) は，

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-s^2+\frac{2E}{\hbar\omega}\right)f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=0 \tag{1.2.113}$$

$$\iff \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+\left(s^2-1\right)-s^2+\frac{2E}{\hbar\omega}\right)f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=0 \tag{1.2.114}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+\frac{2E}{\hbar\omega}-1\right)f(s)=0 \tag{1.2.115}$$

となる．Hermite 多項式の形は，

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+2n\right)H_n(s)=0 \tag{1.2.116}$$

であったから，

$$\frac{2E}{\hbar\omega}-1=2n \tag{1.2.117}$$

$$f(s)\to H_n(s) \tag{1.2.118}$$

とすれば良いことがわかる．n は非負整数で，$n=0$ では零点振動に対応する．規格化定数を A とすれば，波動函数は，

$$\psi_n(x)=AH_n(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \tag{1.2.119}$$

[2] この変数変換は x の無次元化ともとらえられる．実際に**式** (1.2.104) の右辺の次元を調べると，

$$\sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{s}}}\mathrm{m}=1$$

である．

と書ける．規格化定数は,

$$1 = \int \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 \tag{1.2.120}$$

$$= |A|^2 \int \mathrm{d}x\, H_n(s) H_n(s) \mathrm{e}^{-s^2} \tag{1.2.121}$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int \mathrm{d}s\, H_n(s) H_n(s) \mathrm{e}^{-s^2} \tag{1.2.122}$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi} 2^n n! \tag{1.2.123}$$

より,

$$A = \sqrt{\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}} \tag{1.2.124}$$

となる．波動函数は,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \tag{1.2.125}$$

となる．

1.3 電磁場の量子化

WIP 結果のみ示す．その他のことについては，別途ノートを参照すること．なお，February 1, 2025 現在，ノートは編集中である．Schrödingr 描像では，電場と磁場は,

$$\hat{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\varepsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \tag{1.3.1}$$

$$\hat{B}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \tag{1.3.2}$$

と量子化される．また，Heisenberg 描像では,

$$\hat{E}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\varepsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} \exp\left\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)\right\} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} \exp\left\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)\right\}\right] \tag{1.3.3}$$

$$\hat{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} \exp\left\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)\right\} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} \exp\left\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)\right\}\right] \tag{1.3.4}$$

と書ける．

1.4 ビームスプリッタ

1.4.1 電磁場のハミルトニアン

前節での議論により，系のハミルトニアンは,

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2} \left(\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\sigma}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\right) \tag{1.4.1}$$

と書けるのであった．以下では，簡単のために，1 方向成分・シングルモードの波を考える．

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) \tag{1.4.2}$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.4.3}$$

と書ける．屈折率が n の物質中では[3],

$$\hat{H}_{n,\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.4.4}$$

と書ける

1.4.2 ビームスプリッタ行列

2 入力 2 出力のビームスプリッタを考える．E_1 と E_2 の電場が入射して，E_1' と E_2' が出力されるとする．古典的に考えると,

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.5}$$

と書ける．このまま電場演算子を中心に議論を進めることはいささか冗長である．なぜならば，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_1^\dagger$ は複素共役の関係にあるのだから，片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ．よって**式** (1.4.5) を量子化して，消滅演算子 $\hat{a}_1$，$\hat{a}_2$ を用いて表せば,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1' \\ \hat{a}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.6}$$

と書ける．2 つの消滅演算子の交換関係は,

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_j^i \tag{1.4.7}$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \tag{1.4.8}$$

である．B はビームスプリッタ行列という．光子数が保存することから,

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 &= \hat{a}_1'^\dagger\hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger\hat{a}_2' && (1.4.9)\\
&= \left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right)^\dagger\left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right)^\dagger\left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) && (1.4.10)\\
&= \left(B_{11}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{12}^*\hat{a}_2^\dagger\right)\left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B_{21}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{22}^*\hat{a}_2^\dagger\right)\left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) && (1.4.11)\\
&= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{12}^*B_{11} + B_{21}^*B_{21}\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 && (1.4.12)\\
&= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)^*\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 && (1.4.13)
\end{aligned}$$

となり,

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22} = 0 \end{cases} \tag{1.4.14}$$

$$\Leftrightarrow B^\dagger B = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.15}$$

となればよい．つまり，ビームスプリッタ行列 B がユニタリ行列であれば良い．A での議論によりビームスプリッタ演算子は,

$$B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{1.4.16}$$

と書ける．ところが,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix} \tag{1.4.17}$$

[3] 謎である．屈折率により波動は変化しないはずである．

は 2 つの入力電場 E_1，E_2 に位相差をかけること，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{1.4.18}$$

は 2 つの出力電場 E'_1，E'_2 に位相差をかけること，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2} \tag{1.4.19}$$

は 2 つの出力電場場 E'_1，E'_2 に共通するグローバル位相を書けることに対応するから，実験のセットアップとして，

$$\Lambda = \Psi = \Phi = 0 \tag{1.4.20}$$

とすることができる．また，透過率 T と反射率 R を，

$$\sqrt{T} \coloneqq \cos(\Theta/2) \tag{1.4.21}$$

$$\sqrt{R} \coloneqq -\sin(\Theta/2) \tag{1.4.22}$$

と定義すれば，ビームスプリッタ行列 B は，

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{1.4.23}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \tag{1.4.24}$$

と書ける．

$$T + R = 1 \tag{1.4.25}$$

が成立することに注意する．

1.4.3　ビームスプリッタハミルトニアン

ビームスプリッタ行列を再び考えよう．今度は入力電場と出力電場の位相差が存在することにして，$\Lambda = 0$ のみ課しておく．するとビームスプリッタ行列は，

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{1.4.26}$$

と書ける．ビームスプリッタ行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.27}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2)\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2)\hat{a}_2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2)\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2)\hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.28}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.29}$$

と書ける．出力それぞれでの光の強度は，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_2^\dagger$ や $\hat{a}_1^\dagger$ と $\hat{a}_2$ が交換することを思い出せば，

$$\hat{a}_1'^\dagger \hat{a}'_1 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2\right)^\dagger \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2\right) \tag{1.4.30}$$

$$= T\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + R\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - \sqrt{T}\sqrt{R}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.4.31}$$

$$\hat{a}_2'^\dagger \hat{a}'_2 = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2\right)^\dagger \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2\right) \tag{1.4.32}$$

$$= R\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + T\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \sqrt{T}\sqrt{R}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.4.33}$$

となる．**式** (1.4.31) と**式** (1.4.33) について，第 1 項と第 2 項はそれぞれモード 1 の入力光子数，モード 2 の入力光子数に対応する．これらの重ね合わせに依って位相が変化して，そのパラメータは T である．相互作用を表す項は第 3 項であるから，ビームスプリッタによる相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ を，

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.4.34}$$

と定義する．

また，以下の演算子を定義する．

$$\hat{L}_0 \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.4.35}$$

$$\hat{L}_1 \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{1.4.36}$$

$$\hat{L}_2 \coloneqq \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{1.4.37}$$

$$\hat{L}_3 \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.4.38}$$

$\hat{L}_2$ と $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ の関係を調べよう．唐突だが，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} \tag{1.4.39}$$

考える．**式** (1.4.39) の第 1 成分について，Baker-Campbell-Hausdorff の公式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] + \frac{1}{2!}\left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\\ &\quad + \frac{1}{3!}\left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right] + \frac{1}{4!}\left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right]\right] + \cdots \qquad (1.4.40)\\ &= \hat{a}_1 + (-\mathrm{i}\Theta)\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\\ &\quad + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right]\right] + \cdots \qquad (1.4.41)\end{aligned}$$

となる．$\hat{L}_2$ と $\hat{a}_1$，$\hat{L}_2$ と $\hat{a}_2$ との交換関係についてそれぞれ，

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right), \hat{a}_1\right] &(1.4.42)\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_2\left[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1\right] - \hat{a}_2^\dagger[\hat{a}_1, \hat{a}_1]\right) &(1.4.43)\\ &= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\hat{a}_2 &(1.4.44)\\ \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right), \hat{a}_2\right] &(1.4.45)\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger[\hat{a}_2, \hat{a}_2] - \hat{a}_1\left[\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2\right]\right) &(1.4.46)\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\hat{a}_1 &(1.4.47)\end{aligned}$$

となる．ただし，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_2$ が交換することを用いた．よって，

$$\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1\hat{a}_2 \tag{1.4.48}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right] = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\hat{a}_1 \tag{1.4.49}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\hat{a}_2 \tag{1.4.50}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right]\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3 \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4 \hat{a}_1 \tag{1.4.51}$$

であるから**式** (1.4.41) は,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + (-\mathrm{i}\Theta)\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right] \\
&\quad + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right]\right] + \cdots &(1.4.52)\\
&= \hat{a}_1 + (-\mathrm{i}\Theta)(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1\hat{a}_2 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\hat{a}_1 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\hat{a}_2 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4\hat{a}_1 + \cdots &(1.4.53)\\
&= \hat{a}_1 + \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1\hat{a}_2 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2\hat{a}_1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3\hat{a}_2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4\hat{a}_1 + \cdots &(1.4.54)\\
&= \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \cdots\right]\hat{a}_1 + \left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \cdots\right]\hat{a}_2 &(1.4.55)\\
&= \cos(\Theta/2)\hat{a}_1 + \sin(\Theta/2)\hat{a}_2 &(1.4.56)
\end{aligned}$$

となる．同様に，**式** (1.4.39) の第 2 成分について,

$$\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1 \hat{a}_1 \tag{1.4.57}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2 \hat{a}_2 \tag{1.4.58}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3 \hat{a}_1 \tag{1.4.59}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right]\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4 \hat{a}_2 \tag{1.4.60}$$

なる関係を用いると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_2 + (-\mathrm{i}\Theta)\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right] \\
&\quad + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right]\right] + \cdots &(1.4.61)\\
&= \hat{a}_2 + (-\mathrm{i}\Theta)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1\hat{a}_1 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\hat{a}_2 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\hat{a}_1 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4\hat{a}_2 + \cdots &(1.4.62)\\
&= \hat{a}_2 - \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1\hat{a}_1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2\hat{a}_2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3\hat{a}_1 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4\hat{a}_2 + \cdots &(1.4.63)\\
&= -\left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \cdots\right]\hat{a}_1 + \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \cdots\right]\hat{a}_2 &(1.4.64)\\
&= -\sin(\Theta/2)\hat{a}_1 + \cos(\Theta/2)\hat{a}_2 &(1.4.65)
\end{aligned}$$

である．よって，**式** (1.4.39) は,

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} = \begin{pmatrix}\cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2)\\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \tag{1.4.66}$$

と書ける．**式** (1.4.66) の解釈を考えよう．相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ の定義は,

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.4.67}$$

であった．$\Phi = \pi/2$ とすると，

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.4.68}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{i}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \mathrm{i}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.4.69}$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{1.4.70}$$
$$= \hat{L}_2 \tag{1.4.71}$$

と書ける．さらに，**式** (1.4.66) において，$\Theta = -t/\hbar$ とすれば，

$$\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}_{\mathrm{int}}}{\hbar}t\right)\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}_{\mathrm{int}}}{\hbar}t\right) = \begin{pmatrix}\cos(-t/2\hbar) & \sin(-t/2\hbar)\\ -\sin(-t/2\hbar) & \cos(-t/2\hbar)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \tag{1.4.72}$$

となる．左辺は,

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \tag{1.4.73}$$

なる消滅演算子のペアを時間発展演算子で挟んでいる格好である．となれば，右辺は Heisenberg 描像で表した消滅演算子であろう[4].

1.5　コヒーレント状態

本節ではコヒーレント状態について議論する．コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は,

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{1.5.1}$$

なる状態である．また，$\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ となるように θ を定義しておく．

1.5.1　物理量の平均値・分散

具体的な $|\alpha\rangle$ の形を知らなくても，いくつかの物理量の平均値と分散については調べることができる．まず，電場の期待値を調べる．電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ を自然単位系を用いて書くと,

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{e}\left(\hat{a}\exp\left\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right\} - \hat{a}^\dagger\exp\left\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right\}\right) \tag{1.5.2}$$

であるから,

$$\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\rangle = \langle\alpha|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|\alpha\rangle \tag{1.5.3}$$
$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{e}\left(\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle\exp\left\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right\} - \left\langle\alpha\middle|\hat{a}^\dagger\middle|\alpha\right\rangle\exp\left\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right\}\right) \tag{1.5.4}$$
$$= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\boldsymbol{e}(\alpha\exp\left\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right\} - \alpha^*\exp\left\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right\}) \tag{1.5.5}$$
$$= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\boldsymbol{e}\left(|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\exp\left\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right\} - |\alpha|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\exp\left\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right\}\right) \tag{1.5.6}$$
$$= -|\alpha|\boldsymbol{e}\sin\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \theta\right) \tag{1.5.7}$$

である．

[4]右辺に出てくる行列はビームスプリッタ行列でないことに注意する．確かに 2 つの入力電場間の位相ずれや，2 つの出力電場間の位相ずれがないと仮定したとき，ビームスプリッタ演算子は**式** (1.4.24) と書ける．しかし，$\Phi = \pi/2$ なる仮定のもと議論している．このような入力電場の位相ずれ Φ に対して，出力電場の位相ずれ Ψ をうまく定めれば**式** (1.4.24) の形を実現することができると思うかもしれないが，その試みははかなく終わる．そのような Ψ は，$\pi/2 + \Psi = 2n\pi$ かつ $\pi/2 - \Psi = 2m\pi$, $n, m \in \mathbb{Z}$ としなければいけないが，2 式を足して，$\pi = 2(n+m)\pi$ となり，そのような n, m は存在しない．要するに，**式** (1.4.66) の右辺の行列はビームスプリッタ行列ではないのだ．なお，テキストでの (1.106) は何を言いたいのかわからない．

次に，位置と運動量の平均値と分散について議論する．位置演算子と運動量演算子は生成演算子と消滅演算子を用いて，

$$\hat{x} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}\right) \tag{1.5.8}$$

$$\hat{p} \coloneqq \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\right) \tag{1.5.9}$$

と書けるから，

$$\langle x\rangle = \left\langle\alpha\middle|\frac{1}{2}\left(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}\right)\middle|\alpha\right\rangle \tag{1.5.10}$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha+\alpha^{*}) \tag{1.5.11}$$

$$\langle x^2\rangle = \left\langle\alpha\middle|\frac{1}{4}\left(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}\right)^2\middle|\alpha\right\rangle \tag{1.5.12}$$

$$= \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\hat{a}^2\middle|\alpha\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\middle|\alpha\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\middle|\alpha\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\hat{a}^{\dagger 2}\middle|\alpha\right\rangle \tag{1.5.13}$$

$$= \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1\right)\middle|\alpha\right\rangle + \frac{1}{4}|\alpha|^2 + \frac{1}{4}\alpha^{*2} \tag{1.5.14}$$

$$= \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}|\alpha|^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}|\alpha|^2 + \frac{1}{4}\alpha^{*2} \tag{1.5.15}$$

$$= \frac{1}{4}(\alpha+\alpha^{*})^2 + \frac{1}{4} \tag{1.5.16}$$

$$\langle p\rangle = \left\langle\alpha\middle|\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\right)\middle|\alpha\right\rangle \tag{1.5.17}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\alpha-\alpha^{*}) \tag{1.5.18}$$

$$\langle p^2\rangle = \left\langle\alpha\middle|-\frac{1}{4}\left(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\right)^2\middle|\alpha\right\rangle \tag{1.5.19}$$

$$= -\frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\hat{a}^2\middle|\alpha\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\middle|\alpha\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\middle|\alpha\right\rangle - \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\hat{a}^{\dagger 2}\middle|\alpha\right\rangle \tag{1.5.20}$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1\right)\middle|\alpha\right\rangle + \frac{1}{4}|\alpha|^2 - \frac{1}{4}\alpha^{*2} \tag{1.5.21}$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}|\alpha|^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}|\alpha|^2 - \frac{1}{4}\alpha^{*2} \tag{1.5.22}$$

$$= -\frac{1}{4}(\alpha+\alpha^{*})^2 + \frac{1}{4} \tag{1.5.23}$$

より，

$$\Delta x_{\mathrm{coh}} \coloneqq \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \frac{1}{4} \tag{1.5.24}$$

$$\Delta p_{\mathrm{coh}} \coloneqq \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \frac{1}{4} \tag{1.5.25}$$

となる．

1.5.2 個数状態での展開

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を，Hermite 演算子である $\hat{n}$ の固有状態である個数状態 $|n\rangle$ で展開することを考える．

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n\,|n\rangle \tag{1.5.26}$$

である．**式** (1.5.1) に**式** (1.5.26) を代入して，**式** (1.2.47) の関係式を用いると，

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{1.5.27}$$

$$\iff \hat{a}\sum_{n=0}^{\infty} w_n \left|n\right\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} w_n \left|n\right\rangle \tag{1.5.28}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} w_n \left|n-1\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n \left|n\right\rangle \tag{1.5.29}$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} w_{n+1} \left|n\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n \left|n\right\rangle \tag{1.5.30}$$

であるから，

$$\sqrt{n+1} w_{n+1} = \alpha w_n \tag{1.5.31}$$

$$\iff w_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C \tag{1.5.32}$$

である．$C \coloneqq w_0$ と定義した．$\left|\alpha\right\rangle$ の規格化条件より，

$$1 = \left\langle\alpha|\alpha\right\rangle = \left(\sum_n w_n \left|n\right\rangle\right)^\dagger \left(\sum_m w_m \left|m\right\rangle\right) \tag{1.5.33}$$

$$= \left(\sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} C^* \left\langle n\right|\right)\left(\sum_m \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} C \left|m\right\rangle\right) \tag{1.5.34}$$

$$= |C|^2 \sum_{n,m} \frac{(\alpha^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \left\langle n|m\right\rangle \tag{1.5.35}$$

$$= |C|^2 \sum_n \frac{\left(|\alpha|^2\right)^n}{n!} \tag{1.5.36}$$

$$= |C|^2 \mathrm{e}^{|\alpha|^2} \tag{1.5.37}$$

であるから，

$$C = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \tag{1.5.38}$$

とすればよい．よって，コヒーレント状態は，

$$\left|\alpha\right\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \left|n\right\rangle \tag{1.5.39}$$

と書ける．**式** (1.5.39) より，コヒーレント状態とは，個数状態を $\left|n\right\rangle$ を Poisson 分布に従って重ね合わせたものだと分かる．

式 (1.5.39) の表式より，異なるコヒーレント状態 $\left|\alpha\right\rangle$ と $\left|\alpha'\right\rangle$ は直交することがわかる．実際に計算すると，

$$\left|\left\langle\alpha|\alpha'\right\rangle\right|^2 = \left|\left(\sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\left\langle n\right|\right)\left(\sum_{n'} \frac{\alpha'^{n'}}{\sqrt{n'!}} \exp\left(-\frac{|\alpha'|^2}{2}\right)\left|n'\right\rangle\right)\right|^2 \tag{1.5.40}$$

$$= \exp\left\{-\left(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2\right)\right\}\left(\sum_{n,n'} \frac{(\alpha^*)^n \alpha'^{n'}}{\sqrt{n!}\sqrt{n'!}} \left\langle n|n'\right\rangle\right)\left(\sum_{m',m} \frac{(\alpha'^*)^m \alpha^{m'}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}} \left\langle m'|m\right\rangle\right) \tag{1.5.41}$$

$$= \exp\left\{-\left(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2\right)\right\}\left(\sum_n \frac{(\alpha^*\alpha')^n}{n!}\right)\left(\sum_m \frac{(\alpha'^*\alpha)^m}{m!}\right) \tag{1.5.42}$$

$$= \exp\left\{-\left(|\alpha|^2 - \alpha^*\alpha' - \alpha'^*\alpha + |\alpha'|^2\right)\right\} \tag{1.5.43}$$

$$= \exp\left(-|\alpha - \alpha'|^2\right) \tag{1.5.44}$$

となる．

1.5.3　調和振動子ハミルトニアンでの時間発展

まず，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が調和振動子ハミルトニアン $\hat{H}$ があるときにどのように時間発展発展するか調べる．系のハミルトニアンは,

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.5.45}$$

と書けるから,

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)\rangle &= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|\alpha\rangle & (1.5.46)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t\hat{n}}|\alpha\rangle & (1.5.47)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-\mathrm{i}\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|n\rangle & (1.5.48)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sum_m \frac{(-\mathrm{i}\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m|n\rangle & (1.5.49)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sum_m \frac{(-\mathrm{i}n\omega t)^m}{m!}|n\rangle & (1.5.50)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|n\rangle & (1.5.51)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_n \frac{\left(\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|n\rangle & (1.5.52)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_n \frac{\left(\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{\left|\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right|^2}{2}\right)|n\rangle & (1.5.53)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\left|\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\rangle & (1.5.54)
\end{aligned}$$

グローバル位相は無視してよいので,

$$|\alpha(t)\rangle = \left|\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\rangle \tag{1.5.55}$$

と分かる．

次に，個数状態の時間発展を調べる．

$$\begin{aligned}
|n(t)\rangle &= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|n\rangle & (1.5.56)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t\hat{n}}|n\rangle & (1.5.57)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-\mathrm{i}\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m|n\rangle & (1.5.58)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-\mathrm{i}n\omega t)^m}{m!}|n\rangle & (1.5.59)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|n\rangle & (1.5.60)
\end{aligned}$$

となり，周波数が 2 倍になったように見える[5].

[5] らしい

1.5.4 レーザのハミルトニアンでの時間発展

真空場 $|0\rangle$ が $|\alpha\rangle$ に時間変化するものがレーザである．レーザのハミルトニアンを

$$\hat{H}_{\text{laser}} \coloneqq \mathrm{i}\frac{\hbar}{t}\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right) \tag{1.5.61}$$

とかける．実際，この系における真空状態 $|0\rangle$ の時間発展は，

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|0\rangle &= \exp\left(-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\frac{\hbar}{t}\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)\frac{t}{\hbar}\right)|0\rangle & (1.5.62)\\
&= \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}\,|0\rangle & (1.5.63)\\
&= \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha^*\hat{a}\right]\right)|0\rangle & (1.5.64)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\,|0\rangle & (1.5.65)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\sum_{n=0}\frac{(-\alpha^*\hat{a})^n}{n!}\,|0\rangle & (1.5.66)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle & (1.5.67)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}\frac{\left(\alpha\hat{a}^\dagger\right)^n}{n!}\,|0\rangle & (1.5.68)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}\frac{\alpha^n}{n!}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle & (1.5.69)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}\frac{\alpha^n}{n!}\sqrt{n!}\,|0\rangle & (1.5.70)\\
&= \sum_{n=0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|0\rangle & (1.5.71)\\
&= |\alpha\rangle & (1.5.72)
\end{aligned}$$

となり，やはり $\hat{H}_{\text{laser}}$ はレーザのハミルトニアンである．計算の途中に，2 つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いた．

変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ を，

$$\hat{D}(\alpha) \coloneqq \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} \tag{1.5.73}$$

と定義する．Schrödinger 描像では系の時間発展を状態ベクトルに押し付けて，

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\,|0\rangle \tag{1.5.74}$$

としたのであった．Heisenberg 描像で，光の振幅に対応する物理量である消滅演算子 $\hat{a}$ の時間発展の様子を調べる．1 つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いて計算すると，

$$\begin{aligned}
\hat{D}^\dagger\hat{a}\hat{D}(\alpha) &= \mathrm{e}^{\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)^\dagger}\hat{a}\mathrm{e}^{\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)} & (1.5.75)\\
&= \mathrm{e}^{-\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)}\hat{a}\mathrm{e}^{\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)} & (1.5.76)\\
&= \hat{a} + \left[-\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right), \hat{a}\right] & (1.5.77)\\
&= \hat{a} + \alpha & (1.5.78)
\end{aligned}$$

となる．

1.6 スクイーズド状態

本節では，スクイーズド状態 $|\beta\rangle_{\mathrm{g}}$ について議論する．スクイーズド状態は，消滅演算子 $\hat{a}$ を変換して得られる $\hat{b}$ の固有状態であり，その変換は，

$$\hat{b} \coloneqq \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^{\dagger},\ |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \tag{1.6.1}$$

と定義され，Bogoliubov 変換と呼ばれる．縮退パラメトリック過程は，電場の 2 乗に比例して分極が起こって，その比例係数が $\chi^{(2)}$ である非線型結晶に対して，周波数 ω の入射電場 E_{in} と 2ω の強い電場 E_3 を入射して，2 つの電場の差周波 $2\omega - \omega = \omega$ の周波数の電場 E_{out} が放出される過程である．E_{in} と E_{out} の間には，

$$E_{\mathrm{out}} = E_{\mathrm{in}} \cosh r - E_{\mathrm{in}}^{*} \sinh r \tag{1.6.2}$$

なる関係がある．ただし，r は，

$$r \coloneqq \frac{z}{2c} \cdot \frac{\omega}{n} \tag{1.6.3}$$

と定義され，z は非線型結晶の長さ，c は光速，n は非線型結晶の屈折率である．また，$\cosh r$ と $\sinh r$ は，

$$\cosh r \coloneqq \frac{\mathrm{e}^{r} + \mathrm{e}^{-r}}{2} \tag{1.6.4}$$

$$\sinh r \coloneqq \frac{\mathrm{e}^{r} - \mathrm{e}^{-r}}{2} \tag{1.6.5}$$

$$\tag{1.6.6}$$

と定義されていて，

$$\begin{aligned}
|\cosh r|^2 - |-\sinh r|^2 &= \left|\frac{\mathrm{e}^{r} + \mathrm{e}^{-r}}{2}\right|^2 - \left|-\frac{\mathrm{e}^{r} - \mathrm{e}^{-r}}{2}\right|^2 && (1.6.7)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{2r} + 2 + \mathrm{e}^{-2r}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2r} - 2 + \mathrm{e}^{-2r}}{4} && (1.6.8)\\
&= 1 && (1.6.9)
\end{aligned}$$

なる関係がある．さて，**式** (1.6.2) を量子化すると，$\hat{a}$ が電場の振幅に対応するのだから，出力電場の振幅に対応する物理量を $\hat{b}$ とすれば，

$$\hat{b} = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^{\dagger}\sinh r \tag{1.6.10}$$

となる．

1.6.1 縮退パラメトリック過程のハミルトニアンによる消滅演算子の時間発展

Heisenber 描像において $\hat{a}$ を $\hat{b}$ に変換するものが，縮退パラメトリック変換である．縮退パラメトリック変換のハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{para}}$ を，

$$\hat{H}_{\mathrm{para}} \coloneqq \mathrm{i}\frac{\hbar}{t}\frac{r}{2}\left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}\right) \tag{1.6.11}$$

と定義する．$\left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}\right)$ と $\hat{a}$ や，$\left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}\right)$ と $\hat{a}^{\dagger}$ との交換関係は，

$$\begin{aligned}
\left[\left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}\right), \hat{a}\right] &= \left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}\right)\hat{a} - \hat{a}\left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}\right) && (1.6.12)\\
&= \hat{a}\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} && (1.6.13)\\
&= \left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + 1\right)\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} && (1.6.14)\\
&= \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} && (1.6.15)\\
&= \hat{a}^{\dagger}\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + 1\right) + \hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} && (1.6.16)\\
&= 2\hat{a}^{\dagger} && (1.6.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right),\hat{a}^\dagger\right] &= \left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right) && (1.6.18)\\
&= \hat{a}^2\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^2 && (1.6.19)\\
&= \hat{a}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right) - \hat{a}^\dagger\hat{a}^2 && (1.6.20)\\
&= \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^2 && (1.6.21)\\
&= \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right)\hat{a} + \hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^2 && (1.6.22)\\
&= 2\hat{a} && (1.6.23)
\end{aligned}$$

となることを用いると，$\hat{a}$ の時間発展は 1 つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いて，この系における消滅演算子 $\hat{a}$ の時間発展は，

$$\begin{aligned}
\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}_{\mathrm{para}}}{\hbar}t\right)\hat{a}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}_{\mathrm{para}}}{\hbar}t\right) &= \exp\left(-\frac{r}{2}\left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right)\right)\hat{a}\exp\left(\frac{r}{2}\left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right)\right) && (1.6.24)\\
&= \hat{a} + \left[-\frac{r}{2}\left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right),\hat{a}\right] + \frac{1}{2!}\left[-\frac{r}{2}\left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right),\left[-\frac{r}{2}\left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right),\hat{a}\right]\right] + \cdots && (1.6.25)\\
&= \hat{a} + \frac{1}{1!}\left(-\frac{r}{2}\right)^1\cdot 2^1\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2!}\left(-\frac{r}{2}\right)^2\cdot 2^2\hat{a} + \frac{1}{3!}\left(-\frac{r}{2}\right)^3\cdot 2^3\hat{a}^\dagger + \frac{1}{4!}\left(-\frac{r}{2}\right)^4\cdot 2^4\hat{a} + \cdots && (1.6.26)\\
&= \hat{a}\left(1+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^4}{4!}+\cdots\right) - \hat{a}^\dagger\left(\frac{r^1}{1!}+\frac{r^3}{3!}+\frac{r^5}{5!}+\cdots\right) && (1.6.27)\\
&= \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger\sinh r && (1.6.28)
\end{aligned}$$

となる．式 (1.6.9) で示した関係式より，縮退パラメトリック変換は Bogoliubov 変換である．計算の途中で $\cosh r$ と $\sinh r$ が，

$$\begin{aligned}
\cosh r &= \frac{\mathrm{e}^r+\mathrm{e}^{-r}}{2} && (1.6.29)\\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\cdots\right)+\left(1+\frac{(-r)}{1!}+\frac{(-r)^2}{2!}+\cdots\right)\right\} && (1.6.30)\\
&= 1+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^4}{4!}+\cdots && (1.6.31)\\
\sinh r &= \frac{\mathrm{e}^r-\mathrm{e}^{-r}}{2} && (1.6.32)\\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\cdots\right)-\left(1+\frac{(-r)}{1!}+\frac{(-r)^2}{2!}+\cdots\right)\right\} && (1.6.33)\\
&= \frac{r^1}{1!}+\frac{r^3}{3!}+\frac{r^5}{5!}+\cdots && (1.6.34)\\
& && (1.6.35)
\end{aligned}$$

となることを用いた．$\hat{a}$ を $\hat{b}$ に変換するユニタリをスクイーズ演算子 $\hat{S}(r)$ といい，

$$\hat{S}(r) \coloneqq \exp\left\{\frac{r}{2}\left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right)\right\} \tag{1.6.36}$$

と定義する．

1.6.2 真空状態とスクイーズされた真空場の関係

個数状態は $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態であり，$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ に課している条件は，$\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1$ のみである．さて，同様に $\hat{b}$ と $\hat{b}^\dagger$ の交換関係を調べると，

$$\begin{aligned}
\left[\hat{b},\hat{b}^\dagger\right] &= \left(\mu\hat{a}+\nu\hat{a}^\dagger\right)\left(\mu^*\hat{a}^\dagger+\nu^*\hat{a}\right) - \left(\mu^*\hat{a}^\dagger+\nu^*\hat{a}\right)\left(\mu\hat{a}+\nu\hat{a}^\dagger\right) && (1.6.37)\\
&= \left(|\mu|^2-|\nu|^2\right)\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) && (1.6.38)
\end{aligned}$$

$$= 1 \tag{1.6.39}$$

より，$\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態 $|n\rangle$ のように $\hat{b}^\dagger\hat{b}$ の固有状態 $|m_\mathrm{g}\rangle$ が存在する．また，$\hat{a}$ の固有状態 $|\alpha\rangle$ が存在して $|n\rangle$ で展開できるように，$\hat{b}$ の固有状態 $|\beta\rangle_\mathrm{g}$ が存在して $|m_\mathrm{g}\rangle$ で展開できる．どちらも展開係数の 2 乗は Poisson 分布になるはずであるから，

$$|\beta\rangle_\mathrm{g} = \sum_{m_\mathrm{g}} \frac{\beta_{m_\mathrm{g}}}{\sqrt{m_\mathrm{g}}} \exp\left(-\frac{|\beta^2|}{2}\right) |m_\mathrm{g}\rangle \tag{1.6.40}$$

と展開できる．明らかに，

$$|\beta = 0\rangle_\mathrm{g} = |m_\mathrm{g} = 0\rangle \tag{1.6.41}$$

である．

Heisenberg 描像において $\hat{b}$ はユニタリ演算子 $\hat{S}(r)$ によって $\hat{a}$ を変換したものであった．Schrödinger 描像では，状態ベクトルに $\hat{S}(r)$ を作用させて時間発展を考えることができる．個数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態の 1 つである $|0\rangle$ を考える．Heisenberg 描像では，個数演算子は，

$$\hat{S}(r)^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{S}(r) = \hat{S}(r)^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{S}(r)\hat{S}(r)^\dagger\hat{a}\hat{S}(r) = \hat{b}^\dagger\hat{b} \tag{1.6.42}$$

とユニタリ変換されている．Schrödinger 描像では，$|0\rangle$ が時間発展して $|m_\mathrm{g} = 0\rangle$ になるとすれば**式** (1.6.41) より，

$$|\beta = 0\rangle_\mathrm{g} = \hat{S}(r)\,|0\rangle \tag{1.6.43}$$

となる[6]．

1.6.3　位置と運動量の平均・分散

スクイーズド状態の位置と運動量の平均と分散を考える．スクイーズ演算子によって位置演算子や運動量演算子，また，それらの 2 乗は，

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r) = \frac{1}{2}\Big(\hat{S}^\dagger(r)\hat{a}\hat{S}(r) + \hat{S}^\dagger(r)\hat{a}\hat{S}(r)\Big) \tag{1.6.44}$$

$$= \frac{1}{2}\big(\hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger\sinh r + \hat{a}^\dagger\cosh r - \hat{a}\sinh r\big) \tag{1.6.45}$$

$$= \frac{1}{2}(\cosh r - \sinh r)\big(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\big) \tag{1.6.46}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r}\big(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\big) \tag{1.6.47}$$

$$= \mathrm{e}^{-r}\hat{x} \tag{1.6.48}$$

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}^2\hat{S}(r) = \hat{S}^\dagger\hat{x}\hat{S}(r)\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r) \tag{1.6.49}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r}\big(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\big)\right]^2 \tag{1.6.50}$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2r}\big(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\big) \tag{1.6.51}$$

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{p}\hat{S}(r) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\hat{S}^\dagger(r)\hat{a}\hat{S}(r) - \hat{S}^\dagger(r)\hat{a}\hat{S}(r)\Big) \tag{1.6.52}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger\sinh r - \hat{a}^\dagger\cosh r + \hat{a}\sinh r\big) \tag{1.6.53}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\cosh r + \sinh r)\big(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\big) \tag{1.6.54}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{r}\big(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\big) \tag{1.6.55}$$

$$= \mathrm{e}^{r}\hat{p} \tag{1.6.56}$$

[6] ここの計算はわからなかった．

$$
\begin{aligned}
\hat{S}^\dagger(r)\hat{p}^2\hat{S}(r) &= \hat{S}^\dagger\hat{p}\hat{S}(r)\hat{S}^\dagger(r)\hat{p}\hat{S}(r) && (1.6.57)\\
&= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{r}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)\right]^2 && (1.6.58)\\
&= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2r}\left(\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) && (1.6.59)
\end{aligned}
$$

と計算されるので,

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= {}_{\mathrm{g}}\langle\beta=0|\hat{x}|\beta=0\rangle_{\mathrm{g}} && (1.6.60)\\
&= \left\langle 0\middle|\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r)\middle|0\right\rangle && (1.6.61)\\
&= \left\langle 0\middle|\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\middle|0\right\rangle && (1.6.62)\\
&= 0 && (1.6.63)\\
\left\langle x^2\right\rangle &= {}_{\mathrm{g}}\left\langle\beta=0\middle|\hat{x}^2\middle|\beta=0\right\rangle_{\mathrm{g}} && (1.6.64)\\
&= \left\langle 0\middle|\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}^2\hat{S}(r)\middle|0\right\rangle && (1.6.65)\\
&= \left\langle 0\middle|\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2r}\left(\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\middle|0\right\rangle && (1.6.66)\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2r} && (1.6.67)\\
\langle p\rangle &= {}_{\mathrm{g}}\langle\beta=0|\hat{p}|\beta=0\rangle_{\mathrm{g}} && (1.6.68)\\
&= \left\langle 0\middle|\hat{S}^\dagger(r)\hat{p}\hat{S}(r)\middle|0\right\rangle && (1.6.69)\\
&= \left\langle 0\middle|\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{r}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)\middle|0\right\rangle && (1.6.70)\\
&= 0 && (1.6.71)\\
\left\langle p^2\right\rangle &= {}_{\mathrm{g}}\left\langle\beta=0\middle|\hat{p}^2\middle|\beta=0\right\rangle_{\mathrm{g}} && (1.6.72)\\
&= \left\langle 0\middle|\hat{S}^\dagger(r)\hat{p}^2\hat{S}(r)\middle|0\right\rangle && (1.6.73)\\
&= \left\langle 0\middle|-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2r}\left(\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\middle|0\right\rangle && (1.6.74)\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2r} && (1.6.75)
\end{aligned}
$$

となる．ゆえに，スクイーズド状態の揺らぎは,

$$
\begin{aligned}
\Delta x_{\mathrm{sq}} &= \sqrt{\left\langle x^2\right\rangle-\langle x\rangle^2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r} && (1.6.76)\\
\Delta p_{\mathrm{sq}} &= \sqrt{\left\langle p^2\right\rangle-\langle p\rangle^2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{r} && (1.6.77)
\end{aligned}
$$

となる．

1.7 密度演算子

1.8 Wigner 函数

1.9 バランス型ホモダイン測定

1.10 量子もつれ

Chapter 2

量子情報科学

付録 A

ユニタリ行列の分解

ユニタリ行列は一般に,

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2)\\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2}\end{pmatrix} \tag{A.0.1}$$

と分解できる．具体的に U を計算すると,

$$\begin{aligned}
U &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2)\\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2}\end{pmatrix} && \text{(A.0.2)}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2}\sin(\Theta/2)\\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\cos(\Theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2}\end{pmatrix} && \text{(A.0.3)}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2)\\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2)\end{pmatrix} && \text{(A.0.4)}
\end{aligned}$$

であり，$\alpha = \Psi + \Phi$，$\beta = \Psi - \Phi$ とすると,

$$\begin{aligned}
U &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2)\\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2)\end{pmatrix} && \text{(A.0.5)}\\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda+\alpha)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda+\beta)/2}\sin(\Theta/2)\\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda-\beta)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda-\alpha)/2}\cos(\Theta/2)\end{pmatrix} && \text{(A.0.6)}
\end{aligned}$$

と書ける．

Proof. 任意 2×2 の行列は，実数 r_{ij} と θ_{ij} を用いて,

$$M = \begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}}\\ r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{21}} & r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix} \tag{A.0.7}$$

と書けて,

$$\begin{aligned}
M^\dagger M &= \begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{21}}\\ r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{12}} & r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}}\\ r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{21}} & r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix} && \text{(A.0.8)}\\
&= \begin{pmatrix}r_{11}^2 + r_{21}^2 & r_{11}r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})}\\ r_{11}r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} & r_{12}^2 + r_{22}^2\end{pmatrix} && \text{(A.0.9)}\\
MM^\dagger &= \begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}}\\ r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{21}} & r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{21}}\\ r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{12}} & r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix} && \text{(A.0.10)}\\
&= \begin{pmatrix}r_{11}^2 + r_{12}^2 & r_{11}r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})}\\ r_{11}r_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{12}r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} & r_{21}^2 + r_{22}^2\end{pmatrix} && \text{(A.0.11)}
\end{aligned}$$

となる．M がユニタリ行列であることの必要十分条件は,

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \tag{A.0.12}$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \tag{A.0.13}$$
$$r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \tag{A.0.14}$$
$$r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \tag{A.0.15}$$
$$r_{11}r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \tag{A.0.16}$$
$$r_{11}r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \tag{A.0.17}$$

である．$M^\dagger M$ や $MM^\dagger$ の非対角成分は複素共役になっていることに注意する．**式** (A.0.12) から**式** (A.0.15) を満たすような r_{ij} の組は，実数 Θ を用いて，

$$r_{11} = r_{22} = \cos(\Theta/2) \tag{A.0.18}$$
$$r_{12} = -r_{21} = \sin(\Theta/2) \tag{A.0.19}$$

なるものである．また，これらの r_{ij} の値を**式** (A.0.16) と**式** (A.0.17) に代入すると，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \tag{A.0.20}$$
$$-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \tag{A.0.21}$$

が成立する．

$$\Phi = \theta_{11} - \theta_{12} = \theta_{21} - \theta_{22} \tag{A.0.22}$$
$$\Psi = \theta_{11} - \theta_{21} = \theta_{12} - \theta_{22} \tag{A.0.23}$$
$$\tag{A.0.24}$$

とすると，

$$\theta_{11} = \frac{\Lambda + \Psi + \Phi}{2} \tag{A.0.25}$$
$$\theta_{12} = \frac{\Lambda + \Psi - \Phi}{2} \tag{A.0.26}$$
$$\theta_{21} = \frac{\Lambda - \Psi + \Phi}{2} \tag{A.0.27}$$
$$\theta_{22} = \frac{\Lambda - \Psi - \Phi}{2} \tag{A.0.28}$$

となり，**式** (A.0.4) を得る．つまり，任意のユニタリ行列は**式** (A.0.4) で書けることが示された． □

実際に**式** (A.0.4) がユニタリ行列であることを確かめる．

$$U^\dagger U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.0.29}$$
$$UU^\dagger = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.0.30}$$

となり，U はユニタリ行列であることが分かる．

付録 B

Baker-Campbell-Hausdorffの公式

B.1　Baker-Campbell-Hausdorffの公式 1

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \cdots \tag{B.1.1}$$

なる式を示す.

Proof. 函数 $f(t)$ を,

$$f(t) \coloneqq \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-t\hat{A}} \tag{B.1.2}$$

と定義する．$f(t)$ を $t = 0$ の周りで展開することを考えると,

$$f(t) = f(0) + \frac{1}{1!}\left(\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}\right)t + \frac{1}{2!}\left(\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}\right)t^2 + \cdots \tag{B.1.3}$$

と書ける．さて,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \hat{A}\mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-t\hat{A}} - \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\hat{A}\mathrm{e}^{-t\hat{A}} && \text{(B.1.4)}\\
&= \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{A}\hat{B}\mathrm{e}^{-t\hat{A}} - \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\hat{A}\mathrm{e}^{-t\hat{A}} && \text{(B.1.5)}\\
&= \mathrm{e}^{t\hat{A}}\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\mathrm{e}^{-t\hat{A}} && \text{(B.1.6)}\\
&= \mathrm{e}^{t\hat{A}}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\mathrm{e}^{-t\hat{A}} && \text{(B.1.7)}
\end{aligned}$$

である．よって,

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \tag{B.1.8}$$

である．2 階以上の微分では，**式** (B.1.7) において，$\hat{B} \to \left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ とすればよい．よって，**式** (B.1.3) に**式** (B.1.7) を代入すると,

$$f(t) = B + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]t + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right]t^2 + \cdots \tag{B.1.9}$$

である．$t = 1$ とすれば,

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \cdots \tag{B.1.10}$$

となる．特に,

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0 \tag{B.1.11}$$

のとき,

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \tag{B.1.12}$$

である. □

B.2 Baker-Campbell-Hausdorff の公式 2

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{12}\left[\left(\hat{A} - \hat{B}\right), \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \cdots\right) \tag{B.2.1}$$

なる式を示す.

Proof. $f(t)$ と $g(t)$ を,

$$\begin{cases} f(t) \coloneqq e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}} = e^{g(t)} \\ g(t) \coloneqq \log\left(e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}\right) = \log\left(f(t)\right) \end{cases} \tag{B.2.2}$$

と定義する. $f(t)$ の Taylor 展開を考える.

$$\frac{d}{dt}f(t) = \hat{A}e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}} + e^{t\hat{A}}Be^{t\hat{B}} \tag{B.2.3}$$

$$= e^{t\hat{A}}\left(\hat{A} + \hat{B}\right)e^{t\hat{B}} \tag{B.2.4}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}\left(\hat{A} + \hat{B}\right) + \left(\hat{A} + \hat{B}\right)\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \tag{B.2.5}$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2\right\}e^{t\hat{B}} \tag{B.2.6}$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^2 + \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} + \hat{B}^2 + \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right\}e^{t\hat{B}} \tag{B.2.7}$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^2 + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\}e^{t\hat{B}} \tag{B.2.8}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}f(t) = e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}\left(\hat{A} + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2\right) + \left(\hat{A} + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2\right)\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \tag{B.2.9}$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^3 + 3\hat{A}^2\hat{B} + 3\hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^3\right\}e^{t\hat{B}} \tag{B.2.10}$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^3 + \hat{A}^2\hat{B} + \hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}^2 + \hat{B}^2\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^3 + 2\hat{A}^2\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} - \hat{B}\hat{A}^2 - \hat{B}^2\hat{A} - \hat{B}\hat{A}\hat{B} + 2\hat{A}\hat{B}^2\right\}e^{t\hat{B}} \tag{B.2.11}$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^3 + \hat{A}^2\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{A}^2\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^2 + \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A} + \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}\hat{A}\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \tag{B.2.12}$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^3 + \hat{A}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}^2, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}^2\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \tag{B.2.13}$$

となる. $t = 0$ 周りで $f(t)$ を Taylor 展開すると,

$$f(t) = f(0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{d}{dt}f(t)\bigg|_{t=0}\right)t + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\bigg|_{t=0}\right)t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{dt^3}f(t)\bigg|_{t=0}\right)t^3 + \cdots \tag{B.2.14}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}\left(\hat{A} + \hat{B}\right)t + \frac{1}{2!}\left\{\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^2 + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\}t^2 + \frac{1}{3!}\left\{\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^3 + \hat{A}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}^2, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}^2\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}\right\}t^3 + \cdots \tag{B.2.15}$$

$$= 1 + \hat{P}_1 t + \hat{P}_2 t^2 + \hat{P}_3 t^3 + \cdots \tag{B.2.16}$$

$$\tag{B.2.17}$$

と書ける．ただし，

$$\hat{P}_1 \coloneqq \frac{1}{1!}\left(\hat{A}+\hat{B}\right) \tag{B.2.18}$$

$$\hat{P}_2 \coloneqq \frac{1}{2!}\left\{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\} \tag{B.2.19}$$

$$\hat{P}_3 \coloneqq \frac{1}{3!}\left\{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^3+\hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\left[\hat{A}^2,\hat{B}\right]+\left[\hat{A},\hat{B}^2\right]+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}\right\} \tag{B.2.20}$$

と定義した．$F(t)$ を，

$$F(t) \coloneqq f(t)-1 \tag{B.2.21}$$

$$= \hat{P}_1 t+\hat{P}_2 t^2+\hat{P}_3 t^3+\cdots \tag{B.2.22}$$

と定義する．$h(x) \coloneqq \log(1+x)$ は $x=0$ のまわりで，

$$h(x) = h(0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x)\bigg|_{x=0}\right)x+\frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}h(x)\bigg|_{x=0}\right)x^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}h(x)\bigg|_{x=0}\right)x^3+\cdots \tag{B.2.23}$$

$$= 0+\frac{1}{1!}\frac{1}{1+0}x+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{(1+0)^2}\right)x^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{2}{(1+0)^3}\right)x^3+\cdots \tag{B.2.24}$$

$$= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \tag{B.2.25}$$

であることと，$t\to 0$ で $F(t)\to 0$ であることを用いて $g(t)$ を $t=0$ の周りで Taylor 展開すると，

$$g(t) = \log(f(t)) \tag{B.2.26}$$

$$= \log(1+F(t)) \tag{B.2.27}$$

$$= F(t)-\frac{F(t)^2}{2}+\frac{F(t)^3}{3}-\cdots \tag{B.2.28}$$

$$= \left(\hat{P}_1 t+\hat{P}_2 t^2+\hat{P}_3 t^3\right)-\frac{1}{2}\left(\hat{P}_1 t+\hat{P}_2 t^2+\hat{P}_3 t^3\right)^2+\frac{1}{3}\left(\hat{P}_1 t+\hat{P}_2 t^2+\hat{P}_3 t^3\right)^3-\cdots \tag{B.2.29}$$

$$= \hat{P}_1 t+\left(\hat{P}_2-\frac{1}{2}\hat{P}_1^2\right)t^2+\left\{\hat{P}_3-\frac{1}{2}\left(\hat{P}_1\hat{P}_2+\hat{P}_2\hat{P}_1\right)+\frac{1}{3}\hat{P}_1^3\right\}t^3-\cdots \tag{B.2.30}$$

となる．$\hat{P}_1$，$\hat{P}_2$，$\hat{P}_3$ の定義を思い出せば，

$$(t^1\text{の係数}) = \hat{P}_1 = \hat{A}+\hat{B} \tag{B.2.31}$$

$$(t^2\text{の係数}) = \hat{P}_2-\frac{1}{2}\hat{P}_1^2 \tag{B.2.32}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\}-\frac{1}{2}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2 \tag{B.2.33}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right] \tag{B.2.34}$$

$$(t^3\text{の係数}) = \hat{P}_3-\frac{1}{2}\left(\hat{P}_1\hat{P}_2+\hat{P}_2\hat{P}_1\right)+\frac{1}{3}\hat{P}_1^3 \tag{B.2.35}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3!}\left\{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^3+\hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\left[\hat{A}^2,\hat{B}\right]+\left[\hat{A},\hat{B}^2\right]+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}\right\}\\
&-\frac{1}{2}\left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\frac{1}{2!}\left\{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\}+\frac{1}{2!}\left\{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\right]\\
&+\frac{1}{3}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^3
\end{aligned} \tag{B.2.36}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^3+\frac{1}{6}\hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\frac{1}{6}\left\{\hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{A}\right\}+\frac{1}{6}\left\{\hat{B}\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}\right\}+\frac{1}{6}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}\\
&-\frac{1}{2}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^3-\frac{1}{4}\hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right]-\frac{1}{4}\hat{B}\left[\hat{A},\hat{B}\right]-\frac{1}{4}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{A}-\frac{1}{4}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^3 \tag{B.2.37}$$
$$=\frac{1}{12}\hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right]-\frac{1}{12}\hat{B}\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\frac{1}{12}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{A}-\frac{1}{12}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B} \tag{B.2.38}$$
$$=\frac{1}{12}\left(\hat{A}-\hat{B}\right)\left[\hat{A},\hat{B}\right]-\frac{1}{12}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\left(\hat{A}-\hat{B}\right) \tag{B.2.39}$$
$$=\frac{1}{12}\left[\left(\hat{A}-\hat{B}\right),\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] \tag{B.2.40}$$

よって，

$$\mathrm{e}^{t\hat{A}}\mathrm{e}^{t\hat{B}}=f(t)=\mathrm{e}^{g(t)} \tag{B.2.41}$$
$$=\exp\left\{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)t+\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]t^2+\frac{1}{12}\left[\left(\hat{A}-\hat{B}\right),\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]t^3+\cdots\right\} \tag{B.2.42}$$
$$\tag{B.2.43}$$

となるから，$t=0$ とすれば，

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}=\exp\left\{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)+\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\frac{1}{12}\left[\left(\hat{A}-\hat{B}\right),\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]+\cdots\right\} \tag{B.2.44}$$

となる．特に，

$$\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=\left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=0 \tag{B.2.45}$$

のときは，

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}=\exp\left\{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)+\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\} \tag{B.2.46}$$

となる． □