

量子光学・量子情報科学ノート

Haruki Aoki and Hiroki Fukuhara

更新日: January 11, 2025

Contents

1	量子光学	2
1.1	Schödinger 描像と Heisenberg 描像	2
1.2	調和振動子	2
1.2.1	ハミルトニアン	3
1.2.2	Hermite 多項式	5
1.2.3	波動函数を用いた Schrödinger 方程式	5
1.2.4	Schrodinger の解法	8
1.3	電磁場の量子化	10
1.4	ビームスプリッター	10
1.4.1	電磁場のハミルトニアン	10
1.4.2	ビームスプリッター行列	11
1.4.3	ビームスプリッターハミルトニアン	12
1.5	コヒーレント状態	15
1.5.1	物理量の平均値・分散	15
1.5.2	個数状態での展開	16
1.5.3	調和振動子ハミルトニアンでの時間発展	17
1.5.4	レーザのハミルトニアンでの時間発展	18
1.6	スクイーズド状態	19
1.6.1	縮退パラメトリック過程のハミルトニアンによる消滅演算子の時間発展	20
1.6.2	真空状態とスクイーズされた真空場の関係	21
1.6.3	位置と運動量の平均値・分散	21
1.7	密度演算子	21
1.8	Wigner 函数	21
1.9	バランス型ホモダイン測定	21
1.10	量子もつれ	21
2	量子情報科学	22
A	ユニタリ行列の分解	23
B	Baker-Campbell-Hausdorff の公式	25
B.1	Baker-Campbell-Hausdorff の公式 1	25
B.2	Baker-Campbell-Hausdorff の公式 2	26

Chapter 1

量子光学

量子力学は物理量 \hat{A} の期待値 $\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ を検討する学問である。本章は以下のような構成である。まず, Schödinger 描像と Heisenberg 描像や電場の量子化について説明する。また, 量子もつれにおいて重要なビームスプリッタを紹介する。次に, 量子光学において重要なコヒーレント状態とスクイーズド状態について議論する。続いて密度演算子を定義したあと, 今まで議論した状態を具体的に測定するための方法として, バランス型ホモダイン測定を紹介する。最後に本章で議論したことを全て用いる, 量子もつれとその検証について議論する。

1.1 Schödinger 描像と Heisenberg 描像

WIP

1.2 調和振動子

本節では, 1次元調和振動子モデルでハミルトニアンが書けるときの波動関数の表示を求める。波動関数とは, Schrödinger 方程式,

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (1.2.1)$$

を満たす $|\psi\rangle$ について,

$$\psi(x) := \langle x | \psi \rangle \quad (1.2.2)$$

となるように (一般化) 座標 x へ射影したものである。式 (1.2.1) に対して $\langle x |$ を左から書ければ,

$$\langle x | \hat{H} | \psi \rangle = E \psi(x) \quad (1.2.3)$$

となるのだから, 左辺を計算して $\psi(x)$ に演算子がかかる形に変形すれば, 波動関数を求めることができる。本ノートにおいて, $\hat{\cdot}$ を演算子として, その固有値を \cdot , 固有ベクトル (固有函数) を $|\cdot\rangle$ と書く。

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle \quad (1.2.4)$$

$$\hat{p} |x\rangle = p |x\rangle \quad (1.2.5)$$

である。また, \hat{x} や \hat{p} は物理量であり, Hermite 演算子だからその固有ベクトルは,

$$\langle x' | x \rangle = \delta(x' - x) \quad (1.2.6)$$

$$\langle p' | p \rangle = \delta(p' - p) \quad (1.2.7)$$

と規格化してあり,

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \hat{1} \quad (1.2.8)$$

$$\int dp |p\rangle \langle p| = \hat{1} \quad (1.2.9)$$

が成立する。なお, 特に断らない限り積分範囲は $-\infty$ から ∞ である。

1.2.1 ハミルトニアン

古典的な 1 次元調和振動子のハミルトニアン H は,

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2m}p^2 \quad (1.2.10)$$

である。ただし、質量を m 、固有角周波数を ω 、座標を x 、運動量を p とした。 x と p は正準共役な変数の組であるから、 $x \rightarrow \hat{x}$ 、 $p \rightarrow \hat{p}$ とし、

$$\hat{H} = \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}^2 \quad (1.2.11)$$

$$= \hbar\omega \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega} \hat{p}^2 \right) \quad (1.2.12)$$

$$= \hbar\omega \left[\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} [\hat{x}, \hat{p}] \right] \quad (1.2.13)$$

$$= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.2.14)$$

となる。ただし、

$$\hat{a} := \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \quad (1.2.15)$$

$$\hat{a}^\dagger := \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \quad (1.2.16)$$

と定義した。 \hat{a} と \hat{a}^\dagger の交換関係を調べる。

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) - \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \quad (1.2.17)$$

$$= i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}) - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \quad (1.2.18)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] \quad (1.2.19)$$

$$= 1 \quad (1.2.20)$$

となる。

個数演算子 \hat{n} を、

$$\hat{n} := \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.2.21)$$

と定義する。個数演算子 \hat{n} は、

$$\hat{n}^\dagger = (\hat{a}^\dagger \hat{a})^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.2.22)$$

であるから、Hermite 演算子であり、実固有値とそれに属する固有ベクトルが存在する。

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (1.2.23)$$

を考える。まず、式 (1.2.23) に左から $\langle n|$ をかけると、

$$\langle n|\hat{n}|n\rangle = n \langle n|n\rangle \quad (1.2.24)$$

$$\iff \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n \quad (1.2.25)$$

$$\iff |\hat{a}|n\rangle|^2 = n \quad (1.2.26)$$

である。Hilbert 空間は内積空間であるから、

$$|\hat{a}|n\rangle|^2 \geq 0 \quad (1.2.27)$$

であるので、 $n \geq 0$ となる。

次に、式 (1.2.23) に左から \hat{a}^\dagger をかける。

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{a}^\dagger n |n\rangle \quad (1.2.28)$$

$$\iff \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1) |n\rangle = n \hat{a}^\dagger |n\rangle \quad (1.2.29)$$

$$\iff \hat{n} (\hat{a}^\dagger |n\rangle) = (n+1) (\hat{a}^\dagger |n\rangle) \quad (1.2.30)$$

$$(1.2.31)$$

となる。よって、 $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ は固有値が $n+1$ の \hat{n} の固有ベクトルであるから、

$$|n+1\rangle := \frac{1}{C_{n,+}} \hat{a}^\dagger |n\rangle \quad (1.2.32)$$

$$(1.2.33)$$

と定義する。 $C_{n,+}$ は規格化定数である。

$$1 = \langle n+1 | n+1 \rangle = \frac{1}{|C_{n,+}|^2} \langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle \quad (1.2.34)$$

$$= \frac{1}{|C_{n,+}|^2} \langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) | n \rangle \quad (1.2.35)$$

$$= \frac{n+1}{|C_{n,+}|^2} \quad (1.2.36)$$

より、

$$C_{n,+} = \sqrt{n+1} \quad (1.2.37)$$

としても矛盾しない。よって、

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (1.2.38)$$

となる。

最後に、式 (1.2.23) に左から \hat{a} をかける。

$$\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{a} n |n\rangle \quad (1.2.39)$$

$$\iff (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \hat{a} |n\rangle = n \hat{a} |n\rangle \quad (1.2.40)$$

$$\iff \hat{n} (\hat{a} |n\rangle) = (n-1) (\hat{a} |n\rangle) \quad (1.2.41)$$

となる。よって、 $\hat{a} |n\rangle$ は固有値が $n-1$ の \hat{n} の固有ベクトルであるから、

$$|n-1\rangle := \frac{1}{C_{n,-}} \hat{a} |n\rangle \quad (1.2.42)$$

$$(1.2.43)$$

と定義する。 $C_{n,-}$ は規格化定数である。

$$1 = \langle n-1 | n-1 \rangle = \frac{1}{|C_{n,-}|^2} \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \quad (1.2.44)$$

$$= \frac{n}{|C_{n,-}|^2} \quad (1.2.45)$$

より、

$$C_{n,-} = \sqrt{n} \quad (1.2.46)$$

としても矛盾しない。よって、

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (1.2.47)$$

となる。式 (1.2.47) より、 n は非負整数であるべきである。もし、 $n = 0.5$ であるなら、式 (1.2.47) は、

$$\hat{a}|0.5\rangle = \sqrt{0.5}|-0.5\rangle \quad (1.2.48)$$

となり、 $n \geq 0$ を満たさない。一方、 n が非負整数であるなら、 $n = 0$ のとき、

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (1.2.49)$$

となり、 $n \geq 0$ が満たされる。

1.2.2 Hermite 多項式

以降の議論で用いるために、特殊関数の1つである Hermite 多項式を紹介しておこう。Hermite 多項式は Sturm-Liouville 演算子のうちの1つの演算子の固有関数であり、実数全体で定義された実数関数 $H_n(s)$ に対して、

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s\frac{d}{ds} + 2n\right)H_n(s) = 0 \quad (1.2.50)$$

なる $H_n(s)$ である。なお、 n は非負整数である。なお、 $H_n(s)$ は適当な回数だけ微分可能であるとする。また、 $H_n(s)$ が張る空間 V の内積は、 $f, g \in V$ として、

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s)g(s)e^{-s^2} \quad (1.2.51)$$

である¹。Hermite 多項式は、適切に境界条件が設定された (Hermite 性のある) Sturm-Liouville 演算子の固有関数であり、そのような演算子の固有関数は直交基底となり、完全系を成すことが知られていて、実際、

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(s)H_n(s)e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}2^n n! \delta_n^m \quad (1.2.52)$$

のように直交する。

1.2.3 波動関数を用いた Schrödinger 方程式

以下では、波動関数を用いた Schrödinger 方程式である、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.2.53)$$

を得る。

式 (1.2.3) に式 (1.2.11) で示した \hat{H} の表式を代入して、

$$\frac{1}{2}m\omega^2 \langle x|\hat{x}^2|\psi\rangle + \frac{1}{2m} \langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = E\psi(x) \quad (1.2.54)$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) + \frac{1}{2m} \langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = E\psi(x) \quad (1.2.55)$$

となる。 $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ は以下のレシピで計算できる。

¹Sturm-Liouville 演算子の形、

$$\frac{1}{\rho(x)} \left[\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\} + q(x) \right]$$

と、Sturm-Liouville 演算子の固有関数が張る空間の内積が、

$$\int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x) dx$$

と書けることを思い出せば、内積に e^{-s^2} なる重み関数が入ることは自然なことである。

$$1. f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{d}{dx} f(x) \delta(x)$$

$$2. \langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)$$

$$3. \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \exp\left(i \frac{xp}{\hbar}\right)$$

$$4. \langle x | \hat{p}^2 | \psi \rangle \text{ の計算}$$

$\delta(x)$ はデルタ関数であり、積分して初めて意味を持つ関数である。

$$1. f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{d}{dx} f(x) \delta(x)$$

左辺を積分して右辺になればよい。ただし、 $f(x)$ は、

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad (1.2.56)$$

であるとする。実際に、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = [f(x) \delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) \delta(x) \quad (1.2.57)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) \delta(x) \quad (1.2.58)$$

であるから、

$$f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{d}{dx} f(x) \delta(x) \quad (1.2.59)$$

である。

$$2. \langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)$$

$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle$ を 2 種類の方法で計算する。まず、愚直に計算すると、

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle = \langle x | \hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x} | x' \rangle \quad (1.2.60)$$

$$= x \langle x | \hat{p} | x' \rangle - x' \langle x | \hat{p} | x' \rangle \quad (1.2.61)$$

$$= (x - x') \langle x | \hat{p} | x' \rangle \quad (1.2.62)$$

である。一方、 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いれば、

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle = i\hbar \langle x | x' \rangle \quad (1.2.63)$$

$$= i\hbar \delta(x - x') \quad (1.2.64)$$

2 つの方法で計算した $\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle$ である式 (1.2.62) と式 (1.2.64) を等号で結んで、式 (1.2.59) で示したデルタ関数の微分を用いて表現すれば、

$$\langle x | \hat{p} | x' \rangle = i\hbar \frac{\delta(x - x')}{x - x'} \quad (1.2.65)$$

$$= -i\hbar \frac{d}{d(x - x')} \delta(x - x') \quad (1.2.66)$$

$$= i\hbar \frac{d}{dx'} \delta(x - x') \quad (1.2.67)$$

となる。

さて、 $\langle x | \hat{p} | \psi \rangle$ を計算しよう。 $|x\rangle$ の完全性と、式 (1.2.67) で示した関係を用いれば、

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = \langle x | \hat{p} \hat{1} | \psi \rangle \quad (1.2.68)$$

$$= \langle x | \hat{p} \int dx' |x'\rangle \langle x'| | \psi \rangle \quad (1.2.69)$$

$$= \int dx' \langle x | \hat{p} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle \quad (1.2.70)$$

$$= i\hbar \int dx' \left[\frac{d}{dx} \delta(x - x') \right] \phi(x') \quad (1.2.71)$$

$$= i\hbar \left\{ [\delta(x - x') \psi(x')]_{-\infty}^{\infty} - \int dx' \frac{d}{dx'} \phi(x') \delta(x - x') \right\} \quad (1.2.72)$$

$$= -i\hbar \frac{d}{dx} \phi(x) \quad (1.2.73)$$

を得る.

$$3. \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i\frac{xp}{\hbar}\right)$$

$\langle x | \hat{p} | p \rangle$ を2種類の方法で計算する. まず, 愚直に計算すると,

$$\langle x | \hat{p} | p \rangle = p \langle x | p \rangle \quad (1.2.74)$$

$$= pp(x) \quad (1.2.75)$$

となる. ただし $p(x)$ は $|p\rangle$ の x への射影である. 一方, 式 (1.2.73) で示した関係で $|\psi\rangle \rightarrow |p\rangle$ を用いると,

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} p(x) \quad (1.2.76)$$

となる. 式 (1.2.75) と式 (1.2.76) より,

$$-i\hbar \frac{d}{dx} p(x) = pp(x) \quad (1.2.77)$$

$$\Rightarrow p(x) = C \exp\left(i\frac{xp}{\hbar}\right) \quad (1.2.78)$$

となる. C は規格化定数である.

さて, C を求めるために, $\langle x | x' \rangle$ を計算すると,

$$\delta(x - x') = \langle x | x' \rangle \quad (1.2.79)$$

$$= \langle x | \int dp |p\rangle \langle p| | x' \rangle \quad (1.2.80)$$

$$= \int dp p(x) p(x') \quad (1.2.81)$$

$$= |C|^2 \int \exp\left(i\frac{(x - x')p}{\hbar}\right) \quad (1.2.82)$$

となる. ところで, デルタ函数の Fourier 変換とその逆変換が,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) e^{-i\omega t} \quad (1.2.83)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega 1 \cdot e^{i\omega t} \quad (1.2.84)$$

と書けることより, 式 (1.2.84) において,

$$\omega \rightarrow \frac{p}{\hbar} \quad (1.2.85)$$

$$t \rightarrow x - x' \quad (1.2.86)$$

と変換すれば,

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp\left(i\frac{x - x'}{\hbar} p\right) \quad (1.2.87)$$

となるので、係数を比較して、

$$|C|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \quad (1.2.88)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (1.2.89)$$

となる。よって、

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i\frac{xp}{\hbar}\right) \quad (1.2.90)$$

となる。

4. $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ の計算

さて、いよいよ $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ を計算する道具がそろった。式 (1.2.90) を用いながら計算すると、

$$\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = \langle x|\hat{p}^2\hat{1}|\psi\rangle \quad (1.2.91)$$

$$= \langle x|\hat{p}^2 \int dp |p\rangle\langle p| |\psi\rangle \quad (1.2.92)$$

$$= \int dp p^2 \langle x|p\rangle \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.93)$$

$$= \int dp p^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i\frac{xp}{\hbar}\right) \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.94)$$

$$= \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \langle x|p\rangle \right\} \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.95)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \int dp \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \langle x|p\rangle \right\} \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.96)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \langle x| \left[\int dp |p\rangle\langle p| \right] |\psi\rangle \quad (1.2.97)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \langle x|\psi\rangle \quad (1.2.98)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \quad (1.2.99)$$

となる。

式 (1.2.99) を式 (1.2.55) に代入すれば、

$$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) + \frac{1}{2m} \langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = E\psi(x) \quad (1.2.100)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad (1.2.101)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (1.2.102)$$

となる。

1.2.4 Schrodinger の解法

いささか唐突だが、波動関数が、

$$\psi(x) = f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.103)$$

$$s := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (1.2.104)$$

と書けたとする． $f(s)$ が Hermite 多項式となることを示す．

式 (1.2.102) の両辺を $-\frac{\hbar^2}{2m}$ で割って， x から s に変数変換²すると，

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) \psi(x) = E \psi(x) \quad (1.2.105)$$

$$\iff \left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 + \frac{2mE}{\hbar}\right] \psi(x) = 0 \quad (1.2.106)$$

$$\iff \left[\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\hbar}{m\omega} s^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right] f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.107)$$

$$\iff \left[\frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\hbar}{m\omega} s^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right] f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.108)$$

$$\iff \left(\frac{d^2}{ds^2} - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega}\right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.109)$$

と書ける．第1項について， $\frac{d^2}{ds^2} f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)$ を計算しよう．Leibniz 則より，

$$\frac{d^2}{ds^2} f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = \frac{d^2 f}{ds^2} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) + 2 \frac{df}{ds} \frac{d}{ds} \left(\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right) + f(s) \frac{d^2}{ds^2} \left(\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right) \quad (1.2.110)$$

$$= \frac{d^2 f}{ds^2} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) - 2s \frac{df}{ds} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) + f(s) (s^2 - 1) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.111)$$

$$= \left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + (s^2 - 1)\right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.112)$$

と計算できるから，式 (1.2.109) は，

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega}\right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.113)$$

$$\iff \left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + (s^2 - 1) - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega}\right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.114)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + \frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) f(s) = 0 \quad (1.2.115)$$

となる．Hermite 多項式の形は，

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + 2n\right) H_n(s) = 0 \quad (1.2.116)$$

であったから，

$$\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 = 2n \quad (1.2.117)$$

$$f(s) \rightarrow H_n(s) \quad (1.2.118)$$

とすれば良いことがわかる． n は非負整数で， $n = 0$ では零点振動に対応する．規格化定数を A とすれば，波動関数は，

$$\psi_n(x) = A H_n(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.119)$$

² この変数変換は x の無次元化ともとらえられる．実際に式 (1.2.104) の右辺の次元を調べると，

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s}}} \text{m} = 1$$

である．

と書ける．規格化定数は,

$$1 = \int dx |\psi(x)|^2 \quad (1.2.120)$$

$$= |A|^2 \int dx H_n(s) H_n(s) e^{-s^2} \quad (1.2.121)$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int ds H_n(s) H_n(s) e^{-s^2} \quad (1.2.122)$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi} 2^n n! \quad (1.2.123)$$

より,

$$A = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} \quad (1.2.124)$$

となる．波動関数は,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \quad (1.2.125)$$

となる．

1.3 電磁場の量子化

WIP 結果のみ示す．その他のことについては、別途ノートを参照すること．なお、January 11, 2025 現在、ノートは編集集中である．Schrödinger 描像では、電場と磁場は、

$$\hat{E}(\mathbf{r}) = i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \quad (1.3.1)$$

$$\hat{B}(\mathbf{r}) = i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \quad (1.3.2)$$

と量子化される．また、Heisenberg 描像では、

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} \right] \quad (1.3.3)$$

$$\hat{B}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} \right] \quad (1.3.4)$$

と書ける．

1.4 ビームスプリッター

1.4.1 電磁場のハミルトニアン

前節での議論により、系のハミルトニアンは、

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right) \quad (1.4.1)$$

と書けるのであった．以下では、簡単のために、1 方向成分・シングルモードの波を考える．

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \quad (1.4.2)$$

$$= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.4.3)$$

と書ける。屈折率が n の物質中では³,

$$\hat{H}_{n,\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.4.4)$$

と書ける

1.4.2 ビームスプリッター行列

2 入力 2 出力のビームスプリッターを考える。 E_1 と E_2 の電場が入射して、 E'_1 と E'_2 が出力されるとする。古典的に考えると、

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

と書ける。このまま電場演算子を中心に議論を進めることはいささか冗長である。なぜならば、 \hat{a}_1 と \hat{a}_1^\dagger は複素共役の関係にあるのだから、片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ。よって式 (1.4.5) を量子化して、消滅演算子 \hat{a}_1 , \hat{a}_2 を用いて表せば、

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.6)$$

と書ける。2 つの消滅演算子の交換関係は、

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_j^i \quad (1.4.7)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad (1.4.8)$$

である。 B はビームスプリッター行列という。光子数が保存することから、

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' \quad (1.4.9)$$

$$= (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2)^\dagger (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2)^\dagger (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (1.4.10)$$

$$= (B_{11}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{12}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{22}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (1.4.11)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{12}^*B_{11} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (1.4.12)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})^*\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (1.4.13)$$

となり、

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22} = 0 \end{cases} \quad (1.4.14)$$

$$\Leftrightarrow B^\dagger B = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.15)$$

となればよい。つまり、ビームスプリッター行列 B がユニタリ行列であれば良い。A での議論によりビームスプリッター演算子は、

$$B = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.16)$$

と書ける。ところが、

$$\begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.17)$$

³ 謎である。屈折率により波動は変化しないはずである。

は2つの入力電場 E_1 , E_2 に位相差をかけること,

$$\begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.18)$$

は2つの出力電場 E'_1 , E'_2 に位相差をかけること,

$$e^{i\Lambda/2} \quad (1.4.19)$$

は2つの出力電場 E'_1 , E'_2 に共通するグローバル位相を書けることに対応するから, 実験のセットアップとして,

$$\Lambda = \Psi = \Phi = 0 \quad (1.4.20)$$

とすることができる. また, 透過率 T と反射率 R を,

$$\sqrt{T} := \cos(\Theta/2) \quad (1.4.21)$$

$$\sqrt{R} := -\sin(\Theta/2) \quad (1.4.22)$$

と定義すれば, ビームスプリッタ行列 B は,

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.23)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \quad (1.4.24)$$

と書ける.

$$T + R = 1 \quad (1.4.25)$$

が成立することに注意する.

1.4.3 ビームスプリッタハミルトニアン

ビームスプリッタ行列を再び考えよう. 今度は入力電場と出力電場の位相差が存在することにして, $\Lambda = 0$ のみ課しておく. するとビームスプリッタ行列は,

$$B = \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.26)$$

と書ける. ビームスプリッタ行列を用いて,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.27)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \hat{a}_1 + e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \hat{a}_2 \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.28)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_2 \\ e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.29)$$

と書ける. 出力それぞれの光の強度は, \hat{a}_1 と \hat{a}_2^\dagger や \hat{a}_1^\dagger と \hat{a}_2 が交換することを思い出せば,

$$\hat{a}_1'^\dagger \hat{a}'_1 = \left(e^{i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_2 \right)^\dagger \left(e^{i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.30)$$

$$= T \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + R \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \sqrt{T} \sqrt{R} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.31)$$

$$\hat{a}_2'^\dagger \hat{a}'_2 = \left(e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_2 \right)^\dagger \left(e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.32)$$

$$= R \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + T \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \sqrt{T} \sqrt{R} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.33)$$

となる．式 (1.4.31) と式 (1.4.33) について，第 1 項と第 2 項はそれぞれモード 1 の入力光子数，モード 2 の入力光子数に対応する．これらの重ね合わせに依って位相が変化して，そのパラメータは T である．相互作用を表す項は第 3 項であるから，ビームスプリッタによる相互作用ハミルトニアン \hat{H}_{int} を，

$$\hat{H}_{\text{int}} := \frac{1}{2} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.34)$$

と定義する．

また，以下の演算子を定義する．

$$\hat{L}_0 := \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.35)$$

$$\hat{L}_1 := \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (1.4.36)$$

$$\hat{L}_2 := \frac{1}{2i} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (1.4.37)$$

$$\hat{L}_3 := \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.38)$$

\hat{L}_2 と \hat{H}_{int} の関係を調べよう．唐突だが，

$$e^{-i\Theta \hat{L}_2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} e^{i\Theta \hat{L}_2} \quad (1.4.39)$$

考える．式 (1.4.39) の第 1 成分について，Baker-Campbell-Hausdorff の公式より，

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta \hat{L}_2} \hat{a}_1 e^{i\Theta \hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + \left[-i\Theta \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] + \frac{1}{2!} \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] + \frac{1}{4!} \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] \right] + \cdots \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{a}_1 + (-i\Theta) \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!} \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \\ &\quad + \frac{(-i\Theta)^3}{3!} \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!} \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] \right] + \cdots \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

となる． \hat{L}_2 と \hat{a}_1 ， \hat{L}_2 と \hat{a}_2 との交換関係についてそれぞれ，

$$\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] = \left[\frac{1}{2i} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right), \hat{a}_1 \right] \quad (1.4.42)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\hat{a}_2 \left[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1 \right] - \hat{a}_2^\dagger \left[\hat{a}_1, \hat{a}_1 \right] \right) \quad (1.4.43)$$

$$= -\frac{1}{2i} \hat{a}_2 \quad (1.4.44)$$

$$\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2 \right] = \left[\frac{1}{2i} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right), \hat{a}_2 \right] \quad (1.4.45)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\hat{a}_1^\dagger \left[\hat{a}_2, \hat{a}_2 \right] - \hat{a}_1 \left[\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2 \right] \right) \quad (1.4.46)$$

$$= \frac{1}{2i} \hat{a}_1 \quad (1.4.47)$$

となる．ただし， \hat{a}_1 と \hat{a}_2 が交換することを用いた．よって，

$$\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] = -\left(\frac{1}{2i} \right)^1 \hat{a}_2 \quad (1.4.48)$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] = -\frac{1}{2i} \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2 \right] = -\left(\frac{1}{2i} \right)^2 \hat{a}_1 \quad (1.4.49)$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] = -\left(\frac{1}{2i} \right)^2 \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] = \left(\frac{1}{2i} \right)^3 \hat{a}_2 \quad (1.4.50)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_1 \quad (1.4.51)$$

であるから式 (1.4.41) は,

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_1e^{i\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + (-i\Theta)[\hat{L}_2, \hat{a}_1] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]] \\ &\quad + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] + \cdots \end{aligned} \quad (1.4.52)$$

$$= \hat{a}_1 + (-i\Theta)(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_1 + \cdots \quad (1.4.53)$$

$$= \hat{a}_1 + \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 \hat{a}_2 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \hat{a}_1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 \hat{a}_2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 \hat{a}_1 + \cdots \quad (1.4.54)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \cdots\right] \hat{a}_1 + \left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \cdots\right] \hat{a}_2 \quad (1.4.55)$$

$$= \cos(\Theta/2)\hat{a}_1 + \sin(\Theta/2)\hat{a}_2 \quad (1.4.56)$$

となる．同様に，式 (1.4.39) の第 2 成分について，

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_1 \quad (1.4.57)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]] = \frac{1}{2i}[\hat{L}_2, \hat{a}_1] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_2 \quad (1.4.58)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_1 \quad (1.4.59)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]]] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^3 [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_2 \quad (1.4.60)$$

なる関係を用いると，

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_2e^{i\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_2 + (-i\Theta)[\hat{L}_2, \hat{a}_2] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]] \\ &\quad + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]]] + \cdots \end{aligned} \quad (1.4.61)$$

$$= \hat{a}_2 + (-i\Theta)\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_2 + \cdots \quad (1.4.62)$$

$$= \hat{a}_2 - \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 \hat{a}_1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \hat{a}_2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 \hat{a}_1 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 \hat{a}_2 + \cdots \quad (1.4.63)$$

$$= -\left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \cdots\right] \hat{a}_1 + \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \cdots\right] \hat{a}_2 \quad (1.4.64)$$

$$= -\sin(\Theta/2)\hat{a}_1 + \cos(\Theta/2)\hat{a}_2 \quad (1.4.65)$$

である．よって，式 (1.4.39) は，

$$e^{-i\Theta\hat{L}_2}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}e^{i\Theta\hat{L}_2} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.66)$$

と書ける．式 (1.4.66) の解釈を考えよう．相互作用ハミルトニアン \hat{H}_{int} の定義は，

$$\hat{H}_{\text{int}} := \frac{1}{2}(e^{i\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2) \quad (1.4.67)$$

であった。 $\Phi = \pi/2$ とすると、

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left(e^{i\pi/2} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\pi/2} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.68)$$

$$= \frac{1}{2} \left(i \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger - i \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.69)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (1.4.70)$$

$$= \hat{L}_2 \quad (1.4.71)$$

と書ける。さらに、式 (1.4.66) において、 $\Theta = -t/\hbar$ とすれば、

$$\exp \left(-i \frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar} t \right) \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \exp \left(i \frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar} t \right) = \begin{pmatrix} \cos(-t/2\hbar) & \sin(-t/2\hbar) \\ -\sin(-t/2\hbar) & \cos(-t/2\hbar) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.72)$$

となる。左辺は、

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.73)$$

なる消滅演算子のペアを時間発展演算子で挟んでいる格好である。となれば、右辺は Heisenberg 描像で表した消滅演算子であろう⁴。

1.5 コヒーレント状態

本節ではコヒーレント状態について議論する。コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は、

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.5.1)$$

なる状態である。また、 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ となるように θ を定義しておく。

1.5.1 物理量の平均値・分散

具体的な $|\alpha\rangle$ の形を知らなくても、いくつかの物理量の平均値と分散については調べることができる。まず、電場の期待値を調べる。電場演算子 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ を自然単位系を用いて書くと、

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{2} e \left(\hat{a} \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} - \hat{a}^\dagger \exp \{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \right) \quad (1.5.2)$$

であるから、

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \alpha | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle \quad (1.5.3)$$

$$= \frac{i}{2} e \left(\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} - \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle \exp \{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \right) \quad (1.5.4)$$

$$= -\frac{1}{2i} e \left(\alpha \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} - \alpha^* \exp \{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \right) \quad (1.5.5)$$

$$= -\frac{1}{2i} e \left(|\alpha| e^{i\theta} \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} - |\alpha| e^{-i\theta} \exp \{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \right) \quad (1.5.6)$$

$$= -|\alpha| e \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta) \quad (1.5.7)$$

である。

⁴右辺に出てくる行列はビームスプリッタ行列でないことに注意する。確かに2つの入力電場間の位相ずれや、2つの出力電場間の位相ずれがないと仮定したとき、ビームスプリッタ演算子は式 (1.4.24) と書ける。しかし、 $\Phi = \pi/2$ なる仮定のもと議論している。このような入力電場の位相ずれ Φ に対して、出力電場の位相ずれ Ψ をうまく定めれば式 (1.4.24) の形を実現することができると思うかもしれないが、その試みははかなく終わる。そのような Ψ は、 $\pi/2 + \Psi = 2n\pi$ かつ $\pi/2 - \Psi = 2m\pi$ 、 $n, m \in \mathbb{Z}$ としなければいけないが、2式を足して、 $\pi = 2(n+m)\pi$ となり、そのような n, m は存在しない。要するに、式 (1.4.66) の右辺の行列はビームスプリッタ行列ではないのだ。なお、テキストでの (1.106) は何を言いたいのかわからない。

次に、位置と運動量の平均値と分散について議論する。位置演算子と運動量演算子は生成演算子と消滅演算子を用いて、

$$\hat{x} := \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.5.8)$$

$$\hat{p} := \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (1.5.9)$$

と書けるから、

$$\langle x \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right| \alpha \right\rangle \quad (1.5.10)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) \quad (1.5.11)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{1}{4}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \right| \alpha \right\rangle \quad (1.5.12)$$

$$= \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a}^2 | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a} \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^2 | \alpha \rangle \quad (1.5.13)$$

$$= \frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) | \alpha \rangle + \frac{1}{4} |\alpha|^2 + \frac{1}{4} (\alpha^*)^2 \quad (1.5.14)$$

$$= \frac{1}{4} (\alpha + \alpha^*)^2 + \frac{1}{4} \quad (1.5.15)$$

$$\langle p \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \right| \alpha \right\rangle \quad (1.5.16)$$

$$= \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^*) \quad (1.5.17)$$

$$\langle p^2 \rangle = \left\langle \alpha \left| -\frac{1}{4}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \right| \alpha \right\rangle \quad (1.5.18)$$

$$= -\frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a}^2 | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a} \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle - \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^2 | \alpha \rangle \quad (1.5.19)$$

$$= -\frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) | \alpha \rangle + \frac{1}{4} |\alpha|^2 - \frac{1}{4} (\alpha^*)^2 \quad (1.5.20)$$

$$= -\frac{1}{4} (\alpha^2 + \alpha^*)^2 + \frac{1}{4} \quad (1.5.21)$$

より、

$$\Delta x_{\text{coh}} := \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{4} \quad (1.5.22)$$

$$\Delta p_{\text{coh}} := \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{1}{4} \quad (1.5.23)$$

となる。

1.5.2 個数状態での展開

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を、Hermite 演算子である \hat{n} の固有状態である個数状態 $|n\rangle$ で展開することを考える。

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \quad (1.5.24)$$

である。式 (1.5.1) に式 (1.5.24) を代入して、式 (1.2.47) の関係式を用いると、

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.5.25)$$

$$\iff \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \quad (1.5.26)$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} w_n |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle \quad (1.5.27)$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} w_{n+1} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle \quad (1.5.28)$$

であるから,

$$\sqrt{n+1} w_{n+1} = \alpha w_n \quad (1.5.29)$$

$$\iff w_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C \quad (1.5.30)$$

である. $C := w_0$ と定義した. $|\alpha\rangle$ の規格化条件より,

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = \left(\sum_n w_n |n\rangle \right)^\dagger \left(\sum_m w_m |m\rangle \right) \quad (1.5.31)$$

$$= \left(\sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} C^* \langle n| \right) \left(\sum_m \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} C |m\rangle \right) \quad (1.5.32)$$

$$= |C|^2 \sum_{n,m} \frac{(\alpha^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \langle n|m \rangle \quad (1.5.33)$$

$$= |C|^2 \sum_n \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \quad (1.5.34)$$

$$= |C|^2 e^{|\alpha|^2} \quad (1.5.35)$$

であるから,

$$C = \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \quad (1.5.36)$$

とすればよい. よって, コヒーレント状態は,

$$|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} \right) |n\rangle \quad (1.5.37)$$

と書ける. 式 (1.5.37) より, コヒーレント状態とは, 個数状態を $|n\rangle$ を Poisson 分布に従って重ね合わせたものと分かる.

式 (1.5.37) の表式より, 異なるコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ と $|\alpha'\rangle$ は直交することがわかる. 実際に計算すると,

$$|\langle \alpha | \alpha' \rangle|^2 = \left| \left(\sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \langle n| \right) \left(\sum_{n'} \frac{\alpha'^{n'}}{\sqrt{n'!}} \exp \left(-\frac{|\alpha'|^2}{2} \right) |n'\rangle \right) \right|^2 \quad (1.5.38)$$

$$= \exp \left\{ -(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2) \right\} \left(\sum_{n,n'} \frac{(\alpha^*)^n \alpha'^{n'}}{\sqrt{n!} \sqrt{n'!}} \langle n|n'\rangle \right) \left(\sum_{m',m} \frac{(\alpha'^*)^{m'} \alpha^m}{\sqrt{m'!} \sqrt{m!}} \langle m'|m\rangle \right) \quad (1.5.39)$$

$$= \exp \left\{ -(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2) \right\} \left(\sum_n \frac{(\alpha^* \alpha')^n}{n!} \right) \left(\sum_m \frac{(\alpha'^* \alpha)^m}{m!} \right) \quad (1.5.40)$$

$$= \exp \left\{ -(|\alpha|^2 - \alpha^* \alpha' - \alpha'^* \alpha + |\alpha'|^2) \right\} \quad (1.5.41)$$

$$= \exp \left(-|\alpha - \alpha'|^2 \right) \quad (1.5.42)$$

となる.

1.5.3 調和振動子ハミルトニアンでの時間発展

まず, コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が調和振動子ハミルトニアン \hat{H} があるときにどのように時間発展するか調べる. 系のハミルトニアンは,

$$\hat{H} = \hbar \omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.5.43)$$

と書けるから、

$$|\alpha(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|\alpha\rangle \quad (1.5.44)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)e^{-i\omega t\hat{n}}|\alpha\rangle \quad (1.5.45)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-i\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|n\rangle \quad (1.5.46)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sum_m \frac{(-i\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m |n\rangle \quad (1.5.47)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sum_m \frac{(-in\omega t)^m}{m!}|n\rangle \quad (1.5.48)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\omega t}|n\rangle \quad (1.5.49)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|n\rangle \quad (1.5.50)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2}\right)|n\rangle \quad (1.5.51)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)|\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (1.5.52)$$

グローバル位相は無視してよいので、

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (1.5.53)$$

と分かる。

次に、個数状態の時間発展を調べる。

$$|n(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|n\rangle \quad (1.5.54)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)e^{-i\omega t\hat{n}}|n\rangle \quad (1.5.55)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-i\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m |n\rangle \quad (1.5.56)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-in\omega t)^m}{m!}|n\rangle \quad (1.5.57)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)e^{-in\omega t}|n\rangle \quad (1.5.58)$$

となり、周波数が2倍になったように見える⁵。

1.5.4 レーザのハミルトニアンでの時間発展

真空場 $|0\rangle$ が $|\alpha\rangle$ に時間変化するものがレーザである。レーザのハミルトニアンを

$$\hat{H}_{\text{laser}} := i\frac{\hbar}{t}(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \quad (1.5.59)$$

とかける。実際、この系における真空状態 $|0\rangle$ の時間発展は、

$$\exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|0\rangle = \exp\left(-i\cdot i\frac{\hbar}{t}(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})\frac{t}{\hbar}\right)|0\rangle \quad (1.5.60)$$

⁵らしい

$$= e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle \quad (1.5.61)$$

$$= e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\alpha \hat{a}^\dagger, -\alpha^* \hat{a}]\right) |0\rangle \quad (1.5.62)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle \quad (1.5.63)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* \hat{a})^n}{n!} |0\rangle \quad (1.5.64)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \quad (1.5.65)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \quad (1.5.66)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (1.5.67)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sqrt{n!} |0\rangle \quad (1.5.68)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) |0\rangle \quad (1.5.69)$$

$$= |\alpha\rangle \quad (1.5.70)$$

となり、やはり \hat{H}_{laser} はレーザのハミルトニアンである。計算の途中に、2つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いた。

変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ を、

$$\hat{D}(\alpha) := e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \quad (1.5.71)$$

と定義する。Schrödinger 描像では系の時間発展を状態ベクトルに押し付けて、

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (1.5.72)$$

としたのであった。Heisenberg 描像で、光の振幅に対応する物理量である消滅演算子 \hat{a} の時間発展の様子を調べる。1つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いて計算すると、

$$\hat{D}^\dagger \hat{a} \hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})^\dagger} \hat{a} e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} \quad (1.5.73)$$

$$= e^{-(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} \hat{a} e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} \quad (1.5.74)$$

$$= \hat{a} + [-(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \hat{a}] \quad (1.5.75)$$

$$= \hat{a} + \alpha \quad (1.5.76)$$

となる。

1.6 スクイズド状態

本節では、スクイズド状態 $|\beta\rangle_g$ について議論する。スクイズド状態は、消滅演算子 \hat{a} を変換して得られる \hat{b} の固有状態であり、その変換は、

$$\hat{b} := \mu \hat{a} + \nu \hat{a}^\dagger, \quad |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \quad (1.6.1)$$

と定義され、Bogoliubov 変換と呼ばれる。縮退パラメトリック過程は、電場の2乗に比例して分極が起こって、その比例係数が $\chi^{(2)}$ である非線型結晶に対して、周波数 ω の入射電場 E_{in} と 2ω の強い電場 E_3 を入射して、2つの電場の差周波 $2\omega - \omega = \omega$ の周波数の電場 E_{out} が放出される過程である。 E_{in} と E_{out} の間には、

$$E_{\text{out}} = E_{\text{in}} \cosh r - E_{\text{in}}^* \sinh r \quad (1.6.2)$$

なる関係がある。ただし、 r は、

$$r := \frac{z}{2c} \cdot \frac{\omega}{n} \quad (1.6.3)$$

と定義され、 z は非線型結晶の長さ、 c は光速、 n は非線型結晶の屈折率である。また、 $\cosh r$ と $\sinh r$ は、

$$\cosh r := \frac{e^r + e^{-r}}{2} \quad (1.6.4)$$

$$\sinh r := \frac{e^r - e^{-r}}{2} \quad (1.6.5)$$

$$(1.6.6)$$

と定義されていて、

$$|\cosh r|^2 - |-\sinh r|^2 = \left| \frac{e^r + e^{-r}}{2} \right|^2 - \left| -\frac{e^r - e^{-r}}{2} \right|^2 \quad (1.6.7)$$

$$= \frac{e^{2r} + 2 + e^{-2r}}{4} - \frac{e^{2r} - 2 + e^{-2r}}{4} \quad (1.6.8)$$

$$= 1 \quad (1.6.9)$$

なる関係がある。さて、式 (1.6.2) を量子化すると、 \hat{a} が電場の振幅に対応するのだから、出力電場の振幅に対応する物理量を \hat{b} とすれば、

$$\hat{b} = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r \quad (1.6.10)$$

となる。

1.6.1 縮退パラメトリック過程のハミルトニアンによる消滅演算子の時間発展

Heisenber 描像において \hat{a} を \hat{b} に変換するものが、縮退パラメトリック変換である。縮退パラメトリック変換のハミルトニアン \hat{H}_{para} を、

$$\hat{H}_{\text{para}} := i \frac{\hbar}{t} \frac{r}{2} (\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2) \quad (1.6.11)$$

と定義する。 $(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2)$ と \hat{a} や、 $(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2)$ と \hat{a}^\dagger との交換関係は、

$$[(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2), \hat{a}] = (\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2) \hat{a} - \hat{a} (\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2) \quad (1.6.12)$$

$$= \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} \quad (1.6.13)$$

$$= (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \hat{a}^\dagger - (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} \quad (1.6.14)$$

$$= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger - (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} \quad (1.6.15)$$

$$= \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) + \hat{a}^\dagger - (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} \quad (1.6.16)$$

$$= 2\hat{a}^\dagger \quad (1.6.17)$$

$$[(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2), \hat{a}^\dagger] = (\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2) \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger (\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2) \quad (1.6.18)$$

$$= \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \quad (1.6.19)$$

$$= \hat{a} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) - \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \quad (1.6.20)$$

$$= \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \quad (1.6.21)$$

$$= (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \hat{a} + \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \quad (1.6.22)$$

$$= 2\hat{a} \quad (1.6.23)$$

となることを用いると、 \hat{a} の時間発展は 1 つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いて、この系における消滅演算子 \hat{a} の時間発展は、

$$\exp \left(i \frac{\hat{H}_{\text{para}}}{\hbar} t \right) \hat{a} \exp \left(-i \frac{\hat{H}_{\text{para}}}{\hbar} t \right) = \exp \left(-\frac{r}{2} (\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2) \right) \hat{a} \exp \left(\frac{r}{2} (\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2) \right) \quad (1.6.24)$$

$$= \hat{a} + \left[-\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2), \hat{a} \right] + \frac{1}{2!} \left[-\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2), \left[-\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2), \hat{a} \right] \right] + \dots \quad (1.6.25)$$

$$= \hat{a} + \frac{1}{1!} \left(-\frac{r}{2} \right)^1 \cdot 2^1 \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2!} \left(-\frac{r}{2} \right)^2 \cdot 2^2 \hat{a} + \frac{1}{3!} \left(-\frac{r}{2} \right)^3 \cdot 2^3 \hat{a}^\dagger + \frac{1}{4!} \left(-\frac{r}{2} \right)^4 \cdot 2^4 \hat{a} + \dots \quad (1.6.26)$$

$$= \hat{a} \left(1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots \right) - \hat{a}^\dagger \left(\frac{r^1}{1!} + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots \right) \quad (1.6.27)$$

$$= \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r \quad (1.6.28)$$

となる．式 (1.6.9) で示した関係式より，縮退パラメトリック変換は Bogoliubov 変換である．計算の途中で $\cosh r$ と $\sinh r$ が，

$$\cosh r = \frac{e^r + e^{-r}}{2} \quad (1.6.29)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \dots \right) + \left(1 + \frac{(-r)}{1!} + \frac{(-r)^2}{2!} + \dots \right) \right\} \quad (1.6.30)$$

$$= 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots \quad (1.6.31)$$

$$\sinh r = \frac{e^r - e^{-r}}{2} \quad (1.6.32)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \dots \right) - \left(1 + \frac{(-r)}{1!} + \frac{(-r)^2}{2!} + \dots \right) \right\} \quad (1.6.33)$$

$$= \frac{r^1}{1!} + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots \quad (1.6.34)$$

$$(1.6.35)$$

となることを用いた．

1.6.2 真空状態とスクイーズされた真空場の関係

1.6.3 位置と運動量の平均値・分散

1.7 密度演算子

1.8 Wigner 関数

1.9 バランス型ホモダイン測定

1.10 量子もつれ

Chapter 2

量子情報科学

Appendix A

ユニタリ行列の分解

ユニタリ行列は一般に,

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.1})$$

と分解できる. 具体的に U を計算すると,

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.2})$$

$$= e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\Psi/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\Psi/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\Psi/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.3})$$

$$= e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.4})$$

であり, $\alpha = \Psi + \Phi$, $\beta = \Psi - \Phi$ とすると,

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.5})$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Lambda+\alpha)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Lambda+\beta)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{i(\Lambda-\beta)/2} \sin(\Theta/2) & e^{i(\Lambda-\alpha)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.6})$$

と書ける.

Proof. 任意 2×2 の行列は, 実数 r_{ij} と θ_{ij} を用いて,

$$M = \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.7})$$

と書けて,

$$M^\dagger M = \begin{pmatrix} r_{11}e^{-i\theta_{11}} & r_{21}e^{-i\theta_{21}} \\ r_{12}e^{-i\theta_{12}} & r_{22}e^{-i\theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.8})$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{21}^2 & r_{11}r_{12}e^{-i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{-i(\theta_{21}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{12}e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} & r_{12}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.9})$$

$$MM^\dagger = \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}e^{-i\theta_{11}} & r_{21}e^{-i\theta_{21}} \\ r_{12}e^{-i\theta_{12}} & r_{22}e^{-i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.10})$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{12}^2 & r_{11}r_{21}e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{21}e^{-i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{12}r_{22}e^{-i(\theta_{12}-\theta_{22})} & r_{21}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.11})$$

となる. M がユニタリ行列であることの必要十分条件は,

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \quad (\text{A.0.12})$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \quad (\text{A.0.13})$$

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \quad (\text{A.0.14})$$

$$r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \quad (\text{A.0.15})$$

$$r_{11}r_{12}e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \quad (\text{A.0.16})$$

$$r_{11}r_{21}e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \quad (\text{A.0.17})$$

である． $M^\dagger M$ や MM^\dagger の非対角成分は複素共役になっていることに注意する．式 (A.0.12) から式 (A.0.15) を満たすような r_{ij} の組は，実数 Θ を用いて，

$$r_{11} = r_{22} = \cos(\Theta/2) \quad (\text{A.0.18})$$

$$r_{12} = -r_{21} = \sin(\Theta/2) \quad (\text{A.0.19})$$

なるものである．また，これらの r_{ij} の値を式 (A.0.16) と式 (A.0.17) に代入すると，

$$e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} - e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \quad (\text{A.0.20})$$

$$-e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \quad (\text{A.0.21})$$

が成立する．

$$\Phi = \theta_{11} - \theta_{12} = \theta_{21} - \theta_{22} \quad (\text{A.0.22})$$

$$\Psi = \theta_{11} - \theta_{21} = \theta_{12} - \theta_{22} \quad (\text{A.0.23})$$

$$(\text{A.0.24})$$

とすると，

$$\theta_{11} = \frac{\Lambda + \Psi + \Phi}{2} \quad (\text{A.0.25})$$

$$\theta_{12} = \frac{\Lambda + \Psi - \Phi}{2} \quad (\text{A.0.26})$$

$$\theta_{21} = \frac{\Lambda - \Psi + \Phi}{2} \quad (\text{A.0.27})$$

$$\theta_{22} = \frac{\Lambda - \Psi - \Phi}{2} \quad (\text{A.0.28})$$

となり，式 (A.0.4) を得る．つまり，任意のユニタリ行列は式 (A.0.4) で書けることが示された． \square

実際に式 (A.0.4) がユニタリ行列であることを確かめる．

$$U^\dagger U = e^{-i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & -e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.29})$$

$$UU^\dagger = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} e^{-i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & -e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.30})$$

となり， U はユニタリ行列であることが分かる．

Appendix B

Baker-Campbell-Hausdorffの公式

B.1 Baker-Campbell-Hausdorffの公式 1

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (\text{B.1.1})$$

なる式を示す.

Proof. 函数 $f(t)$ を,

$$f(t) := e^{t\hat{A}}\hat{B}e^{-t\hat{A}} \quad (\text{B.1.2})$$

と定義する. $f(t)$ を $t=0$ の周りで展開することを考えると,

$$f(t) = f(0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{t=0} t^2 + \dots \quad (\text{B.1.3})$$

と書ける. さて,

$$\frac{df}{dx} = \hat{A}e^{t\hat{A}}\hat{B}e^{-t\hat{A}} - e^{t\hat{A}}\hat{B}\hat{A}e^{-t\hat{A}} \quad (\text{B.1.4})$$

$$= e^{t\hat{A}}\hat{A}\hat{B}e^{-t\hat{A}} - e^{t\hat{A}}\hat{B}\hat{A}e^{-t\hat{A}} \quad (\text{B.1.5})$$

$$= e^{t\hat{A}}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})e^{-t\hat{A}} \quad (\text{B.1.6})$$

$$= e^{t\hat{A}}[\hat{A}, \hat{B}]e^{-t\hat{A}} \quad (\text{B.1.7})$$

である. よって,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{t=0} = [\hat{A}, \hat{B}] \quad (\text{B.1.8})$$

である. 2 階以上の微分では, 式 (B.1.7) において, $\hat{B} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}]$ とすればよい. よって, 式 (B.1.3) に式 (B.1.7) を代入すると,

$$f(t) = B + [\hat{A}, \hat{B}]t + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]t^2 + \dots \quad (\text{B.1.9})$$

である. $t=1$ とすれば,

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (\text{B.1.10})$$

となる. 特に,

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (\text{B.1.11})$$

のとき,

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] \quad (\text{B.1.12})$$

である. \square

B.2 Baker-Campbell-Hausdorff の公式 2

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp \left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}[(\hat{A} - \hat{B}), [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \right) \quad (\text{B.2.1})$$

なる式を示す.

Proof. $f(t)$ と $g(t)$ を,

$$\begin{cases} f(t) := e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}} = e^{g(t)} \\ g(t) := \log(e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}) = \log(f(t)) \end{cases} \quad (\text{B.2.2})$$

と定義する. $f(t)$ の Taylor 展開を考える.

$$\frac{d}{dt}f(t) = \hat{A}e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}} + e^{t\hat{A}}\hat{B}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.3})$$

$$= e^{t\hat{A}}(\hat{A} + \hat{B})e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.4})$$

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}(\hat{A} + \hat{B}) + (\hat{A} + \hat{B})\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.5})$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2\right\}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.6})$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^2 + \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} + \hat{B}^2 + \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.7})$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}]\right\}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.8})$$

$$\frac{d^3}{dt^3}f(t) = e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}(\hat{A} + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2) + (\hat{A} + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2)\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.9})$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^3 + 3\hat{A}^2\hat{B} + 3\hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^3\right\}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.10})$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^3 + \hat{A}^2\hat{B} + \hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}^2 + \hat{B}^2\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^3 + 2\hat{A}^2\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} - \hat{B}\hat{A}^2 - \hat{B}^2\hat{A} - \hat{B}\hat{A}\hat{B} + 2\hat{A}\hat{B}^2\right\}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.11})$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A}^2\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{A}^2\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^2 + \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A} + \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}\hat{A}\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.12})$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}^2, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}^2] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (\text{B.2.13})$$

となる. $t = 0$ 周りで $f(t)$ を Taylor 展開すると,

$$f(t) = f(0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=0}\right)t + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\Big|_{t=0}\right)t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{dt^3}f(t)\Big|_{t=0}\right)t^3 + \dots \quad (\text{B.2.14})$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}(\hat{A} + \hat{B})t + \frac{1}{2!}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}]\right\}t^2 + \frac{1}{3!}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}^2, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}^2] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}\right\}t^3 + \dots \quad (\text{B.2.15})$$

$$= 1 + \hat{P}_1 t + \hat{P}_2 t^2 + \hat{P}_3 t^3 + \dots \quad (\text{B.2.16})$$

$$(\text{B.2.17})$$

と書ける。ただし、

$$\hat{P}_1 := \frac{1}{1!}(\hat{A} + \hat{B}) \quad (\text{B.2.18})$$

$$\hat{P}_2 := \frac{1}{2!} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}] \right\} \quad (\text{B.2.19})$$

$$\hat{P}_3 := \frac{1}{3!} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}^2, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}^2] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} \right\} \quad (\text{B.2.20})$$

と定義した。 $F(t)$ を、

$$F(t) := f(t) - 1 \quad (\text{B.2.21})$$

$$= \hat{P}_1 t + \hat{P}_2 t^2 + \hat{P}_3 t^3 + \dots \quad (\text{B.2.22})$$

と定義する。 $h(x) := \log(1+x)$ は $x=0$ のまわりで、

$$h(x) = h(0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{d}{dx} h(x) \Big|_{x=0} \right) x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2}{dx^2} h(x) \Big|_{x=0} \right) x^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{dx^3} h(x) \Big|_{x=0} \right) x^3 + \dots \quad (\text{B.2.23})$$

$$= 0 + \frac{1}{1!} \frac{1}{1+0} x + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{(1+0)^2} \right) x^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{2}{(1+0)^3} \right) x^3 + \dots \quad (\text{B.2.24})$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (\text{B.2.25})$$

であることと、 $t \rightarrow 0$ で $F(t) \rightarrow 0$ であることを用いて $g(t)$ を $t=0$ の周りで Taylor 展開すると、

$$g(t) = \log(f(t)) \quad (\text{B.2.26})$$

$$= \log(1 + F(t)) \quad (\text{B.2.27})$$

$$= F(t) - \frac{F(t)^2}{2} + \frac{F(t)^3}{3} - \dots \quad (\text{B.2.28})$$

$$= (\hat{P}_1 t + \hat{P}_2 t^2 + \hat{P}_3 t^3) - \frac{1}{2} (\hat{P}_1 t + \hat{P}_2 t^2 + \hat{P}_3 t^3)^2 + \frac{1}{3} (\hat{P}_1 t + \hat{P}_2 t^2 + \hat{P}_3 t^3)^3 - \dots \quad (\text{B.2.29})$$

$$= \hat{P}_1 t + \left(\hat{P}_2 - \frac{1}{2} \hat{P}_1^2 \right) t^2 + \left\{ \hat{P}_3 - \frac{1}{2} (\hat{P}_1 \hat{P}_2 + \hat{P}_2 \hat{P}_1) + \frac{1}{3} \hat{P}_1^3 \right\} t^3 - \dots \quad (\text{B.2.30})$$

となる。 \hat{P}_1 , \hat{P}_2 , \hat{P}_3 の定義を思い出せば、

$$(t^1 \text{ の係数}) = \hat{P}_1 = \hat{A} + \hat{B} \quad (\text{B.2.31})$$

$$(t^2 \text{ の係数}) = \hat{P}_2 - \frac{1}{2} \hat{P}_1^2 \quad (\text{B.2.32})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}] \right\} - \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{B})^2 \quad (\text{B.2.33})$$

$$= \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (\text{B.2.34})$$

$$(t^3 \text{ の係数}) = \hat{P}_3 - \frac{1}{2} (\hat{P}_1 \hat{P}_2 + \hat{P}_2 \hat{P}_1) + \frac{1}{3} \hat{P}_1^3 \quad (\text{B.2.35})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3!} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}^2, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}^2] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(\hat{A} + \hat{B}) \frac{1}{2!} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}] \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}] \right\} (\hat{A} + \hat{B}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} (\hat{A} + \hat{B})^3 \end{aligned} \quad (\text{B.2.36})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} (\hat{A} + \hat{B})^3 + \frac{1}{6} \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{6} \left\{ \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A} \right\} + \frac{1}{6} \left\{ \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} \right\} + \frac{1}{6} [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{B})^3 - \frac{1}{4} \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{4} \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{4} [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A} - \frac{1}{4} [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3}(\hat{A} + \hat{B})^3 \quad (\text{B.2.37})$$

$$= \frac{1}{12}\hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{12}\hat{B}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{A} - \frac{1}{12}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} \quad (\text{B.2.38})$$

$$= \frac{1}{12}(\hat{A} - \hat{B})[\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{12}[\hat{A}, \hat{B}](\hat{A} - \hat{B}) \quad (\text{B.2.39})$$

$$= \frac{1}{12}[(\hat{A} - \hat{B}), [\hat{A}, \hat{B}]] \quad (\text{B.2.40})$$

よって,

$$e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}} = f(t) = e^{g(t)} \quad (\text{B.2.41})$$

$$= \exp \left\{ (\hat{A} + \hat{B})t + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]t^2 + \frac{1}{12}[(\hat{A} - \hat{B}), [\hat{A}, \hat{B}]]t^3 + \dots \right\} \quad (\text{B.2.42})$$

$$(\text{B.2.43})$$

となるから, $t = 0$ とすれば,

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp \left\{ (\hat{A} + \hat{B}) + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}[(\hat{A} - \hat{B}), [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \right\} \quad (\text{B.2.44})$$

となる. 特に,

$$[(\hat{A} - \hat{B}), [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (\text{B.2.45})$$

$$\iff [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (\text{B.2.46})$$

のときは,

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp \left\{ (\hat{A} + \hat{B}) + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] \right\} \quad (\text{B.2.47})$$

となる. □