本節ではコヒーレント状態について議論する．コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は，

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{0.0.1}$$

なる状態である．また，$\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ となるように θ を定義しておく．

0.0.1 物理量の平均値・分散

具体的な $|\alpha\rangle$ の形を知らなくても，いくつかの物理量の平均値と分散については調べることができる．まず，電場の期待値を調べる．電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ を自然単位系を用いて書くと，

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{e}\big(\hat{a}\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\} - \hat{a}^\dagger\exp\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\big) \tag{0.0.2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\rangle &= \langle\alpha|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|\alpha\rangle & (0.0.3)\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{e}\big(\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\} - \langle\alpha\big|\hat{a}^\dagger\big|\alpha\rangle\exp\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\big) & (0.0.4)\\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\boldsymbol{e}(\alpha\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\} - \alpha^*\exp\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}) & (0.0.5)\\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\boldsymbol{e}\big(|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\} - |\alpha|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\exp\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\big) & (0.0.6)\\
&= -|\alpha|\boldsymbol{e}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\theta) & (0.0.7)
\end{aligned}$$

である．

次に，位置と運動量の平均値と分散について議論する．位置演算子と運動量演算子は生成演算子と消滅演算子を用いて，

$$\begin{aligned}
\hat{x} &\coloneqq \frac{1}{2}\big(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\big) & (0.0.8)\\
\hat{p} &\coloneqq \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\big) & (0.0.9)
\end{aligned}$$

と書けるから，

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \left\langle\alpha\middle|\frac{1}{2}\big(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\big)\middle|\alpha\right\rangle & (0.0.10)\\
&= \frac{1}{2}(\alpha+\alpha^*) & (0.0.11)\\
\langle x^2\rangle &= \left\langle\alpha\middle|\frac{1}{4}\big(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\big)^2\middle|\alpha\right\rangle & (0.0.12)\\
&= \frac{1}{4}\langle\alpha|\hat{a}^2|\alpha\rangle + \frac{1}{4}\langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + \frac{1}{4}\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle + \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\big(\hat{a}^\dagger\big)^2\middle|\alpha\right\rangle & (0.0.13)\\
&= \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\langle\alpha|\big(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\big)|\alpha\rangle + \frac{1}{4}|\alpha|^2 + \frac{1}{4}(\alpha^*)^2 & (0.0.14)\\
&= \frac{1}{4}(\alpha+\alpha^*)^2 + \frac{1}{4} & (0.0.15)\\
\langle p\rangle &= \left\langle\alpha\middle|\frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\big)\middle|\alpha\right\rangle & (0.0.16)\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\alpha-\alpha^*) & (0.0.17)\\
\langle p^2\rangle &= \left\langle\alpha\middle|-\frac{1}{4}\big(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\big)^2\middle|\alpha\right\rangle & (0.0.18)\\
&= -\frac{1}{4}\langle\alpha|\hat{a}^2|\alpha\rangle + \frac{1}{4}\langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + \frac{1}{4}\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle - \frac{1}{4}\left\langle\alpha\middle|\big(\hat{a}^\dagger\big)^2\middle|\alpha\right\rangle & (0.0.19)\\
&= -\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\langle\alpha|\big(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\big)|\alpha\rangle + \frac{1}{4}|\alpha|^2 - \frac{1}{4}\big(|\alpha|^*\big)^2 & (0.0.20)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\alpha^2 + \alpha^*\right)^2 + \frac{1}{4} \tag{0.0.21}$$

より,

$$\Delta x_{\mathrm{coh}} \coloneqq \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \frac{1}{4} \tag{0.0.22}$$

$$\Delta p_{\mathrm{coh}} \coloneqq \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \frac{1}{4} \tag{0.0.23}$$

となる.

0.0.2　個数状態での展開

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を，Hermite 演算子である $\hat{n}$ の固有状態である個数状態 $|n\rangle$ で展開することを考える.

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \tag{0.0.24}$$

である．**式** (0.0.1) に**式** (0.0.24) を代入して，**式** (**??**) の関係式を用いると,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{0.0.25}$$

$$\iff \hat{a}\sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \tag{0.0.26}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} w_n |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle \tag{0.0.27}$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} w_{n+1} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle \tag{0.0.28}$$

であるから,

$$\sqrt{n+1} w_{n+1} = \alpha w_n \tag{0.0.29}$$

$$\iff w_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C \tag{0.0.30}$$

である．$C \coloneqq w_0$ と定義した．$|\alpha\rangle$ の規格化条件より,

$$1 = \langle\alpha|\alpha\rangle = \left(\sum_n w_n |n\rangle\right)^\dagger \left(\sum_m w_m |m\rangle\right) \tag{0.0.31}$$

$$= \left(\sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} C^* \langle n|\right)\left(\sum_m \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} C |m\rangle\right) \tag{0.0.32}$$

$$= |C|^2 \sum_{n,m} \frac{(\alpha^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \langle n|m\rangle \tag{0.0.33}$$

$$= |C|^2 \sum_n \frac{\left(|\alpha|^2\right)^n}{n!} \tag{0.0.34}$$

$$= |C|^2 \mathrm{e}^{|\alpha|^2} \tag{0.0.35}$$

であるから,

$$C = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \tag{0.0.36}$$

とすればよい．よって，コヒーレント状態は,

$$|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|n\rangle \tag{0.0.37}$$

と書ける．**式** (0.0.37) より，コヒーレント状態とは，個数状態を $|n\rangle$ を Poisson 分布に従って重ね合わせたものだと分かる．

式 (0.0.37) の表式より，異なるコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ と $|\alpha'\rangle$ は直交することがわかる．実際に計算すると,

$$\begin{aligned}
|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2 &= \left|\left(\sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\langle n|\right)\left(\sum_{n'} \frac{\alpha'^{n'}}{\sqrt{n'!}} \exp\left(-\frac{|\alpha'|^2}{2}\right)|n'\rangle\right)\right|^2 &(0.0.38)\\
&= \exp\left\{-\left(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2\right)\right\}\left(\sum_{n,n'} \frac{(\alpha^*)^n\alpha'^{n'}}{\sqrt{n!}\sqrt{n'!}}\langle n|n'\rangle\right)\left(\sum_{m',m} \frac{(\alpha'^*)^m\alpha^{m'}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}}\langle m'|m\rangle\right) &(0.0.39)\\
&= \exp\left\{-\left(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2\right)\right\}\left(\sum_n \frac{(\alpha^*\alpha')^n}{n!}\right)\left(\sum_m \frac{(\alpha'^*\alpha)^m}{m!}\right) &(0.0.40)\\
&= \exp\left\{-\left(|\alpha|^2 - \alpha^*\alpha' - \alpha'^*\alpha + |\alpha'|^2\right)\right\} &(0.0.41)\\
&= \exp\left(-|\alpha-\alpha'|^2\right) &(0.0.42)
\end{aligned}$$

となる．

0.0.3 調和振動子ハミルトニアンでの時間発展

まず，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が調和振動子ハミルトニアン $\hat{H}$ があるときにどのように時間発展発展するか調べる．系のハミルトニアンは,

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \tag{0.0.43}$$

と書けるから,

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)\rangle &= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|\alpha\rangle &(0.0.44)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t\hat{n}}|\alpha\rangle &(0.0.45)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-\mathrm{i}\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|n\rangle &(0.0.46)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sum_m \frac{(-\mathrm{i}\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m|n\rangle &(0.0.47)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sum_m \frac{(-\mathrm{i}n\omega t)^m}{m!}|n\rangle &(0.0.48)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|n\rangle &(0.0.49)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_n \frac{\left(\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|n\rangle &(0.0.50)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_n \frac{\left(\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{\left|\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right|^2}{2}\right)|n\rangle &(0.0.51)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\left|\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\rangle &(0.0.52)
\end{aligned}$$

グローバル位相は無視してよいので,

$$|\alpha(t)\rangle = \left|\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\rangle \tag{0.0.53}$$

と分かる.

次に,個数状態の時間発展を調べる.

$$\begin{aligned}
|n(t)\rangle &= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|n\rangle && (0.0.54)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t\hat{n}}|n\rangle && (0.0.55)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-\mathrm{i}\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m|n\rangle && (0.0.56)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-\mathrm{i}n\omega t)^m}{m!}|n\rangle && (0.0.57)\\
&= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|n\rangle && (0.0.58)
\end{aligned}$$

となり,周波数が 2 倍になったように見える[1].

0.0.4 レーザのハミルトニアンでの時間発展

真空場 $|0\rangle$ が $|\alpha\rangle$ に時間変化するものがレーザである.レーザのハミルトニアンを

$$\hat{H}_{\mathrm{laser}} \coloneqq \mathrm{i}\frac{\hbar}{t}\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right) \tag{0.0.59}$$

とかける.実際,この系における真空状態 $|0\rangle$ の時間発展は,

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|0\rangle &= \exp\left(-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\frac{\hbar}{t}\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)\frac{t}{\hbar}\right)|0\rangle && (0.0.60)\\
&= \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle && (0.0.61)\\
&= \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha^*\hat{a}\right]\right)|0\rangle && (0.0.62)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle && (0.0.63)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\sum_{n=0}\frac{(-\alpha^*\hat{a})^n}{n!}|0\rangle && (0.0.64)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle && (0.0.65)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}\frac{\left(\alpha\hat{a}^\dagger\right)^n}{n!}|0\rangle && (0.0.66)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}\frac{\alpha^n}{n!}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle && (0.0.67)\\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}\frac{\alpha^n}{n!}\sqrt{n!}\,|0\rangle && (0.0.68)\\
&= \sum_{n=0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|0\rangle && (0.0.69)
\end{aligned}$$

[1] らしい

$$= |\alpha\rangle \tag{0.0.70}$$

となり，やはり $\hat{H}_{\mathrm{laser}}$ はレーザのハミルトニアンである．計算の途中に，2 つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いた．

変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ を，

$$\hat{D}(\alpha) \coloneqq \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \tag{0.0.71}$$

と定義する．Schrödinger 描像では系の時間発展を状態ベクトルに押し付けて，

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\,|0\rangle \tag{0.0.72}$$

としたのであった．Heisenberg 描像で，光の振幅に対応する物理量である消滅演算子 $\hat{a}$ の時間発展の様子を調べる．1 つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いて計算すると，

$$\hat{D}^\dagger \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \mathrm{e}^{\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)^\dagger} \hat{a} \mathrm{e}^{\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)} \tag{0.0.73}$$

$$= \mathrm{e}^{-\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)} \hat{a} \mathrm{e}^{\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)} \tag{0.0.74}$$

$$= \hat{a} + \left[-\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right), \hat{a}\right] \tag{0.0.75}$$

$$= \hat{a} + \alpha \tag{0.0.76}$$

となる．