Chapter 1

量子光学

1.1 Schödinger 描像と Heisenberg 描像

略

1.2 調和振動子

本節では, 1 次元調和振動子モデルでハミルトニアンが書けるときの波動函数の表示を求める. 波動函数とは, Schrödinger 方程式,

$$\hat{H}\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle \tag{1.2.1}$$

を満たす $\left|\psi\right\rangle$ について,

$$\psi(x) \coloneqq \langle x|\psi\rangle \tag{1.2.2}$$

となるように（一般化）座標 x へ射影したものである．**式** (1.2.1) に対して $\langle x|$ を左から書ければ,

$$\left\langle x\middle|\hat{H}\middle|\psi\right\rangle = E\psi(x) \tag{1.2.3}$$

となるのだから，左辺を計算して $\psi(x)$ に演算子がかかる形に変形すれば，波動函数を求めることができる．本ノートにおいて，$\hat{\cdot}$ を演算子として，その固有値を $\cdot$，固有ベクトル (固有函数) を $\left|\cdot\right\rangle$ と書く．

$$\hat{x}\left|x\right\rangle = x\left|x\right\rangle \tag{1.2.4}$$

$$\hat{p}\left|x\right\rangle = p\left|x\right\rangle \tag{1.2.5}$$

である．また，$\hat{x}$ や $\hat{p}$ は物理量であり，Hermite 演算子だからその固有ベクトルは,

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x'-x) \tag{1.2.6}$$

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p'-p) \tag{1.2.7}$$

と規格化してあり,

$$\int \mathrm{d}x\left|x\middle\rangle\middle\langle x\right| = \hat{1} \tag{1.2.8}$$

$$\int \mathrm{d}p\left|p\middle\rangle\middle\langle p\right| = \hat{1} \tag{1.2.9}$$

が成立する．なお，特に断らない限り積分範囲は $-\infty$ から ∞ である．

1.2.1 ハミルトニアン

古典的な 1 次元調和振動子のハミルトニアン H は,

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2m}p^2 \tag{1.2.10}$$

である．ただし，質量を m，固有角周波数を ω，座標を x，運動量を p とした．x と p は正準共役な変数の組であるから，$x \to \hat{x}$，$p \to \hat{p}$ として，

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}^2 && (1.2.11)\\
&= \hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega}\hat{p}^2\right) && (1.2.12)\\
&= \hbar\omega\left[\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right) - \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}[\hat{x},\hat{p}]\right] && (1.2.13)\\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) && (1.2.14)
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\hat{a}^\dagger \coloneqq \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right) \tag{1.2.15}$$

$$\hat{a} \coloneqq \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right) \tag{1.2.16}$$

と定義した.

1.2.2 Hermite 多項式

以降の議論で用いるために, 特殊函数の 1 つである Hermite 多項式を紹介しておこう. Hermite 多項式は Strum-Liouville 演算子のうちの 1 つの演算子の固有函数であり，実数全体で定義された実数函数 $H_n(s)$ に対して,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} - 2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + 2n\right)H_n(s) = 0 \tag{1.2.17}$$

なる $H_n(s)$ である．なお，n は非負整数である．なお，$H_n(s)$ は適当な回数だけ微分可能であるとする．また，$H_n(s)$ が張る空間 V の内積は，$f, g \in V$ として,

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, f(s)g(s)\mathrm{e}^{-s^2} \tag{1.2.18}$$

である[1]．Hermite 多項式は，適切に境界条件が設定された (Hermite 性のある)Strum-Liouville 演算子の固有函数であり，そのような演算子の固有函数は直交基底となり，完全系を成すことが知られていて，実際,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(s)H_n(s)\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_n^m \tag{1.2.19}$$

のように直交する.

---

[1]Strum-Liouville 演算子の形,

$$\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\} + q(x)\right]$$

と，Strum-Liouville 演算子の固有函数が張る空間の内積が,

$$\int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

と書けることを思い出せば，内積に e^{-s^2} なる重み函数が入ることは自然なことである.

1.2.3　波動函数を用いた Schrödinger 方程式

以下では，波動函数を用いた chrödinger 方程式である，

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x)=E\psi(x) \tag{1.2.20}$$

を得る．

式 (1.2.3) に**式** (1.2.11) で示した $\hat{H}$ の表式を代入して，

$$\frac{1}{2}m\omega^2\left\langle x\middle|\hat{x}^2\middle|\psi\right\rangle+\frac{1}{2m}\left\langle x\middle|\hat{p}^2\middle|\psi\right\rangle=E\psi(x) \tag{1.2.21}$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)+\frac{1}{2m}\left\langle x\middle|\hat{p}^2\middle|\psi\right\rangle=E\psi(x) \tag{1.2.22}$$

となる．$\left\langle x\middle|\hat{p}^2\middle|\psi\right\rangle$ は以下のレシピで計算できる．

1. $f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x)=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x)$
2. $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle=-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$
3. $\langle x|p\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi p}}\exp\left(\mathrm{i}\dfrac{xp}{\hbar}\right)$
4. $\left\langle x\middle|\hat{p}^2\middle|\psi\right\rangle$ の計算

$\delta(x)$ はデルタ函数であり，積分して初めて意味を持つ函数である．

1. $f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x)=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x)$

   左辺を積分して右辺になればよい．ただし，$f(x)$ は，

$$\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0 \tag{1.2.23}$$

   であるとする．実際に，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x)=[f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x) \tag{1.2.24}$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x) \tag{1.2.25}$$

   であるから，

$$f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta(x) \tag{1.2.26}$$

   である．

2. $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle=-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$

   $\langle x|[\hat{x},\hat{p}]|x'\rangle$ を 2 種類の方法で計算する．まず，愚直に計算すると，

$$\langle x|[\hat{x},\hat{p}]|x'\rangle=\langle x|\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x}|x'\rangle \tag{1.2.27}$$

$$=x\,\langle x|\hat{p}|x'\rangle-x'\,\langle x|\hat{p}|x'\rangle \tag{1.2.28}$$

$$=(x-x')\,\langle x|\hat{p}|x'\rangle \tag{1.2.29}$$

   である．一方，$[\hat{x},\hat{p}]=\mathrm{i}\hbar$ を用いれば，

$$\langle x|[\hat{x},\hat{p}]|x'\rangle=\mathrm{i}\hbar\,\langle x|x'\rangle \tag{1.2.30}$$

$$= \mathrm{i}\hbar\delta(x - x') \tag{1.2.31}$$

2 つの方法で計算した $\langle x|[\hat{x}, \hat{p}]|x'\rangle$ である**式** (1.2.29) と**式** (1.2.31) を等号で結んで，**式** (1.2.26) で示したデルタ函数の微分を用いて表現すれば，

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = \mathrm{i}\hbar\frac{\delta(x - x')}{x - x'} \tag{1.2.32}$$

$$= -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x - x')}\delta(x - x') \tag{1.2.33}$$

$$= \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'}\delta(x - x') \tag{1.2.34}$$

となる．

さて，$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle$ を計算しよう．$|x\rangle$ の完全性と，**式** (1.2.34) で示した関係を用いれば，

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \left\langle x\middle|\hat{p}\hat{1}\middle|\psi\right\rangle \tag{1.2.35}$$

$$= \langle x|\,\hat{p}\int \mathrm{d}x'\,|x'\rangle\langle x'|\,|\psi\rangle \tag{1.2.36}$$

$$= \int \mathrm{d}x'\,\langle x|\hat{p}|x'\rangle\,\langle x'|\psi\rangle \tag{1.2.37}$$

$$= \mathrm{i}\hbar\int \mathrm{d}x'\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x - x')\right]\phi(x') \tag{1.2.38}$$

$$= \mathrm{i}\hbar\left\{[\delta(x - x')\psi(x')]_{-\infty}^{\infty} - \int \mathrm{d}x'\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'}\phi(x')\delta(x - x')\right\} \tag{1.2.39}$$

$$= -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x) \tag{1.2.40}$$

を得る．

3. $\langle x|p\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi p}}\exp\left(\mathrm{i}\dfrac{xp}{\hbar}\right)$

$\langle x|\hat{p}|p\rangle$ を 2 種類の方法で計算する．まず，愚直に計算すると，

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = p\,\langle x|p\rangle \tag{1.2.41}$$

$$= pp(x) \tag{1.2.42}$$

となる．ただし $p(x)$ は $|p\rangle$ の x への射影である．一方，**式** (1.2.40) で示した関係で $|\psi\rangle \to |p\rangle$ を用いると，

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) \tag{1.2.43}$$

となる．**式** (1.2.42) と**式** (1.2.43) より，

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) = pp(x) \tag{1.2.44}$$

$$\Rightarrow p(x) = C\exp\left(\mathrm{i}\frac{xp}{\hbar}\right) \tag{1.2.45}$$

となる．C は規格化定数である．

さて，C を求めるために，$\langle x|x'\rangle$ を計算すると，

$$\delta(x - x') = \langle x|x'\rangle \tag{1.2.46}$$

$$= \langle x|\int \mathrm{d}p\,|p\rangle\langle p|\,|x'\rangle \tag{1.2.47}$$

$$= \int \mathrm{d}p\,p(x)p(x') \tag{1.2.48}$$

$$= |C|^2\int \exp\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}(x - x')p}{\hbar}\right) \tag{1.2.49}$$

となる．ところで，デルタ函数の Fouirer 変換とその逆変換が，

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \delta(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1.2.50}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.2.51}$$

と書けることより，**式** (1.2.51) において，

$$\omega \to \frac{p}{\hbar} \tag{1.2.52}$$

$$t \to x - x' \tag{1.2.53}$$

と変換すれば，

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}p \exp\left(\mathrm{i}\frac{x - x'}{\hbar} p\right) \tag{1.2.54}$$

となるので，係数を比較して，

$$|C|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \tag{1.2.55}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{1.2.56}$$

となる．よって，

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{xp}{\hbar}\right) \tag{1.2.57}$$

となる．

4. $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ の計算
さて，いよいよ $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ を計算する道具がそろった．**式** (1.2.57) を用いながら計算すると，

$$\begin{aligned}
\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle &= \langle x|\hat{p}^2 \hat{1}|\psi\rangle && (1.2.58)\\
&= \langle x|\, \hat{p}^2 \int \mathrm{d}p\, |p\rangle\langle p|\, |\psi\rangle && (1.2.59)\\
&= \int \mathrm{d}p\, p^2 \langle x|p\rangle \langle p|\psi\rangle && (1.2.60)\\
&= \int \mathrm{d}p\, p^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{xp}{\hbar}\right) \langle p|\psi\rangle && (1.2.61)\\
&= \int \mathrm{d}p\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2 \langle x|p\rangle \right\} \langle p|\psi\rangle && (1.2.62)\\
&= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2 \int \mathrm{d}p \left\{ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \langle x|p\rangle \right\} \langle p|\psi\rangle && (1.2.63)\\
&= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \langle x| \left[\int \mathrm{d}p\, |p\rangle\langle p|\right] |\psi\rangle && (1.2.64)\\
&= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \langle x|\psi\rangle && (1.2.65)\\
&= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \psi(x) && (1.2.66)
\end{aligned}$$

となる．

式 (1.2.66) を**式** (1.2.22) に代入すれば,

$$\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)+\frac{1}{2m}\left\langle x\middle|\hat{p}^2\middle|\psi\right\rangle=E\psi(x) \tag{1.2.67}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)+\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)=E\psi(x) \tag{1.2.68}$$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x)=E\psi(x) \tag{1.2.69}$$

となる.

1.2.4 Schrodinger の解法

いささか唐突だが，波動函数が,

$$\psi(x)=f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \tag{1.2.70}$$

$$s\coloneqq\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \tag{1.2.71}$$

と書けたとする．$f(s)$ が Hermite 多項式となることを示す.

式 (1.2.69) の両辺を $-\dfrac{\hbar^2}{2m}$ で割って，x から s に変数変換[2]すると,

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x)=E\psi(x) \tag{1.2.72}$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2+\frac{2mE}{\hbar}\right]\psi(x)=0 \tag{1.2.73}$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-\frac{\hbar}{m\omega}s^2+\frac{2mE}{\hbar^2}\right]f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=0 \tag{1.2.74}$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{m\omega}{\hbar}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-\frac{\hbar}{m\omega}s^2+\frac{2mE}{\hbar^2}\right]f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=0 \tag{1.2.75}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-s^2+\frac{2E}{\hbar\omega}\right)f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=0 \tag{1.2.76}$$

と書ける．第 1 項について，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}f(s)\exp\left(-\dfrac{s^2}{2}\right)$ を計算しよう．Leibniz 則より,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}s^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)+2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right)+f(s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right) \tag{1.2.77}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}s^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)-2s\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)+f(s)\left(s^2-1\right)e\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \tag{1.2.78}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+\left(s^2-1\right)\right)f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \tag{1.2.79}$$

と計算できるから，**式** (1.2.76) は,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-s^2+\frac{2E}{\hbar\omega}\right)f(s)\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)=0 \tag{1.2.80}$$

[2] この変数変換は x の無次元化ともとらえられる．実際に**式** (1.2.71) の右辺の次元を調べると,

$$\sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{s}}}\mathrm{m}=1$$

である.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} - 2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + \left(s^2 - 1\right) - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega}\right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \tag{1.2.81}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} - 2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + \frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) f(s) = 0 \tag{1.2.82}$$

となる．Hermite 多項式の形は,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} - 2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + 2n\right) H_n(s) = 0 \tag{1.2.83}$$

であったから,

$$\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 = 2n \tag{1.2.84}$$

$$f(s) \to H_n(s) \tag{1.2.85}$$

とすれば良いことがわかる．n は非負整数で，$n = 0$ では零点振動に対応する．規格化定数を A とすれば，波動函数は,

$$\psi_n(x) = AH_n(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \tag{1.2.86}$$

と書ける．規格化定数は,

$$1 = \int \mathrm{d}x \, |\psi(x)|^2 \tag{1.2.87}$$

$$= |A|^2 \int \mathrm{d}x \, H_n(s) H_n(s) \mathrm{e}^{-s^2} \tag{1.2.88}$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int \mathrm{d}s \, H_n(s) H_n(s) \mathrm{e}^{-s^2} \tag{1.2.89}$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi} 2^n n! \tag{1.2.90}$$

より,

$$A = \sqrt{\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}} \tag{1.2.91}$$

となる．波動函数は,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \tag{1.2.92}$$

となる．

1.3 電磁場の量子化

結果のみ示す．その他のことについては，別途ノートを参照すること．Schrödingr 描像では，電場と磁場は,

$$\hat{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\varepsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \tag{1.3.1}$$

$$\hat{B}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \tag{1.3.2}$$

と量子化される．また，Heisenberg 描像では,

$$\hat{E}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\varepsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} \exp\left\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)\right\} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}^\dagger \exp\left\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)\right\}\right] \tag{1.3.3}$$

$$\hat{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} \exp\left\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)\right\} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}^\dagger \exp\left\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)\right\}\right] \tag{1.3.4}$$

と書ける．

1.4 時間発展としての物理過程

1.4.1 電磁場のハミルトニアン

前節での議論により，系のハミルトニアンは,

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\left(\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\sigma}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{1.4.1}$$

と書けるのであった．以下では，簡単のために，1 方向成分・シングルモードの波を考える．

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{sys}} &= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) &(1.4.2)\\ &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) &(1.4.3)\end{aligned}$$

と書ける．屈折率が n の物質中では[3],

$$\hat{H}_{n,\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.4.4}$$

と書ける．

1.4.2 ビームスプリッタ

2 入力 2 出力のビームスプリッタを考える．E_1 と E_2 の電場が入射して，E'_1 と E'_2 が出力されるとする．古典的に考えると,

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.5}$$

と書ける．このまま電場演算子を中心に議論を勧めることはいささか冗長である．なぜならば，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_1^\dagger$ は複素共役の関係にあるのだから，片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ．よって,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.6}$$

と書ける．B はビームスプリッタ行列という．光子数が保存することから,

$$\begin{aligned}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 &= \hat{a}_1'^\dagger\hat{a}'_1 + \hat{a}_2'^\dagger\hat{a}'_2 &(1.4.7)\\ &= \left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right)^\dagger\left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right)^\dagger\left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) &(1.4.8)\\ &= \left(B_{11}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{12}^*\hat{a}_2^\dagger\right)\left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B_{21}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{22}^*\hat{a}_2^\dagger\right)\left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) &(1.4.9)\\ &= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{12}^*B_{11} + B_{21}^*B_{21}\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 &(1.4.10)\\ &= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)^*\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 &(1.4.11)\end{aligned}$$

となり,

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22} = 0 \end{cases} \tag{1.4.12}$$

$$\Leftrightarrow B^\dagger B = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.13}$$

[3] 謎である．屈折率により波動は変化しないはずである．

となればよい．つまり，ビームスプリッタ行列 B がユニタリ行列であれば良い．また，ユニタリ行列は一般に，

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2}\end{pmatrix} \tag{1.4.14}$$

と分解できる．実際，

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2}\end{pmatrix} \tag{1.4.15}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2}\sin\Theta/2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\cos\Theta/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2}\end{pmatrix} \tag{1.4.16}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Psi)/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin\Theta/2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos\Theta/2\end{pmatrix} \tag{1.4.17}$$

であり，$\alpha = \Psi + \Phi$，$\beta = \Psi - \Phi$ とすると，

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2\end{pmatrix} \tag{1.4.18}$$

$$= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda+\alpha)/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda+\beta)/2}\sin\Theta/2 \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda-\beta)/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda-\alpha)/2}\cos\Theta/2\end{pmatrix} \tag{1.4.19}$$

と書ける．任意 2×2 の行列は，実数 r_{ij} と θ_{ij} を用いて，

$$M = \begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}} \\ r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{21}} & r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix} \tag{1.4.20}$$

と書けて，

$$M^\dagger M = \begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{21}} \\ r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{12}} & r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}} \\ r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{21}} & r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix} \tag{1.4.21}$$

$$= \begin{pmatrix}r_{11}^2 + r_{21}^2 & r_{11}r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} & r_{12}^2 + r_{22}^2\end{pmatrix} \tag{1.4.22}$$

$$MM^\dagger = \begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}} \\ r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{21}} & r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{11}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{21}} \\ r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{12}} & r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{22}}\end{pmatrix} \tag{1.4.23}$$

$$= \begin{pmatrix}r_{11}^2 + r_{12}^2 & r_{11}r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{12}r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} & r_{21}^2 + r_{22}^2\end{pmatrix} \tag{1.4.24}$$

となる．M がユニタリ行列であることの必要十分条件は，

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \tag{1.4.25}$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \tag{1.4.26}$$

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \tag{1.4.27}$$

$$r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \tag{1.4.28}$$

$$r_{11}r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \tag{1.4.29}$$

$$r_{11}r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \tag{1.4.30}$$

である．$M^\dagger M$ や $MM^\dagger$ の非対角成分は複素共役になっていることに注意する．**式** (1.4.25) から**式** (1.4.28) を満たすような r_{ij} の組は，実数 Θ を用いて，

$$r_{11} = r_{22} = \cos\Theta/2 \tag{1.4.31}$$

$$r_{12} = -r_{21} = \sin\Theta/2 \tag{1.4.32}$$

なるものである．また，これらの r_{ij} の値を**式** (1.4.29) と**式** (1.4.30) に代入すると，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \tag{1.4.33}$$

$$-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})}=0 \tag{1.4.34}$$

が成立する．

$$\Phi=\theta_{11}-\theta_{12}=\theta_{21}-\theta_{22} \tag{1.4.35}$$
$$\Psi=\theta_{11}-\theta_{21}=\theta_{12}-\theta_{22} \tag{1.4.36}$$
$$\tag{1.4.37}$$

とすると，

$$\theta_{11}=\frac{\Lambda+\Psi+\Phi}{2} \tag{1.4.38}$$
$$\theta_{12}=\frac{\Lambda+\Psi-\Phi}{2} \tag{1.4.39}$$
$$\theta_{21}=\frac{\Lambda-\Psi+\phi}{2} \tag{1.4.40}$$
$$\theta_{22}=\frac{\Lambda-\Psi-\Phi}{2} \tag{1.4.41}$$

となり，**式** (1.4.17) を得る．つまり，任意のユニタリ行列は**式** (1.4.17) で書けることが示された．実際に**式** (1.4.17) がユニタリ行列行列であることを確かめると，

$$U^\dagger U=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2 & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2\\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{1.4.42}$$
$$UU^\dagger=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2\\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2 & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin\Theta/2 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos\Theta/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{1.4.43}$$

となり，ユニタリ行列であることが分かる．