◦ 光通信

1： 光が来ている → $|\alpha\rangle$ コヒーレント状態

0： 〃 来ていない → $|0\rangle$ 真空状態

$$|\langle\alpha|0\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \neq 0$$

マジ??

より、$|\alpha\rangle$, $|0\rangle$ を区別できない…。

実際： $|\alpha|$ を大きく → $|\langle\alpha|0\rangle|^2$ を小さく

量子通信： コヒーレント状態を用いて

$|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$, $|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$ → シュレディンガーの猫状態

に射影

1.6 スクイーズド状態

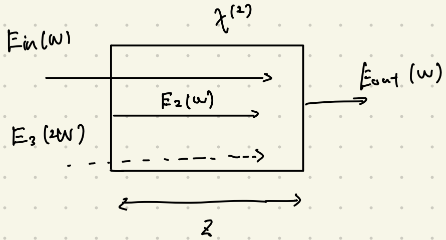
$\hat{a}$ の固有状態 → $|\alpha\rangle$: コヒーレント状態

Bogoliubov 変換 $\downarrow$ $\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger$, $(|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1)$

$\hat{b}$ の固有状態 → $|\beta\rangle_g$: スクイーズド状態

・縮退パラメトリック過程

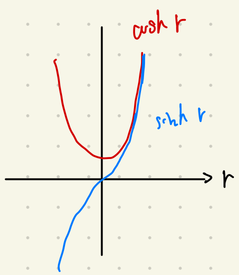
: $|\alpha\rangle \to |\beta\rangle$ を実現する



・E_{in} と E_3（強いポンプ光）から

差周波 $2\omega - \omega = \omega$ の $E_2(\omega)$ が生成

・E_{in} と E_2 のコヒーレントな重ね合わせ → $E_{out}(\omega)$



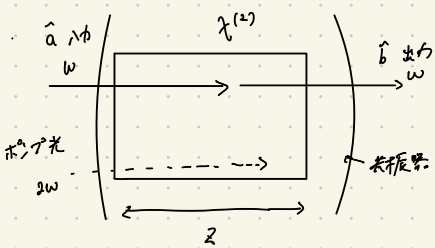
$$E_{out} = E_{in}\cosh\gamma - E_{in}^{*}\sinh\gamma$$

$$\left(\gamma = \frac{z}{2c}\cdot\frac{\omega}{n}\left|\chi^{(2)}E_3\right| \right)$$

n：屈折率

$\chi^{(2)}$：2次非linear光学const

$|\cosh\gamma|^2 - |-\sinh\gamma|^2 = 1$ より、上は Bogoliubov 変換



γを大きくする！

○ 縮退パラメトリック過程の $\hat{H}_{para}$

$$\hat{H}_{para} \propto i(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})$$

スクイーズ演算子

$$\hat{S}(r) = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})}$$

$$\hat{S}^\dagger(r)\,\hat{a}\,\hat{S}(r) = e^{-\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})}\,\hat{a}\,e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})}$$

$$= \hat{a} + \left(-\frac{r}{2}\right)[\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}] + \frac{1}{2!}\left(-\frac{r}{2}\right)^2 [\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}, [\ \ ,\ \ ]] + \cdots$$

$$= \hat{a} - r\hat{a}^\dagger + \frac{r^2}{2!}\hat{a} - \frac{r^3}{3!}\hat{a}^\dagger + \frac{r^4}{4!}\hat{a} - \cdots$$

$$= \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r$$

$[\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}]$

$$= \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger 2}$$

$$= \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} - (\hat{a}\hat{a}^\dagger)\hat{a}^\dagger$$

$$= \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger$$

$$= \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger) - \hat{a}^\dagger$$

$$= -2\hat{a}^\dagger$$

$[\hat{a}^2, \hat{a}^\dagger]$

$$= \hat{a}^2\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^2$$

$$= \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^2 + \hat{a}$$

$$= 2\hat{a}$$

$|\alpha\rangle \to \hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有state で展開可

$|\beta\rangle \to \hat{n}_g = \hat{b}^\dagger\hat{b}$ 〃 $(\because [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1)$

※ $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = (\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger)(\mu^*\hat{a}^\dagger + \nu^*\hat{a}) - (\mu^*\hat{a}^\dagger + \nu^*\hat{a})(\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger)$

$$= |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$$

$$|\beta\rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{m_g=0} \frac{\beta^{m_g}}{\sqrt{m_g!}} |m_g\rangle$$

○ スクイーズされた真空場 : $|\beta=0\rangle_g = |m_g=0\rangle_g$

$$|\beta=0\rangle_g = \hat{S}(r)|0\rangle$$

$$= e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})} |0\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{r}{2} (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}) \right\}^n |0\rangle$$

$$= |0\rangle - \frac{r}{2} \times \sqrt{2!}|2\rangle + \frac{1}{2!}\left(\frac{r}{2}\right)^2 (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})^2 |0\rangle + \cdots$$

$$= |0\rangle \left(1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{r}{2}\right)^2 (-\sqrt{2!}\sqrt{2!}) + \frac{1}{4!}\left(\frac{r}{2}\right)^4 (\sqrt{4!}\sqrt{4!}) + \cdots \right)$$

??

$$+ |2\rangle \left(-\frac{1}{1!}\frac{r}{2}\sqrt{2!} + \frac{1}{3!}\left(\frac{r}{2}\right)^3 (\sqrt{4!}\sqrt{{}_4P_2}) + \frac{1}{5!}\left(\frac{r}{2}\right)^5 (-\sqrt{6!}\sqrt{{}_6P_4}) + \cdots \right.$$

$$+ |4\rangle \left(\frac{1}{2!}\left(\frac{r}{2}\right)^2 (\sqrt{4!}) + \frac{1}{4!}\left(\frac{r}{2}\right)^4 (-\sqrt{6!}\sqrt{{}_6P_2}) + \cdots \right.$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \left(|0\rangle - \frac{\tanh r}{\sqrt{2}} |2\rangle + \frac{\sqrt{6}(\tanh r)^2}{4} |4\rangle - \cdots \right)$$

→ 偶数個の光子流

$$\langle n | \beta=0\rangle_g = \sqrt{\frac{\nu^n}{2^n n! \mu^{n+1}}} H_n(0) = \omega_n$$

$$|\omega_n|^2 = \frac{|\nu|^n}{2^n n! |\mu^{n+1}|} H_n^*(0) H_n(0) \quad + \text{(ポアソン分布)}$$

→ 相関がある!!

・スクイーズドと呼ばれる理由

$\hat{a}=\hat{x}+i\hat{p}$

$\hat{a}^\dagger=\hat{x}-i\hat{p}$ $\longrightarrow$

$$\hat{b} = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r$$

$$= \hat{x}\left(\frac{e^{r}+e^{-r}}{2} - \frac{e^{r}-e^{-r}}{2}\right) + i\hat{p}\left(\frac{e^{r}+e^{-r}}{2} + \frac{e^{r}-e^{-r}}{2}\right)$$

$$= \hat{x}e^{-r} + i\hat{p}e^{r} \quad \longleftrightarrow \quad \hat{a} = \hat{x} + i\hat{p}$$

↳ 座標系が x 方向に縮んで、
p方向に延びている！

$|\beta=0\rangle_g$ state での $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}^2\rangle$

$$\langle\hat{x}\rangle = {}_g\langle\beta=0|\hat{x}|\beta=0\rangle_g$$

$$= \langle 0|\hat{S}^\dagger(r)\,\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{2}\,|\hat{S}(r)|0\rangle$$

$|0\rangle \to 0$ 　 $\langle 0| \to 0$

$$= \langle 0|\frac{1}{2}(\hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r + \hat{a}^\dagger\cosh r - \hat{a}\sinh r)|0\rangle$$

$$= 0$$

同様

$$\langle\hat{p}\rangle = \cdots = 0$$

$$\hat{b} = \hat{S}^\dagger(r)(\hat{x}+i\hat{p})\hat{S}(r) = \hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r) + \hat{S}^\dagger(r)i\hat{p}\hat{S}(r)$$

$$= \hat{x}e^{-r} + i\hat{p}e^{r}$$

よって

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \langle 0| \hat{S}^\dagger(r)\, \hat{x}^2\, \hat{S}(r) |0\rangle$$

$$= \langle 0| \hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r)\,\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r)|0\rangle$$

$$= \langle 0| \hat{x}^2 e^{-2r} |0\rangle = \langle 0| \frac{\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2}}{4} |0\rangle e^{-2r}$$

$$= \frac{1}{4} e^{-2r}$$

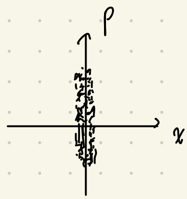
$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle 0| i^2 \hat{p}^2 e^{2r} |0\rangle$$

$$= -\langle 0| \frac{\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2}}{4} |0\rangle e^{2r} = \frac{1}{4} e^{2r}$$

$$\therefore \Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle} = \frac{1}{2} e^{-r}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle} = \frac{1}{2} e^{r}$$

非対称



1.7 密度演算子

$$\hat{\rho} := \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

ex1)

$$\hat{\rho}_{coh} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$$ ← 純粋 state

$$= e^{-|\alpha|^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} |n\rangle\langle m| \right)$$

$$= e^{-|\alpha|^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}|n\rangle\langle n| + \underbrace{\sum_{n\neq m}\frac{\alpha^n\alpha^{*m}}{\sqrt{m!n!}}|n\rangle\langle m|}_{}\right)$$

何を表してる？

αの位相の関数

↔ 位相空間を決定

での位相

コヒーレンスの源

$$\langle n|\underset{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\underset{\shortparallel}{\hat{\rho}_{coh}}}|n\rangle = \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}e^{-|\alpha|^2}$$

ex 2)　黒体輻射

$$\hat{\rho}_{th} = (1-e^{-\beta_{th}})\sum_{0}^{\infty} e^{-n\beta_{th}}|n\rangle\langle n|$$

$$\left(\beta_{th} = \frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)$$

$$\langle n|\hat{\rho}_{th}|n\rangle = (1-e^{-\beta_{th}})\,e^{-n\beta_{th}}$$ ：ボルツマン分布