

# Chapter 1

## 量子光学

### 1.1 Schödinger 描像と Heisenberg 描像

略

### 1.2 調和振動子

本節では, 1次元調和振動子モデルでハミルトニアンが書けるときの波動関数の表示を求める. 波動関数とは, Schrödinger 方程式,

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (1.2.1)$$

を満たす  $|\psi\rangle$  について,

$$\psi(x) := \langle x|\psi\rangle \quad (1.2.2)$$

となるように (一般化) 座標  $x$  へ射影したものである. 式 (1.2.1) に対して  $\langle x|$  を左から書ければ,

$$\langle x|\hat{H}|\psi\rangle = E\psi(x) \quad (1.2.3)$$

となるのだから, 左辺を計算して  $\psi(x)$  に演算子がかかる形に変形すれば, 波動関数を求めることができる. 本ノートにおいて,  $\hat{\cdot}$  を演算子として, その固有値を  $\cdot$ , 固有ベクトル (固有函数) を  $|\cdot\rangle$  と書く.

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \quad (1.2.4)$$

$$\hat{p}|x\rangle = p|x\rangle \quad (1.2.5)$$

である. また,  $\hat{x}$  や  $\hat{p}$  は物理量であり, Hermite 演算子だからその固有ベクトルは,

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x' - x) \quad (1.2.6)$$

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p' - p) \quad (1.2.7)$$

と規格化してあり,

$$\int dx |x\rangle\langle x| = \hat{1} \quad (1.2.8)$$

$$\int dp |p\rangle\langle p| = \hat{1} \quad (1.2.9)$$

が成立する. なお, 特に断らない限り積分範囲は  $-\infty$  から  $\infty$  である.

### 1.2.1 ハミルトニアン

古典的な 1 次元調和振動子のハミルトニアン  $H$  は,

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2m}p^2 \quad (1.2.10)$$

である。ただし、質量を  $m$ 、固有角周波数を  $\omega$ 、座標を  $x$ 、運動量を  $p$  とした。  $x$  と  $p$  は正準共役な変数の組であるから、  $x \rightarrow \hat{x}$ ,  $p \rightarrow \hat{p}$  とし、

$$\hat{H} = \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}^2 \quad (1.2.11)$$

$$= \hbar\omega \left( \frac{m\omega}{2\hbar} \hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega} \hat{p}^2 \right) \quad (1.2.12)$$

$$= \hbar\omega \left[ \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} [\hat{x}, \hat{p}] \right] \quad (1.2.13)$$

$$= \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.2.14)$$

となる。ただし、

$$\hat{a}^\dagger := \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \quad (1.2.15)$$

$$\hat{a} := \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \quad (1.2.16)$$

と定義した。

### 1.2.2 Hermite 多項式

以降の議論で用いるために、特殊関数の 1 つである Hermite 多項式を紹介しておこう。Hermite 多項式は Strum-Liouville 演算子のうちの 1 つの演算子の固有関数であり、実数全体で定義された実数関数  $H_n(s)$  に対して、

$$\left( \frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + 2n \right) H_n(s) = 0 \quad (1.2.17)$$

なる  $H_n(s)$  である。なお、 $n$  は非負整数である。なお、 $H_n(s)$  は適当な回数だけ微分可能であるとする。また、 $H_n(s)$  が張る空間  $V$  の内積は、 $f, g \in V$  とし、

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s)g(s)e^{-s^2} \quad (1.2.18)$$

である<sup>1</sup>。Hermite 多項式は、適切に境界条件が設定された (Hermite 性のある) Strum-Liouville 演算子の固有関数であり、そのような演算子の固有関数は直交基底となり、完全系を成すことが知られていて、実際、

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(s)H_n(s)e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}2^n n! \delta_n^m \quad (1.2.19)$$

のように直交する。

---

<sup>1</sup> Strum-Liouville 演算子の形、

$$\frac{1}{\rho(x)} \left[ \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\} + q(x) \right]$$

と、Strum-Liouville 演算子の固有関数が張る空間の内積が、

$$\int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x) dx$$

と書けることを思い出せば、内積に  $e^{-s^2}$  なる重み関数が入ることは自然なことである。

### 1.2.3 波動関数を用いた Schrödinger 方程式

以下では、波動関数を用いた Schrödinger 方程式である、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) \psi(x) = E \psi(x) \quad (1.2.20)$$

を得る。

式 (1.2.3) に式 (1.2.11) で示した  $\hat{H}$  の表式を代入して、

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \langle x | \hat{x}^2 | \psi \rangle + \frac{1}{2m} \langle x | \hat{p}^2 | \psi \rangle = E \psi(x) \quad (1.2.21)$$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x) + \frac{1}{2m} \langle x | \hat{p}^2 | \psi \rangle = E \psi(x) \quad (1.2.22)$$

となる。 $\langle x | \hat{p}^2 | \psi \rangle$  は以下のレシピで計算できる。

1.  $f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{d}{dx} f(x) \delta(x)$
2.  $\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)$
3.  $\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i \frac{xp}{\hbar}\right)$
4.  $\langle x | \hat{p}^2 | \psi \rangle$  の計算

$\delta(x)$  はデルタ関数であり、積分して初めて意味を持つ関数である。

1.  $f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{d}{dx} f(x) \delta(x)$

左辺を積分して右辺になればよい。ただし、 $f(x)$  は、

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad (1.2.23)$$

であるとする。実際に、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = [f(x) \delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) \delta(x) \quad (1.2.24)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) \delta(x) \quad (1.2.25)$$

であるから、

$$f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{d}{dx} f(x) \delta(x) \quad (1.2.26)$$

である。

2.  $\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)$

$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle$  を 2 種類の方法で計算する。まず、愚直に計算すると、

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle = \langle x | \hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x} | x' \rangle \quad (1.2.27)$$

$$= x \langle x | \hat{p} | x' \rangle - x' \langle x | \hat{p} | x' \rangle \quad (1.2.28)$$

$$= (x - x') \langle x | \hat{p} | x' \rangle \quad (1.2.29)$$

である。一方、 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  を用いれば、

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle = i\hbar \langle x | x' \rangle \quad (1.2.30)$$

$$= i\hbar\delta(x - x') \quad (1.2.31)$$

2つの方法で計算した  $\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle$  である式 (1.2.29) と式 (1.2.31) を等号で結んで、式 (1.2.26) で示したデルタ関数の微分を用いて表現すれば、

$$\langle x | \hat{p} | x' \rangle = i\hbar \frac{\delta(x - x')}{x - x'} \quad (1.2.32)$$

$$= -i\hbar \frac{d}{d(x - x')} \delta(x - x') \quad (1.2.33)$$

$$= i\hbar \frac{d}{dx'} \delta(x - x') \quad (1.2.34)$$

となる。

さて、 $\langle x | \hat{p} | \psi \rangle$  を計算しよう。  $|x\rangle$  の完全性と、式 (1.2.34) で示した関係を用いれば、

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = \langle x | \hat{p} \hat{1} | \psi \rangle \quad (1.2.35)$$

$$= \langle x | \hat{p} \int dx' |x'\rangle \langle x'| | \psi \rangle \quad (1.2.36)$$

$$= \int dx' \langle x | \hat{p} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle \quad (1.2.37)$$

$$= i\hbar \int dx' \left[ \frac{d}{dx} \delta(x - x') \right] \phi(x') \quad (1.2.38)$$

$$= i\hbar \left\{ [\delta(x - x') \psi(x')]_{-\infty}^{\infty} - \int dx' \frac{d}{dx'} \phi(x') \delta(x - x') \right\} \quad (1.2.39)$$

$$= -i\hbar \frac{d}{dx} \phi(x) \quad (1.2.40)$$

を得る。

$$3. \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \exp\left(i \frac{xp}{\hbar}\right)$$

$\langle x | \hat{p} | p \rangle$  を2種類の方法で計算する。まず、愚直に計算すると、

$$\langle x | \hat{p} | p \rangle = p \langle x | p \rangle \quad (1.2.41)$$

$$= pp(x) \quad (1.2.42)$$

となる。ただし  $p(x)$  は  $|p\rangle$  の  $x$  への射影である。一方、式 (1.2.40) で示した関係で  $|\psi\rangle \rightarrow |p\rangle$  を用いると、

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} p(x) \quad (1.2.43)$$

となる。式 (1.2.42) と式 (1.2.43) より、

$$-i\hbar \frac{d}{dx} p(x) = pp(x) \quad (1.2.44)$$

$$\Rightarrow p(x) = C \exp\left(i \frac{xp}{\hbar}\right) \quad (1.2.45)$$

となる。  $C$  は規格化定数である。

さて、  $C$  を求めるために、  $\langle x | x' \rangle$  を計算すると、

$$\delta(x - x') = \langle x | x' \rangle \quad (1.2.46)$$

$$= \langle x | \int dp |p\rangle \langle p| | x' \rangle \quad (1.2.47)$$

$$= \int dp p(x) p(x') \quad (1.2.48)$$

$$= |C|^2 \int \exp\left(i \frac{(x - x')p}{\hbar}\right) \quad (1.2.49)$$

となる．ところで，デルタ函数の Fourier 変換とその逆変換が，

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) e^{-i\omega t} \quad (1.2.50)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega 1 \cdot e^{i\omega t} \quad (1.2.51)$$

と書けることより，式 (1.2.51) において，

$$\omega \rightarrow \frac{p}{\hbar} \quad (1.2.52)$$

$$t \rightarrow x - x' \quad (1.2.53)$$

と変換すれば，

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp\left(i \frac{x - x'}{\hbar} p\right) \quad (1.2.54)$$

となるので，係数を比較して，

$$|C|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \quad (1.2.55)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (1.2.56)$$

となる．よって，

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i \frac{xp}{\hbar}\right) \quad (1.2.57)$$

となる．

#### 4. $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ の計算

さて，いよいよ  $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$  を計算する道具がそろった．式 (1.2.57) を用いながら計算すると，

$$\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = \langle x|\hat{p}^2 \hat{1}|\psi\rangle \quad (1.2.58)$$

$$= \langle x|\hat{p}^2 \int dp |p\rangle\langle p| |\psi\rangle \quad (1.2.59)$$

$$= \int dp p^2 \langle x|p\rangle \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.60)$$

$$= \int dp p^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i \frac{xp}{\hbar}\right) \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.61)$$

$$= \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \langle x|p\rangle \right\} \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.62)$$

$$= \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \int dp \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \langle x|p\rangle \right\} \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.63)$$

$$= \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \langle x| \left[ \int dp |p\rangle\langle p| \right] |\psi\rangle \quad (1.2.64)$$

$$= \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \langle x|\psi\rangle \quad (1.2.65)$$

$$= \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \quad (1.2.66)$$

となる．

式 (1.2.66) を式 (1.2.22) に代入すれば,

$$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) + \frac{1}{2m} \langle x | \hat{p}^2 | \psi \rangle = E\psi(x) \quad (1.2.67)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) + \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad (1.2.68)$$

$$\Leftrightarrow \left( -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (1.2.69)$$

となる.

## 1.2.4 Schrodinger の解法

いささか唐突だが, 波動関数が,

$$\psi(x) = f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.70)$$

$$s := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (1.2.71)$$

と書けたとする.  $f(s)$  が Hermite 多項式となることを示す.

式 (1.2.69) の両辺を  $-\frac{\hbar^2}{2m}$  で割って,  $x$  から  $s$  に変数変換<sup>2</sup>すると,

$$\left( -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (1.2.72)$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2 + \frac{2mE}{\hbar} \right] \psi(x) = 0 \quad (1.2.73)$$

$$\Leftrightarrow \left[ \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\hbar}{m\omega} s^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.74)$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\hbar}{m\omega} s^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.75)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{d^2}{ds^2} - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega} \right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.76)$$

と書ける. 第1項について,  $\frac{d^2}{ds^2} f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)$  を計算しよう. Leibniz 則より,

$$\frac{d^2}{ds^2} f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = \frac{d^2 f}{ds^2} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) + 2 \frac{df}{ds} \frac{d}{ds} \left( \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \right) + f(s) \frac{d^2}{ds^2} \left( \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \right) \quad (1.2.77)$$

$$= \frac{d^2 f}{ds^2} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) - 2s \frac{df}{ds} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) + f(s) (s^2 - 1) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.78)$$

$$= \left( \frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + (s^2 - 1) \right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.79)$$

と計算できるから, 式 (1.2.76) は,

$$\left( \frac{d^2}{ds^2} - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega} \right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.80)$$

<sup>2</sup> この変数変換は  $x$  の無次元化ともとらえられる. 実際に式 (1.2.71) の右辺の次元を調べると,

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s}}} \text{m} = 1$$

である.

$$\Leftrightarrow \left( \frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + (s^2 - 1) - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega} \right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.81)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right) f(s) = 0 \quad (1.2.82)$$

となる．Hermite 多項式の形は，

$$\left( \frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + 2n \right) H_n(s) = 0 \quad (1.2.83)$$

であったから，

$$\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 = 2n \quad (1.2.84)$$

$$f(s) \rightarrow H_n(s) \quad (1.2.85)$$

とすれば良いことがわかる． $n$  は非負整数で， $n = 0$  では零点振動に対応する．規格化定数を  $A$  とすれば，波動関数は，

$$\psi_n(x) = AH_n(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.86)$$

と書ける．規格化定数は，

$$1 = \int dx |\psi(x)|^2 \quad (1.2.87)$$

$$= |A|^2 \int dx H_n(s) H_n(s) e^{-s^2} \quad (1.2.88)$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int ds H_n(s) H_n(s) e^{-s^2} \quad (1.2.89)$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi} 2^n n! \quad (1.2.90)$$

より，

$$A = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} \quad (1.2.91)$$

となる．波動関数は，

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \quad (1.2.92)$$

となる．

### 1.3 電磁場の量子化

結果のみ示す．その他のことについては，別途ノートを参照すること．なお，December 27, 2024 現在，ノートは編集集中である．Schrödinger 描像では，電場と磁場は，

$$\hat{E}(\mathbf{r}) = i \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \quad (1.3.1)$$

$$\hat{B}(\mathbf{r}) = i \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \quad (1.3.2)$$

と量子化される．また，Heisenberg 描像では，

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} \right] \quad (1.3.3)$$

$$\hat{B}(\mathbf{r}, t) = i \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \exp \{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} \right] \quad (1.3.4)$$

と書ける。

## 1.4 時間発展としての物理過程

### 1.4.1 電磁場のハミルトニアン

前節での議論により、系のハミルトニアンは、

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right) \quad (1.4.1)$$

と書けるのであった。以下では、簡単のために、1方向成分・シングルモードの波を考える。

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \quad (1.4.2)$$

$$= \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.4.3)$$

と書ける。屈折率が<sup>3</sup> $n$ の物質中では<sup>3</sup>,

$$\hat{H}_{n,\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n} \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.4.4)$$

と書ける。

### 1.4.2 数学的準備

ユニタリ行列は一般に、

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

と分解できる。具体的に $U$ を計算すると、

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.6)$$

$$= e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\Psi/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\Psi/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\Psi/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.7)$$

$$= e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.8)$$

であり、 $\alpha = \Psi + \Phi$ ,  $\beta = \Psi - \Phi$  とすると、

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.9)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Lambda+\alpha)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Lambda+\beta)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{i(\Lambda-\beta)/2} \sin(\Theta/2) & e^{i(\Lambda-\alpha)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.10)$$

と書ける。

<sup>3</sup> 謎である。屈折率により波動は変化しないはずである。



*Proof.* 任意  $2 \times 2$  の行列は、実数  $r_{ij}$  と  $\theta_{ij}$  を用いて、

$$M = \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (1.4.11)$$

と書いて、

$$M^\dagger M = \begin{pmatrix} r_{11}e^{-i\theta_{11}} & r_{21}e^{-i\theta_{21}} \\ r_{12}e^{-i\theta_{12}} & r_{22}e^{-i\theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (1.4.12)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{21}^2 & r_{11}r_{12}e^{-i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{-i(\theta_{21}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{12}e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} & r_{12}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (1.4.13)$$

$$MM^\dagger = \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}e^{-i\theta_{11}} & r_{21}e^{-i\theta_{21}} \\ r_{12}e^{-i\theta_{12}} & r_{22}e^{-i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (1.4.14)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{12}^2 & r_{11}r_{21}e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{21}e^{-i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{12}r_{22}e^{-i(\theta_{12}-\theta_{22})} & r_{21}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (1.4.15)$$

となる． $M$  がユニタリ行列であることの必要十分条件は、

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \quad (1.4.16)$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \quad (1.4.17)$$

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \quad (1.4.18)$$

$$r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \quad (1.4.19)$$

$$r_{11}r_{12}e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \quad (1.4.20)$$

$$r_{11}r_{21}e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \quad (1.4.21)$$

である． $M^\dagger M$  や  $MM^\dagger$  の非対角成分は複素共役になっていることに注意する．式 (1.4.16) から式 (1.4.19) を満たすような  $r_{ij}$  の組は、実数  $\Theta$  を用いて、

$$r_{11} = r_{22} = \cos(\Theta/2) \quad (1.4.22)$$

$$r_{12} = -r_{21} = \sin(\Theta/2) \quad (1.4.23)$$

なるものである．また、これらの  $r_{ij}$  の値を式 (1.4.20) と式 (1.4.21) に代入すると、

$$e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} - e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \quad (1.4.24)$$

$$-e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \quad (1.4.25)$$

が成立する．

$$\Phi = \theta_{11} - \theta_{12} = \theta_{21} - \theta_{22} \quad (1.4.26)$$

$$\Psi = \theta_{11} - \theta_{21} = \theta_{12} - \theta_{22} \quad (1.4.27)$$

$$(1.4.28)$$

とすると、

$$\theta_{11} = \frac{\Lambda + \Psi + \Phi}{2} \quad (1.4.29)$$

$$\theta_{12} = \frac{\Lambda + \Psi - \Phi}{2} \quad (1.4.30)$$

$$\theta_{21} = \frac{\Lambda - \Psi + \Phi}{2} \quad (1.4.31)$$

$$\theta_{22} = \frac{\Lambda - \Psi - \Phi}{2} \quad (1.4.32)$$

となり、式 (1.4.8) を得る．つまり、任意のユニタリ行列は式 (1.4.8) で書けることが示された．  $\square$

実際に式 (1.4.8) がユニタリ行列であることを確かめる.

$$U^\dagger U = e^{-i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & -e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.33)$$

$$UU^\dagger = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} e^{-i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & -e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.34)$$

となり,  $U$  はユニタリ行列であることが分かる.

### 1.4.3 ビームスプリッター行列

2 入力 2 出力のビームスプリッターを考える.  $E_1$  と  $E_2$  の電場が入射して,  $E'_1$  と  $E'_2$  が出力されるとする. 古典的に考えると,

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.35)$$

と書ける. このまま電場演算子を中心に議論を進めることはいささか冗長である. なぜならば,  $\hat{a}_1$  と  $\hat{a}_1^\dagger$  は複素共役の関係にあるのだから, 片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ. よって,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.36)$$

と書ける.  $B$  はビームスプリッター行列という. 光子数が保存することから,

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = \hat{a}'_1{}^\dagger \hat{a}'_1 + \hat{a}'_2{}^\dagger \hat{a}'_2 \quad (1.4.37)$$

$$= (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2)^\dagger (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2)^\dagger (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (1.4.38)$$

$$= (B_{11}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{12}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{22}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (1.4.39)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{12}^*B_{11} + B_{21}^*B_{21})\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (1.4.40)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})^*\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (1.4.41)$$

となり,

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22} = 0 \end{cases} \quad (1.4.42)$$

$$\Leftrightarrow B^\dagger B = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.43)$$

となればよい. つまり, ビームスプリッター行列  $B$  がユニタリ行列であれば良い. 1.4.2 での議論において,

$$\begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.44)$$

は 2 つの入力電場  $E_1$ ,  $E_2$  に位相差をかけること,

$$\begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.45)$$

は 2 つの出力電場  $E'_1$ ,  $E'_2$  に位相差をかけること,

$$e^{i\Lambda/2} \quad (1.4.46)$$

は 2 つの出力電場  $E'_1$ ,  $E'_2$  に共通するグローバル位相を書けることに対応するから, 実験のセットアップとして,

$$\Lambda = \Psi = \Phi = 0 \quad (1.4.47)$$

とすることができる。また、透過率  $T$  と反射率  $R$  を,

$$\sqrt{T} := \cos(\Theta/2) \tag{1.4.48}$$

$$\sqrt{R} := -\sin(\Theta/2) \tag{1.4.49}$$

と定義すれば、ビームスプリッタ行列  $B$  は,

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{1.4.50}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \tag{1.4.51}$$

と書ける。

#### 1.4.4 ビームスプリッタハミルトニアン