1.4 時間発展の物理量

$$\hat{a}_{k\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$$

$$\xrightarrow{\text{シングル}} \hat{a} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\hat{a} e^{-i\omega t} = \hat{a}(t)$$

$$\hat{a}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

時間に依存しない $\hat{H}$ を考える!

$$\hat{H}_{sys} = \int d^3k \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^{\dagger}) \quad ; \quad [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a} = 1$$

$$= \int dk^3 \frac{\hbar\omega}{2} (2\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + 1)$$

kは一通り

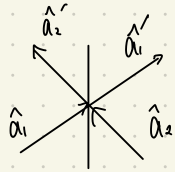
$$= \hbar\omega (\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2})$$

屈折率 n 中だと、

$$\hat{H}_{n,sys} = \frac{\hbar\omega}{n} (\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}) \quad ??$$

$$\frac{f}{2\pi} = \omega = v\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

○ ビームスプリッター



複素振幅で表現したい

↑おそらく古典と対応づけ

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1' \\ \hat{a}_2' \end{pmatrix} = \mathbb{B} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}$$

ただし、光子数保存より、

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2'$$

$$= (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2)^\dagger (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2)^\dagger (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^* B_{12} + B_{21}^* B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{12}^* B_{11} + B_{22}^* B_{21})\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1$$

$$\therefore \quad |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1$$

$$B_{11}^* B_{12} + B_{21}^* B_{22} = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{B}$ がユニタリの条件と等価

ユニタリ → 以下みたいに分解できる

$$B = e^{i\frac{\Lambda}{2}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Psi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} & \sin\frac{\Theta}{2} \\ -\sin\frac{\Theta}{2} & \cos\frac{\Theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Phi}{2}} \end{pmatrix}$$

Λ, Ψ, Φ → 実験的に0にできる

$$B \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} & \sin\frac{\Theta}{2} \\ -\sin\frac{\Theta}{2} & \cos\frac{\Theta}{2} \end{pmatrix}$$

ここで透過率T, 反射率Rを用いると、

$$\sqrt{T} = \cos\frac{\Theta}{2}, \quad \sqrt{R} = -\sin\frac{\Theta}{2} \qquad (T+R=1)$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix}$$: ビームスプリッター~~演算子~~ (or 行列)

次にビームスプリッターのハミルトニアンを求める。

$\Lambda = 0$ として、

$$B = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) e^{i\frac{\Phi+\Psi}{2}} & \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) e^{i\frac{\Phi-\Psi}{2}} \\ -\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) e^{-i\frac{\Phi-\Psi}{2}} & \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) e^{-i\frac{\Phi+\Psi}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \hat{a}_1' = \overbrace{\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}^{\sqrt{T}} e^{i\frac{\Phi+\Psi}{2}} \hat{a}_1 + \overbrace{\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)}^{-\sqrt{R} = -\sqrt{1-T}} e^{i\frac{\Phi-\Psi}{2}} \hat{a}_2$$

$$\hat{a}_2' = \underbrace{-\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)}_{\sqrt{1-T}} e^{-i\frac{\Phi-\Psi}{2}} \hat{a}_1 + \underbrace{\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}_{\sqrt{T}} e^{-i\frac{\Phi+\Psi}{2}} \hat{a}_2$$

各出力モード光の光子数は

単一モード光

式 1.49

$$\hat{a}_1'^{\dagger}\hat{a}_1' = T\,\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1 + (1-T)\,\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2$$

可換

$$-\sqrt{T(1-T)}\left(e^{-i\Phi}\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 + e^{i\Phi}\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_1\right)$$

$$\hat{a}_2'^{\dagger}\hat{a}_2' = (1-T)\,\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1 + T\,\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2$$

$$+\sqrt{T(1-T)}\underbrace{\left(e^{-i\Phi}\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 + e^{i\Phi}\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_1\right)}_{\text{相互作用成分}}$$

$$H_{int} = \frac{1}{2}\left(e^{-i\Phi}\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 + e^{i\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger}\right)$$

つじつま合わせ

$\Phi = \frac{\pi}{2}$

$$\hat{L}_2 := \frac{1}{2i}\left(\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger}\right) \approx x p_y - y p_x$$

$$e^{-i\Theta\hat{L}_2}\,\hat{a}_1\,e^{i\Theta\hat{L}_2}$$

$$= \overset{0}{\hat{a}_1} + \overset{1}{(-i\Theta)[L_2,\hat{a}_1]} + \overset{2}{\frac{(-i\Theta)^2}{2!}[L_2,[L_2,\hat{a}_1]]} + \cdots \quad 3\cdots$$

$$\frac{1}{2i}\left\{[\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2,\hat{a}_1] - [\hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger},\hat{a}_1]\right\}$$

$$\hat{a}_2[\hat{a}_1^{\dagger},\hat{a}_1] - \hat{a}_2^{\dagger}\cancel{[\hat{a}_1,\hat{a}_1]}^{\,0} = -\hat{a}_2\frac{1}{2i}$$

$$[L_2,\hat{a}_2] = \left(\cancel{[\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2,\hat{a}_2]} - [\hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger},\hat{a}_2]\right)\frac{1}{2i}$$

$$= -(-\hat{a}_1) = \hat{a}_1\frac{1}{2i}$$

奇: $\frac{1}{(2n+1)!}\Theta^{2n+1}(-i)^{2n+1}\left(\frac{1}{2i}\right)^{2n+1}(-1)^{n+1}\hat{a}_2$

偶: $\frac{1}{(2n)!}\Theta^{2n}(-i)^{2n}\left(\frac{1}{2i}\right)^{2n}(-1)^{n}\hat{a}_1$

$$= \hat{a}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\Theta}{2}\right)^{2n} \hat{a}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{\Theta}{2}\right)^{2n-1} \hat{a}_2$$

$$e^{-i\Theta \boxed{\hat{L}_2}} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} e^{i\Theta \hat{L}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1' \\ \hat{a}_2' \end{pmatrix}$$

$\Phi = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta = -\frac{t}{\hbar}$

$$e^{i\frac{H_{int}}{\hbar}t} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}}_{A} e^{-i\frac{H_{int}}{\hbar}t} \qquad A(t) = e^{i\frac{H_{int}}{\hbar}t} A \, e^{-i\frac{H_{int}}{\hbar}t}$$

$B \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \rightarrow$ ハイゼベルグ描像での 複素振幅表現

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right)$$

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right)$$

$$\hat{L}_3 = \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right)$$

$$\hat{B} = e^{i\Phi \hat{L}_3} e^{i\Theta \hat{L}_2} e^{i\Psi \hat{L}_3} e^{i\Delta \hat{L}_0}$$

1.5 コヒーレント状態 ($|\alpha\rangle$

↳ $\hat{a}$ の固有状態

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \qquad (\alpha = |\alpha| e^{i\theta})$$

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$$

(1.76) $$\hat{E}_s(r,t) = \frac{i}{2}\mathcal{E}\left[\hat{a}\, e^{i(k\cdot r - \omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(k\cdot r - \omega t)}\right]$$

↓

$\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha \quad \langle\alpha|\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \alpha^*$

$$\langle\alpha|\hat{E}_s(r,t)|\alpha\rangle$$

$$= -|\alpha|\mathcal{E}\sin(k\cdot r - \omega t + \theta)$$

振幅 α の古典電場！

ただこれ平均値 …。

量子ゆらぎを考える.

$$\hat{a} = \hat{x} + i\hat{p}$$

$$\Delta X_{coh} = \sqrt{\langle\Delta\hat{x}^2\rangle_{coh}} = \sqrt{\langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle^2} = \cdots = \frac{1}{2}$$

$$\Delta P_{coh} = \quad " \quad " \quad = \cdots = \frac{1}{2}$$

$\Big\} \times$

$\frac{1}{4} \overset{\hbar = \frac{1}{2}}{\Rightarrow} \frac{1}{2}\hbar$

$$x = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$p = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle$$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n \hat{a}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} w_l \sqrt{l}\,|l-1\rangle$$

$\langle m| \times$

$$\alpha w_m = w_{m+1}\sqrt{m+1}$$

$$\Leftrightarrow w_{m+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{m+1}} w_m$$

$$\therefore w_m = \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} w_0$$

規格化

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(|\alpha|^2)^m |w_0|^2 = 1$$

$$\therefore |w_0^2| = e^{-|\alpha|^2}$$

$$|\alpha\rangle = \underbrace{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}}_{w_n} |n\rangle$$

$$|w_n|^2 = \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} e^{-|\alpha|^2}$$

ポアソン分布 → 光子それぞれが独立! → 相互作用がない

コヒーレント光 ⇔ スクイーズド光

○時間発展

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle$$

← ただの位相ずれ → むし

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega\hat{n} + \underbrace{\tfrac{1}{2}})t}|\alpha\rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\hat{n}\omega t)^m}{m!}\cdot e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\hat{n}\omega t)^m}{m!}|n\rangle\times\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\right]$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-in\omega t)^m}{m!}|n\rangle\right]$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\omega t}|n\rangle$$

$$\to \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}$$

$$= |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{t} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$

ここで

$$e^{-i\hat{n}\omega t}|n\rangle = e^{-in\omega t}|n\rangle$$

$$|n\rangle \xrightarrow{t} |n\rangle e^{-in\omega t}$$

位相 change $\propto n$

$\therefore$ $v \to 2$倍　　　$v = f\lambda$

$f \to 2$倍，λ：$\frac{1}{2}$倍　？

$\downarrow$

$v = |\omega| k$

$$\hat{H}_{laser} \propto i(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

0	1	1
1	2	2

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sqrt{n!}\, |n\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

$$e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle$$

$$\downarrow$$

$$(1 + 0\,\hat{a} + 0\,\hat{a}^2 + \cdots)\,|0\rangle$$

$$= |0\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\,|0\rangle$$

$$e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}$$

ハイゼンベルク

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\,\hat{a}\,\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}$$

$$= \hat{a} + \alpha$$

∵

$$e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})^\dagger} \hat{a}\, e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$$

$$= e^{\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger} \hat{a}\, e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$$

$$= e^{-(\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger)} \hat{a}\, e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$$

$e^{\xi\hat{B}}\hat{A}e^{-\xi\hat{B}}$
$= \hat{A} + \xi[\hat{B},\hat{A}] + \cdots$

$$= \hat{a} + (-1)\underbrace{[\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, \hat{a}]}_{-\alpha} + \underbrace{\frac{1}{2!}(-1)^2[\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, [\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, \hat{a}]] + \cdots}_{以降0}$$

$$= \hat{a} + \alpha$$

※

$$|\alpha = 0\rangle = |n = 0\rangle$$

but

$$|\alpha = 1\rangle \neq |n = 1\rangle$$

※

$$|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2 = \left(e^{-\frac{|\alpha|^2+|\alpha'|^2}{2}}\right)^2 \left|\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^{*m}\alpha'^n}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}\langle m|n\rangle\right| \left|\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha'^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}\langle m|n\rangle\right|$$

$$= e^{-(|\alpha|^2+|\alpha'|^2)}\left|\sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha^*\alpha')^n}{n!}\right|\left|\sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha'^{*}\alpha)^n}{n!}\right|$$

$$= e^{-(|\alpha|^2 - \alpha^*\alpha' - \alpha'^*\alpha + |\alpha'|^2)} = e^{-|\alpha-\alpha'|^2} \neq 0$$

⇒ 直交した2つのコヒーレント状態は存在しない

{ 実は問題!

。光通信

1：光が来ている → $|\alpha\rangle$ コヒーレント状態

0：〃 来ていない → $|0\rangle$ 真空状態

$$|\langle\alpha|0\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \neq 0$$

マジ??

より、$|\alpha\rangle$, $|0\rangle$を区別できない…。

実際：$|\alpha|$を大きく → $|\langle\alpha|0\rangle|^2$を小さく

量子通信：コヒーレント状態を用いて

$|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$, $|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$ → シュレディンガーの猫状態

に射影

1.6 スクイーズド状態

$\hat{a}$ の固有状態 → $|\alpha\rangle$：コヒーレント状態

Bogoliubov変換 ↓ $\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger$, $(|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1)$

$\hat{b}$ の固有状態 → $|\beta\rangle_g$：スクイーズド状態