

本節ではコヒーレント状態について議論する．コヒーレント状態  $|\alpha\rangle$  は、

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (0.0.1)$$

なる状態である．また、 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$  となるように  $\theta$  を定義しておく．

### 0.0.1 物理量の平均値・分散

具体的な  $|\alpha\rangle$  の形を知らなくても、いくつかの物理量の平均値と分散については調べることができる．まず、電場の期待値を調べる．電場演算子  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$  を自然単位系を用いて書くと、

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{2}e(\hat{a}\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\} - \hat{a}^\dagger\exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\}) \quad (0.0.2)$$

であるから、

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \alpha | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle \quad (0.0.3)$$

$$= \frac{i}{2}e(\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\} - \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\}) \quad (0.0.4)$$

$$= -\frac{1}{2i}e(\alpha \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\} - \alpha^* \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\}) \quad (0.0.5)$$

$$= -\frac{1}{2i}e(|\alpha|e^{i\theta} \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\} - |\alpha|e^{-i\theta} \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\}) \quad (0.0.6)$$

$$= -|\alpha|e \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \theta) \quad (0.0.7)$$

である．

次に、位置と運動量の平均値と分散について議論する．位置演算子と運動量演算子は生成演算子と消滅演算子を用いて、

$$\hat{x} := \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (0.0.8)$$

$$\hat{p} := \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (0.0.9)$$

と書けるから、

$$\langle x \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right| \alpha \right\rangle \quad (0.0.10)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) \quad (0.0.11)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{1}{4}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \right| \alpha \right\rangle \quad (0.0.12)$$

$$= \frac{1}{4}\langle \alpha | \hat{a}^2 | \alpha \rangle + \frac{1}{4}\langle \alpha | \hat{a}\hat{a}^\dagger | \alpha \rangle + \frac{1}{4}\langle \alpha | \hat{a}^\dagger\hat{a} | \alpha \rangle + \frac{1}{4}\langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^2 | \alpha \rangle \quad (0.0.13)$$

$$= \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\langle \alpha | (\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) | \alpha \rangle + \frac{1}{4}|\alpha|^2 + \frac{1}{4}(\alpha^*)^2 \quad (0.0.14)$$

$$= \frac{1}{4}(\alpha + \alpha^*)^2 + \frac{1}{4} \quad (0.0.15)$$

$$\langle p \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \right| \alpha \right\rangle \quad (0.0.16)$$

$$= \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^*) \quad (0.0.17)$$

$$\langle p^2 \rangle = \left\langle \alpha \left| -\frac{1}{4}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \right| \alpha \right\rangle \quad (0.0.18)$$

$$= -\frac{1}{4}\langle \alpha | \hat{a}^2 | \alpha \rangle + \frac{1}{4}\langle \alpha | \hat{a}\hat{a}^\dagger | \alpha \rangle + \frac{1}{4}\langle \alpha | \hat{a}^\dagger\hat{a} | \alpha \rangle - \frac{1}{4}\langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^2 | \alpha \rangle \quad (0.0.19)$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\langle \alpha | (\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) | \alpha \rangle + \frac{1}{4}|\alpha|^2 - \frac{1}{4}(\alpha^*)^2 \quad (0.0.20)$$

$$= -\frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha^*)^2 + \frac{1}{4} \quad (0.0.21)$$

より,

$$\Delta x_{\text{coh}} := \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{4} \quad (0.0.22)$$

$$\Delta p_{\text{coh}} := \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{1}{4} \quad (0.0.23)$$

となる.

## 0.0.2 個数状態での展開

コヒーレント状態  $|\alpha\rangle$  を, Hermite 演算子である  $\hat{n}$  の固有状態である個数状態  $|n\rangle$  で展開することを考える.

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \quad (0.0.24)$$

である. 式 (0.0.1) に式 (0.0.24) を代入して, 式 (??) の関係式を用いると,

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (0.0.25)$$

$$\iff \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \quad (0.0.26)$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} w_n |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle \quad (0.0.27)$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} w_{n+1} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle \quad (0.0.28)$$

であるから,

$$\sqrt{n+1} w_{n+1} = \alpha w_n \quad (0.0.29)$$

$$\iff w_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C \quad (0.0.30)$$

である.  $C := w_0$  と定義した.  $|\alpha\rangle$  の規格化条件より,

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = \left( \sum_n w_n |n\rangle \right)^\dagger \left( \sum_m w_m |m\rangle \right) \quad (0.0.31)$$

$$= \left( \sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} C^* \langle n| \right) \left( \sum_m \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} C |m\rangle \right) \quad (0.0.32)$$

$$= |C|^2 \sum_{n,m} \frac{(\alpha^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \langle n|m \rangle \quad (0.0.33)$$

$$= |C|^2 \sum_n \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \quad (0.0.34)$$

$$= |C|^2 e^{|\alpha|^2} \quad (0.0.35)$$

であるから,

$$C = \exp \left( -\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \quad (0.0.36)$$

とすればよい。よって、コヒーレント状態は、

$$|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) |n\rangle \quad (0.0.37)$$

と書ける。式 (0.0.37) より、コヒーレント状態とは、個数状態を  $|n\rangle$  を Poisson 分布に従って重ね合わせたものと分かる。

式 (0.0.37) の表式より、異なるコヒーレント状態  $|\alpha\rangle$  と  $|\alpha'\rangle$  は直交することがわかる。実際に計算すると、

$$|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2 = \left| \left( \sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \langle n| \right) \left( \sum_{n'} \frac{\alpha'^{n'}}{\sqrt{n'!}} \exp\left(-\frac{|\alpha'|^2}{2}\right) |n'\rangle \right) \right|^2 \quad (0.0.38)$$

$$= \exp\left\{-\left(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2\right)\right\} \left( \sum_{n,n'} \frac{(\alpha^*)^n \alpha'^{n'}}{\sqrt{n!}\sqrt{n'!}} \langle n|n'\rangle \right) \left( \sum_{m',m} \frac{(\alpha'^*)^{m'} \alpha^m}{\sqrt{m'!}\sqrt{m!}} \langle m'|m\rangle \right) \quad (0.0.39)$$

$$= \exp\left\{-\left(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2\right)\right\} \left( \sum_n \frac{(\alpha^* \alpha')^n}{n!} \right) \left( \sum_m \frac{(\alpha'^* \alpha)^m}{m!} \right) \quad (0.0.40)$$

$$= \exp\left\{-\left(|\alpha|^2 - \alpha^* \alpha' - \alpha'^* \alpha + |\alpha'|^2\right)\right\} \quad (0.0.41)$$

$$= \exp\left(-|\alpha - \alpha'|^2\right) \quad (0.0.42)$$

となる。

### 0.0.3 調和振動子ハミルトニアンでの時間発展

まず、コヒーレント状態  $|\alpha\rangle$  が調和振動子ハミルトニアン  $\hat{H}$  があるときにどのように時間発展するか調べる。系のハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right) \quad (0.0.43)$$

と書けるから、

$$|\alpha(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right) |\alpha\rangle \quad (0.0.44)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right) e^{-i\omega t \hat{n}} |\alpha\rangle \quad (0.0.45)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right) \sum_m \frac{(-i\omega t)^m}{m!} \hat{n}^m \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) |n\rangle \quad (0.0.46)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right) \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sum_m \frac{(-i\omega t)^m}{m!} \hat{n}^m |n\rangle \quad (0.0.47)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right) \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sum_m \frac{(-in\omega t)^m}{m!} |n\rangle \quad (0.0.48)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right) \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-in\omega t} |n\rangle \quad (0.0.49)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right) \sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) |n\rangle \quad (0.0.50)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right) \sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2}\right) |n\rangle \quad (0.0.51)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right) |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (0.0.52)$$

グローバル位相は無視してよいので,

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (0.0.53)$$

と分かる.

次に, 個数状態の時間発展を調べる.

$$|n(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|n\rangle \quad (0.0.54)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)e^{-i\omega t\hat{n}}|n\rangle \quad (0.0.55)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-i\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m|n\rangle \quad (0.0.56)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-in\omega t)^m}{m!}|n\rangle \quad (0.0.57)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)e^{-in\omega t}|n\rangle \quad (0.0.58)$$

となり, 周波数が2倍になったように見える<sup>1</sup>.

#### 0.0.4 レーザのハミルトニアンでの時間発展

真空場  $|0\rangle$  が  $|\alpha\rangle$  に時間変化するものがレーザである. レーザのハミルトニアンは,

$$\hat{H}_{\text{laser}} = i\frac{\hbar}{t}(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \quad (0.0.59)$$

とかける. 実際, この系における真空状態  $|0\rangle$  の時間発展は,

$$\exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|0\rangle = \exp\left(-i \cdot i\frac{\hbar}{t}(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})\frac{t}{\hbar}\right)|0\rangle \quad (0.0.60)$$

$$= e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle \quad (0.0.61)$$

$$= e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}}\exp\left(-\frac{1}{2}[\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha^*\hat{a}]\right)|0\rangle \quad (0.0.62)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle \quad (0.0.63)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha^*\hat{a})^n}{n!}|0\rangle \quad (0.0.64)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \quad (0.0.65)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \quad (0.0.66)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \quad (0.0.67)$$

$$= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\sqrt{n!}|0\rangle \quad (0.0.68)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|0\rangle \quad (0.0.69)$$

<sup>1</sup>らしい

$$= |\alpha\rangle \quad (0.0.70)$$

となり、やはり  $\hat{H}_{\text{laser}}$  はレーザのハミルトニアンである．計算の途中に、2 つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いた．

変位演算子  $\hat{D}(\alpha)$  を、

$$\hat{D}(\alpha) := e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \quad (0.0.71)$$

と定義する．Schrödinger 描像では系の時間発展を状態ベクトルに押し付けて、

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (0.0.72)$$

としたのであった．Heisenberg 描像で、光の振幅に対応する物理量である消滅演算子  $\hat{a}$  の時間発展の様子を調べる．1 つ目の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いて計算すると、

$$\hat{D}^\dagger \hat{a} \hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})^\dagger} \hat{a} e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} \quad (0.0.73)$$

$$= e^{-(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} \hat{a} e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} \quad (0.0.74)$$

$$= \hat{a} + [-(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \hat{a}] \quad (0.0.75)$$

$$= \hat{a} + \alpha \quad (0.0.76)$$

となる．