0.0.1 電磁場のハミルトニアン

前節での議論により，系のハミルトニアンは，

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \int \mathrm{d}^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k\sigma}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}\right) \tag{0.0.1}$$

と書けるのであった．以下では，簡単のために，1 方向成分・シングルモードの波を考える．

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\right) \tag{0.0.2}$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{0.0.3}$$

と書ける．屈折率が n の物質中では[1]，

$$\hat{H}_{n,\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n}\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{0.0.4}$$

と書ける．

0.0.2 ユニタリ行列の分解

ユニタリ行列は一般に，

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.5}$$

と分解できる．具体的に U を計算すると，

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.6}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.7}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{0.0.8}$$

であり，$\alpha = \Psi + \Phi$，$\beta = \Psi - \Phi$ とすると，

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{0.0.9}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda+\alpha)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda+\beta)/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda-\beta)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda-\alpha)/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{0.0.10}$$

と書ける．

Proof. 任意 2×2 の行列は，実数 r_{ij} と θ_{ij} を用いて，

$$M = \begin{pmatrix} r_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}} \\ r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{21}} & r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{22}} \end{pmatrix} \tag{0.0.11}$$

と書けて，

$$M^{\dagger}M = \begin{pmatrix} r_{11}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{21}} \\ r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{12}} & r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{22}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}} \\ r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{21}} & r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{22}} \end{pmatrix} \tag{0.0.12}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{21}^2 & r_{11}r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} & r_{12}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} \tag{0.0.13}$$

[1] 謎である．屈折率により波動は変化しないはずである．

$$
\begin{aligned}
MM^\dagger &= \begin{pmatrix} r_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}} \\ r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{21}} & r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{11}} & r_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{21}} \\ r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{12}} & r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{22}} \end{pmatrix} && (0.0.14) \\
&= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{12}^2 & r_{11}r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{12}r_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} & r_{21}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} && (0.0.15)
\end{aligned}
$$

となる．M がユニタリ行列であることの必要十分条件は,

$$
\begin{aligned}
r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1 && (0.0.16) \\
r_{12}^2 + r_{22}^2 &= 1 && (0.0.17) \\
r_{11}^2 + r_{12}^2 &= 1 && (0.0.18) \\
r_{21}^2 + r_{22}^2 &= 1 && (0.0.19) \\
r_{11}r_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} &= 0 && (0.0.20) \\
r_{11}r_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} &= 0 && (0.0.21)
\end{aligned}
$$

である．$M^\dagger M$ や $MM^\dagger$ の非対角成分は複素共役になっていることに注意する．**式** (0.0.16) から**式** (0.0.19) を満たすような r_{ij} の組は，実数 Θ を用いて,

$$
\begin{aligned}
r_{11} = r_{22} &= \cos(\Theta/2) && (0.0.22) \\
r_{12} = -r_{21} &= \sin(\Theta/2) && (0.0.23)
\end{aligned}
$$

なるものである．また，これらの r_{ij} の値を**式** (0.0.20) と**式** (0.0.21) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{12})} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{21}-\theta_{22})} &= 0 && (0.0.24) \\
-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{21})} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{12}-\theta_{22})} &= 0 && (0.0.25)
\end{aligned}
$$

が成立する．

$$
\begin{aligned}
\Phi = \theta_{11} - \theta_{12} &= \theta_{21} - \theta_{22} && (0.0.26) \\
\Psi = \theta_{11} - \theta_{21} &= \theta_{12} - \theta_{22} && (0.0.27) \\
& && (0.0.28)
\end{aligned}
$$

とすると,

$$
\begin{aligned}
\theta_{11} &= \frac{\Lambda + \Psi + \Phi}{2} && (0.0.29) \\
\theta_{12} &= \frac{\Lambda + \Psi - \Phi}{2} && (0.0.30) \\
\theta_{21} &= \frac{\Lambda - \Psi + \Phi}{2} && (0.0.31) \\
\theta_{22} &= \frac{\Lambda - \Psi - \Phi}{2} && (0.0.32)
\end{aligned}
$$

となり，**式** (0.0.8) を得る．つまり，任意のユニタリ行列は**式** (0.0.8) で書けることが示された． □

実際に**式** (0.0.8) がユニタリ行列であることを確かめる．

$$
\begin{aligned}
U^\dagger U &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Lambda/2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && (0.0.33) \\
UU^\dagger &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Lambda/2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && (0.0.34)
\end{aligned}
$$

となり，U はユニタリ行列であることが分かる．

0.0.3　ビームスプリッタ行列

2 入力 2 出力のビームスプリッタを考える．E_1 と E_2 の電場が入射して，E_1' と E_2' が出力されるとする．古典的に考えると，

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.35}$$

と書ける．このまま電場演算子を中心に議論を進めることはいささか冗長である．なぜならば，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_1^\dagger$ は複素共役の関係にあるのだから，片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ．よって**式** (0.0.35) を量子化して，消滅演算子 $\hat{a}_1$，$\hat{a}_2$ を用いて表せば，

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1' \\ \hat{a}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.36}$$

と書ける．2 つの消滅演算子の交換関係は，

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_j^i \tag{0.0.37}$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \tag{0.0.38}$$

である．B はビームスプリッタ行列という．光子数が保存することから，

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 &= \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' && (0.0.39)\\
&= \left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right)^\dagger \left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right)^\dagger \left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) && (0.0.40)\\
&= \left(B_{11}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{12}^*\hat{a}_2^\dagger\right)\left(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2\right) + \left(B_{21}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{22}^*\hat{a}_2^\dagger\right)\left(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2\right) && (0.0.41)\\
&= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{12}^*B_{11} + B_{21}^*B_{21}\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 && (0.0.42)\\
&= \left(|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \left(|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2\right)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \left(B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22}\right)^*\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 && (0.0.43)
\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22} = 0 \end{cases} \tag{0.0.44}$$

$$\Leftrightarrow B^\dagger B = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.0.45}$$

となればよい．つまり，ビームスプリッタ行列 B がユニタリ行列であれば良い．0.0.2 での議論によりビームスプリッタ演算子は，

$$B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.46}$$

と書ける．ところが，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.47}$$

は 2 つの入力電場 E_1，E_2 に位相差をかけること，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.48}$$

は 2 つの出力電場 E_1'，E_2' に位相差をかけること，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda/2} \tag{0.0.49}$$

は 2 つの出力電場場 E_1'，E_2' に共通するグローバル位相を書けることに対応するから，実験のセットアップとして，

$$\Lambda = \Psi = \Phi = 0 \tag{0.0.50}$$

とすることができる．また，透過率 T と反射率 R を，

$$\sqrt{T} \coloneqq \cos(\Theta/2) \tag{0.0.51}$$

$$\sqrt{R} \coloneqq -\sin(\Theta/2) \tag{0.0.52}$$

と定義すれば，ビームスプリッタ行列 B は，

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{0.0.53}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \tag{0.0.54}$$

と書ける．

$$T + R = 1 \tag{0.0.55}$$

が成立することに注意する．

0.0.4 Baker-Campbell-Hausdorff の公式

次小節以降で頻出する Baker-Campbell-Hausdorff の公式を示しておこう．Baker-Campbell-Hausdorff の公式は，

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\hat{A}} = B + \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \cdots \tag{0.0.56}$$

なる式である．

Proof. 函数 $f(t)$ を，

$$f(t) \coloneqq \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-t\hat{A}} \tag{0.0.57}$$

と定義する．$f(t)$ を $t = 0$ の周りで展開することを考えると，

$$f(t) = f(0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} t^2 + \cdots \tag{0.0.58}$$

と書ける．さて，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \hat{A}\mathrm{e}^{t\hat{A}}B\mathrm{e}^{-t\hat{A}} - \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}A\mathrm{e}^{-t\hat{A}} \tag{0.0.59}$$

$$= \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{A}B\mathrm{e}^{-t\hat{A}} - \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}A\mathrm{e}^{-t\hat{A}} \tag{0.0.60}$$

$$= \mathrm{e}^{t\hat{A}}\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\mathrm{e}^{-t\hat{A}} \tag{0.0.61}$$

$$= \mathrm{e}^{t\hat{A}}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\mathrm{e}^{-t\hat{A}} \tag{0.0.62}$$

である．よって，

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \tag{0.0.63}$$

である．2 階以上の微分では，**式** (0.0.62) において，$\hat{B} \to \left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ とすればよい．よって，**式** (0.0.58) に**式** (0.0.62) を代入すると，

$$f(t) = B + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]t + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right]t^2 + \cdots \tag{0.0.64}$$

である．$t = 1$ とすれば，

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{\hat{A}} = B + \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \cdots \tag{0.0.65}$$

となる． □

0.0.5 ビームスプリッタハミルトニアン

ビームスプリッタ行列を再び考えよう．今度は入力電場と出力電場の位相差が存在することにして，$\Lambda = 0$ のみ課しておく．するとビームスプリッタ行列は,

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \tag{0.0.66}$$

と書ける．ビームスプリッタ行列を用いて,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1' \\ \hat{a}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.67}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2)\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2)\hat{a}_2 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sin(\Theta/2)\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\cos(\Theta/2)\hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.68}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.69}$$

と書ける．出力それぞれでの光の強度は，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_2^\dagger$ や $\hat{a}_1^\dagger$ と $\hat{a}_2$ が交換することを思い出せば,

$$\hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2\right)^\dagger \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2\right) \tag{0.0.70}$$

$$= T\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + R\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - \sqrt{T}\sqrt{R}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.71}$$

$$\hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2\right)^\dagger \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2\right) \tag{0.0.72}$$

$$= R\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + T\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \sqrt{T}\sqrt{R}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.73}$$

となる．**式** (0.0.71) と**式** (0.0.73) について，第 1 項と第 2 項はそれぞれモード 1 の入力光子数，モード 2 の入力光子数に対応する．これらの重ね合わせに依って位相が変化して，そのパラメータは T である．相互作用を表す項は第 3 項であるから，ビームスプリッタによる相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ を,

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.74}$$

と定義する．

　また，以下の演算子を定義する．

$$\hat{L}_0 \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.75}$$

$$\hat{L}_1 \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{0.0.76}$$

$$\hat{L}_2 \coloneqq \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{0.0.77}$$

$$\hat{L}_3 \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.78}$$

$\hat{L}_2$ と $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ の関係を調べよう．唐突だが,

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} \tag{0.0.79}$$

考える．**式** (0.0.79) の第 1 成分について，Baker-Campbell-Hausdorff の公式より,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] + \frac{1}{2!}\left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right] \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right] + \frac{1}{4!}\left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \left[-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right]\right]\right] + \cdots \quad (0.0.80) \\ &= \hat{a}_1 + (-\mathrm{i}\Theta)\left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right]\right] \end{aligned}$$

$$+\frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]\right]\right]+\frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]\right]\right]\right]+\cdots \tag{0.0.81}$$

となる．$\hat{L}_2$ と $\hat{a}_1$，$\hat{L}_2$ と $\hat{a}_2$ との交換関係についてそれぞれ，

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]&=\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2-\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right),\hat{a}_1\right] &(0.0.82)\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_2\left[\hat{a}_1^\dagger,\hat{a}_1\right]-\hat{a}_2^\dagger[\hat{a}_1,\hat{a}_1]\right) &(0.0.83)\\&=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\hat{a}_2 &(0.0.84)\\\left[\hat{L}_2,\hat{a}_2\right]&=\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2-\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right),\hat{a}_2\right] &(0.0.85)\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger[\hat{a}_2,\hat{a}_2]-\hat{a}_1\left[\hat{a}_2^\dagger,\hat{a}_2\right]\right) &(0.0.86)\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\hat{a}_1 &(0.0.87)\end{aligned}$$

となる．ただし，$\hat{a}_1$ と $\hat{a}_2$ が交換することを用いた．よって，

$$\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]=-\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1\hat{a}_2 \tag{0.0.88}$$

$$\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]\right]=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\hat{L}_2,\hat{a}_2\right]=-\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\hat{a}_1 \tag{0.0.89}$$

$$\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]\right]\right]=-\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]=\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\hat{a}_2 \tag{0.0.90}$$

$$\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]\right]\right]\right]=\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\left[\hat{L}_2,\hat{a}_2\right]=\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4\hat{a}_1 \tag{0.0.91}$$

であるから**式** (0.0.81) は，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}&=\hat{a}_1+(-\mathrm{i}\Theta)\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]+\frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]\right]\\&\quad+\frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]\right]\right]+\frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]\right]\right]\right]+\cdots &(0.0.92)\\&=\hat{a}_1+(-\mathrm{i}\Theta)(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1\hat{a}_2+\frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\hat{a}_1+\frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\hat{a}_2+\frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4\hat{a}_1+\cdots &(0.0.93)\\&=\hat{a}_1+\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1\hat{a}_2-\frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2\hat{a}_1-\frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3\hat{a}_2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4\hat{a}_1+\cdots &(0.0.94)\\&=\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4-\cdots\right]\hat{a}_1+\left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1-\frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3+\cdots\right]\hat{a}_2 &(0.0.95)\\&=\cos(\Theta/2)\hat{a}_1+\sin(\Theta/2)\hat{a}_2 &(0.0.96)\end{aligned}$$

となる．同様に，**式** (0.0.79) の第 2 成分について，

$$\left[\hat{L}_2,\hat{a}_2\right]=\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1\hat{a}_1 \tag{0.0.97}$$

$$\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_2\right]\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\hat{L}_2,\hat{a}_1\right]=-\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\hat{a}_2 \tag{0.0.98}$$

$$\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\left[\hat{L}_2,\hat{a}_2\right]\right]\right]=-\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\left[\hat{L}_2,\hat{a}_2\right]=-\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3\hat{a}_1 \tag{0.0.99}$$

$$\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right]\right] = -\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3 \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1\right] = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4 \hat{a}_2 \tag{0.0.100}$$

なる関係を用いると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_2 + (-\mathrm{i}\Theta)\left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right] \\
&\quad + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right] + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_2\right]\right]\right]\right] + \cdots && (0.0.101) \\
&= \hat{a}_2 + (-\mathrm{i}\Theta)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^1 \hat{a}_1 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2 \hat{a}_2 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^3}{3!}(-1)\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^3 \hat{a}_1 + \frac{(-\mathrm{i}\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^4 \hat{a}_2 + \cdots && (0.0.102) \\
&= \hat{a}_2 - \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 \hat{a}_1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \hat{a}_2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 \hat{a}_1 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 \hat{a}_2 + \cdots && (0.0.103) \\
&= -\left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \cdots\right]\hat{a}_1 + \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \cdots\right]\hat{a}_2 && (0.0.104) \\
&= -\sin(\Theta/2)\hat{a}_1 + \cos(\Theta/2)\hat{a}_2 && (0.0.105)
\end{aligned}$$

である．よって，**式** (0.0.79) は，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2}\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta\hat{L}_2} = \begin{pmatrix}\cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \tag{0.0.106}$$

と書ける．**式** (0.0.108) の解釈を考えよう．相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ の定義は，

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{0.0.107}$$

であった．$\Phi = \pi/2$ とすると，

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\mathrm{int}} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) && (0.0.108) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{i}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \mathrm{i}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) && (0.0.109) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) && (0.0.110) \\
&= \hat{L}_2 && (0.0.111)
\end{aligned}$$

と書ける．さらに，**式** (0.0.108) において，$\Theta = -t/\hbar$ とすれば，

$$\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}_{\mathrm{int}}}{\hbar}t\right)\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}_{\mathrm{int}}}{\hbar}t\right) = \begin{pmatrix}\cos(-t/2\hbar) & \sin(-t/2\hbar) \\ -\sin(-t/2\hbar) & \cos(-t/2\hbar)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \tag{0.0.112}$$

となる．左辺は，

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \tag{0.0.113}$$

なる消滅演算子のペアを時間発展演算子で挟んでいる格好である．となれば，右辺は Heisenberg 描像で表した消滅演算子であろう[2]．

[2]右辺に出てくる行列はビームスプリッタ行列でないことに注意する．確かに 2 つの入力電場間の位相ずれや，2 つの出力電場間の位相ずれがないと仮定したとき，ビームスプリッタ演算子は**式** (0.0.54) と書ける．しかし，$\Phi = \pi/2$ なる仮定のもと議論している．このような入力電場の位相ずれ Φ に対して，出力電場の位相ずれ Ψ をうまく定めれば**式** (0.0.54) の形を実現することができると思うかもしれないが，その試みははかなく終わる．そのような Ψ は，$\pi/2 + \Psi = 2n\pi$ かつ $\pi/2 - \Psi = 2m\pi$，$n, m \in \mathbb{Z}$ としなければいけないが，2 式を足して，$\pi = 2(n+m)\pi$ となり，そのような n，m は存在しない．要するに，**式** (0.0.108) の右辺の行列はビームスプリッタ行列ではないのだ．