

## 0.0.1 電磁場のハミルトニアン

前節での議論により、系のハミルトニアンは、

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} (\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger) \quad (0.0.1)$$

と書けるのであった。以下では、簡単のために、1方向成分・シングルモードの波を考える。

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \quad (0.0.2)$$

$$= \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (0.0.3)$$

と書ける。屈折率が  $n$  の物質中では<sup>1</sup>,

$$\hat{H}_{n,\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n} \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (0.0.4)$$

と書ける

## 0.0.2 ビームスプリッター行列

2入力2出力のビームスプリッターを考える。  $E_1$  と  $E_2$  の電場が入射して、  $E'_1$  と  $E'_2$  が出力されるとする。古典的に考えると、

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.5)$$

と書ける。このまま電場演算子を中心に議論を進めることはいささか冗長である。なぜならば、  $\hat{a}_1$  と  $\hat{a}_1^\dagger$  は複素共役の関係にあるのだから、片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ。よって式 (0.0.5) を量子化して、消滅演算子  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$  を用いて表せば、

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.6)$$

と書ける。2つの消滅演算子の交換関係は、

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_j^i \quad (0.0.7)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad (0.0.8)$$

である。  $B$  はビームスプリッター行列という。光子数が保存することから、

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' \quad (0.0.9)$$

$$= (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2)^\dagger (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2)^\dagger (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (0.0.10)$$

$$= (B_{11}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{12}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{22}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (0.0.11)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{12}^*B_{11} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (0.0.12)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})^*\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (0.0.13)$$

となり、

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22} = 0 \end{cases} \quad (0.0.14)$$

<sup>1</sup> 謎である。屈折率により波動は変化しないはずである。

$$\Leftrightarrow B^\dagger B = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.0.15)$$

となればよい。つまり、ビームスプリッタ行列  $B$  がユニタリ行列であれば良い。??での議論によりビームスプリッタ演算子は、

$$B = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (0.0.16)$$

と書ける。ところが、

$$\begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \quad (0.0.17)$$

は2つの入力電場  $E_1$ ,  $E_2$  に位相差をかけること、

$$\begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (0.0.18)$$

は2つの出力電場  $E'_1$ ,  $E'_2$  に位相差をかけること、

$$e^{i\Lambda/2} \quad (0.0.19)$$

は2つの出力電場  $E'_1$ ,  $E'_2$  に共通するグローバル位相を書けることに対応するから、実験のセットアップとして、

$$\Lambda = \Psi = \Phi = 0 \quad (0.0.20)$$

とすることができる。また、透過率  $T$  と反射率  $R$  を、

$$\sqrt{T} := \cos(\Theta/2) \quad (0.0.21)$$

$$\sqrt{R} := -\sin(\Theta/2) \quad (0.0.22)$$

と定義すれば、ビームスプリッタ行列  $B$  は、

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (0.0.23)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \quad (0.0.24)$$

と書ける。

$$T + R = 1 \quad (0.0.25)$$

が成立することに注意する。

### 0.0.3 ビームスプリッタハミルトニアン

ビームスプリッタ行列を再び考えよう。今度は入力電場と出力電場の位相差が存在することにして、 $\Lambda = 0$  のみ課しておく。するとビームスプリッタ行列は、

$$B = \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (0.0.26)$$

と書ける。ビームスプリッタ行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.27)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \hat{a}_1 + e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \hat{a}_2 \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.28)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2 \\ e^{-i(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.29)$$

と書ける．出力それぞれの光の強度は， $\hat{a}_1$  と  $\hat{a}_2^\dagger$  や  $\hat{a}_1^\dagger$  と  $\hat{a}_2$  が交換することを思い出せば，

$$\hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' = \left( e^{i(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2 \right)^\dagger \left( e^{i(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_2 \right) \quad (0.0.30)$$

$$= T\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + R\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \sqrt{T}\sqrt{R} \left( e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.31)$$

$$\hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' = \left( e^{-i(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2 \right)^\dagger \left( e^{-i(\Psi-\Phi)/2}\sqrt{R}\hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2}\sqrt{T}\hat{a}_2 \right) \quad (0.0.32)$$

$$= R\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + T\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \sqrt{T}\sqrt{R} \left( e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.33)$$

となる．式 (0.0.31) と式 (0.0.33) について，第 1 項と第 2 項はそれぞれモード 1 の入力光子数，モード 2 の入力光子数に対応する．これらの重ね合わせに依って位相が変化して，そのパラメータは  $T$  である．相互作用を表す項は第 3 項であるから，ビームスプリッタによる相互作用ハミルトニアン  $\hat{H}_{\text{int}}$  を，

$$\hat{H}_{\text{int}} := \frac{1}{2} \left( e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.34)$$

と定義する．

また，以下の演算子を定義する．

$$\hat{L}_0 := \frac{1}{2} \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.35)$$

$$\hat{L}_1 := \frac{1}{2} \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (0.0.36)$$

$$\hat{L}_2 := \frac{1}{2i} \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (0.0.37)$$

$$\hat{L}_3 := \frac{1}{2} \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.38)$$

$\hat{L}_2$  と  $\hat{H}_{\text{int}}$  の関係を調べよう．唐突だが，

$$e^{-i\Theta\hat{L}_2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} e^{i\Theta\hat{L}_2} \quad (0.0.39)$$

考える．式 (0.0.39) の第 1 成分について，Baker-Campbell-Hausdorff の公式より，

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta\hat{L}_2} \hat{a}_1 e^{i\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] + \frac{1}{2!} \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] + \frac{1}{4!} \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \left[ -i\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] \right] + \cdots \end{aligned} \quad (0.0.40)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{a}_1 + (-i\Theta) \left[ \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!} \left[ \hat{L}_2, \left[ \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \\ &\quad + \frac{(-i\Theta)^3}{3!} \left[ \hat{L}_2, \left[ \hat{L}_2, \left[ \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!} \left[ \hat{L}_2, \left[ \hat{L}_2, \left[ \hat{L}_2, \left[ \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] \right] + \cdots \end{aligned} \quad (0.0.41)$$

となる． $\hat{L}_2$  と  $\hat{a}_1$ ， $\hat{L}_2$  と  $\hat{a}_2$  との交換関係についてそれぞれ，

$$\left[ \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] = \left[ \frac{1}{2i} \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right), \hat{a}_1 \right] \quad (0.0.42)$$

$$= \frac{1}{2i} \left( \hat{a}_2 \left[ \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1 \right] - \hat{a}_2^\dagger \left[ \hat{a}_1, \hat{a}_1 \right] \right) \quad (0.0.43)$$

$$= -\frac{1}{2i} \hat{a}_2 \quad (0.0.44)$$

$$\left[ \hat{L}_2, \hat{a}_2 \right] = \left[ \frac{1}{2i} \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right), \hat{a}_2 \right] \quad (0.0.45)$$

$$= \frac{1}{2i} \left( \hat{a}_1^\dagger [\hat{a}_2, \hat{a}_2] - \hat{a}_1 [\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2] \right) \quad (0.0.46)$$

$$= \frac{1}{2i} \hat{a}_1 \quad (0.0.47)$$

となる．ただし， $\hat{a}_1$  と  $\hat{a}_2$  が交換することを用いた． よって，

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_1] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_2 \quad (0.0.48)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]] = -\frac{1}{2i} [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_1 \quad (0.0.49)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_2 \quad (0.0.50)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_1 \quad (0.0.51)$$

であるから式 (0.0.41) は，

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta \hat{L}_2} \hat{a}_1 e^{i\Theta \hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + (-i\Theta) [\hat{L}_2, \hat{a}_1] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]] \\ &\quad + \frac{(-i\Theta)^3}{3!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] + \cdots \end{aligned} \quad (0.0.52)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{a}_1 + (-i\Theta)(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_1 + \cdots \end{aligned} \quad (0.0.53)$$

$$= \hat{a}_1 + \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 \hat{a}_2 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \hat{a}_1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 \hat{a}_2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 \hat{a}_1 + \cdots \quad (0.0.54)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \cdots\right] \hat{a}_1 + \left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \cdots\right] \hat{a}_2 \quad (0.0.55)$$

$$= \cos(\Theta/2) \hat{a}_1 + \sin(\Theta/2) \hat{a}_2 \quad (0.0.56)$$

となる．同様に，式 (0.0.39) の第 2 成分について，

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_1 \quad (0.0.57)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]] = \frac{1}{2i} [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_2 \quad (0.0.58)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_1 \quad (0.0.59)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]]] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^3 [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_2 \quad (0.0.60)$$

なる関係を用いると，

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta \hat{L}_2} \hat{a}_2 e^{i\Theta \hat{L}_2} &= \hat{a}_2 + (-i\Theta) [\hat{L}_2, \hat{a}_2] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]] \\ &\quad + \frac{(-i\Theta)^3}{3!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]]] + \cdots \end{aligned} \quad (0.0.61)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{a}_2 + (-i\Theta)\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_2 + \cdots \end{aligned} \quad (0.0.62)$$

$$= \hat{a}_2 - \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 \hat{a}_1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \hat{a}_2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 \hat{a}_1 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 \hat{a}_2 + \cdots \quad (0.0.63)$$

$$= - \left[ \left( \frac{\Theta}{2} \right)^1 - \frac{1}{3!} \left( \frac{\Theta}{2} \right)^3 + \cdots \right] \hat{a}_1 + \left[ 1 - \frac{1}{2!} \left( \frac{\Theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{\Theta}{2} \right)^4 - \cdots \right] \hat{a}_2 \quad (0.0.64)$$

$$= -\sin(\Theta/2)\hat{a}_1 + \cos(\Theta/2)\hat{a}_2 \quad (0.0.65)$$

である。よって、式 (0.0.39) は、

$$e^{-i\Theta\hat{L}_2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} e^{i\Theta\hat{L}_2} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.66)$$

と書ける。式 (0.0.66) の解釈を考えよう。相互作用ハミルトニアン  $\hat{H}_{\text{int}}$  の定義は、

$$\hat{H}_{\text{int}} := \frac{1}{2} \left( e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.67)$$

であった。  $\Phi = \pi/2$  とすると、

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left( e^{i\pi/2} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\pi/2} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.68)$$

$$= \frac{1}{2} \left( i \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger - i \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.69)$$

$$= \frac{1}{2i} \left( \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (0.0.70)$$

$$= \hat{L}_2 \quad (0.0.71)$$

と書ける。さらに、式 (0.0.66) において、  $\Theta = -t/\hbar$  とすれば、

$$\exp \left( -i \frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar} t \right) \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \exp \left( i \frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar} t \right) = \begin{pmatrix} \cos(-t/2\hbar) & \sin(-t/2\hbar) \\ -\sin(-t/2\hbar) & \cos(-t/2\hbar) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.72)$$

となる。左辺は、

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.73)$$

なる消滅演算子のペアを時間発展演算子で挟んでいる格好である。となれば、右辺は Heisenberg 描像で表した消滅演算子であろう<sup>2</sup>。

<sup>2</sup>右辺に出てくる行列はビームスプリッタ行列でないことに注意する。確かに2つの入力電場間の位相ずれや、2つの出力電場間の位相ずれがないと仮定したとき、ビームスプリッタ演算子は式 (0.0.24) と書ける。しかし、  $\Phi = \pi/2$  なる仮定のもと議論している。このような入力電場の位相ずれ  $\Phi$  に対して、出力電場の位相ずれ  $\Psi$  をうまく定めれば式 (0.0.24) の形を実現することができると思うかもしれないが、その試みははかなく終わる。そのような  $\Psi$  は、  $\pi/2 + \Psi = 2n\pi$  かつ  $\pi/2 - \Psi = 2m\pi$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$  としなければいけないが、2式を足して、  $\pi = 2(n+m)\pi$  となり、そのような  $n, m$  は存在しない。要するに、式 (0.0.66) の右辺の行列はビームスプリッタ行列ではないのだ。なお、テキストでの (1.106) は何を言いたいのかわからない。