

0.0.1 電磁場のハミルトニアン

前節での議論により、系のハミルトニアンは、

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right) \quad (0.0.1)$$

と書けるのであった。以下では、簡単のために、1方向成分・シングルモードの波を考える。

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \quad (0.0.2)$$

$$= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (0.0.3)$$

と書ける。屈折率が n の物質中では¹、

$$\hat{H}_{n,\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (0.0.4)$$

と書ける。

0.0.2 ユニタリ行列の分解

ユニタリ行列は一般に、

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (0.0.5)$$

と分解できる。具体的に U を計算すると、

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (0.0.6)$$

$$= e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\Psi/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\Psi/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\Psi/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (0.0.7)$$

$$= e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (0.0.8)$$

であり、 $\alpha = \Psi + \Phi$ 、 $\beta = \Psi - \Phi$ とすると、

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (0.0.9)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Lambda+\alpha)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Lambda+\beta)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{i(\Lambda-\beta)/2} \sin(\Theta/2) & e^{i(\Lambda-\alpha)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (0.0.10)$$

と書ける。

Proof. 任意 2×2 の行列は、実数 r_{ij} と θ_{ij} を用いて、

$$M = \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (0.0.11)$$

と書けて、

$$M^\dagger M = \begin{pmatrix} r_{11}e^{-i\theta_{11}} & r_{21}e^{-i\theta_{21}} \\ r_{12}e^{-i\theta_{12}} & r_{22}e^{-i\theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (0.0.12)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{21}^2 & r_{11}r_{12}e^{-i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{-i(\theta_{21}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{12}e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} & r_{12}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (0.0.13)$$

¹ 謎である。屈折率により波動は変化しないはずである。

$$MM^\dagger = \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}e^{-i\theta_{11}} & r_{21}e^{-i\theta_{21}} \\ r_{12}e^{-i\theta_{12}} & r_{22}e^{-i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (0.0.14)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{12}^2 & r_{11}r_{21}e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{21}e^{-i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{12}r_{22}e^{-i(\theta_{12}-\theta_{22})} & r_{21}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (0.0.15)$$

となる． M がユニタリ行列であることの必要十分条件は，

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \quad (0.0.16)$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \quad (0.0.17)$$

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \quad (0.0.18)$$

$$r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \quad (0.0.19)$$

$$r_{11}r_{12}e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \quad (0.0.20)$$

$$r_{11}r_{21}e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \quad (0.0.21)$$

である． $M^\dagger M$ や MM^\dagger の非対角成分は複素共役になっていることに注意する．式 (0.0.16) から式 (0.0.19) を満たすような r_{ij} の組は，実数 Θ を用いて，

$$r_{11} = r_{22} = \cos(\Theta/2) \quad (0.0.22)$$

$$r_{12} = -r_{21} = \sin(\Theta/2) \quad (0.0.23)$$

なるものである．また，これらの r_{ij} の値を式 (0.0.20) と式 (0.0.21) に代入すると，

$$e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} - e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \quad (0.0.24)$$

$$-e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \quad (0.0.25)$$

が成立する．

$$\Phi = \theta_{11} - \theta_{12} = \theta_{21} - \theta_{22} \quad (0.0.26)$$

$$\Psi = \theta_{11} - \theta_{21} = \theta_{12} - \theta_{22} \quad (0.0.27)$$

$$(0.0.28)$$

とすると，

$$\theta_{11} = \frac{\Lambda + \Psi + \Phi}{2} \quad (0.0.29)$$

$$\theta_{12} = \frac{\Lambda + \Psi - \Phi}{2} \quad (0.0.30)$$

$$\theta_{21} = \frac{\Lambda - \Psi + \Phi}{2} \quad (0.0.31)$$

$$\theta_{22} = \frac{\Lambda - \Psi - \Phi}{2} \quad (0.0.32)$$

となり，式 (0.0.8) を得る．つまり，任意のユニタリ行列は式 (0.0.8) で書けることが示された． \square

実際に式 (0.0.8) がユニタリ行列であることを確かめる．

$$U^\dagger U = e^{-i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & -e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.0.33)$$

$$UU^\dagger = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} e^{-i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & -e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.0.34)$$

となり， U はユニタリ行列であることが分かる．

0.0.3 ビームスプリッター行列

2入力2出力のビームスプリッターを考える． E_1 と E_2 の電場が入射して， E'_1 と E'_2 が出力されるとする．古典的に考えると，

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.35)$$

と書ける．このまま電場演算子を中心に議論を進めることはいささか冗長である．なぜならば， \hat{a}_1 と \hat{a}_1^\dagger は複素共役の関係にあるのだから，片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ．よって式 (0.0.35) を量子化して，消滅演算子 \hat{a}_1 ， \hat{a}_2 を用いて表せば，

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.36)$$

と書ける．2つの消滅演算子の交換関係は，

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_j^i \quad (0.0.37)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad (0.0.38)$$

である． B はビームスプリッター行列という．光子数が保存することから，

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' \quad (0.0.39)$$

$$= (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2)^\dagger (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2)^\dagger (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (0.0.40)$$

$$= (B_{11}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{12}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{22}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (0.0.41)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{12}^*B_{11} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (0.0.42)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})^*\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (0.0.43)$$

となり，

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22} = 0 \end{cases} \quad (0.0.44)$$

$$\Leftrightarrow B^\dagger B = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.0.45)$$

となればよい．つまり，ビームスプリッター行列 B がユニタリ行列であれば良い．0.0.2 での議論において，

$$\begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \quad (0.0.46)$$

は2つの入力電場 E_1 ， E_2 に位相差をかけること，

$$\begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (0.0.47)$$

は2つの出力電場 E'_1 ， E'_2 に位相差をかけること，

$$e^{i\Lambda/2} \quad (0.0.48)$$

は2つの出力電場 E'_1 ， E'_2 に共通するグローバル位相を書けることに対応するから，実験のセットアップとして，

$$\Lambda = \Psi = \Phi = 0 \quad (0.0.49)$$

とすることができる．また，透過率 T と反射率 R を，

$$\sqrt{T} := \cos(\Theta/2) \quad (0.0.50)$$

$$\sqrt{R} := -\sin(\Theta/2) \quad (0.0.51)$$

と定義すれば、ビームスプリッタ行列 B は、

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (0.0.52)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \quad (0.0.53)$$

と書ける．

$$T + R = 1 \quad (0.0.54)$$

が成立することに注意する．

0.0.4 Baker-Campbell-Hausdorff の公式

次小節以降で頻出する Baker-Campbell-Hausdorff の公式を示しておこう．Baker-Campbell-Hausdorff の公式は、

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = B + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots \quad (0.0.55)$$

なる式である．

Proof. 函数 $f(t)$ を、

$$f(t) := e^{t\hat{A}} \hat{B} e^{-t\hat{A}} \quad (0.0.56)$$

と定義する． $f(t)$ を $t=0$ の周りで展開することを考えると、

$$f(t) = f(0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{t=0} t^2 + \cdots \quad (0.0.57)$$

と書ける．さて、

$$\frac{df}{dx} = \hat{A} e^{t\hat{A}} \hat{B} e^{-t\hat{A}} - e^{t\hat{A}} \hat{B} \hat{A} e^{-t\hat{A}} \quad (0.0.58)$$

$$= e^{t\hat{A}} \hat{A} \hat{B} e^{-t\hat{A}} - e^{t\hat{A}} \hat{B} \hat{A} e^{-t\hat{A}} \quad (0.0.59)$$

$$= e^{t\hat{A}} (\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}) e^{-t\hat{A}} \quad (0.0.60)$$

$$= e^{t\hat{A}} [\hat{A}, \hat{B}] e^{-t\hat{A}} \quad (0.0.61)$$

である．よって、

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{t=0} = [\hat{A}, \hat{B}] \quad (0.0.62)$$

である．2 階以上の微分では、式 (0.0.61) において、 $\hat{B} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}]$ とすればよい．よって、式 (0.0.57) に式 (0.0.61) を代入すると、

$$f(t) = B + [\hat{A}, \hat{B}] t + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] t^2 + \cdots \quad (0.0.63)$$

である． $t=1$ とすれば、

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{\hat{A}} = B + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots \quad (0.0.64)$$

となる． □

0.0.5 ビームスプリッタハミルトニアン

ビームスプリッタ行列を再び考えよう．今度は入力電場と出力電場の位相差が存在することにして， $\Lambda = 0$ のみ課しておく．するとビームスプリッタ行列は，

$$B = \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (0.0.65)$$

と書ける．ビームスプリッタ行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.66)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \hat{a}_1 + e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \hat{a}_2 \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.67)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_2 \\ e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.68)$$

と書ける．出力それぞれでの光の強度は， \hat{a}_1 と \hat{a}_2 や \hat{a}_1^\dagger と \hat{a}_2^\dagger が交換することを思い出せば，

$$\hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' = \left(e^{i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_2 \right)^\dagger \left(e^{i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.69)$$

$$= T \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + R \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \sqrt{T} \sqrt{R} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.70)$$

$$\hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' = \left(e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_2 \right)^\dagger \left(e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.71)$$

$$= R \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + T \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \sqrt{T} \sqrt{R} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.72)$$

となる．式 (0.0.70) と式 (0.0.72) について，第 1 項と第 2 項はそれぞれモード 1 の入力光子数，モード 2 の入力光子数に対応する．これらの重ね合わせに依って位相が変化して，そのパラメータは T である．相互作用を表す項は第 3 項であるから，ビームスプリッタによる相互作用ハミルトニアン \hat{H}_{int} を，

$$\hat{H}_{\text{int}} := \frac{1}{2} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.73)$$

と定義する．

また，以下の演算子を定義する．

$$\hat{L}_0 := \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.74)$$

$$\hat{L}_1 := \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (0.0.75)$$

$$\hat{L}_2 := \frac{1}{2i} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (0.0.76)$$

$$\hat{L}_3 := \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (0.0.77)$$

\hat{L}_2 と \hat{H}_{int} の関係を調べよう．唐突だが，

$$e^{-i\Theta \hat{L}_2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} e^{i\Theta \hat{L}_2} \quad (0.0.78)$$

考える．式 (0.0.78) の第 1 成分について，Baker-Campbell-Hausdorff の公式より，

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta \hat{L}_2} \hat{a}_1 e^{i\Theta \hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + \left[-i\Theta \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] + \frac{1}{2!} \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] + \frac{1}{4!} \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \left[-i\Theta \hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \right] \right] + \cdots \\ &= \hat{a}_1 + (-i\Theta) \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!} \left[\hat{L}_2, \left[\hat{L}_2, \hat{a}_1 \right] \right] \end{aligned} \quad (0.0.79)$$

$$+ \frac{(-i\Theta)^3}{3!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] + \dots \quad (0.0.80)$$

となる。 \hat{L}_2 と \hat{a}_1 , \hat{L}_2 と \hat{a}_2 との交換関係についてそれぞれ,

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_1] = \left[\frac{1}{2i} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger), \hat{a}_1 \right] \quad (0.0.81)$$

$$= \frac{1}{2i} (\hat{a}_2 [\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1] - \hat{a}_2^\dagger [\hat{a}_1, \hat{a}_1]) \quad (0.0.82)$$

$$= -\frac{1}{2i} \hat{a}_2 \quad (0.0.83)$$

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left[\frac{1}{2i} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger), \hat{a}_2 \right] \quad (0.0.84)$$

$$= \frac{1}{2i} (\hat{a}_1^\dagger [\hat{a}_2, \hat{a}_2] - \hat{a}_1 [\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2]) \quad (0.0.85)$$

$$= \frac{1}{2i} \hat{a}_1 \quad (0.0.86)$$

となる。ただし, \hat{a}_1 と \hat{a}_2 が交換することを用いた。 よって,

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_1] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_2 \quad (0.0.87)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]] = -\frac{1}{2i} [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_1 \quad (0.0.88)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_2 \quad (0.0.89)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_1 \quad (0.0.90)$$

$$\vdots \quad (0.0.91)$$

であるから式 (0.0.80) は,

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta \hat{L}_2} \hat{a}_1 e^{i\Theta \hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + (-i\Theta) [\hat{L}_2, \hat{a}_1] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]] \\ &+ \frac{(-i\Theta)^3}{3!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] + \dots \end{aligned} \quad (0.0.92)$$

$$= \hat{a}_1 + (-i\Theta)(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_1 + \dots \quad (0.0.93)$$

$$= \hat{a}_1 + \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 \hat{a}_2 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \hat{a}_1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 \hat{a}_2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 \hat{a}_1 + \dots \quad (0.0.94)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \dots \right] \hat{a}_1 + \left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \dots \right] \hat{a}_2 \quad (0.0.95)$$

$$= \cos(\Theta/2) \hat{a}_1 + \sin(\Theta/2) \hat{a}_2 \quad (0.0.96)$$

となる。同様に, 式 (0.0.78) の第 2 成分について,

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_1 \quad (0.0.97)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]] = \frac{1}{2i} [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_2 \quad (0.0.98)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_1 \quad (0.0.99)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]]] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^3 [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_2 \quad (0.0.100)$$

$$\vdots \quad (0.0.101)$$

なる関係を用いると,

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_2e^{i\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_2 + (-i\Theta)[\hat{L}_2, \hat{a}_2] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]] \\ &\quad + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]]] + \cdots \end{aligned} \quad (0.0.102)$$

$$= \hat{a}_2 + (-i\Theta)\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_2 + \cdots \quad (0.0.103)$$

$$= \hat{a}_2 - \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 \hat{a}_1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \hat{a}_2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 \hat{a}_1 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 \hat{a}_2 + \cdots \quad (0.0.104)$$

$$= -\left[\left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \cdots\right]\hat{a}_1 + \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 - \cdots\right]\hat{a}_2 \quad (0.0.105)$$

$$= -\sin(\Theta/2)\hat{a}_1 + \cos(\Theta/2)\hat{a}_2 \quad (0.0.106)$$

である. よって, 式 (0.0.78) は,

$$e^{-i\Theta\hat{L}_2}\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix}e^{i\Theta\hat{L}_2} = \begin{pmatrix}\cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \quad (0.0.107)$$

と書ける. 式 (0.0.107) の解釈を考えよう. 相互作用ハミルトニアン \hat{H}_{int} の定義は,

$$\hat{H}_{\text{int}} := \frac{1}{2}\left(e^{i\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \quad (0.0.108)$$

であった. $\Phi = \pi/2$ とすると,

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2}\left(e^{i\pi/2}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + e^{-i\pi/2}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \quad (0.0.109)$$

$$= \frac{1}{2}\left(i\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - i\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \quad (0.0.110)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \quad (0.0.111)$$

$$= \hat{L}_2 \quad (0.0.112)$$

と書ける. さらに, 式 (0.0.107) において, $\Theta = -t/\hbar$ とすれば,

$$\exp\left(-i\frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar}t\right)\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix}\exp\left(i\frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar}t\right) = \begin{pmatrix}\cos(-t/2\hbar) & \sin(-t/2\hbar) \\ -\sin(-t/2\hbar) & \cos(-t/2\hbar)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \quad (0.0.113)$$

となる. 左辺は,

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2\end{pmatrix} \quad (0.0.114)$$

なる消滅演算子のペアを時間発展演算子で挟んでいる格好である. となれば, 右辺は Heisenberg 描像で表した消滅演算子であろう².

²右辺に出てくる行列はビームスプリッタ行列でないことに注意する. 確かに 2 つの入力電場間の位相ずれや, 2 つの出力電場間の位相ずれがないと仮定したとき, ビームスプリッタ演算子は式 (0.0.53) と書ける. しかし, $\Phi = \pi/2$ なる仮定のもと議論している. このような入力電場の位相ずれ Φ に対して, 出力電場の位相ずれ Ψ をうまく定めれば式 (0.0.53) の形を実現することができると思うかもしれないが, その試みははかなく終わる. そのような Ψ は, $\pi/2 + \Psi = 2n\pi$ かつ $\pi/2 - \Psi = 2m\pi$, $n, m \in \mathbb{Z}$ としなければいけないが, 2 式を足して, $\pi = 2(n+m)\pi$ となり, そのような n, m は存在しない. 要するに, 式 (0.0.107) の右辺の行列はビームスプリッタ行列ではないのだ.