

量子光学・量子情報科学ノート

Haruki Aoki and Hiroki Fukuhara

更新日: January 10, 2025

Contents

1	量子光学	2
1.1	Schödinger 描像と Heisenberg 描像	2
1.2	調和振動子	2
1.2.1	ハミルトニアン	3
1.2.2	Hermite 多項式	5
1.2.3	波動函数を用いた Schrödinger 方程式	5
1.2.4	Schrodinger の解法	8
1.3	電磁場の量子化	10
1.4	ビームスプリッタ	10
1.4.1	電磁場のハミルトニアン	10
1.4.2	ユニタリ行列の分解	11
1.4.3	ビームスプリッタ行列	12
1.4.4	Baker-Campbell-Hausdorff の公式 1	14
1.4.5	Baker-Campbell-Hausdorff の公式 2	14
1.4.6	ビームスプリッタハミルトニアン	17
1.5	コヒーレント状態	20
1.5.1	物理量の平均値・分散	20
1.5.2	個数状態での展開	21
1.5.3	調和振動子ハミルトニアンでの時間発展	22
1.5.4	レーザのハミルトニアン	23

Chapter 1

量子光学

量子力学は物理量 \hat{A} の期待値 $\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ を検討する学問である。本章は以下のような構成である。まず, Schödinger 描像と Heisenberg 描像や電場の量子化について説明する。また, 量子もつれにおいて重要なビームスプリッタを紹介する。次に, 量子光学において重要なコヒーレント状態とスクイーズド状態について議論する。続いて密度演算子を定義したあと, 今まで議論した状態を具体的に測定するための方法として, バランス型ホモダイン測定を紹介する。

1.1 Schödinger 描像と Heisenberg 描像

WIP

1.2 調和振動子

本節では, 1 次元調和振動子モデルでハミルトニアンが書けるときの波動関数の表示を求める。波動関数とは, Schrödinger 方程式,

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (1.2.1)$$

を満たす $|\psi\rangle$ について,

$$\psi(x) := \langle x | \psi \rangle \quad (1.2.2)$$

となるように (一般化) 座標 x へ射影したものである。式 (1.2.1) に対して $\langle x |$ を左から書ければ,

$$\langle x | \hat{H} | \psi \rangle = E \psi(x) \quad (1.2.3)$$

となるのだから, 左辺を計算して $\psi(x)$ に演算子がかかる形に変形すれば, 波動関数を求めることができる。本ノートにおいて, $\hat{\cdot}$ を演算子として, その固有値を \cdot , 固有ベクトル (固有函数) を $|\cdot\rangle$ と書く。

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle \quad (1.2.4)$$

$$\hat{p} |x\rangle = p |x\rangle \quad (1.2.5)$$

である。また, \hat{x} や \hat{p} は物理量であり, Hermite 演算子だからその固有ベクトルは,

$$\langle x' | x \rangle = \delta(x' - x) \quad (1.2.6)$$

$$\langle p' | p \rangle = \delta(p' - p) \quad (1.2.7)$$

と規格化してあり,

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \hat{1} \quad (1.2.8)$$

$$\int dp |p\rangle \langle p| = \hat{1} \quad (1.2.9)$$

が成立する。なお, 特に断らない限り積分範囲は $-\infty$ から ∞ である。

1.2.1 ハミルトニアン

古典的な1次元調和振動子のハミルトニアン H は,

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2m}p^2 \quad (1.2.10)$$

である。ただし、質量を m 、固有角周波数を ω 、座標を x 、運動量を p とした。 x と p は正準共役な変数の組であるから、 $x \rightarrow \hat{x}$ 、 $p \rightarrow \hat{p}$ とし、

$$\hat{H} = \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}^2 \quad (1.2.11)$$

$$= \hbar\omega \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega} \hat{p}^2 \right) \quad (1.2.12)$$

$$= \hbar\omega \left[\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} [\hat{x}, \hat{p}] \right] \quad (1.2.13)$$

$$= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.2.14)$$

となる。ただし、

$$\hat{a} := \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \quad (1.2.15)$$

$$\hat{a}^\dagger := \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \quad (1.2.16)$$

と定義した。 \hat{a} と \hat{a}^\dagger の交換関係を調べる。

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) - \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \quad (1.2.17)$$

$$= i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}) - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \quad (1.2.18)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] \quad (1.2.19)$$

$$= 1 \quad (1.2.20)$$

となる。

個数演算子 \hat{n} を、

$$\hat{n} := \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.2.21)$$

と定義する。個数演算子 \hat{n} は、

$$\hat{n}^\dagger = (\hat{a}^\dagger \hat{a})^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.2.22)$$

であるから、Hermite 演算子であり、実固有値とそれに属する固有ベクトルが存在する。

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (1.2.23)$$

を考える。まず、式 (1.2.23) に左から $\langle n|$ をかけると、

$$\langle n|\hat{n}|n\rangle = n \langle n|n\rangle \quad (1.2.24)$$

$$\iff \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n \quad (1.2.25)$$

$$\iff |\hat{a}|n\rangle|^2 = n \quad (1.2.26)$$

である．Hilbert 空間は内積空間であるから，

$$|\hat{a}|n\rangle|^2 \geq 0 \quad (1.2.27)$$

であるので， $n \geq 0$ となる．

次に，式 (1.2.23) に左から \hat{a}^\dagger をかける．

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{a}^\dagger n |n\rangle \quad (1.2.28)$$

$$\iff \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1) |n\rangle = n \hat{a}^\dagger |n\rangle \quad (1.2.29)$$

$$\iff \hat{n}(\hat{a}^\dagger |n\rangle) = (n+1)(\hat{a}^\dagger |n\rangle) \quad (1.2.30)$$

$$(1.2.31)$$

となる．よって， $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ は固有値が $n+1$ の \hat{n} の固有ベクトルであるから，

$$|n+1\rangle := \frac{1}{C_{n,+}} \hat{a}^\dagger |n\rangle \quad (1.2.32)$$

$$(1.2.33)$$

と定義する． $C_{n,+}$ は規格化定数である．

$$1 = \langle n+1|n+1\rangle = \frac{1}{|C_{n,+}|^2} \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle \quad (1.2.34)$$

$$= \frac{1}{|C_{n,+}|^2} \langle n|(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)|n\rangle \quad (1.2.35)$$

$$= \frac{n+1}{|C_{n,+}|^2} \quad (1.2.36)$$

より，

$$C_{n,+} = \sqrt{n+1} \quad (1.2.37)$$

としても矛盾しない．よって，

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (1.2.38)$$

となる．

最後に，式 (1.2.23) に左から \hat{a} をかける．

$$\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{a} n |n\rangle \quad (1.2.39)$$

$$\iff (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \hat{a} |n\rangle = n \hat{a} |n\rangle \quad (1.2.40)$$

$$\iff \hat{n}(\hat{a} |n\rangle) = (n-1)(\hat{a} |n\rangle) \quad (1.2.41)$$

となる．よって， $\hat{a} |n\rangle$ は固有値が $n-1$ の \hat{n} の固有ベクトルであるから，

$$|n-1\rangle := \frac{1}{C_{n,-}} \hat{a} |n\rangle \quad (1.2.42)$$

$$(1.2.43)$$

と定義する． $C_{n,-}$ は規格化定数である．

$$1 = \langle n-1|n-1\rangle = \frac{1}{|C_{n,-}|^2} \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle \quad (1.2.44)$$

$$= \frac{n}{|C_{n,-}|^2} \quad (1.2.45)$$

より，

$$C_{n,-} = \sqrt{n} \quad (1.2.46)$$

としても矛盾しない。よって、

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (1.2.47)$$

となる。式 (1.2.47) より、 n は非負整数であるべきである。もし、 $n = 0.5$ であるなら、式 (1.2.47) は、

$$\hat{a}|0.5\rangle = \sqrt{0.5}|-0.5\rangle \quad (1.2.48)$$

となり、 $n \geq 0$ を満たさない。一方、 n が非負整数であるなら、 $n = 0$ のとき、

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (1.2.49)$$

となり、 $n \geq 0$ が満たされる。

1.2.2 Hermite 多項式

以降の議論で用いるために、特殊関数の1つである Hermite 多項式を紹介しておこう。Hermite 多項式は Sturm-Liouville 演算子のうちの1つの演算子の固有関数であり、実数全体で定義された実数関数 $H_n(s)$ に対して、

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s\frac{d}{ds} + 2n\right)H_n(s) = 0 \quad (1.2.50)$$

なる $H_n(s)$ である。なお、 n は非負整数である。なお、 $H_n(s)$ は適当な回数だけ微分可能であるとする。また、 $H_n(s)$ が張る空間 V の内積は、 $f, g \in V$ として、

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s)g(s)e^{-s^2} \quad (1.2.51)$$

である¹。Hermite 多項式は、適切に境界条件が設定された (Hermite 性のある) Sturm-Liouville 演算子の固有関数であり、そのような演算子の固有関数は直交基底となり、完全系を成すことが知られていて、実際、

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(s)H_n(s)e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}2^n n! \delta_n^m \quad (1.2.52)$$

のように直交する。

1.2.3 波動関数を用いた Schrödinger 方程式

以下では、波動関数を用いた Schrödinger 方程式である、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.2.53)$$

を得る。

式 (1.2.3) に式 (1.2.11) で示した \hat{H} の表式を代入して、

$$\frac{1}{2}m\omega^2 \langle x|\hat{x}^2|\psi\rangle + \frac{1}{2m} \langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = E\psi(x) \quad (1.2.54)$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) + \frac{1}{2m} \langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = E\psi(x) \quad (1.2.55)$$

となる。 $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ は以下のレシピで計算できる。

¹Sturm-Liouville 演算子の形、

$$\frac{1}{\rho(x)} \left[\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\} + q(x) \right]$$

と、Sturm-Liouville 演算子の固有関数が張る空間の内積が、

$$\int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x) dx$$

と書けることを思い出せば、内積に e^{-s^2} なる重み関数が入ることは自然なことである。

$$1. f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{d}{dx} f(x) \delta(x)$$

$$2. \langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)$$

$$3. \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \exp\left(i \frac{xp}{\hbar}\right)$$

$$4. \langle x | \hat{p}^2 | \psi \rangle \text{ の計算}$$

$\delta(x)$ はデルタ関数であり、積分して初めて意味を持つ関数である。

$$1. f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{d}{dx} f(x) \delta(x)$$

左辺を積分して右辺になればよい。ただし、 $f(x)$ は、

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad (1.2.56)$$

であるとする。実際に、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = [f(x) \delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) \delta(x) \quad (1.2.57)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) \delta(x) \quad (1.2.58)$$

であるから、

$$f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{d}{dx} f(x) \delta(x) \quad (1.2.59)$$

である。

$$2. \langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)$$

$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle$ を 2 種類の方法で計算する。まず、愚直に計算すると、

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle = \langle x | \hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x} | x' \rangle \quad (1.2.60)$$

$$= x \langle x | \hat{p} | x' \rangle - x' \langle x | \hat{p} | x' \rangle \quad (1.2.61)$$

$$= (x - x') \langle x | \hat{p} | x' \rangle \quad (1.2.62)$$

である。一方、 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いれば、

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle = i\hbar \langle x | x' \rangle \quad (1.2.63)$$

$$= i\hbar \delta(x - x') \quad (1.2.64)$$

2 つの方法で計算した $\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle$ である式 (1.2.62) と式 (1.2.64) を等号で結んで、式 (1.2.59) で示したデルタ関数の微分を用いて表現すれば、

$$\langle x | \hat{p} | x' \rangle = i\hbar \frac{\delta(x - x')}{x - x'} \quad (1.2.65)$$

$$= -i\hbar \frac{d}{d(x - x')} \delta(x - x') \quad (1.2.66)$$

$$= i\hbar \frac{d}{dx'} \delta(x - x') \quad (1.2.67)$$

となる。

さて、 $\langle x | \hat{p} | \psi \rangle$ を計算しよう。 $|x\rangle$ の完全性と、式 (1.2.67) で示した関係を用いれば、

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = \langle x | \hat{p} \hat{1} | \psi \rangle \quad (1.2.68)$$

$$= \langle x | \hat{p} \int dx' |x'\rangle \langle x'| | \psi \rangle \quad (1.2.69)$$

$$= \int dx' \langle x | \hat{p} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle \quad (1.2.70)$$

$$= i\hbar \int dx' \left[\frac{d}{dx} \delta(x - x') \right] \phi(x') \quad (1.2.71)$$

$$= i\hbar \left\{ [\delta(x - x') \psi(x')]_{-\infty}^{\infty} - \int dx' \frac{d}{dx'} \phi(x') \delta(x - x') \right\} \quad (1.2.72)$$

$$= -i\hbar \frac{d}{dx} \phi(x) \quad (1.2.73)$$

を得る.

$$3. \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i\frac{xp}{\hbar}\right)$$

$\langle x | \hat{p} | p \rangle$ を 2 種類の方法で計算する. まず, 愚直に計算すると,

$$\langle x | \hat{p} | p \rangle = p \langle x | p \rangle \quad (1.2.74)$$

$$= pp(x) \quad (1.2.75)$$

となる. ただし $p(x)$ は $|p\rangle$ の x への射影である. 一方, 式 (1.2.73) で示した関係で $|\psi\rangle \rightarrow |p\rangle$ を用いると,

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} p(x) \quad (1.2.76)$$

となる. 式 (1.2.75) と式 (1.2.76) より,

$$-i\hbar \frac{d}{dx} p(x) = pp(x) \quad (1.2.77)$$

$$\Rightarrow p(x) = C \exp\left(i\frac{xp}{\hbar}\right) \quad (1.2.78)$$

となる. C は規格化定数である.

さて, C を求めるために, $\langle x | x' \rangle$ を計算すると,

$$\delta(x - x') = \langle x | x' \rangle \quad (1.2.79)$$

$$= \langle x | \int dp |p\rangle \langle p| | x' \rangle \quad (1.2.80)$$

$$= \int dp p(x) p(x') \quad (1.2.81)$$

$$= |C|^2 \int \exp\left(i\frac{(x - x')p}{\hbar}\right) \quad (1.2.82)$$

となる. ところで, デルタ函数の Fourier 変換とその逆変換が,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) e^{-i\omega t} \quad (1.2.83)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega 1 \cdot e^{i\omega t} \quad (1.2.84)$$

と書けることより, 式 (1.2.84) において,

$$\omega \rightarrow \frac{p}{\hbar} \quad (1.2.85)$$

$$t \rightarrow x - x' \quad (1.2.86)$$

と変換すれば,

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp\left(i\frac{x - x'}{\hbar} p\right) \quad (1.2.87)$$

となるので、係数を比較して、

$$|C|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \quad (1.2.88)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (1.2.89)$$

となる。よって、

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i\frac{xp}{\hbar}\right) \quad (1.2.90)$$

となる。

4. $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ の計算

さて、いよいよ $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ を計算する道具がそろった。式 (1.2.90) を用いながら計算すると、

$$\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = \langle x|\hat{p}^2\hat{1}|\psi\rangle \quad (1.2.91)$$

$$= \langle x|\hat{p}^2 \int dp |p\rangle\langle p| |\psi\rangle \quad (1.2.92)$$

$$= \int dp p^2 \langle x|p\rangle \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.93)$$

$$= \int dp p^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i\frac{xp}{\hbar}\right) \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.94)$$

$$= \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \langle x|p\rangle \right\} \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.95)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \int dp \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \langle x|p\rangle \right\} \langle p|\psi\rangle \quad (1.2.96)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \langle x| \left[\int dp |p\rangle\langle p| \right] |\psi\rangle \quad (1.2.97)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \langle x|\psi\rangle \quad (1.2.98)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \quad (1.2.99)$$

となる。

式 (1.2.99) を式 (1.2.55) に代入すれば、

$$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) + \frac{1}{2m} \langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle = E\psi(x) \quad (1.2.100)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad (1.2.101)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (1.2.102)$$

となる。

1.2.4 Schrodinger の解法

いささか唐突だが、波動関数が、

$$\psi(x) = f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.103)$$

$$s := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (1.2.104)$$

と書けたとする． $f(s)$ が Hermite 多項式となることを示す．

式 (1.2.102) の両辺を $-\frac{\hbar^2}{2m}$ で割って， x から s に変数変換²すると，

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) \psi(x) = E \psi(x) \quad (1.2.105)$$

$$\iff \left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 + \frac{2mE}{\hbar}\right] \psi(x) = 0 \quad (1.2.106)$$

$$\iff \left[\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\hbar}{m\omega} s^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right] f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.107)$$

$$\iff \left[\frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\hbar}{m\omega} s^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right] f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.108)$$

$$\iff \left(\frac{d^2}{ds^2} - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega}\right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.109)$$

と書ける．第1項について， $\frac{d^2}{ds^2} f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)$ を計算しよう．Leibniz 則より，

$$\frac{d^2}{ds^2} f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = \frac{d^2 f}{ds^2} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) + 2 \frac{df}{ds} \frac{d}{ds} \left(\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right) + f(s) \frac{d^2}{ds^2} \left(\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right) \quad (1.2.110)$$

$$= \frac{d^2 f}{ds^2} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) - 2s \frac{df}{ds} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) + f(s) (s^2 - 1) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.111)$$

$$= \left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + (s^2 - 1)\right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.112)$$

と計算できるから，式 (1.2.109) は，

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega}\right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.113)$$

$$\iff \left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + (s^2 - 1) - s^2 + \frac{2E}{\hbar\omega}\right) f(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 0 \quad (1.2.114)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + \frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) f(s) = 0 \quad (1.2.115)$$

となる．Hermite 多項式の形は，

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} - 2s \frac{d}{ds} + 2n\right) H_n(s) = 0 \quad (1.2.116)$$

であったから，

$$\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 = 2n \quad (1.2.117)$$

$$f(s) \rightarrow H_n(s) \quad (1.2.118)$$

とすれば良いことがわかる． n は非負整数で， $n = 0$ では零点振動に対応する．規格化定数を A とすれば，波動関数は，

$$\psi_n(x) = A H_n(s) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (1.2.119)$$

² この変数変換は x の無次元化ともとらえられる．実際に式 (1.2.104) の右辺の次元を調べると，

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s}}} \text{m} = 1$$

である．

と書ける．規格化定数は,

$$1 = \int dx |\psi(x)|^2 \quad (1.2.120)$$

$$= |A|^2 \int dx H_n(s) H_n(s) e^{-s^2} \quad (1.2.121)$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int ds H_n(s) H_n(s) e^{-s^2} \quad (1.2.122)$$

$$= |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi} 2^n n! \quad (1.2.123)$$

より,

$$A = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} \quad (1.2.124)$$

となる．波動関数は,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \quad (1.2.125)$$

となる．

1.3 電磁場の量子化

WIP 結果のみ示す．その他のことについては、別途ノートを参照すること．なお、January 10, 2025 現在、ノートは編集集中である．Schrödinger 描像では、電場と磁場は、

$$\hat{E}(\mathbf{r}) = i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \quad (1.3.1)$$

$$\hat{B}(\mathbf{r}) = i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \quad (1.3.2)$$

と量子化される．また、Heisenberg 描像では、

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} \right] \quad (1.3.3)$$

$$\hat{B}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)\} \right] \quad (1.3.4)$$

と書ける．

1.4 ビームスプリッター

1.4.1 電磁場のハミルトニアン

前節での議論により、系のハミルトニアンは、

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \int d^3k \sum_{\sigma=1}^2 \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right) \quad (1.4.1)$$

と書けるのであった．以下では、簡単のために、1 方向成分・シングルモードの波を考える．

$$\hat{H}_{\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \quad (1.4.2)$$

$$= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.4.3)$$

と書ける。屈折率が n の物質中では³,

$$\hat{H}_{n,\text{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.4.4)$$

と書ける。

1.4.2 ユニタリ行列の分解

ユニタリ行列は一般に,

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

と分解できる。具体的に U を計算すると,

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.6)$$

$$= e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\Psi/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\Psi/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\Psi/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.7)$$

$$= e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.8)$$

であり, $\alpha = \Psi + \Phi$, $\beta = \Psi - \Phi$ とすると,

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.9)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Lambda+\alpha)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Lambda+\beta)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{i(\Lambda-\beta)/2} \sin(\Theta/2) & e^{i(\Lambda-\alpha)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.10)$$

と書ける。

Proof. 任意 2×2 の行列は, 実数 r_{ij} と θ_{ij} を用いて,

$$M = \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (1.4.11)$$

と書けて,

$$M^\dagger M = \begin{pmatrix} r_{11}e^{-i\theta_{11}} & r_{21}e^{-i\theta_{21}} \\ r_{12}e^{-i\theta_{12}} & r_{22}e^{-i\theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (1.4.12)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{21}^2 & r_{11}r_{12}e^{-i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{-i(\theta_{21}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{12}e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} & r_{12}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (1.4.13)$$

$$MM^\dagger = \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\theta_{11}} & r_{12}e^{i\theta_{12}} \\ r_{21}e^{i\theta_{21}} & r_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}e^{-i\theta_{11}} & r_{21}e^{-i\theta_{21}} \\ r_{12}e^{-i\theta_{12}} & r_{22}e^{-i\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (1.4.14)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 + r_{12}^2 & r_{11}r_{21}e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} \\ r_{11}r_{21}e^{-i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{12}r_{22}e^{-i(\theta_{12}-\theta_{22})} & r_{21}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (1.4.15)$$

となる。 M がユニタリ行列であることの必要十分条件は,

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \quad (1.4.16)$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \quad (1.4.17)$$

³ 謎である。屈折率により波動は変化しないはずである。

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \quad (1.4.18)$$

$$r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \quad (1.4.19)$$

$$r_{11}r_{12}e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} + r_{21}r_{22}e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \quad (1.4.20)$$

$$r_{11}r_{21}e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + r_{11}r_{22}e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \quad (1.4.21)$$

である． $M^\dagger M$ や MM^\dagger の非対角成分は複素共役になっていることに注意する．式 (1.4.16) から式 (1.4.19) を満たすような r_{ij} の組は，実数 Θ を用いて，

$$r_{11} = r_{22} = \cos(\Theta/2) \quad (1.4.22)$$

$$r_{12} = -r_{21} = \sin(\Theta/2) \quad (1.4.23)$$

なるものである．また，これらの r_{ij} の値を式 (1.4.20) と式 (1.4.21) に代入すると，

$$e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} - e^{i(\theta_{21}-\theta_{22})} = 0 \quad (1.4.24)$$

$$-e^{i(\theta_{11}-\theta_{21})} + e^{i(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0 \quad (1.4.25)$$

が成立する．

$$\Phi = \theta_{11} - \theta_{12} = \theta_{21} - \theta_{22} \quad (1.4.26)$$

$$\Psi = \theta_{11} - \theta_{21} = \theta_{12} - \theta_{22} \quad (1.4.27)$$

$$(1.4.28)$$

とすると，

$$\theta_{11} = \frac{\Lambda + \Psi + \Phi}{2} \quad (1.4.29)$$

$$\theta_{12} = \frac{\Lambda + \Psi - \Phi}{2} \quad (1.4.30)$$

$$\theta_{21} = \frac{\Lambda - \Psi + \Phi}{2} \quad (1.4.31)$$

$$\theta_{22} = \frac{\Lambda - \Psi - \Phi}{2} \quad (1.4.32)$$

となり，式 (1.4.8) を得る．つまり，任意のユニタリ行列は式 (1.4.8) で書けることが示された． \square

実際に式 (1.4.8) がユニタリ行列であることを確かめる．

$$U^\dagger U = e^{-i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & -e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.33)$$

$$UU^\dagger = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} e^{-i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\Theta/2) & -e^{i\beta/2} \sin(\Theta/2) \\ e^{-i\beta/2} \sin(\Theta/2) & e^{i\alpha/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.34)$$

となり， U はユニタリ行列であることが分かる．

1.4.3 ビームスプリッター行列

2 入力 2 出力のビームスプリッターを考える． E_1 と E_2 の電場が入射して， E'_1 と E'_2 が出力されるとする．古典的に考えると，

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.35)$$

と書ける．このまま電場演算子を中心に議論を進めることはいささか冗長である．なぜならば， \hat{a}_1 と \hat{a}_1^\dagger は複素共役の関係にあるのだから，片方が定まれば自然ともう片方が定まるからだ．よって式 (1.4.35) を量子化して，消滅演算子 \hat{a}_1 ， \hat{a}_2 を用いて表せば，

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.36)$$

と書ける．2つの消滅演算子の交換関係は，

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_j^i \quad (1.4.37)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad (1.4.38)$$

である． B はビームスプリッター行列という．光子数が保存することから，

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' \quad (1.4.39)$$

$$= (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2)^\dagger (B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2)^\dagger (B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (1.4.40)$$

$$= (B_{11}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{12}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) + (B_{21}^*\hat{a}_1^\dagger + B_{22}^*\hat{a}_2^\dagger)(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \quad (1.4.41)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{12}^*B_{11} + B_{21}^*B_{21})\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (1.4.42)$$

$$= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22})^*\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \quad (1.4.43)$$

となり，

$$\begin{cases} |B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \\ B_{11}^*B_{12} + B_{21}^*B_{22} = 0 \end{cases} \quad (1.4.44)$$

$$\Leftrightarrow B^\dagger B = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.45)$$

となればよい．つまり，ビームスプリッター行列 B がユニタリ行列であれば良い．1.4.2での議論によりビームスプリッター演算子は，

$$B = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.46)$$

と書ける．ところが，

$$\begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.47)$$

は2つの入力電場 E_1 , E_2 に位相差をかけること，

$$\begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (1.4.48)$$

は2つの出力電場 E_1' , E_2' に位相差をかけること，

$$e^{i\Lambda/2} \quad (1.4.49)$$

は2つの出力電場 E_1' , E_2' に共通するグローバル位相を書けることに対応するから，実験のセットアップとして，

$$\Lambda = \Psi = \Phi = 0 \quad (1.4.50)$$

とすることができる．また，透過率 T と反射率 R を，

$$\sqrt{T} := \cos(\Theta/2) \quad (1.4.51)$$

$$\sqrt{R} := -\sin(\Theta/2) \quad (1.4.52)$$

と定義すれば，ビームスプリッター行列 B は，

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.53)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \quad (1.4.54)$$

と書ける．

$$T + R = 1 \quad (1.4.55)$$

が成立することに注意する．

1.4.4 Baker-Campbell-Hausdorff の公式 1

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (1.4.56)$$

なる式を示す.

Proof. 函数 $f(t)$ を,

$$f(t) := e^{t\hat{A}}\hat{B}e^{-t\hat{A}} \quad (1.4.57)$$

と定義する. $f(t)$ を $t=0$ の周りで展開することを考えると,

$$f(t) = f(0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{t=0} t^2 + \dots \quad (1.4.58)$$

と書ける. さて,

$$\frac{df}{dx} = \hat{A}e^{t\hat{A}}\hat{B}e^{-t\hat{A}} - e^{t\hat{A}}\hat{B}\hat{A}e^{-t\hat{A}} \quad (1.4.59)$$

$$= e^{t\hat{A}}\hat{A}\hat{B}e^{-t\hat{A}} - e^{t\hat{A}}\hat{B}\hat{A}e^{-t\hat{A}} \quad (1.4.60)$$

$$= e^{t\hat{A}}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})e^{-t\hat{A}} \quad (1.4.61)$$

$$= e^{t\hat{A}}[\hat{A}, \hat{B}]e^{-t\hat{A}} \quad (1.4.62)$$

である. よって,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{t=0} = [\hat{A}, \hat{B}] \quad (1.4.63)$$

である. 2 階以上の微分では, 式 (1.4.62) において, $\hat{B} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}]$ とすればよい. よって, 式 (1.4.58) に式 (1.4.62) を代入すると,

$$f(t) = B + [\hat{A}, \hat{B}]t + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]t^2 + \dots \quad (1.4.64)$$

である. $t=1$ とすれば,

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (1.4.65)$$

となる. □

1.4.5 Baker-Campbell-Hausdorff の公式 2

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp \left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}[(\hat{A} - \hat{B}), [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \right) \quad (1.4.66)$$

なる式を示す.

Proof. $f(t)$ と $g(t)$ を,

$$\begin{cases} f(t) := e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}} = e^{g(t)} \\ g(t) := \log(e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}) = \log(f(t)) \end{cases} \quad (1.4.67)$$

と定義する. 明らかに,

$$f(t) = e^{g(t)} \quad (1.4.68)$$

である. $f(t)$ の Taylor 展開を考える.

$$\frac{d}{dt}f(t) = \hat{A}e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}} + e^{t\hat{A}}Be^{t\hat{B}} \quad (1.4.69)$$

$$= e^{t\hat{A}}(\hat{A} + \hat{B})e^{t\hat{B}} \quad (1.4.70)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}(\hat{A} + \hat{B}) + (\hat{A} + \hat{B})\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (1.4.71)$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2\right\}e^{t\hat{B}} \quad (1.4.72)$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^2 + \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} + \hat{B}^2 + \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (1.4.73)$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}]\right\}e^{t\hat{B}} \quad (1.4.74)$$

$$\frac{d^3}{dt^3}f(t) = e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}(\hat{A} + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2) + (\hat{A} + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2)\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (1.4.75)$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^3 + 3\hat{A}^2\hat{B} + 3\hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^3\right\}e^{t\hat{B}} \quad (1.4.76)$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{\hat{A}^3 + \hat{A}^2\hat{B} + \hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}^2 + \hat{B}^2\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^3 + 2\hat{A}^2\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} - \hat{B}\hat{A}^2 - \hat{B}^2\hat{A} - \hat{B}\hat{A}\hat{B} + 2\hat{A}\hat{B}^2\right\}e^{t\hat{B}} \quad (1.4.77)$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A}^2\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{A}^2\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^2 + \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A} + \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}\hat{A}\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (1.4.78)$$

$$= e^{t\hat{A}}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}^2, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}^2] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}\right\}e^{t\hat{B}} \quad (1.4.79)$$

となる. $t = 0$ 周りで $f(t)$ を Taylor 展開すると,

$$f(t) = f(0) + \frac{1}{1!}\frac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=0}t + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dt^2}f(t)\Big|_{t=0}t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dt^3}f(t)\Big|_{t=0}t^3 + \dots \quad (1.4.80)$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}(\hat{A} + \hat{B})t + \frac{1}{2!}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}]\right\}t^2 + \frac{1}{3!}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}^2, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}^2] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}\right\}t^3 + \dots \quad (1.4.81)$$

$$= 1 + \hat{P}_1t + \hat{P}_2t^2 + \hat{P}_3t^3 + \dots \quad (1.4.82)$$

$$(1.4.83)$$

と書ける. ただし,

$$\hat{P}_1 := \frac{1}{1!}(\hat{A} + \hat{B}) \quad (1.4.84)$$

$$\hat{P}_2 := \frac{1}{2!}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}]\right\} \quad (1.4.85)$$

$$\hat{P}_3 := \frac{1}{3!}\left\{(\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}^2, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}^2] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}\right\} \quad (1.4.86)$$

と定義した. $F(t)$ を,

$$F(t) := f(t) - 1 \quad (1.4.87)$$

$$= \hat{P}_1t + \hat{P}_2t^2 + \hat{P}_3t^3 + \dots \quad (1.4.88)$$

と定義する. $\log(1+x)$ は $x = 0$ のまわりで,

$$\log(1+x) = (\log(1+x))\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\left(\frac{d}{dx}\log(1+x)\right)\Big|_{x=0}x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2}{dx^2}\log(1+x)\right)\Big|_{x=0}x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{dx^3}\log(1+x)\right)\Big|_{x=0}x^3 + \dots \quad (1.4.89)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (1.4.90)$$

であることと, $t \rightarrow 0$ で $F(t) \rightarrow 0$ であることを用いて $g(t)$ を $t = 0$ の周りで Taylor 展開すると,

$$g(t) = \log(f(t)) \quad (1.4.91)$$

$$= \log(1 + F(t)) \quad (1.4.92)$$

$$= F(t) - \frac{F(t)^2}{2} + \frac{F(t)^3}{3} - \dots \quad (1.4.93)$$

$$= (\hat{P}_1 t + \hat{P}_2 t^2 + \hat{P}_3 t^3) - \frac{1}{2} (\hat{P}_1 t + \hat{P}_2 t^2 + \hat{P}_3 t^3)^2 + \frac{1}{3} (\hat{P}_1 t + \hat{P}_2 t^2 + \hat{P}_3 t^3)^3 - \dots \quad (1.4.94)$$

$$= \hat{P}_1 t + \left(\hat{P}_2 - \frac{1}{2} \hat{P}_1^2 \right) t^2 + \left\{ \hat{P}_3 - \frac{1}{2} (\hat{P}_1 \hat{P}_2 + \hat{P}_2 \hat{P}_1) + \frac{1}{3} \hat{P}_1^3 \right\} t^3 - \dots \quad (1.4.95)$$

となる. $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ の定義を思い出せば,

$$(t^1 \text{ の係数}) = \hat{P}_1 = (\hat{A} + \hat{B}) \quad (1.4.96)$$

$$(t^2 \text{ の係数}) = \hat{P}_2 - \frac{1}{2} \hat{P}_1^2 \quad (1.4.97)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}] \right\} - \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{B})^2 \quad (1.4.98)$$

$$= \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (1.4.99)$$

$$(t^3 \text{ の係数}) = \hat{P}_3 - \frac{1}{2} (\hat{P}_1 \hat{P}_2 + \hat{P}_2 \hat{P}_1) + \frac{1}{3} \hat{P}_1^3 \quad (1.4.100)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3!} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^3 + \hat{A} [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}^2, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}^2] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B} \right\} \\ &- \frac{1}{2} \left[(\hat{A} + \hat{B}) \frac{1}{2!} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}] \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ (\hat{A} + \hat{B})^2 + [\hat{A}, \hat{B}] \right\} (\hat{A} + \hat{B}) \right] \\ &+ \frac{1}{3} (\hat{A} + \hat{B})^3 \end{aligned} \quad (1.4.101)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} (\hat{A} + \hat{B})^3 + \frac{1}{6} \hat{A} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{6} \left\{ \hat{A} [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{A} \right\} + \frac{1}{6} \left\{ \hat{B} [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B} \right\} + \frac{1}{6} [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B} \\ &- \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{B})^3 - \frac{1}{4} \hat{A} [\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{4} \hat{B} [\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{4} [\hat{A}, \hat{B}] \hat{A} - \frac{1}{4} [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B} \\ &+ \frac{1}{3} (\hat{A} + \hat{B})^3 \end{aligned} \quad (1.4.102)$$

$$= \frac{1}{12} \hat{A} [\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{12} \hat{B} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12} [\hat{A}, \hat{B}] \hat{A} - \frac{1}{12} [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B} \quad (1.4.103)$$

$$= \frac{1}{12} (\hat{A} - \hat{B}) [\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{12} [\hat{A}, \hat{B}] (\hat{A} - \hat{B}) \quad (1.4.104)$$

$$= \frac{1}{12} [(\hat{A} - \hat{B}), [\hat{A}, \hat{B}]] \quad (1.4.105)$$

よって,

$$e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} = f(t) = e^{g(t)} \quad (1.4.106)$$

$$= \exp \left\{ (\hat{A} + \hat{B})t + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] t^2 + \frac{1}{12} [(\hat{A} - \hat{B}), [\hat{A}, \hat{B}]] t^3 + \dots \right\} \quad (1.4.107)$$

$$(1.4.108)$$

となるから, $t = 0$ とすれば,

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = \exp \left\{ (\hat{A} + \hat{B}) + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12} [(\hat{A} - \hat{B}), [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \right\} \quad (1.4.109)$$

となる．特に,

$$\left[\left(\hat{A} - \hat{B} \right), \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right] = 0 \quad (1.4.110)$$

$$\iff \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right] = \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right] = 0 \quad (1.4.111)$$

のときは,

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = \exp \left\{ \left(\hat{A} + \hat{B} \right) + \frac{1}{2} \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right\} \quad (1.4.112)$$

となる. □

1.4.6 ビームスプリッタハミルトニアン

ビームスプリッタ行列を再び考えよう．今度は入力電場と出力電場の位相差が存在することにして, $\Lambda = 0$ のみ課しておく．するとビームスプリッタ行列は,

$$B = \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.4.113)$$

と書ける．ビームスプリッタ行列を用いて,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) & e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) & e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.114)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \hat{a}_1 + e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \hat{a}_2 \\ -e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sin(\Theta/2) \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \cos(\Theta/2) \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.115)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_2 \\ e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.116)$$

と書ける．出力それぞれの光の強度は, \hat{a}_1 と \hat{a}_2^\dagger や \hat{a}_1^\dagger と \hat{a}_2 が交換することを思い出せば,

$$\hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' = \left(e^{i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_2 \right)^\dagger \left(e^{i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_1 - e^{i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.117)$$

$$= T \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + R \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \sqrt{T} \sqrt{R} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.118)$$

$$\hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' = \left(e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_2 \right)^\dagger \left(e^{-i(\Psi-\Phi)/2} \sqrt{R} \hat{a}_1 + e^{-i(\Psi+\Phi)/2} \sqrt{T} \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.119)$$

$$= R \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + T \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \sqrt{T} \sqrt{R} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.120)$$

となる．式 (1.4.118) と式 (1.4.120) について, 第 1 項と第 2 項はそれぞれモード 1 の入力光子数, モード 2 の入力光子数に対応する．これらの重ね合わせによって位相が変化して, そのパラメータは T である．相互作用を表す項は第 3 項であるから, ビームスプリッタによる相互作用ハミルトニアン \hat{H}_{int} を,

$$\hat{H}_{\text{int}} := \frac{1}{2} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.121)$$

と定義する．

また, 以下の演算子を定義する．

$$\hat{L}_0 := \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.122)$$

$$\hat{L}_1 := \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (1.4.123)$$

$$\hat{L}_2 := \frac{1}{2i} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (1.4.124)$$

$$\hat{L}_3 := \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.125)$$

\hat{L}_2 と \hat{H}_{int} の関係を調べよう。唐突だが,

$$e^{-i\Theta\hat{L}_2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} e^{i\Theta\hat{L}_2} \quad (1.4.126)$$

考える。式 (1.4.126) の第 1 成分について, Baker-Campbell-Hausdorff の公式より,

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_1e^{i\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + [-i\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1] + \frac{1}{2!}[-i\Theta\hat{L}_2, [-i\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1]] \\ &\quad + \frac{1}{3!}[-i\Theta\hat{L}_2, [-i\Theta\hat{L}_2, [-i\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] + \frac{1}{4!}[-i\Theta\hat{L}_2, [-i\Theta\hat{L}_2, [-i\Theta\hat{L}_2, [-i\Theta\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] + \cdots \end{aligned} \quad (1.4.127)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{a}_1 + (-i\Theta)[\hat{L}_2, \hat{a}_1] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]] \\ &\quad + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] + \cdots \end{aligned} \quad (1.4.128)$$

となる。 \hat{L}_2 と \hat{a}_1 , \hat{L}_2 と \hat{a}_2 との交換関係についてそれぞれ,

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_1] = \left[\frac{1}{2i}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger), \hat{a}_1 \right] \quad (1.4.129)$$

$$= \frac{1}{2i}(\hat{a}_2[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1] - \hat{a}_2^\dagger[\hat{a}_1, \hat{a}_1]) \quad (1.4.130)$$

$$= -\frac{1}{2i}\hat{a}_2 \quad (1.4.131)$$

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left[\frac{1}{2i}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger), \hat{a}_2 \right] \quad (1.4.132)$$

$$= \frac{1}{2i}(\hat{a}_1^\dagger[\hat{a}_2, \hat{a}_2] - \hat{a}_1[\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2]) \quad (1.4.133)$$

$$= \frac{1}{2i}\hat{a}_1 \quad (1.4.134)$$

となる。ただし, \hat{a}_1 と \hat{a}_2 が交換することを用いた。よって,

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_1] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_2 \quad (1.4.135)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]] = -\frac{1}{2i}[\hat{L}_2, \hat{a}_2] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_1 \quad (1.4.136)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] = -\left(\frac{1}{2i}\right)^2 [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_2 \quad (1.4.137)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_1 \quad (1.4.138)$$

であるから式 (1.4.128) は,

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta\hat{L}_2}\hat{a}_1e^{i\Theta\hat{L}_2} &= \hat{a}_1 + (-i\Theta)[\hat{L}_2, \hat{a}_1] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]] \\ &\quad + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_1]]]] + \cdots \end{aligned} \quad (1.4.139)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{a}_1 + (-i\Theta)(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^1 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^2}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2i}\right)^2 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^3}{3!}\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^4}{4!}\left(\frac{1}{2i}\right)^4 \hat{a}_1 + \cdots \end{aligned} \quad (1.4.140)$$

$$= \hat{a}_1 + \left(\frac{\Theta}{2}\right)^1 \hat{a}_2 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \hat{a}_1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 \hat{a}_2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 \hat{a}_1 + \cdots \quad (1.4.141)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^4 - \cdots \right] \hat{a}_1 + \left[\left(\frac{\Theta}{2} \right)^1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^3 + \cdots \right] \hat{a}_2 \quad (1.4.142)$$

$$= \cos(\Theta/2) \hat{a}_1 + \sin(\Theta/2) \hat{a}_2 \quad (1.4.143)$$

となる。同様に、式 (1.4.126) の第 2 成分について、

$$[\hat{L}_2, \hat{a}_2] = \left(\frac{1}{2i} \right)^1 \hat{a}_1 \quad (1.4.144)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]] = \frac{1}{2i} [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = -\left(\frac{1}{2i} \right)^2 \hat{a}_2 \quad (1.4.145)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]] = -\left(\frac{1}{2i} \right)^2 [\hat{L}_2, \hat{a}_2] = -\left(\frac{1}{2i} \right)^3 \hat{a}_1 \quad (1.4.146)$$

$$[\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]]] = -\left(\frac{1}{2i} \right)^3 [\hat{L}_2, \hat{a}_1] = \left(\frac{1}{2i} \right)^4 \hat{a}_2 \quad (1.4.147)$$

なる関係を用いると、

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta \hat{L}_2} \hat{a}_2 e^{i\Theta \hat{L}_2} &= \hat{a}_2 + (-i\Theta) [\hat{L}_2, \hat{a}_2] + \frac{(-i\Theta)^2}{2!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]] \\ &+ \frac{(-i\Theta)^3}{3!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]] + \frac{(-i\Theta)^4}{4!} [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, [\hat{L}_2, \hat{a}_2]]]] + \cdots \end{aligned} \quad (1.4.148)$$

$$= \hat{a}_2 + (-i\Theta) \left(\frac{1}{2i} \right)^1 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^2}{2!} (-1) \left(\frac{1}{2i} \right)^2 \hat{a}_2 + \frac{(-i\Theta)^3}{3!} (-1) \left(\frac{1}{2i} \right)^3 \hat{a}_1 + \frac{(-i\Theta)^4}{4!} \left(\frac{1}{2i} \right)^4 \hat{a}_2 + \cdots \quad (1.4.149)$$

$$= \hat{a}_2 - \left(\frac{\Theta}{2} \right)^1 \hat{a}_1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 \hat{a}_2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^3 \hat{a}_1 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^4 \hat{a}_2 + \cdots \quad (1.4.150)$$

$$= - \left[\left(\frac{\Theta}{2} \right)^1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^3 + \cdots \right] \hat{a}_1 + \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^4 - \cdots \right] \hat{a}_2 \quad (1.4.151)$$

$$= -\sin(\Theta/2) \hat{a}_1 + \cos(\Theta/2) \hat{a}_2 \quad (1.4.152)$$

である。よって、式 (1.4.126) は、

$$e^{-i\Theta \hat{L}_2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} e^{i\Theta \hat{L}_2} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.153)$$

と書ける。式 (1.4.153) の解釈を考えよう。相互作用ハミルトニアン \hat{H}_{int} の定義は、

$$\hat{H}_{\text{int}} := \frac{1}{2} \left(e^{i\Phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\Phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.154)$$

であった。 $\Phi = \pi/2$ とすると、

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left(e^{i\pi/2} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + e^{-i\pi/2} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.155)$$

$$= \frac{1}{2} \left(i \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger - i \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \quad (1.4.156)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (1.4.157)$$

$$= \hat{L}_2 \quad (1.4.158)$$

と書ける。さらに、式 (1.4.153) において、 $\Theta = -t/\hbar$ とすれば、

$$\exp \left(-i \frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar} t \right) \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \exp \left(i \frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar} t \right) = \begin{pmatrix} \cos(-t/2\hbar) & \sin(-t/2\hbar) \\ -\sin(-t/2\hbar) & \cos(-t/2\hbar) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.159)$$

となる．左辺は，

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.160)$$

なる消滅演算子のペアを時間発展演算子で挟んでいる格好である．となれば，右辺は Heisenberg 描像で表した消滅演算子であろう⁴．

1.5 コヒーレント状態

本節ではコヒーレント状態について議論する．コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は，

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.5.1)$$

なる状態である．また， $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ となるように θ を定義しておく．

1.5.1 物理量の平均値・分散

具体的な $|\alpha\rangle$ の形を知らなくても，いくつかの物理量の平均値と分散については調べることができる．まず，電場の期待値を調べる．電場演算子 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ を自然単位系を用いて書くと，

$$\frac{i}{2}e(\hat{a}\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\} - \hat{a}^\dagger\exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\}) \quad (1.5.2)$$

であるから，

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \alpha | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle \quad (1.5.3)$$

$$= \frac{i}{2}e(\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\} - \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\}) \quad (1.5.4)$$

$$= -\frac{1}{2i}e(\alpha \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\} - \alpha^* \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\}) \quad (1.5.5)$$

$$= -\frac{1}{2i}e(|\alpha|e^{i\theta} \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\} - |\alpha|e^{-i\theta} \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\}) \quad (1.5.6)$$

$$= -|\alpha|e \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \theta) \quad (1.5.7)$$

である．

次に，位置と運動量の平均値と分散について議論する．位置演算子と運動量演算子は生成演算子と消滅演算子を用いて，

$$\hat{x} := \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.5.8)$$

$$\hat{p} := \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (1.5.9)$$

と書けるから，

$$\langle x \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right| \alpha \right\rangle \quad (1.5.10)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) \quad (1.5.11)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{1}{4}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \right| \alpha \right\rangle \quad (1.5.12)$$

⁴右辺に出てくる行列はビームスプリッタ行列でないことに注意する．確かに2つの入力電場間の位相ずれや，2つの出力電場間の位相ずれがないと仮定したとき，ビームスプリッタ演算子は式(1.4.54)と書ける．しかし， $\Phi = \pi/2$ なる仮定のもと議論している．このような入力電場の位相ずれ Φ に対して，出力電場の位相ずれ Ψ をうまく定めれば式(1.4.54)の形を実現することができると思うかもしれないが，その試みははかなく終わる．そのような Ψ は， $\pi/2 + \Psi = 2n\pi$ かつ $\pi/2 - \Psi = 2m\pi$ ， $n, m \in \mathbb{Z}$ としなければいけないが，2式を足して， $\pi = 2(n+m)\pi$ となり，そのような n, m は存在しない．要するに，式(1.4.153)の右辺の行列はビームスプリッタ行列ではないのだ．なお，テキストでの(1.106)は何を言いたいのかかわからない．

$$= \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a}^2 | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a} \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^2 | \alpha \rangle \quad (1.5.13)$$

$$= \frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) | \alpha \rangle + \frac{1}{4} |\alpha|^2 + \frac{1}{4} (\alpha^*)^2 \quad (1.5.14)$$

$$= \frac{1}{4} (\alpha + \alpha^*)^2 + \frac{1}{4} \quad (1.5.15)$$

$$\langle p \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \right| \alpha \right\rangle \quad (1.5.16)$$

$$= \frac{1}{2i} (\alpha - \alpha^*) \quad (1.5.17)$$

$$\langle p^2 \rangle = \left\langle \alpha \left| -\frac{1}{4} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \right| \alpha \right\rangle \quad (1.5.18)$$

$$= -\frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a}^2 | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a} \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle + \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle - \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^2 | \alpha \rangle \quad (1.5.19)$$

$$= -\frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) | \alpha \rangle + \frac{1}{4} |\alpha|^2 - \frac{1}{4} (|\alpha|^*)^2 \quad (1.5.20)$$

$$= -\frac{1}{4} (\alpha^2 + \alpha^*)^2 + \frac{1}{4} \quad (1.5.21)$$

より,

$$\Delta x_{\text{coh}} := \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{4} \quad (1.5.22)$$

$$\Delta p_{\text{coh}} := \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{1}{4} \quad (1.5.23)$$

となる.

1.5.2 個数状態での展開

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を, Hermite 演算子である \hat{n} の固有状態である個数状態 $|n\rangle$ で展開することを考える.

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \quad (1.5.24)$$

である. 式 (1.5.1) に式 (1.5.24) を代入して, 式 (1.2.47) の関係式を用いると,

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.5.25)$$

$$\iff \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \quad (1.5.26)$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} w_n |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle \quad (1.5.27)$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} w_{n+1} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle \quad (1.5.28)$$

であるから,

$$\sqrt{n+1} w_{n+1} = \alpha w_n \quad (1.5.29)$$

$$\iff w_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C \quad (1.5.30)$$

である. $C := w_0$ と定義した. $|\alpha\rangle$ の規格化条件より,

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = \left(\sum_n w_n |n\rangle \right)^\dagger \left(\sum_m w_m |m\rangle \right) \quad (1.5.31)$$

$$= \left(\sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} C^* \langle n| \right) \left(\sum_m \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} C |m\rangle \right) \quad (1.5.32)$$

$$= |C|^2 \sum_{n,m} \frac{(\alpha^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \langle n|m \rangle \quad (1.5.33)$$

$$= |C|^2 \sum_n \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \quad (1.5.34)$$

$$= |C|^2 e^{|\alpha|^2} \quad (1.5.35)$$

であるから,

$$C = \exp \left(\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \quad (1.5.36)$$

とすればよい. よって, コヒーレント状態は,

$$|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp \left(\frac{|\alpha|^2}{2} \right) |n\rangle \quad (1.5.37)$$

と書ける. 式 (1.5.37) より, コヒーレント状態とは, 個数状態を $|n\rangle$ を Poisson 分布に従って重ね合わせたものと分かる.

1.5.3 調和振動子ハミルトニアンでの時間発展

まず, コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が調和振動子ハミルトニアン \hat{H} があるときにどのように時間発展するか調べる. 系のハミルトニアンは,

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.5.38)$$

と書けるから,

$$|\alpha(t)\rangle = \exp \left(-i \frac{\hat{H}}{\hbar} t \right) |\alpha\rangle \quad (1.5.39)$$

$$= \exp \left(-i \frac{\omega}{2} t \right) e^{-i\omega t \hat{n}} |\alpha\rangle \quad (1.5.40)$$

$$= \exp \left(-i \frac{\omega}{2} t \right) \sum_m \frac{(-i\omega t)^m}{m!} \hat{n}^m \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp \left(\frac{|\alpha|^2}{2} \right) |n\rangle \quad (1.5.41)$$

$$= \exp \left(-i \frac{\omega}{2} t \right) \exp \left(\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sum_m \frac{(-i\omega t)^m}{m!} \hat{n}^m |n\rangle \quad (1.5.42)$$

$$= \exp \left(-i \frac{\omega}{2} t \right) \exp \left(\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sum_m \frac{(-in\omega t)^m}{m!} |n\rangle \quad (1.5.43)$$

$$= \exp \left(-i \frac{\omega}{2} t \right) \exp \left(\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-in\omega t} |n\rangle \quad (1.5.44)$$

$$= \exp \left(-i \frac{\omega}{2} t \right) \sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \exp \left(\frac{|\alpha|^2}{2} \right) |n\rangle \quad (1.5.45)$$

$$= \exp \left(-i \frac{\omega}{2} t \right) \sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \exp \left(\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2} \right) |n\rangle \quad (1.5.46)$$

$$= \exp \left(-i \frac{\omega}{2} t \right) |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (1.5.47)$$

グローバル位相は無視してよいので,

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (1.5.48)$$

と分かる.

次に個数状態の時間発展を調べる.

$$|n(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|n\rangle \quad (1.5.49)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)e^{-i\omega t\hat{n}}|n\rangle \quad (1.5.50)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-i\omega t)^m}{m!}\hat{n}^m|n\rangle \quad (1.5.51)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\sum_m \frac{(-in\omega t)^m}{m!}|n\rangle \quad (1.5.52)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)e^{-in\omega t}|n\rangle \quad (1.5.53)$$

となり, 周波数が2倍になったように見える⁵.

1.5.4 レーザのハミルトニアン

真空場 $|0\rangle$ が $|\alpha\rangle$ に時間変化するものがレーザである. レーザのハミルトニアンは,

$$\hat{H}_{\text{laser}} \propto i(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \quad (1.5.54)$$

とかける⁶. この系において, 真空状態 $|0\rangle$ の時間発展は

$$\exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)|0\rangle = \exp\left(-i\frac{i(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}{\hbar}t\right)|0\rangle \quad (1.5.55)$$

$$= \exp\left(\frac{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}{\hbar}t\right)|0\rangle \quad (1.5.56)$$

$$= \quad (1.5.57)$$

⁵らしい

⁶らしい