Chapter 1

特殊函数の紹介

1.1　物理と特殊函数

特殊函数は物理が用いる数学の道具である．WIP

1.2　Hermite 演算子

定義 1.1: Hermite 演算子

内積が定義されている函数空間 V の任意の元 f，g に対して，

$$\langle f, \mathcal{L}g \rangle = \langle \mathcal{L}f, g \rangle \tag{1.2.1}$$

なる演算子 $\mathcal{L}$ を Hermite 演算子という．

1.3　Strum-Liouvillle 演算子

定義 1.2: Strum-Liouville 演算子

$a < b$ として，$x \in [a, b]$ で定義された関数空間 V を考える．$\rho(x)$ を非負の実数関数として，$f, g \in V$ に対して，

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f^*(x) g(x) \rho(x) \, \mathrm{d}x \tag{1.3.1}$$

なる内積を入れる．関数空間 V 上の演算子として $\mathcal{L}$ を，

$$\mathcal{L} := \frac{1}{\rho(x)} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left\{ p(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right\} + q(x) \right] \tag{1.3.2}$$

とする．**式** (1.3.2) なる形をした演算子を Strum-Liouvillle 演算子という．

命題 1.1: Strum-Liouville 演算子の Hermite 性

境界条件を，$\forall f \in V$ について，

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ p(a) f'(a) = p(b) f'(b) \end{cases} \tag{1.3.3}$$

とすると，

$$\langle f, \mathcal{L}g\rangle = \langle \mathcal{L}f, g\rangle \tag{1.3.4}$$

が成立する．

Proof. 内積の定義より，

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathcal{L}g\rangle &= \int_a^b f^*(x)\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\right\} + q(x)g(x)\right]\rho(x)\,\mathrm{d}x && (1.3.5)\\
&= \int_a^b f^*(x)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\right\} + q(x)g(x)\right]\mathrm{d}x && (1.3.6)\\
&= \left[f^*(x)g'(x)\right]_a^b - \int_a^b f'^*(x)p(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^*(x)q(x)g(x)\,\mathrm{d}x && (1.3.7)\\
&= \left[f^*(x)p(x)g'(x)\right]_a^b - \left[f'^*(x)p(x)g(x)\right]_a^b + \int_a^b g(x)\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^*(x)\right) + q(x)f^*(x)\right]\rho(x)\,\mathrm{d}x && (1.3.8)\\
&= \left[f^*(x)p(x)g'(x)\right]_a^b - \left[f'^*(x)p(x)g(x)\right]_a^b + \langle g, \mathcal{L}f\rangle^* && (1.3.9)\\
&= \left[f^*(x)p(x)g'(x)\right]_a^b - \left[g(x)p(x)f'^*(x)\right]_a^b + \langle \mathcal{L}f, g\rangle && (1.3.10)
\end{aligned}$$

となる．第 1 項と第 2 項について，第 1 項に $f(a) = f(b)$ を，第 2 項に $p(x)$ が実数値関数であり $p(a)f'(a) = p(b)f'(b)$ であることを用いると

$$\left[f^*(x)p(x)g'(x)\right]_a^b - \left[f'^*(x)p(x)g(x)\right]_a^b = \{p(b)g'(b) - p(a)f(a)\}f^*(a) - \{g(b) - g(a)\}p(a)f'(a) \tag{1.3.11}$$

を得る．今度は，第 1 項に $p(x)$ が実数値関数であり $p(a)g'(a) = p(b)g'(b)$ であることを，第 2 項に $g(a) = g(b)$ を用いれば，

$$\langle f, \mathcal{L}g\rangle = \langle \mathcal{L}f, g\rangle \tag{1.3.12}$$

を得る． □

1.4 Legendre 多項式

定義 1.3: $\mathcal{L}_m$ の定義

演算子 $\mathcal{L}_m$ を，

$$\mathcal{L}_m \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\} - \frac{m^2}{1-x^2} \tag{1.4.1}$$

と定義する．ただし，$m \in \{0, 1, \cdots\}$ である．境界条件は，

$$p(\pm 1)f^*(\pm 1)g'(\pm 1) = 0 \tag{1.4.2}$$

とする．

注意 1.1

$\mathcal{L}_m$ は式 (1.3.2) において，

$$a = -b = 1\rho(x) \qquad = 1 \tag{1.4.3}$$

$$p(x) = 1 - x^2 \tag{1.4.4}$$
$$q(x) = -\frac{m^2}{1-x^2} \tag{1.4.5}$$

としたものであるから，

$$\mathcal{L}_m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\} - \frac{m^2}{1-x^2} \tag{1.4.6}$$

となる．内積は，

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.4.7}$$

となる．

命題 1.2: $\mathcal{L}_m$ の Hermite 性

演算子 $\mathcal{L}$ は Hermite 演算子である．

Proof. たとえば，$g'(x) = p(x)$ となるように $g(x)$ を定めれば，$f(1) = f(-1) = 0$ となる．また，$f(x) = 1$ となるように $f(x)$ を定めれば，$p(1)g'(1) = p(-1)g'(1) = 0$ となるので，前節で示した境界条件を満足する． □

さて，Legendre 多項式 $P_n(x)$ は n を非負整数として，

$$\mathcal{L}_0 P_n(x) = -n(n+1)P_n(x) \tag{1.4.8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x)\right\} = -n(n+1)P_n(x) \tag{1.4.9}$$

なる $P_n(x)$ のうち，$x = 0$ 周りで級数展開したもので，

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \tag{1.4.10}$$

と書いたとき，

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \tag{1.4.11}$$
$$u_{n+1} = 0 \tag{1.4.12}$$

なるものである．**式** (1.4.10) を**式** (1.4.9) に代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j\right\} = -n(n+1)\sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \tag{1.4.13}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} j u_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{j-1} - x^{j+1}\right) = -n(n+1)\sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \tag{1.4.14}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)u_j x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)u_j x^j = -n(n+1)\sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \tag{1.4.15}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)u_j x^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} u_j[j(j+1) - n(n+1)]x^j \tag{1.4.16}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)u_j x^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} u_j[j(j+1) - n(n+1)]x^j \tag{1.4.17}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)u_{j+2}x^j = \sum_{j=0}^{\infty} u_j[j(j+1)-n(n+1)]x^j \tag{1.4.18}$$

となるから，

$$(j+1)(j+2)u_{j+2} = [j(j+1)-n(n+1)]u_j \tag{1.4.19}$$

なる漸化式が成立する．**式** (1.4.19) において $j=n$ を代入すると，$u_{n+2}=0$ となる．また，$j=n+1$ を代入すると**式** (1.4.12) より $u_{n+1}=0$ である．よって，

$$0 = u_{n+1} = u_{n+2} = u_{n+3} = u_{n+4} = \cdots \tag{1.4.20}$$

となる．また，**式** (1.4.19) に $j=n-2$ を代入すると，

$$u_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}u_n \tag{1.4.21}$$

となる．よって，**式** (1.4.11) と**式** (1.4.21) を用いて**式** (1.4.10) を表すと，

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} + \cdots\right] \tag{1.4.22}$$

$$= \sum_{s=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!}x^{n-2s} \tag{1.4.23}$$

となる．

命題 1.3: Rodrigues の公式

Legendre 多項式 $P_n(x)$ は，

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n \tag{1.4.24}$$

とも書ける．

Proof.

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n = \sum_{s=0}^{n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(-1)^s\binom{n}{k}x^{2n-2k} \tag{1.4.25}$$

$$= \sum_{s=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}\frac{(2n-2s)!}{(n-2k)!} \tag{1.4.26}$$

なる関係を用いると，WIP □

1.5 Legendre 陪多項式

定義 1.4: Legendre 陪多項式

Legendre 陪多項式 $P_n^m(x)$ は $m \le n$ として，

$$P_n^m(x) := \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x) \tag{1.5.1}$$

と定義される．

注意 1.2

式 (1.4.24) を用いれば,

$$
\begin{aligned}
P_n^m(x) &= \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x) && (1.5.2)\\
&= \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n && (1.5.3)\\
&= \frac{1}{2^n n!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n && (1.5.4)
\end{aligned}
$$

と書ける.

命題 1.4: Legendre の陪微分方程式

P_n^m は Legendre の陪微分方程式,

$$\mathcal{L}_m P_n^m(x) + n(n+1)P_n^m(x) = 0 \tag{1.5.5}$$

を満たす.

WIP

Legendre 多項式の直交性とノルムを調べる. Legendre 陪多項式の直交性は $\mathcal{L}_m$ が Hermite 演算子であり, その固有関数である $P_n^m(x)$ が直交することより従う. 自分自身との内積, つまり, $\langle P_n^m(x), P_n^m(x)\rangle$ の値を計算する. **式** (1.5.4) を用いて, **式** (1.4.7) で示した内積の定義に従って計算する. $n+m$ 回部分積分を行うと,

$$
\begin{aligned}
\langle P_n^m(x), P_n^m(x)\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\mathrm{d}x && (1.5.6)\\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m-1}}{\mathrm{d}x^{n+m-1}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\mathrm{d}x && (1.5.7)\\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m-1}}{\mathrm{d}x^{n+m-1}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\right]_{-1}^{1} && (1.5.8)\\
&\quad - \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m+1}}{\mathrm{d}x^{n+m+1}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\mathrm{d}x && (1.5.9)\\
&= -\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m+1}}{\mathrm{d}x^{n+m+1}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\mathrm{d}x && (1.5.10)\\
&= \cdots && (1.5.11)\\
&= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right\}\mathrm{d}x && (1.5.12)\\
&= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\left[\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m-k}}{\mathrm{d}x^{n+m-k}}\left(1-x^2\right)^m\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m+k}}{\mathrm{d}x^{n+m+k}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right]\mathrm{d}x && (1.5.13)
\end{aligned}
$$

となる. 最終行で Leibniz の公式を用いた. **式** (1.5.13) の和の中の $n+m-k$ 階微分と $n+m-k$ 階微分を考える. $\left(1-x^2\right)^m$ と $(x^2-1)^n$ の最高次数は, それぞれ $2m$ と $2n$ であるから, $2m \geq n+m-k$ かつ $2n \geq n+m+k$ なる k でのみ和の中は 0 でなくなる. つまり, $n-m \leq k$ かつ $n-m \geq k$ なる k は $k=n-m$ のみである. よって, **式** (1.5.13) は,

$$\langle P_n^m(x), P_n^m(x)\rangle = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\left[\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m-k}}{\mathrm{d}x^{n+m-k}}\left(1-x^2\right)^m\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m+k}}{\mathrm{d}x^{n+m+k}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right]\mathrm{d}x \tag{1.5.14}$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n \left[\binom{n+m}{n-m} \left\{\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}} \left(1-x^2\right)^m\right\} \left\{\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}} \left(x^2-1\right)^n\right\}\right] \mathrm{d}x \tag{1.5.15}$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^m (2m)!(2n)! \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n \mathrm{d}x \tag{1.5.16}$$

積分は，$x = \cos\theta$ と置換すると，

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n \mathrm{d}x = (-1)n \int_{-1}^{1} \sin^{2n+1}\theta \,\mathrm{d}\theta \tag{1.5.17}$$

となる．I_{2n+1} を，

$$I_{2n+1} \coloneqq \int_{0}^{\pi} \sin^{2n+1}\theta \,\mathrm{d}\theta \tag{1.5.18}$$

と定義すると，

$$I_{2n+1} = \int_{0}^{\pi} \sin^{2n}\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{1.5.19}$$

$$= \left[\sin^{2n}\theta \cdot (-\cos\theta)\right]_0^{\pi} + 2n \int_{0}^{\pi} \sin^{2n-1}\theta \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \tag{1.5.20}$$

$$= 2nI_{2n-1} - 2nI_{2n+1} \tag{1.5.21}$$

となるので，

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} \tag{1.5.22}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} \tag{1.5.23}$$

$$= \cdots \tag{1.5.24}$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 \tag{1.5.25}$$

$$= 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \tag{1.5.26}$$

$$= 2 \cdot 2^n n! \cdot \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \tag{1.5.27}$$

となる．2 重階乗について，

$$(2n)!! = 2^n n! \tag{1.5.28}$$

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \tag{1.5.29}$$

なる関係が成り立つことを用いると，

$$\langle P_n^m(x), P_n^m(x)\rangle = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^m (2m)!(2n)! \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!} (-1)^n 2 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \tag{1.5.30}$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^m (2m)!(2n)! \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!} (-1)^n 2 \cdot 2^n n! \cdot \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \tag{1.5.31}$$

$$= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{1.5.32}$$

となる．Legendre 多項式の直交性とまとめて書くと，

$$\langle P_{n'}^m(x), P_n^m(x)\rangle = \delta_n^{n'} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{1.5.33}$$

となる．

1.6 Bessel 関数

定義 1.5: $\mathcal{L}_\nu$ の定義

函数空間は，$[0,a]$ で C^1 級の複素函数全体であるとする．$\mathcal{L}_\nu$ を，

$$\mathcal{L}_\nu \coloneqq \frac{1}{z}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right\} - \frac{\nu^2}{z}\right] \tag{1.6.1}$$

と定義する．

注意 1.3

$\mathcal{L}_\nu$ は**式** (1.3.2) において，また，

$$a \to 0 \tag{1.6.2}$$
$$b \to a \tag{1.6.3}$$
$$\rho(z) = x \tag{1.6.4}$$
$$p(z) = x \tag{1.6.5}$$
$$q(z) = -\frac{\nu^2}{z},\ \nu \geq 0 \tag{1.6.6}$$

としたものである．すなわち，

$$\langle f, g\rangle = \int_0^a f^*(z)g(z)x\,\mathrm{d}z \tag{1.6.7}$$

である．

さて，

$$\mathcal{L}_\nu J_\nu(z) = -J_\nu(z) \tag{1.6.8}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \frac{\nu^2}{z^2}\right)J_\nu(z) = J_\nu(z) \tag{1.6.9}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}J_\nu(z) + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_\nu(z) - \frac{\nu^2}{z^2}J_\nu(z) = J_\nu(z) \tag{1.6.10}$$

なる $J_\nu(z)$ を考える．1 階微分の項と微分をしない項は $z=0$ で発散するが，それぞれ z と z^2 をかければ発散しないので確定特異点である．このとき，$z=0$ の周りで $J_\nu(z)$ を指数 α の Frobenius 展開をすると，

$$J_\nu(z) = z^\alpha \sum_n u_n z^n \tag{1.6.11}$$

となる．ただし，計算の簡単のために $n<0$ なる任意の n に対して $u_n = 0$ と定めた．また，$u_0 \neq 0$ とする．**式** (1.6.11) を**式** (1.6.10) に代入することを考える．$J_\nu(z)$ の 1 階微分と 2 階微分が，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_\nu(z) = \sum_n (n+\alpha)u_n z^{n+\alpha-1} \tag{1.6.12}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}J_\nu(z) = \sum_n (n+\alpha)(n+\alpha-1)u_n z^{n+\alpha-2} \tag{1.6.13}$$

と書けることを用いると，

$$\sum_n \left[(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha) - \nu^2\right]u_n z^{n+\alpha-2} = -\sum_n u_n z^{n+\alpha} \tag{1.6.14}$$
$$\Leftrightarrow \sum_n \left[(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha) - \nu^2\right]u_n z^{n+\alpha-2} = -\sum_n u_{n-2} z^{n+\alpha-2} \tag{1.6.15}$$

となる．係数を比較すると，

$$\left[(n+\alpha)^2-\nu^2\right]u_n=-u_{n-2} \tag{1.6.16}$$

となる．式 (1.6.16) に $n=1$ を代入すると $u_{-1}=0$ より，

$$0=u_1=u_3=\cdots \tag{1.6.17}$$

を得る．また，$n=0$ を代入すると $u_0\neq 0$ より，

$$(0+\alpha)^2-\nu^2=0 \tag{1.6.18}$$

$$\Rightarrow \alpha=\pm\nu \tag{1.6.19}$$

となる．$\alpha=\nu$ を採用して式 (1.6.16) を用いると，

$$u_{n+2}=-\frac{1}{(n+\nu+2)^2-\nu^2}u_n \tag{1.6.20}$$

を得る．$\nu\in\mathbb{Z}$ のときは，

$$J_\nu(z)=u_0z^\nu\left(1-\frac{1}{2(2\nu+2)}z^2+\frac{1}{2\cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)}z^4+\cdots+(-1)^n\frac{(2\nu)!!}{(2n)!!(2\nu+2n)!!}z^{2n}+\cdots\right) \tag{1.6.21}$$

$$=u_0z^\nu\sum_{n=0}(-1)^n\frac{2^\nu\nu!}{2^nn!(\nu+n)!2^{\nu+n}}z^{2n} \tag{1.6.22}$$

$$=u_0\nu!2^\nu\sum_{n=0}\frac{1}{n!(\nu+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n} \tag{1.6.23}$$

となる．$\nu\notin\mathbb{Z}$ のときも，表せるようにガンマ関数をもちいて一般化する．式 (1.6.10) の形より，明らかに定数倍が許容されるから，

$$u_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \tag{1.6.24}$$

となるように u_0 を定めておくと，

$$J_\nu(z)=\sum_n\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n} \tag{1.6.25}$$

を得る．$J_\nu(z)$ を Bessel 関数という．また，$\alpha=-\nu$ を採用したときは，

$$J_{-\nu}(z)=\sum_n\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2n} \tag{1.6.26}$$

となり，これは $\nu\notin\mathbb{Z}$ のときに $J_\nu(z)$ と独立な解となることが示せる．$J_{-\nu}(z)$ を Neumann 関数という．

得られた Bessel 関数と Neumann 関数を用いて，

$$j_n(z)\coloneqq\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{n+\frac{1}{2}}(z) \tag{1.6.27}$$

$$y_n(z)\coloneqq(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{-n-\frac{1}{2}}(z) \tag{1.6.28}$$

$$\tag{1.6.29}$$

を定義する．$j_n(z)$ と $y_n(z)$ はそれぞれ，球 Bessel 関数，球 Neumann 関数という．さらに，球 Bessel 関数と球 Neumann 関数を用いて，

$$h_n^{(1)}(z)\coloneqq j_n(z)+\mathrm{i}y_n(z) \tag{1.6.30}$$

$$h_n^{(2)}(z)\coloneqq j_n(z)-\mathrm{i}y_n(z) \tag{1.6.31}$$

を定義する．$h_n^{(1)}$ と $h_n^{(2)}$ はそれぞれ，第 1 種 Hankel 関数，第 2 種 Hankel 関数という．

Chapter 2

物理法則と特殊函数

2.1 Helmholtz 方程式

Helmholtz 方程式,

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + \kappa^2\right)u(r,\theta,\phi) = 0 \tag{2.1.1}$$

を考える．$u(\boldsymbol{r})$ を直交基底である $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ で展開すると，

$$A_m(r,\theta) \coloneqq \int_0^{2\pi} u(r,\theta,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\,\mathrm{d}\phi \tag{2.1.2}$$

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{2.1.3}$$

$$\tag{2.1.4}$$

となる．また，極座標ラプラシアンは,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{2.1.5}$$

である．**式** (1.6.32) に**式** (1.6.36) を用いて，**式** (1.6.34) を代入すると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\\ &+\kappa^2\sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} = 0\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

$$\Leftrightarrow \sum_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_m(r,\theta)\right) - \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}A_m(r,\theta) + \kappa^2 A_m(r,\theta)\right] = 0 \tag{2.1.7}$$

となる．**式** (1.6.38) に左から $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}$ をかける，すなわち，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ に射影すると，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_m(r,\theta)\right) - \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}A_m(r,\theta) + \kappa^2 A_m(r,\theta) = 0 \tag{2.1.8}$$

を得る．Legendre 陪多項式を定義するときに用いた $\mathcal{L}_m$ において，$x = \cos\theta$ とすると，

$$\mathcal{L}_m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-\cos^2\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\} - \frac{m^2}{1-\cos^2\theta} \tag{2.1.9}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \tag{2.1.10}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \tag{2.1.11}$$

$$= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sin^2\theta\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)\right\} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \tag{2.1.12}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right\} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \tag{2.1.13}$$

であるから，**式** (1.6.39) は,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\mathcal{L}_{|m|}A_m(r,\theta) + \kappa^2 A_m(r,\theta) = 0 \tag{2.1.14}$$

となる．

続いて，$A_m(r,\theta)$ を直交基底である Legendre 陪多項式を用いて,

$$A_m(r,\theta) = \sum_{n=|m|}^{\infty} B_{nm}(r)P_n^{|m|}(\cos\theta) \tag{2.1.15}$$

と展開する．**式** (1.6.45) の両辺に $P_n^{|m|}(\cos\theta)$ との内積をとる．**式** (1.5.33) より,

$$\langle P_n^m(\cos\theta), P_n^m(\cos\theta)\rangle = \delta_n^{n'}\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{2.1.16}$$

であることと，**式** (1.5.5) より,

$$\mathcal{L}_m P_n^m(x) + n(n+1)P_n^m(x) = 0 \tag{2.1.17}$$

であることを用いれば,

$$\left\langle P_n^m(\cos\theta), \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\mathcal{L}_{|m|}A_m(r,\theta) + \kappa^2 A_m(r,\theta)\right\rangle = 0 \tag{2.1.18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\left\langle P_n^m(\cos\theta), \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right)\right\rangle + \frac{1}{r^2}\left\langle P_n^m(\cos\theta), \mathcal{L}_{|m|}A_m(r,\theta)\right\rangle + \left\langle P_n^m(\cos\theta), \kappa^2 A_m(r,\theta)\right\rangle = 0 \tag{2.1.19}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}B_{nm}(r)\right\}\right\}\langle P_n^m(\cos\theta), P_n^m(\cos\theta)\rangle + \frac{1}{r^2}B_{nm}(r)\left\langle P_n^m(\cos\theta), \mathcal{L}_{|m|}P_n^m(\cos\theta)\right\rangle$$
$$+ \kappa^2 B_{nm}(r)\langle P_n^m(\cos\theta), P_n^m(\cos\theta)\rangle = 0 \tag{2.1.20}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}B_{nm}(r)\right\}\right\} - \frac{1}{r^2}n(n+1)B_{nm}(r) + \kappa^2 B_{nm}(r)\right)\langle P_n^m(\cos\theta), P_n^m(\cos\theta)\rangle = 0 \tag{2.1.21}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}B_{nm}(r)\right\}\right\} - \frac{1}{r^2}n(n+1)B_{nm}(r) + \kappa^2 B_{nm}(r) = 0 \tag{2.1.22}$$

を得る．

式 (1.6.53) において,

$$\rho \coloneqq \kappa r \tag{2.1.23}$$

と変数変換して,

$$C_{nm}(\rho) \coloneqq \sqrt{\rho}B_{nm}(r) \tag{2.1.24}$$

と定義して代入すれば,

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} + 1 - \frac{1}{\rho^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right\}C_{nm}(\rho) = 0 \tag{2.1.25}$$

を得る．**式** (1.6.56) と **式** (1.6.9) である,

$$\mathcal{L}_\nu J_\nu(z) = -J_\nu(z) \tag{2.1.26}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + 1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) = 0 \tag{2.1.27}$$

を比べると，**式** (1.6.58) において，

$$z \to x \tag{2.1.28}$$

$$\nu = n + \frac{1}{2} \tag{2.1.29}$$

としたものであると分かる．つまり，$C_{nm}(\rho)$ は Bessel 関数 $J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ と Neumann 関数 $J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho)$ の線型結合で書かれるので，係数をそれぞれ a'_{nm}，b'_{nm} として，

$$C_{nm}(\rho) = a'_{nm}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) + b'_{nm}J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho) \tag{2.1.30}$$

と書く．今後の変形のために，球 Bessel 関数 $j_n(\rho)$ と球 Neumann 関数 $y_n(\rho)$ を用いて**式** (1.6.61) を書き直せば，

$$C_{nm}(\rho) = a'_{nm}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) + b'_{nm}J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho) \tag{2.1.31}$$

$$= \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}}a'_{nm}j_n(\rho) + \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}}b'_{mn}y_n(\rho) \tag{2.1.32}$$

$$= \sqrt{\rho}[a_{nm}j_n(\rho) + b_{mn}y_n(\rho)] \tag{2.1.33}$$

である．ただし，

$$a_{nm} \coloneqq a'_{nm}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{2.1.34}$$

$$b_{nm} \coloneqq b'_{nm}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{2.1.35}$$

と定めた．

さて，今 Helmholtz 方程式の解の基底展開を行っているのであった．今までに定義した展開を全てまとめると，

$$\text{式 (1.6.34) より } u(r,\theta,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{2.1.36}$$

$$\text{式 (1.6.46) より } A_m(r,\theta) = \sum_{n=|m|}^{\infty} B_{nm}(r)P_n^{|m|}(\cos\theta) \tag{2.1.37}$$

$$\text{式 (1.6.54) より } \rho = \kappa r \tag{2.1.38}$$

$$\text{式 (1.6.55) より } B_{nm}(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}C_{nm}(\rho) \tag{2.1.39}$$

$$\text{式 (1.6.64) より } C_{nm}(\rho) = \sqrt{\rho}[a_{nm}j_n(\rho) + b_{mn}y_n(\rho)] \tag{2.1.40}$$

となる．下から上に全て代入して整理すると，

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}[a_{nm}j_n(\kappa r) + b_{nm}y_n(\kappa r)]P_n^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{2.1.41}$$

となる．今後の計算を行うとき，

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\phi}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\right\rangle = 2\pi\delta_m^{m'} \tag{2.1.42}$$

$$\langle P_{n'}^m(x), P_n^m(x)\rangle = \delta_n^{n'}\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{2.1.43}$$

となっているのはいささか都合が悪いので，球面分布函数 $Y_{nm}(\theta,\phi)$ を，

$$Y_{nm}(\theta,\phi) \coloneqq (-1)^m\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right)P_n^m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{2.1.44}$$

$$= (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{2.1.45}$$

として定義しておく．球面分布函数を用いて**式** (1.6.72) を書き換えれば，

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}\left[a_{nm}j_n(\kappa r) + b_{nm}y_n(\kappa r)\right](-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{2.1.46}$$

となる．定数倍は a_{nm} や b_{nm} で吸収することにする．