

# Chapter 1

## 特殊函数の紹介

### 1.1 物理と特殊函数

特殊函数は物理が用いる数学の道具である．WIP

### 1.2 Hermite 演算子

#### 定義 1.1: Hermite 演算子

内積が定義されている函数空間  $V$  の任意の元  $f, g$  に対して,

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{L}f, g \rangle \quad (1.2.1)$$

なる演算子  $\mathcal{L}$  を Hermite 演算子という．

### 1.3 Sturm-Liouville 演算子

#### 定義 1.2: Sturm-Liouville 演算子

$a < b$  として,  $x \in [a, b]$  で定義された関数空間  $V$  を考える． $\rho(x)$  を非負の実数関数として,  $f, g \in V$  に対して,

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x) dx \quad (1.3.1)$$

なる内積を入れる．関数空間  $V$  上の演算子として  $\mathcal{L}$  を,

$$\mathcal{L} := \frac{1}{\rho(x)} \left[ \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\} + q(x) \right] \quad (1.3.2)$$

とする．式 (??) なる形をした演算子を Sturm-Liouville 演算子という．

#### 命題 1.1: Sturm-Liouville 演算子の Hermite 性

境界条件を,  $\forall f \in V$  について,

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ p(a)f'(a) = p(b)f'(b) \end{cases} \quad (1.3.3)$$

とすると,

$$\langle f, \mathcal{L}g \rangle = \langle \mathcal{L}f, g \rangle \quad (1.3.4)$$

が成立する.

*Proof.* 内積の定義より,

$$\langle f, \mathcal{L}g \rangle = \int_a^b f^*(x) \frac{1}{\rho(x)} \left[ \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} g(x) \right\} + q(x) g(x) \right] \rho(x) dx \quad (1.3.5)$$

$$= \int_a^b f^*(x) \left[ \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} g(x) \right\} + q(x) g(x) \right] dx \quad (1.3.6)$$

$$= [f^*(x) g'(x)]_a^b - \int_a^b f'^*(x) p(x) g'(x) dx + \int_a^b f^*(x) q(x) g(x) dx \quad (1.3.7)$$

$$= [f^*(x) p(x) g'(x)]_a^b - [f'^*(x) p(x) g(x)]_a^b + \int_a^b g(x) \frac{1}{\rho(x)} \left[ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} f^*(x) \right) + q(x) f^*(x) \right] \rho(x) dx \quad (1.3.8)$$

$$= [f^*(x) p(x) g'(x)]_a^b - [f'^*(x) p(x) g(x)]_a^b + \langle g, \mathcal{L}f \rangle^* \quad (1.3.9)$$

$$= [f^*(x) p(x) g'(x)]_a^b - [g(x) p(x) f'^*(x)]_a^b + \langle \mathcal{L}f, g \rangle \quad (1.3.10)$$

となる. 第1項と第2項について, 第1項に  $f(a) = f(b)$  を, 第2項に  $p(x)$  が実数値関数であり  $p(a)f'(a) = p(b)f'(b)$  であることを用いると

$$[f^*(x) p(x) g'(x)]_a^b - [f'^*(x) p(x) g(x)]_a^b = \{p(b)g'(b) - p(a)f'(a)\} f^*(a) - \{g(b) - g(a)\} p(a) f'(a) \quad (1.3.11)$$

を得る. 今度は, 第1項に  $p(x)$  が実数値関数であり  $p(a)g'(a) = p(b)g'(b)$  であることを, 第2項に  $g(a) = g(b)$  を用いれば,

$$\langle f, \mathcal{L}g \rangle = \langle \mathcal{L}f, g \rangle \quad (1.3.12)$$

を得る.  $\square$

## 1.4 Legendre 多項式

### 定義 1.3: $\mathcal{L}_m$ の定義

演算子  $\mathcal{L}_m$  を,

$$\mathcal{L}_m := \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} \right\} - \frac{m^2}{1-x^2} \quad (1.4.1)$$

と定義する. ただし,  $m \in \{0, 1, \dots\}$  である. 境界条件は,

$$p(\pm 1) f^*(\pm 1) g'(\pm 1) = 0 \quad (1.4.2)$$

とする.

### 注意 1.1

$\mathcal{L}_m$  は式 (??) において,

$$a = -b = 1 \quad (1.4.3)$$

$$\rho(x) = 1 \quad (1.4.4)$$

$$p(x) = 1 - x^2 \quad (1.4.5)$$

$$q(x) = -\frac{m^2}{1 - x^2} \quad (1.4.6)$$

としたものであるから,

$$\mathcal{L}_m = \frac{d}{dx} \left\{ (1 - x^2) \frac{d}{dx} \right\} - \frac{m^2}{1 - x^2} \quad (1.4.7)$$

となる. 内積は,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f^*(x) g(x) dx \quad (1.4.8)$$

となる.

### 命題 1.2: $\mathcal{L}_m$ の Hermite 性

演算子  $\mathcal{L}$  は Hermite 演算子である.

*Proof.* たとえば,  $g'(x) = p(x)$  となるように  $g(x)$  を定めれば,  $f(1) = f(-1) = 0$  となる. また,  $f(x) = 1$  となるように  $f(x)$  を定めれば,  $p(1)g'(1) = p(-1)g'(1) = 0$  となるので, 前節で示した境界条件を満足する.  $\square$

さて, Legendre 多項式  $P_n(x)$  は  $n$  を非負整数として,

$$\mathcal{L}_0 P_n(x) = -n(n+1)P_n(x) \quad (1.4.9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left\{ (1 - x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right\} = -n(n+1)P_n(x) \quad (1.4.10)$$

なる  $P_n(x)$  のうち,  $x = 0$  周りで級数展開したもので,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \quad (1.4.11)$$

と書いたとき,

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \quad (1.4.12)$$

$$u_{n+1} = 0 \quad (1.4.13)$$

なるものである. 式 (??) を式 (??) に代入すると,

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1 - x^2) \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \right\} = -n(n+1) \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \quad (1.4.14)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} j u_j \frac{d}{dx} (x^{j-1} - x^{j+1}) = -n(n+1) \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \quad (1.4.15)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) u_j x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) u_j x^j = -n(n+1) \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \quad (1.4.16)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) u_j x^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} u_j [j(j+1) - n(n+1)] x^j \quad (1.4.17)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)u_j x^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} u_j [j(j+1) - n(n+1)]x^j \quad (1.4.18)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)u_{j+2}x^j = \sum_{j=0}^{\infty} u_j [j(j+1) - n(n+1)]x^j \quad (1.4.19)$$

となるから,

$$(j+1)(j+2)u_{j+2} = [j(j+1) - n(n+1)]u_j \quad (1.4.20)$$

なる漸化式が成立する. 式 (??) において  $j = n$  を代入すると,  $u_{n+2} = 0$  となる. また,  $j = n+1$  を代入すると式 (??) より  $u_{n+1} = 0$  である. よって,

$$0 = u_{n+1} = u_{n+2} = u_{n+3} = u_{n+4} = \cdots \quad (1.4.21)$$

となる. また, 式 (??) に  $j = n-2$  を代入すると,

$$u_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}u_n \quad (1.4.22)$$

となる. よって, 式 (??) と式 (??) を用いて式 (??) を表すと,

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)}x^{n-4} + \cdots \right] \quad (1.4.23)$$

$$= \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!} x^{n-2s} \quad (1.4.24)$$

となる.

### 命題 1.3: Rodrigues の公式

Legendre 多項式  $P_n(x)$  は,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (1.4.25)$$

とも書ける.

*Proof.*

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \sum_{s=0}^n \frac{d^n}{dx^n} (-1)^s \binom{n}{s} x^{2n-2s} \quad (1.4.26)$$

$$= \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^s \frac{n!}{s!(n-s)!} \frac{(2n-2s)!}{(n-2s)!} \quad (1.4.27)$$

なる関係を用いると, WIP □

## 1.5 Legendre 陪多項式

### 定義 1.4: Legendre 陪多項式

Legendre 陪多項式  $P_n^m(x)$  は  $m \leq n$  として,

$$P_n^m(x) := (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (1.5.1)$$

と定義される.

### 注意 1.2

式 (??) を用いれば,

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (1.5.2)$$

$$= (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad (1.5.3)$$

$$= \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (1.5.4)$$

と書ける.

### 命題 1.4: Legendre の陪微分方程式

$P_n^m$  は Legendre の陪微分方程式,

$$\mathcal{L}_m P_n^m(x) + n(n+1)P_n^m(x) = 0 \quad (1.5.5)$$

を満たす.

WIP

Legendre 多項式の直交性とノルムを調べる. Legendre 陪多項式の直交性は  $\mathcal{L}_m$  が Hermite 演算子であり, その固有関数である  $P_n^m(x)$  が直交することより従う. 自分自身との内積, つまり,  $\langle P_n^m(x), P_n^m(x) \rangle$  の値を計算する. 式 (??) を用いて, 式 (??) で示した内積の定義に従って計算する.  $n+m$  回部分積分を行うと,

$$\langle P_n^m(x), P_n^m(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} (1-x^2)^m \left\{ \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^m \right\} \left\{ \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^m \right\} dx \quad (1.5.6)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \left\{ \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^m \right\} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^{n+m-1}}{dx^{n+m-1}} (x^2-1)^m \right\} dx \quad (1.5.7)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \left[ (1-x^2)^m \left\{ \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^m \right\} \left\{ \frac{d^{n+m-1}}{dx^{n+m-1}} (x^2-1)^m \right\} \right]_{-1}^1 \quad (1.5.8)$$

$$- \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d}{dx} (1-x^2)^m \left\{ \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \right\} \right\} \left\{ \frac{d^{n+m+1}}{dx^{n+m+1}} (x^2-1)^m \right\} dx \quad (1.5.9)$$

$$= -\frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d}{dx} (1-x^2)^m \left\{ \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \right\} \right\} \left\{ \frac{d^{n+m+1}}{dx^{n+m+1}} (x^2-1)^m \right\} dx \quad (1.5.10)$$

$$= \dots \quad (1.5.11)$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \left\{ \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (1-x^2)^m \left\{ \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \right\} \right\} dx \quad (1.5.12)$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \left[ \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} \left\{ \frac{d^{n+m-k}}{dx^{n+m-k}} (1-x^2)^m \right\} \left\{ \frac{d^{n+m+k}}{dx^{n+m+k}} (x^2-1)^n \right\} \right] dx \quad (1.5.13)$$

となる. 最終行で Leibniz の公式を用いた. 式 (??) の和の中の  $n+m-k$  階微分と  $n+m-k$  階微分を考える.  $(1-x^2)^m$  と  $(x^2-1)^n$  の最高次数は, それぞれ  $2m$  と  $2n$  であるから,  $2m \geq n+m-k$  かつ  $2n \geq n+m+k$  なる  $k$  でのみ和の

中は0でなくなる. つまり,  $n - m \leq k$  かつ  $n - m \geq k$  なる  $k$  は  $k = n - m$  のみである. よって, 式(??)は,

$$\langle P_n^m(x), P_n^m(x) \rangle = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \left[ \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} \left\{ \frac{d^{n+m-k}}{dx^{n+m-k}} (1-x^2)^m \right\} \left\{ \frac{d^{n+m+k}}{dx^{n+m+k}} (x^2-1)^n \right\} \right] dx \quad (1.5.14)$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \left[ \binom{n+m}{n-m} \left\{ \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (1-x^2)^m \right\} \left\{ \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n \right\} \right] dx \quad (1.5.15)$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^m (2m)!(2n)! \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \quad (1.5.16)$$

積分は,  $x = \cos \theta$  と置換すると,

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \int_{-1}^1 \sin^{2n+1} \theta d\theta \quad (1.5.17)$$

となる.  $I_{2n+1}$  を,

$$I_{2n+1} := \int_0^\pi \sin^{2n+1} \theta d\theta \quad (1.5.18)$$

と定義すると,

$$I_{2n+1} = \int_0^\pi \sin^{2n} \theta \frac{d}{d\theta} (-\cos \theta) d\theta \quad (1.5.19)$$

$$= [\sin^{2n} \theta \cdot (-\cos \theta)]_0^\pi + 2n \int_0^\pi \sin^{2n-1} \theta \cos^2 \theta d\theta \quad (1.5.20)$$

$$= 2n I_{2n-1} - 2n I_{2n+1} \quad (1.5.21)$$

となるので,

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} \quad (1.5.22)$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} \quad (1.5.23)$$

$$= \dots \quad (1.5.24)$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 \quad (1.5.25)$$

$$= 2 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (1.5.26)$$

$$= 2 \cdot 2^n n! \cdot \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \quad (1.5.27)$$

となる. 2重階乗について,

$$(2n)!! = 2^n n! \quad (1.5.28)$$

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \quad (1.5.29)$$

なる関係が成り立つことを用いると,

$$\langle P_n^m(x), P_n^m(x) \rangle = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^m (2m)!(2n)! \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!} (-1)^n 2 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (1.5.30)$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^m (2m)!(2n)! \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!} (-1)^n 2 \cdot 2^n n! \cdot \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \quad (1.5.31)$$

$$= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (1.5.32)$$

となる. Legendre 多項式の直交性とまとめて書くと,

$$\langle P_n^m(x), P_n^m(x) \rangle = \delta_n^{n'} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (1.5.33)$$

となる.

## 1.6 Bessel 関数

### 定義 1.5: $\mathcal{L}_\nu$ の定義

函数空間は,  $[0, a]$  で  $C^1$  級の複素函数全体であるとする.  $\mathcal{L}_\nu$  を,

$$\mathcal{L}_\nu := \frac{1}{z} \left[ \frac{d}{dz} \left\{ z \frac{d}{dz} \right\} - \frac{\nu^2}{z} \right] \quad (1.6.1)$$

と定義する.

### 注意 1.3

$\mathcal{L}_\nu$  は式 (??) において, また,

$$a \rightarrow 0 \quad (1.6.2)$$

$$b \rightarrow a \quad (1.6.3)$$

$$\rho(z) = x \quad (1.6.4)$$

$$p(z) = x \quad (1.6.5)$$

$$q(z) = -\frac{\nu^2}{z}, \quad \nu \geq 0 \quad (1.6.6)$$

としたものである. すなわち,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a f^*(z) g(z) x \, dz \quad (1.6.7)$$

である.

さて,

$$\mathcal{L}_\nu J_\nu(z) = -J_\nu(z) \quad (1.6.8)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{\nu^2}{z^2} \right) J_\nu(z) = -J_\nu(z) \quad (1.6.9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dz^2} J_\nu(z) + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_\nu(z) - \frac{\nu^2}{z^2} J_\nu(z) = -J_\nu(z) \quad (1.6.10)$$

なる  $J_\nu(z)$  を考える. 1 階微分の項と微分をしない項は  $z=0$  で発散するが, それぞれ  $z$  と  $z^2$  をかければ発散しないので確定特異点である. このとき,  $z=0$  の周りで  $J_\nu(z)$  を指数  $\alpha$  の Frobenius 展開をすると,

$$J_\nu(z) = z^\alpha \sum_n u_n z^n \quad (1.6.11)$$

となる. ただし, 計算の簡単のために  $n < 0$  なる任意の  $n$  に対して  $u_n = 0$  と定めた. また,  $u_0 \neq 0$  とする. 式 (??) を式 (??) に代入することを考える.  $J_\nu(z)$  の 1 階微分と 2 階微分が,

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) = \sum_n (n + \alpha) u_n z^{n+\alpha-1} \quad (1.6.12)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} J_\nu(z) = \sum_n (n + \alpha)(n + \alpha - 1) u_n z^{n+\alpha-2} \quad (1.6.13)$$

と書けることを用いると,

$$\sum_n [(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + (n + \alpha) - \nu^2] u_n z^{n+\alpha-2} = - \sum_n u_n z^{n+\alpha} \quad (1.6.14)$$

$$\Leftrightarrow \sum_n [(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + (n + \alpha) - \nu^2] u_n z^{n+\alpha-2} = - \sum_n u_{n-2} z^{n+\alpha-2} \quad (1.6.15)$$

となる. 係数を比較すると,

$$[(n + \alpha)^2 - \nu^2] u_n = -u_{n-2} \quad (1.6.16)$$

となる. 式 (??) に  $n = 1$  を代入すると  $u_{-1} = 0$  より,

$$0 = u_1 = u_3 = \cdots \quad (1.6.17)$$

を得る. また,  $n = 0$  を代入すると  $u_0 \neq 0$  より,

$$(0 + \alpha)^2 - \nu^2 = 0 \quad (1.6.18)$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \nu \quad (1.6.19)$$

となる.  $\alpha = \nu$  を採用して式 (??) を用いると,

$$u_{n+2} = - \frac{1}{(n + \nu + 2)^2 - \nu^2} u_n \quad (1.6.20)$$

を得る.  $\nu \in \mathbb{Z}$  のときは,

$$J_\nu(z) = u_0 z^\nu \left( 1 - \frac{1}{2(2\nu + 2)} z^2 + \frac{1}{2 \cdot 4(2\nu + 2)(2\nu + 4)} z^4 + \cdots + (-1)^n \frac{(2\nu)!!}{(2n)!!(2\nu + 2n)!!} z^{2n} + \cdots \right) \quad (1.6.21)$$

$$= u_0 z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^\nu \nu!}{2^n n! (\nu + n)! 2^{\nu+n}} z^{2n} \quad (1.6.22)$$

$$= u_0 \nu! 2^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (\nu + n)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{\nu+2n} \quad (1.6.23)$$

となる.  $\nu \notin \mathbb{Z}$  のときも, 表せるようにガンマ関数をもちいて一般化する. 式 (??) の形より, 明らかに定数倍が許容されるから,

$$u_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \quad (1.6.24)$$

となるように  $u_0$  を定めておくと,

$$J_\nu(z) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + k + 1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{\nu+2n} \quad (1.6.25)$$

を得る.  $J_\nu(z)$  を Bessel 関数という. また,  $\alpha = -\nu$  を採用したときは,

$$J_{-\nu}(z) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{-\nu+2n} \quad (1.6.26)$$

となり, これは  $\nu \notin \mathbb{Z}$  のときに  $J_\nu(z)$  と独立な解となることが示せる.  $J_{-\nu}(z)$  を Neumann 関数という. 得られた Bessel 関数と Neumann 関数を用いて,

$$j_n(z) := \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad (1.6.27)$$



$$y_n(z) := (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-n-\frac{1}{2}}(z) \quad (1.6.28)$$

$$(1.6.29)$$

を定義する.  $j_n(z)$  と  $y_n(z)$  はそれぞれ, 球 Bessel 関数, 球 Neumann 関数という. さらに, 球 Bessel 関数と球 Neumann 関数を用いて,

$$h_n^{(1)}(z) := j_n(z) + iy_n(z) \quad (1.6.30)$$

$$h_n^{(2)}(z) := j_n(z) - iy_n(z) \quad (1.6.31)$$

を定義する.  $h_n^{(1)}$  と  $h_n^{(2)}$  はそれぞれ, 第 1 種 Hankel 関数, 第 2 種 Hankel 関数という.

## Chapter 2

# 物理法則と特殊函数

### 2.1 Helmholtz 方程式

Helmholtz 方程式,

$$(\nabla^2 + \kappa^2)u(r, \theta, \phi) = 0 \quad (2.1.1)$$

を考える.  $u(\mathbf{r})$  を直交基底である  $e^{im\phi}$  で展開すると,

$$A_m(r, \theta) := \int_0^{2\pi} u(r, \theta, \phi) e^{-im\phi} d\phi \quad (2.1.2)$$

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_m A_m(r, \theta) e^{im\phi} \quad (2.1.3)$$

$$(2.1.4)$$

となる. また, 極座標ラプラシアンは,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.1.5)$$

である. 式 (??) に式 (??) を用いて, 式 (??) を代入すると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \sum_m A_m(r, \theta) e^{im\phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_m A_m(r, \theta) e^{im\phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \sum_m A_m(r, \theta) e^{im\phi} \\ & + \kappa^2 \sum_m A_m(r, \theta) e^{im\phi} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_m e^{im\phi} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} A_m(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} A_m(r, \theta) \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} A_m(r, \theta) + \kappa^2 A_m(r, \theta) \right] = 0 \quad (2.1.7)$$

となる. 式 (??) に左から  $\int_0^{2\pi} d\phi e^{-im\phi}$  をかける, すなわち,  $e^{im\phi}$  に射影すると,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} A_m(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} A_m(r, \theta) \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} A_m(r, \theta) + \kappa^2 A_m(r, \theta) = 0 \quad (2.1.8)$$

を得る. Legendre 陪多項式を定義するとき用いた  $\mathcal{L}_m$  において,  $x = \cos \theta$  とすると,

$$\mathcal{L}_m = \frac{d}{dx} \left\{ (1 - \cos^2 \theta) \frac{d}{dx} \right\} - \frac{m^2}{1 - \cos^2 \theta} \quad (2.1.9)$$

$$= \frac{d}{dx} \left\{ \sin^2 \theta \frac{d}{dx} \right\} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \quad (2.1.10)$$

$$= \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{dx} \left\{ \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{dx} \right\} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \quad (2.1.11)$$

$$= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{dx} \left\{ \sin^2 \theta \left( -\frac{1}{\sin \theta} \right) \right\} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \quad (2.1.12)$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{dx} \left\{ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right\} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \quad (2.1.13)$$

であるから、式 (??) は、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} A_m(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \mathcal{L}_{|m|} A_m(r, \theta) + \kappa^2 A_m(r, \theta) = 0 \quad (2.1.14)$$

となる。

続いて、 $A_m(r, \theta)$  を直交基底である Legendre 陪多項式を用いて、

$$A_m(r, \theta) = \sum_{n=|m|}^{\infty} B_{nm}(r) P_n^{|m|}(\cos \theta) \quad (2.1.15)$$

と展開する。式 (??) の両辺に  $P_n^{|m|}(\cos \theta)$  との内積をとる。式 (??) より、

$$\langle P_n^m(\cos \theta), P_n^m(\cos \theta) \rangle = \delta_n^{n'} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (2.1.16)$$

であることと、式 (??) より、

$$\mathcal{L}_m P_n^m(x) + n(n+1) P_n^m(x) = 0 \quad (2.1.17)$$

であることを用いれば、

$$\left\langle P_n^m(\cos \theta), \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} A_m(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \mathcal{L}_{|m|} A_m(r, \theta) + \kappa^2 A_m(r, \theta) \right\rangle = 0 \quad (2.1.18)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2} \left\langle P_n^m(\cos \theta), \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} A_m(r, \theta) \right) \right\rangle + \frac{1}{r^2} \langle P_n^m(\cos \theta), \mathcal{L}_{|m|} A_m(r, \theta) \rangle + \langle P_n^m(\cos \theta), \kappa^2 A_m(r, \theta) \rangle = 0 \quad (2.1.19)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{d}{dr} r^2 \left\{ \frac{d}{dr} B_{nm}(r) \right\} \right\} \langle P_n^m(\cos \theta), P_n^m(\cos \theta) \rangle + \frac{1}{r^2} B_{nm}(r) \langle P_n^m(\cos \theta), \mathcal{L}_{|m|} P_n^m(\cos \theta) \rangle \\ + \kappa^2 B_{nm}(r) \langle P_n^m(\cos \theta), P_n^m(\cos \theta) \rangle = 0 \quad (2.1.20)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{d}{dr} r^2 \left\{ \frac{d}{dr} B_{nm}(r) \right\} \right\} - \frac{1}{r^2} n(n+1) B_{nm}(r) + \kappa^2 B_{nm}(r) \right) \langle P_n^m(\cos \theta), P_n^m(\cos \theta) \rangle = 0 \quad (2.1.21)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{d}{dr} r^2 \left\{ \frac{d}{dr} B_{nm}(r) \right\} \right\} - \frac{1}{r^2} n(n+1) B_{nm}(r) + \kappa^2 B_{nm}(r) = 0 \quad (2.1.22)$$

を得る。

式 (??) において、

$$\rho := \kappa r \quad (2.1.23)$$

と変数変換して、

$$C_{nm}(\rho) := \sqrt{\rho} B_{nm}(r) \quad (2.1.24)$$

と定義して代入すれば、

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + 1 - \frac{1}{\rho^2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} C_{nm}(\rho) = 0 \quad (2.1.25)$$

を得る。式 (??) と式 (??) である、

$$\mathcal{L}_\nu J_\nu(z) = -J_\nu(z) \quad (2.1.26)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) = 0 \quad (2.1.27)$$

を比べると、式 (??) において、

$$z \rightarrow x \quad (2.1.28)$$

$$\nu = n + \frac{1}{2} \quad (2.1.29)$$

としたものであると分かる。つまり、 $C_{nm}(\rho)$  は Bessel 関数  $J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$  と Neumann 関数  $J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho)$  の線型結合で書かれるので、係数をそれぞれ  $a'_{nm}$ ,  $b'_{nm}$  として、

$$C_{nm}(\rho) = a'_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) + b'_{nm} J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho) \quad (2.1.30)$$

と書く。今後の変形のために、球 Bessel 関数  $j_n(\rho)$  と球 Neumann 関数  $y_n(\rho)$  を用いて式 (??) を書き直せば、

$$C_{nm}(\rho) = a'_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) + b'_{nm} J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho) \quad (2.1.31)$$

$$= \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} a'_{nm} j_n(\rho) + \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} b'_{nm} y_n(\rho) \quad (2.1.32)$$

$$= \sqrt{\rho} [a_{nm} j_n(\rho) + b_{nm} y_n(\rho)] \quad (2.1.33)$$

である。ただし、

$$a_{nm} := a'_{nm} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.1.34)$$

$$b_{nm} := b'_{nm} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.1.35)$$

と定めた。

さて、今 Helmholtz 方程式の解の基底展開を行っているのであった。今までに定義した展開を全てまとめると、

$$\text{式 (??) より } u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(r, \theta) e^{im\phi} \quad (2.1.36)$$

$$\text{式 (??) より } A_m(r, \theta) = \sum_{n=|m|}^{\infty} B_{nm}(r) P_n^{|m|}(\cos \theta) \quad (2.1.37)$$

$$\text{式 (??) より } \rho = \kappa r \quad (2.1.38)$$

$$\text{式 (??) より } B_{nm}(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} C_{nm}(\rho) \quad (2.1.39)$$

$$\text{式 (??) より } C_{nm}(\rho) = \sqrt{\rho} [a_{nm} j_n(\rho) + b_{nm} y_n(\rho)] \quad (2.1.40)$$

となる。下から上に全て代入して整理すると、

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} [a_{nm} j_n(\kappa r) + b_{nm} y_n(\kappa r)] P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.1.41)$$

となる。今後の計算を行うとき、

$$\langle e^{im'\phi}, e^{im\phi} \rangle = 2\pi \delta_m^{m'} \quad (2.1.42)$$

$$\langle P_n^m(x), P_n^m(x) \rangle = \delta_n^{n'} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (2.1.43)$$

となっているのはいささか都合が悪いので、球面分布函数  $Y_{nm}(\theta, \phi)$  を、

$$Y_{nm}(\theta, \phi) := (-1)^m \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right) P_n^m(x) e^{im\phi} \quad (2.1.44)$$

$$= (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x) e^{im\phi} \quad (2.1.45)$$

として定義しておく．球面分布函数を用いて式 (??) を書き換えれば,

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} [a_{nm} j_n(\kappa r) + b_{nm} y_n(\kappa r)] (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x) e^{im\phi} \quad (2.1.46)$$

となる．定数倍は  $a_{nm}$  や  $b_{nm}$  で吸収することにする．