初学者のための集合論入門

はじめに

本稿は，主にこれから数学を学び始めようという人を対象とした，数学を学ぶ上で必要最低限の集合論の内容を扱ったものである．そのため，集合論自体の面白さを理解するレベルまでは追求せず，基本的な記号・用語のみを述べることにとどめている．また，間違いはないように努めているが，一部説明の簡略化のため，数学的厳密性を欠いた表現を用いてる箇所があることに注意されたい．

数学を学ぶ上で十分の集合論を理解したというためには，記号・用語を知るだけでなく，自らが使いこなせることが不可欠である．そのため本稿は，別稿「初学者のための集合論入門　演習編」と共用することを前提としている．いくつかの例や証明はそちらに任せているため，演習編のすべての問題を解くことを強く推奨する．

1　命題

定義 1.1. 数学的に正しいか間違っているか判別可能な主張を命題という[1)]．ある命題が正しいとき，その命題は真である，その命題は成立する，といい，間違っているとき，その命題は偽である，その命題は成立しない，という．また，命題の真偽のことを真理値という．

命題のことを P や Q などの文字で表すことも多い．

定義 1.2. 命題 P, Q に対して，P, Q のうち少なくとも一つは真である，という命題[2)]を，

$$P \text{ または } Q \quad P \vee Q$$

と書き，P または Q という[3)]．

定義 1.3. 命題 P, Q に対して，P と Q の両方とも真である，という命題を，

$$P \text{ かつ } Q \quad P \wedge Q$$

などと書き，P かつ Q という．

1) ここで，正しいや間違っているという語は数学的に正確に定義していないが，通常の日常用語の意味で捉えて問題ない．また，数学的に正しいとも間違っているとも言えないことが示された命題も存在するが，今の段階で気にする必要はない．

2) P と Q は数学的に真偽が判別できるのだから，この主張も数学的に真偽が判別可能である．

3) 日常用語で P または Q といった際は，どちらか片方のみが成り立つことを意味する場合があるので注意が必要である．

定義 1.4. 命題 P に対して，P が偽である，という命題を，

$$P \text{ でない} \quad \neg P$$

などと書き，P の否定という．

ここで，以下のような表を導入する．このような表のことを真偽表という．表中の T は真，F は偽を表しており，命題 P と命題 Q の 4 種類の真偽の組合せに各行が対応している．例えば一番上の行は，P と Q が共に真である場合の，$P \wedge Q, P \vee Q, \neg P$ に関する真理値が書かれている．特に今回のように命題が P と Q に関するものである場合は命題 P, Q に関する真偽表ともいう[4]．

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

定義 1.5. 命題 P, Q に対して，$\neg P \vee Q$ という命題を

$$P \text{ ならば } Q \quad P \Rightarrow Q$$

などと書く[5]．

定義 1.6. 命題 P, Q に対して，$P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$ という命題を

$$P \Leftrightarrow Q$$

と書く．また，この命題が真であるとき，P と Q は等しい，P と Q は同値であるなどという．

命題 P の真偽が何らかの変数 x の値によって決まるとき，P を x を変数とする命題といい，このことを明確にするときは $P(x)$ と書く[6]．複数の変数の値で決まる場合も同様に，$P(x, y, z)$ などと書く．

定義 1.7. P を x を変数とする命題とする．このとき，どのような x に対しても $P(x)$ が真である，という命題を

$$\forall x \ P(x)$$

と書き，この命題が真であるとき，任意の x に対して $P(x)$ が成り立つなどという[7]．

[4] 真偽表は特に二つの命題の真偽が一致すること（後述する同値）を示すのに有効である．例えば，$\neg P \wedge \neg Q$ と $\neg(P \vee Q)$ の真偽が全く同じであることはこの表を書くことで容易に示される．

[5] 少々見慣れない形であるが，真偽表を書くことにより，P と Q が両方真，もしくは P が偽であるときに真となることが分かる．また，P と $P \Rightarrow Q$ が共に真ならば，Q は真である．

[6] 例えば，P が，$3x$ は整数である，という命題の時，$x = 1$ であれば P は真であり，$x = \sqrt{2}$ であれば P は偽である．

[7] この時 x がとりうる全ての値を明確にする必要がある．例えば，$P(x)$ が $3x$ は整数である，という命題のとき，x がとりうる値が整数であるか実数であるかによって，$\forall x \ P(x)$ の真偽が異なる．

定義 1.8. P を x を変数とする命題とする．このとき，少なくとも一つの x に対して $P(x)$ が真である，という命題を

$$\exists x\ P(x)$$

と書き，この命題が真であるとき，ある x に対して $P(x)$ が成り立つなどという[8)]．

注意 1.9. 定義 1.7 および定義 1.8 の記号は組合わせることが可能である．例えば，P を a, b, c, d を変数とする命題とするとき，$\forall a\ \exists b\ \exists c\ \forall d\ P(a, b, c, d)$ などとしてよい[9)]．

2 集合

定義 2.1. ものの集まりのことを集合という．S を集合とするとき，S に入っている個々のもののことを S の元（または要素）という．x が S の元であるとき，$x \in S$ と書き，x は S に属する，または S は x を含むなどという．

定義 2.2. 集合 A, B に対し，$\forall x \in A\ x \in B$[10)]が成り立つとき，

$$A \subset B$$

と書き，A は B の部分集合であるという．

定義 2.3. 集合 A, B に対し，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるとき，

$$A = B$$

と書き，A と B は（集合として）等しいという．

定義 2.4. 一つも要素を持たない集合のことを空集合といい ϕ と書く[11)]．

注意 2.5. どのような集合 A に対しても，$\phi \subset A$ が成り立ち，またどのような x に対しても，$x \notin \phi$ が成り立つ．

ここで，集合を定義するには主に二通りの方法がある．

$$A = \{a, b, c, d\}$$

のように具体的に要素を列挙する形で定義する書き方を外延的記法という．これに対し，

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

と書き，A を $P(x)$ が真となるような x を全て集めたものとして定義する方法を内包的記法という[12)]．

[8)]命題 1.7 と同様に，x がとりうる値を明確にする必要がある．

[9)]詳しくは演習編を参照のこと

[10)]このように書いたときは，x は A の全ての要素をとりうる変数であることを意味する．

[11)]このような集合が存在することは，我々が普段採用している公理系に基づいてる．

[12)]例えば $A = \{x \mid P(x)\}$ と書く際には，命題 1.7，1.8 同様中括弧内の x が取りうる値を明確にしなければならない．x が別の集合 B の全ての要素をとりうる場合は，$A = \{x \in B \mid P(x)\}$ と書ける．またこのような理由により，この記法は，本質的にある集合の部分集合を定義する際のみにしか用いることができないが詳細は公理的集合論を参照されたい．

定義 2.6. 集合 A, B に対し，和集合 $A \cup B$ を，

$$A \cup B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

により定義する．

定義 2.7. 集合 A, B に対し，共通部分（積集合）$A \cap B$ を，

$$A \cap B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

により定義する．

命題 2.8. 集合 A, B, C に対し，

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

が成り立つ．

命題 2.8 により，集合 A, B, C に対し，三つの集合の和集合および共通部分を

$$A \cup B \cup C$$
$$A \cap B \cap C$$

と書ける[13)]．また，n 個の集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対し，すべての集合の和集合および共通部分を

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \coloneqq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \coloneqq A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

と書く[14)]

定義 2.9. 集合 A, B に対し，差集合 $A \setminus B$ を

$$A \setminus B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

により定義する．

定義 2.10. 集合 A, B に対し，A の元 a と B の元 b の順序付けられた組 (a, b) 全体からなる集合を $A \times B$ と書き[15)]，A と B の直積集合という．$A \times B$ の二つの要素 $(a, b), (a', b')$ に対し，

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{かつ } b = b'$$

と定義する．

定義 2.11. 集合 A に対し，A の部分集合全てからなる集合を 2^A と書き，A の冪集合という[16)]．

[13)] 括弧の付ける位置によって結果が変わらないため，括弧を付ける必要がないということ．
[14)] ここでは有限個の集合の和集合と共通部分のみ定義するが，無限個の集合の場合もほとんど同様に定義される．
[15)] $X \times X$ は X^2 とも書く．
[16)] 2^A の各要素は集合であること，$\phi \in 2^A$ であることに注意．

3　写像

定義 3.1. A, B を集合とする．A の各元 a に対して，B のある一つの元 $f(a)$ を対応させたものを A から B への写像という．f を A から B への写像とするとき，$a \in A$ の対応先を $f(a)$ と書き，a は $f(a)$ に行くなどという．このとき，A を f の定義域，B を f の終域という．また，写像 f が A から B への写像であることを書くときは，$f : A \to B$ と書き，$a \in A$ が $f(a)$ に対応することを書くときは，$a \mapsto f(a)$ と書く．

定義 3.2. A, B を集合とする．$f, g : A \to B$ に対し，

$$\forall a \in A \ f(a) = g(a)$$

が成り立つとき，$f = g$ と書き，f と g は等しいという．

定義 3.3. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．集合 X の部分集合 $A \subset X$ に対し，

$$f(A) \coloneqq \{y \in Y \mid \exists x \in A \ f(x) = y\}$$

と定義する．これを,（f による）A の像という．

定義 3.4. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．集合 Y の部分集合 $B \subset Y$ に対し，

$$f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

と定義する．これを,（f による）B の逆像という．

定義 3.5. X, Y, Z を集合とし，$f : X \to Y, g : Y \to Z$ とする．このとき，合成写像 $g \circ f$ を

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

により定義する．

命題 3.6. X, Y, Z, W を集合とし，$f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W$ とする．このとき，

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ．

定義 3.7. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．

$$\forall a, b \in X \ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

が成り立つとき，f は単射であるという[17]．

定義 3.8. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ f(x) = y$$

が成り立つとき，f は全射であるという．

[17] X の異なる二つの元は f で写しても異なる元に行くということである．

定義 3.9. 写像 f が全射かつ単射であるとき，f は全単射であるという．

定義 3.10. X を集合とする．写像 $f : X \to X$ が

$$\forall x \in X \ f(x) = x$$

を満たすとき，f を（X 上の）恒等写像という．また，X 上の恒等写像を $\mathrm{id_X}$ と書く．

定義 3.11. 写像 $f : X \to Y$ が全単射であるとき，任意の $y \in Y$ に対し，$f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がただ一つ存在する．よって，各 $y \in Y$ に対し，このような $x \in X$ を対応させると写像となる．この写像を f^{-1} と書き[18)]，f の逆写像という．

定義 3.12. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．このとき f の A への制限 $f|_A$ を

$$\begin{aligned} f|_A : A &\to Y \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

と定義する[19)]．

4 二項関係

定義 4.1. X を集合とする．$X \times X$ の部分集合 $R \subset X \times X$ のことを X 上の二項関係という．$(x, y) \in X \times X$ に対し，$(x, y) \in R$ であるとき，

$$xRy$$

とかく[20)]．

定義 4.2. X を集合とし，X 上の二項関係 $\sim$ が以下を満たすとき，$\sim$ を（X 上の）同値関係という[21)]．

(i). 反射律 $\forall a \in X \ a \sim a$

(ii). 対称律 $\forall a, b \in X \ a \sim b \Rightarrow b \sim a$

(iii). 推移律 $\forall a, b, c \in X \ a \sim b$ かつ $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

定義 4.3. X を集合とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．このとき，$a \in X$ に対して，

$$C(a) \coloneqq \{x \in X \mid a \sim x\}$$

と定義し，これを $\sim$ による a の同値類という．

18) 逆像の定義と同じ記号を用いているが意味は異なるので注意が必要

19) 定義域を X から A に変更している．これにより単射性や全射性が変わることがある．

20) 例えば，実数における $\leq$ は二項関係である．このとき厳密には $\leq$ は集合で，$\leq = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x$ が非負である $\}$ などと書けるが，$\leq$ を用いるたびにこのような集合を意識する必要はないだろう．あくまで，二つの元に関係があるということを集合論的に定義しただけであり，既存の体系を用いて定義したことに意味がある．

21) 少し抽象的な議論で戸惑うかもしれない．この概念は非常に重要であるので，演習編を通してよく理解することが望ましい．

命題 4.4. X を集合とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．このとき，$a, b \in X$ に対して，

$$C(a) \neq C(b) \Rightarrow C(a) \cap C(b) = \phi$$

が成り立つ．

定義 4.5. X を集合とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．このとき，$\sim$ による同値類全体の集合を $X/\sim$ とかき，同値関係 $\sim$ による X の商集合という[22]．

定義 4.6. X を集合とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．このとき，同値類 $C \in X/\sim$ に対し，$a \in C$ を C の代表（元）という[23]．

定義 4.7. X を集合とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．このとき,（X から $X/\sim$ への）自然な全射 π を

$$\begin{aligned} \pi : X &\to X/\sim \\ a &\mapsto C(a) \end{aligned}$$

と定義する[24]．

定義 4.8. X を集合とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．部分集合 $A \subset X$ が（$\sim$ に関する）代表系であるとは，自然な全射の A への制限 $\pi|_A$ が単射であることをいう．さらに $\pi|_A$ が全単射であるとき，A を（$\sim$ に関する）完全代表系という．

---

[22] 命題 4.4 により，X の各要素はただ一つの同値類に属していることが分かる．したがって，$X/\sim$ は X を互いに交わりのないいくつかの集合に分割したものとみることができる（このような分割を直和分割という）．

[23] 命題 4.4 より，$C(a) = C$ が成立する．

[24] π が全射であることは $X/\sim$ の定義から明らかであろう