初学者のための集合論入門　演習編

1　命題

例題 1.1. P, Q を命題とする．真偽表を書くことにより，$\neg P \wedge \neg Q$ と $\neg(P \vee Q)$ が同値であることを示せ．

解答 表より，各行の真偽が一致しているため，同値である．

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	F	T

問題 1.2. P, Q を命題とする．真偽表を書くことにより以下の同値を示せ．

(i). $\neg P \vee \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

(ii).（背理法） $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$

(iii).（対偶） $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$

(iv). $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

問題 1.3. P, Q, R を命題とする．真偽表を書くことにより以下の同値を示せ.（ヒント：命題が 3 つあるので，真偽表の行は 8 行必要である.）

(i). $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

(ii). $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

(iii). $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

(iv). $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

問題 1.4. P, Q を命題とする．以下の命題が真であることを示せ.

$$(P \text{ かつ } (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$$

問題 1.5. P, Q を命題とするとき，$P \Rightarrow Q$ と $\neg(\neg P \Rightarrow \neg Q)$ は同値でないことを示せ.

問題 1.6. P, Q を命題とするとき，$P \Rightarrow Q$ と $\neg(Q \Rightarrow P)$ は同値でないことを示せ.

例題 1.7. P を x, y を変数とする命題とするとき，$\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ の否定を書け.

解答[1)]

$$\exists x\ \forall y\ \neg P(x, y)$$

問題 1.8. P を a, b, c, d を変数とする命題とするとき，$\forall a\ \exists b\ \exists c\ \forall d\ P(a, b, c, d)$ の否定を書け.

問題 1.9. 以下の命題の否定を書け.

$$\forall a, b, c \in X\ \ a \sim b \text{かつ} b \sim c \Rightarrow a \sim c$$

問題 1.10. 以下の命題の否定を書け.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

問題 1.11. 以下の命題を証明せよ（ε, δ は実数とする）.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ |x| < \delta \Rightarrow x^2 < \varepsilon$$

問題 1.12. 以下の命題の真偽を判定し，真ならば証明し，偽ならば反例を挙げよ（ε, δ は実数とする）.

$$\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ |x| < \delta \Rightarrow x^2 < \varepsilon$$

2　集合

問題 2.1. X を集合とするとき，A が X の部分集合であることの定義を述べよ.

例題 2.2. 集合 A, B, C に対し，$A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば，$A \subset C$ であることを示せ.

解答

任意に $a \in A$ をとる．このとき，$A \subset B$ より $a \in B$ である．さらに，$B \subset C$ より，$a \in C$ である．a は任意であったから，$A \subset C$ が成立する[2)].

問題 2.3. A, B を集合とするとき，$A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ の定義をそれぞれ述べよ.

問題 2.4. A, B を集合とする．以下の包含を示せ.

(i). $A \subset A$

(ii). $A \cap B \subset A$

[1)] 意味を考えると，$\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ は任意の x に対し P を満たすようなある y が存在することを意味しており，それの否定であるから，何らかの x があり，どのように y を選んでも P が成り立たないという意味になる．しかし，実際否定をとるたびにこのようなことを考えていては大変なので，否定をとると，$\forall$ と $\exists$ が入れ替わると覚えておけばよい（意味を考えなくてもよいというわけではない）.

[2)] $\forall a \in A\ a \in C$ が示されたということである.

(iii). $A \subset A \cup B$

問題 2.5. A, B を集合とする．以下の同値を示せ．

$$A = B \Leftrightarrow \forall a \in A\ a \in B \text{ かつ } \forall b \in B\ b \in A$$

問題 2.6. A, B を集合とする．以下の同値を示せ．

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

例題 2.7. A, B, C を集合とする．以下の相等を示せ．

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

解答

問題 1.3 より，命題 P, Q, R に対し $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ が成り立つから，

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ かつ } x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ かつ } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

よって，問題 2.6 より，$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ となる．

問題 2.8. A, B, C を集合とする．以下の相等を示せ．

(i). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(ii). $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(iii). $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

問題 2.9. $A_1, \ldots, A_n, B$ を集合とする．以下の相等を示せ．(ヒント：例えば $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ は，$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ x \in A_i$ と言い換えられることを用いる.)

(i). $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cup B)$

(ii). $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$

問題 2.10. X を集合とし，$A \subset X$ とする．以下の相等を示せ．

$$X \setminus (X \setminus A) = A$$

問題 2.11. $X = \{a, b, c, d\}, Y = \{p, q, r\}$ とするとき，$X \times Y$ の要素を具体的に全て書け．

問題 2.12. $X = \{a, b, c\}$ とするとき，2^X の要素を具体的に全て書け．

3　写像

問題 3.1. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．

(i). $A \subset X$ に対し $f(A)$ の定義を述べよ．

(ii). $B \subset Y$ に対し $f^{-1}(B)$ の定義を述べよ．

例題 3.2. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．$A, B \subset X$ とするとき，$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ を示せ．

解答

$$
\begin{aligned}
x \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists a \in A \cup B\ x = f(a) \\
&\Leftrightarrow \exists a \in A\ x = f(a) \text{ または } \exists a \in B\ x = f(a) \\
&\Leftrightarrow x \in f(A) \text{ または } x \in f(B) \\
&\Leftrightarrow x \in f(A) \cup f(B)
\end{aligned}
$$

問題 3.3. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．また，$A, B \subset X$ とする．

(i). $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ を示せ．

(ii). $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ である例を示せ．

問題 3.4. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．また，$A, B \subset Y$ とする．

(i). $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ を示せ．

(ii). $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ を示せ．

問題 3.5. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．また，$A \subset X$ とする．

(i). $A \subset f^{-1}(f(A))$ を示せ．

(ii). $A \neq f^{-1}(f(A))$ である例を示せ．

問題 3.6. X, Y, Z, W を集合とし，$f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W$ とする．このとき，

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つことを示せ．

問題 3.7. A, B を集合とし，$f : A \to Y$ とする．このとき以下の二つは同値であることを示せ．

(i). f は単射である．

(ii). $\forall a, b \in A\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

問題 3.8. 以下で与えられる写像が単射かどうか判定せよ．また，全射かどうかも判定せよ．

(i). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto e^x$

(ii). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^3$

(iii). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \tan x$

問題 3.9. A, B を集合とし，$f: A\to B$ を全単射とする．このとき，

$$f^{-1}\circ f = \mathrm{id_A}$$
$$f\circ f^{-1} = \mathrm{id_B}$$

が成り立つことを示せ.

例題 3.10. A, B, C を集合とし，$f: A\to B, g: B\to C$ をそれぞれ単射とする．このとき，合成写像 $g\circ f$ も単射であることを示せ.

解答

問題 3.7(ii) の形を示す．任意に $a, b\in A$ をとり，$g\circ f(a) = g\circ f(b)$ と仮定する．このとき，$g(f(a)) = g(f(b))$ であり，g の単射性から $f(a) = f(b)$ が成り立ち，さらに f の単射性から $a = b$ が成り立つ．a, b は任意であったから，$g\circ f$ が単射であることが示された.

問題 3.11. A, B, C を集合とし，$f: A\to B, g: B\to C$ とする.

(i). f, g がどちらも全射であるとき，$g\circ f$ も全射であることを示せ.

(ii). f, g がどちらも全単射であるとき，$g\circ f$ も全単射であることを示せ.

問題 3.12. A, B, C を集合とし，$f: A\to B, g: B\to C$ とする.

(i). $g\circ f$ が単射ならば，f は単射であることを示せ.

(ii). $g\circ f$ が単射だが g は単射でない例を示せ.

(iii). $g\circ f$ が全射ならば，g は全射であることを示せ.

(iv). $g\circ f$ が全射だが f は全射でない例を示せ.

問題 3.13. A, B を集合とし，$f: A\to B$ とする．ある $g: B\to A$ があり，$g\circ f = \mathrm{id_A}$，$f\circ g = \mathrm{id_B}$ を満たすならば，f は全単射であり，さらに $g = f^{-1}$ であることを示せ.（ヒント：問題 3.12 を使う.）

4 二項関係

問題 4.1. X を集合とする．R が X 上の二項関係であることの定義を述べよ．さらに，X 上の二項関係 R が同値関係であることの定義を述べよ.

問題 4.2. X を集合とし，$\sim$ を X 上の二項関係とする．このとき，$a, b\in X$ に対して，以下が同値であることを示せ.

(i). $a\sim b$

(ii). $C(a) = C(b)$

(iii). $a \in C(b)$

例題 4.3. X を集合とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．このとき，$a, b \in X$ に対して，

$$C(a) \neq C(B) \Rightarrow C(a) \cap C(b) = \phi$$

が成り立つことを示せ.

解答

対偶を考えて，$a, b \in X$ に対し，$C(a) \cap C(b) \neq \phi$ ならば $C(a) = C(b)$ を示せばよい．$C(a) \cap C(b) \neq \phi$ と仮定する．$C(a) \cap C(b)$ の元 c を取る．このとき，$c \in C(a)$ であるから $c \sim a$ となり，問題 4.2 から，$C(c) = C(a)$ が成り立つ．同様に $C(c) = C(b)$ も成り立つから，$C(a) = C(b)$ となる．

問題 4.4.

$$\sim = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ は } 3 \text{ の倍数 } \}$$

とおくと $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ.

問題 4.5.

$$\sim = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + b = 5\}$$

とおくと $\sim$ は $\mathbb{R}$ 上の同値関係であるか.

問題 4.6.

$$\sim = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - b \geq 0\}$$

とおくと $\sim$ は $\mathbb{R}$ 上の同値関係であるか.

問題 4.7. X, Y を集合とし，$f, g : X \to Y$ とする．このとき，

$$\sim = \{(a, b) \in X \times X \mid f(a) = g(b)\}$$

とおくと $\sim$ は X 上の同値関係であるか.

問題 4.8. X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする．また，$\sim = \{(a, b) \in X \times X \mid f(a) = f(b)\}$ とおく.

(i). $\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ.

(ii). $a, b \in X$ に対し，$b \in C(a)$ ならば $f(a) = f(b)$ であることを示せ.

(iii). $\tilde{f} : X/\sim \to Y, C(a) \mapsto f(a)$ とする[3)]とこれは単射となることを示せ．特に，f が全射ならば $\tilde{f}$ は全単射であることを示せ.

(iv). (iii) と同様に $\tilde{f}$ を決める．また，π を X から $X/\sim$ への自然な全射とするとき，$f = \tilde{f} \circ \pi$ となることを示せ.

[3)] このように定義できることは (ii) に基づいているがここでは深く追求しない（well-defined 性などという）.