

Εργασία 3

Χαράλαμπος Αναστασίου

Νοέμβριος 2024

1 Εισαγωγή

Ερωτήματα που απαντήθηκαν: 1, 2, 3

2 Απαντήσεις Ερωτημάτων

2.1 Ερώτημα 1

(GvL A3.1.2) Υποθέτουμε ότι το $L = I_n - N$ είναι μοναδιαίο κάτω τριγωνικό, με $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Να δείξετε ότι:

$$L^{-1} = I_n + N + N^2 + \cdots + N^{n-1}.$$

Ποια είναι η τιμή του $\|L^{-1}\|_F$ αν έχουμε $N_{ij} = 1$ για κάθε $i > j$?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για να αποδείξουμε ότι $L^{-1} = I_n + N + N^2 + \cdots + N^{n-1}$, αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι ισχύει:

$$LL^{-1} = I_n$$

Έχουμε:

$$LL^{-1} = (I_n - N)(I_n + N + N^2 + \cdots + N^{n-1}).$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει:

$$LL^{-1} = I_n + N + N^2 + \cdots + N^{n-1} - N - N^2 - N^3 - \cdots - N^n.$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι όροι N, N^2, \dots, N^{n-1} και $-N, -N^2, \dots, -N^{n-1}$ θα ακυρωθούν. Έτσι, απομένει:

$$I_n - N^n.$$

Αλλά $N^n = 0$ επειδή το N είναι αυστηρά κάτω τριγωνικό. Το γεγονός ότι είναι αυστηρά κάτω τριγωνικό προκύπτει από τον τύπο $L = I_n - N$ όπου το L είναι μοναδιαίο κάτω τριγωνικό μητρώο (επομένως προκειμένου να εξασφαλιστεί η μοναδιαία διαγώνιος του L πρέπει το N να έχει μηδενική διαγώνιο, άρα να είναι αυστηρά κάτω τριγωνικό). Έτσι, έχουμε:

$$LL^{-1} = I_n.$$

Απεδείχθη επομένως ότι

$$L^{-1} = I_n + N + N^2 + \dots + N^{n-1}.$$

2.2 Ερώτημα 2

Δίνεται το συμμετρικό μητρώο 4×4 :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array} \right)$$

Να δείξετε την αποθήκευση του μητρώου στη μορφή RFP (rectangular full packed format).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Στη μορφή RFP, αποθηκεύουμε μόνο τις μοναδικές τιμές του συμμετρικού μητρώου, καθώς οι τιμές πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι ίσες με τις αντίστοιχες τιμές κάτω από αυτήν. Θα αποθηκεύσουμε επομένως τα στοιχεία ως εξής:

Κύρια διαγώνιος: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$

Στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο:

$$a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$$

Η αποθήκευση του μητρώου A στη μορφή RFP θα είναι:

$$\text{RFP} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}\}$$

2.3 Ερώτημα 3

Να γράψετε συνάρτηση MATLAB `ro2pp` που λαμβάνει ως είσοδο ένα συμμετρικό μητρώο που δίνεται σε κανονική αποθήκευση και επιστρέφει το μητρώο σε packed μορφή ως διάνυσμα. Ο κώδικας θα πρέπει να επιτρέπει στο χρήστη να επιλέξει κατά πόσον το packing θα είναι column ή row-major και κατά πόσον αποθηκεύεται το άνω ή το κάτω τριγωνικό τμήμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Δες την απάντηση στον κώδικα του `.mlx` αρχείου

2.4 Ερώτημα 4

(GvL A4.2.10) Έστω ότι $A = I + uu^T$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\|u\|_2 = 1$. Να γράψετε ακριβείς τύπους για τη διαγώνιο και την υποδιαγώνιο του παράγοντα Cholesky του A .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: