Εργασία 2

Χαράλαμπος Αναστασίου

Οκτώβριος 2024

1 Εισαγωγή

μπλα μπλα μπλα

1.1 Ερώτημα 1

Αν $x = [1 : 8]$ και $P_{2,4}$ είναι το μητρώο τέλειας αναδιάταξης mod 2, τότε να γράψετε το διάνυσμα $P_{2,4} \cdot x$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το x είναι ένα διάνυσμα-στήλη μεγέθους 8×1. Το μητρώο τέλειας αναδιάταξης $P_{q,r} = P_{2,4}$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο, ο οποίος έχει αντληθεί από τις διαφάνειες μαθήματος:

$$P_{2,4} = I_8\left([1 : 4 : 8, 2 : 4 : 8, 3 : 4 : 8, 4 : 4 : 8]\right)$$

Το $P_{2,4}$ έχει μέγεθος 8×8.
Επομένως, το γινόμενο $P_{2,4} \cdot x$ είναι:

$$P_{2,4} \cdot x = I_8\left([1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8]\right) \cdot x = \begin{bmatrix} x(1:4:8) \\ x(2:4:8) \\ x(3:4:8) \\ x(4:4:8) \end{bmatrix}$$

που είναι το τελικό διάνυσμα-στήλη μεγέθους 8×1.

1.2 Ερώτημα 2

(Σωστό/Λάθος) Αν $P_{2,4}$ είναι το μητρώο τέλειας αναδιάταξης mod 2, τότε ισχύει:

$$P_{2,4} \cdot P_{2,4}^{\top} = I_8$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Σωστό.

1.3 Ερώτημα 3

(GvL A1.3.4) Έστω το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$$

όπου το B είναι άνω διδιαγώνιο. Να περιγράψετε τη δομή του $T = PAP^\top$, όπου η $P = P_{2,n}$ είναι η μετάθεση τέλειας αναδιάταξης mod 2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

```
m = 4;


% Random values for the main diagonal
main_diag = randi(10, 1, m);

% Random values for the first upper diagonal
upper_diag = randi(10, 1, m-1);

% Create the upper bidiagonal matrix B
B = diag(main_diag) + diag(upper_diag, 1);

% Create the matrix A
A = [zeros(m), B; B', zeros(m)];

% Display the final square matrix A
disp('The matrix A is:')
disp(A);

n = size(A,1); % size of A

% Create the identity matrix I
I = eye(n);

% Define the row permutation of I
r = 3;      % You can change this value to experiment
% r=4;
% r=5;
perm = [];
for i = 1:r
    indices = i:r:n;
    perm = [perm, indices];
end

```

```
% Row permutation of I
P = I(perm, :);

T = P * A * P';
D = T';

% I notice that for different values of r,
% the matrix T remains SYMMETRIC !!!
```

Σχόλια κώδικα: Στον παραπάνω κώδικα για τη δημιουργία της μετάθεσης τέλειας αναδιάταξης χρησιμοποιήθηκε ένας βρόγχος for ο οποίος δημιουργεί την μετάθεση (perm) με βάση τον τύπο από τις διαφάνειες του μαθήματος.

1.4 Ερώτημα 4

(GvL A1.3.7 - προσοχή: στο βιβλίο εκ παραδρομής, αντί του συμβόλου της αναστροφής, γράφτηκε $\otimes$). Να επαληθεύσετε ότι, αν $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, τότε ισχύει:

$$y \otimes x = \mathrm{vec}(xy^\top).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

- Έχουμε:

$$y \otimes x = \begin{bmatrix} y_1 x \\ y_2 x \\ \vdots \\ y_n x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{διάνυσμα-στήλη } mn \text{ στοιχείων}$$

- Επίσης:

$$(xy^\top)_{ij} = x_i y_j \quad \Rightarrow \quad \text{μητρώο } m \times n$$

και

$$\mathrm{vec}(xy^\top) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_1 \\ \vdots \\ x_m y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_m y_n \end{pmatrix}$$

Είναι εμφανές ότι το $\mathrm{vec}(xy^\top)$ είναι ίσο με το $y \otimes x$, καθώς στους βαθμωτούς ισχύει η αντιμεταθετικότητα ($x_1 y_1 = y_1 x_1$ κ.ο.κ).