

Επιστημονικός Υπολογισμός

Σετ Ασκήσεων #4

Διδάσκων: Ε. Γαλλόπουλος

10/11/2023

Παρατηρήσεις: Τέταρτο σετ προαιρετικών ασκήσεων με στόχο είναι να εξασκηθείτε στα ζητήματα που έχουμε καλύψει στο μάθημα. Προσπαθήστε να απαντήσετε σε όσες περισσότερες ερωτήσεις μπορείτε. Αναρτήστε τις απαντήσεις σας στην αντίστοιχη εργασία του eclass, συμπεριλαμβάνοντας για κάθε υποερώτημα αιτιολόγηση, τα αποτελέσματα και τον κώδικα αν υπάρχει. Παρακαλείστε να προσδιορίσετε επακριβώς στην εισαγωγική σελίδα σε ποιές ερωτήσεις απαντάτε. Επίσης, αν αντιγράψετε κάτι από το διαδίκτυο, παρακαλείστε να δώσετε τη σχετική αναφορά. Προτείνουμε να δώσετε τις απαντήσεις ως pdf μέσω LaTeX. Ειδικότερα, η τελευταία ερώτηση να απαντηθεί χρησιμοποιώντας το MATLAB LiveEditor (αν θέλετε, μπορείτε να απαντήσετε όλες τις ερωτήσεις μέσω του LiveEditor!). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το template¹ στο χώρο Έγγραφα του eClass του μαθήματος. Σε επόμενο φροντιστήριο θα συζητήσουμε μερικές από τις ερωτήσεις, πιθανές απαντήσεις και σχόλια επί των δικών σας απαντήσεων.

Προσοχή, μέρος Α: Η άσκηση είναι για εξάσκηση σας. Δεν έχει νόημα, ούτε θα κερδίσετε κάτι, αν απλά επαναλάβετε την απάντηση που δίνει το ChatGPT (όποτε αυτό είναι δυνατό). Δείτε και το σχετικό άρθρο εδώ. Επιπλέον, ούτε έχει νόημα να αντιγράψετε την απάντηση συναδέλφου (πέραν του δεοντολογικού ζητήματος που προκύπτει). Σε κάθε περίπτωση, παρακαλώ αν δύο ή περισσότεροι από εσάς συνεργαστείτε για μία άσκηση, να το αναφέρετε! **Προσοχή, μέρος Β:** Όταν μία ερώτηση που εμπλέκει δική σας υλοποίηση αφορά πρωτίστως στην επίδοση του αλγορίθμου, ο κώδικάς σας πρέπει να περιέχει και ένα τμήμα στο οποίο ελέγχεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Βλ. για παράδειγμα την απάντηση στο 2ο ερώτημα του Σετ#1 Ασκήσεων.

1. Να περιγράψετε² σε μια παράγραφο ή πίνακα τα χαρακτηριστικά του συστήματος που χρησιμοποιείτε (υλικό και λογισμικό): Σύστημα, επεξεργαστή, επίπεδα μνήμης και μέγεθός τους καθώς και την εκδοχή της MATLAB.

2. (GvL A4.7.3) Έστω ότι $z \in \mathbb{R}^n$ και το $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ορθογώνιο. Να δείξετε ότι αν

$$X = \begin{bmatrix} z & Sz & \cdots & S^{n-1}z \end{bmatrix}$$

τότε το $X^T X$ είναι Toeplitz.

3. (GvL A4.7.10) Ένα μπλοκ $p \times p$ μητρώο $A = (A_{ij})$ με μπλοκ $m \times m$ λέγεται μπλοκ Toeplitz αν υπάρχουν $A_{-p+1}, \dots, A_{-1}, A_0, A_1, \dots, A_{p-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ τέτοια ώστε $A_{ij} = A_{i-j}$, π.χ.:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 \\ A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 \\ A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 \end{bmatrix}$$

¹(δεν έχει ακόμα αναρτηθεί).

²Γιατί εσείς και εμείς πρέπει να γνωρίζουμε πού τρέχουν τα πειράματα - προσοχή, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αναφέρετε μετρήσεις από ένα μόνο σύστημα!

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει μετάθεση Π τέτοια ώστε

$$\Pi^T A \Pi = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \cdots & T_{mm} \end{bmatrix}$$

όπου όλα τα T_{ij} είναι $p \times p$ και Toeplitz. Τα T_{ij} πρέπει να “φτιάχνονται” από στοιχεία (i, j) που έχουν επιλεγεί από τα μητρώα A_k .

(β) Τι μπορείτε να πείτε για το T_{ij} αν $A_k = A_{-k}$, $k = 1 : p - 1$;

4. (GvL A4.5.3) Πώς θα λύνετε ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{bmatrix} D_1 & F_1 \\ E_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

όπου τα D_1 και D_2 είναι διαγώνια ενώ τα F_1 και E_1 είναι τριδιαγώνια; Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τη μετάθεση τέλειας αναδιάταξης.

5. (GvL A4.5.4) Στον απλοποιημένο σκελετό Spike (Εν. 4.5.4 και σχετικές διαφάνειες, όπου αντί για q θέσαμε ως μέγεθος κάθε μπλοκ το n_β), χειριζόμαστε το A ως ένα σύνθετο μητρώο $N \times N$ με μπλοκ $q \times q$. Υποθέτουμε ότι το $A \in \mathbb{R}^{Nq \times Nq}$ έχει εύρος ζώνης p και ότι $p \ll q$. Για αυτή τη γενική περίπτωση, να περιγράψετε τα μεγέθη των μπλοκ που προκύπτουν όταν πραγματοποιείται η μετάβαση από τη δομή του (4.5.11) στη δομή του (4.5.16) (οι αναφορές αφορούν το σύγγραμμα). Υποθέτοντας ότι το A είναι πυκνής ζώνης (δηλ. δεν μπορούμε να υποθέσουμε εκ των προτέρων ότι κάποια στοιχεία ανάμεσα στην ακραία υπο- και στην ακραία υπερ-διαγωνίο είναι μηδέν), ποιό μέρος των flop (δηλ. του Ω) προέρχονται από πράξεις ga_{pxy} (δηλ. GEMV);

6. Δώστε την εντολή `rng(my4AM)` και στη συνέχεια υπολογίστε το μητρώο

`n=8; A = eye(n)+diag(rand(n-1,1),1); A = A+A'; B=inv(A);`

α) Περιγράψτε τι παρατηρείτε βάσει όσων έχουμε μάθει στο μάθημα. β) Να το γράψετε ως 2×2 μπλοκ μητρώο:

$$B = \begin{pmatrix} E & UV^T \\ VU^T & G \end{pmatrix}$$

όπου (και αυτό είναι σημαντικό) τα $U, V \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ είναι διανύσματα στήλες. Με άλλα λόγια, να γράψετε τα E, G, U, V και να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας, δηλ. ότι για τις επιλογές που έχετε κάνει, η τιμή του `norm(inv(A)-B,'inf')` δεν είναι πολύ μεγαλύτερο από το έψιλον της μηχανής για την χρησιμοποιούμενη ακρίβεια.

7. Να υλοποιήσετε συνάρτηση³ `circulant_my4AM` που δοθέντος διανύσματος v , επιστρέφει το κυκλωτερές μητρώο που παράγεται από το διάνυσμα. Να χρονομετρήσετε τον πολλαπλασιασμό μητρώου κατασκευασμένου με την παραπάνω συνάρτηση για δισστάσεις `n=100:100:5000` καλώντας την `mtimes` καθώς και υλοποιώντας τον πολλαπλασιασμό με βάση ταχείς μετασχηματισμούς Fourier (καλώντας κάποια από τα `det`, `dst`, `fft`). Να αξιολογήσετε και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

8. Στην παρούσα ερώτηση θα αναφερόμαστε αποκλειστικά σε τριδιαγώνια μητρώα που θα πρέπει να τα αναπαραστήσετε αποθηκεύοντας σε ένα `array` τριών γραμμών, όπως περιγράφεται εδώ για την LAPACK.

³ Αντικαταστήστε το `my4AM` με τα 4 τελευταία ψηφία του AM σας.

- (α') Ειδικότερα θα πρέπει να υλοποιήσετε συνάρτηση `tridReduct_my4AM(A,B)` (βλ. παραπάνω για το `my4AM`) για την επίλυση τριδιαγώνιων συστημάτων όπως περιγράφεται στο Σετ#11 των διαφανειών. Η είσοδος A θα είναι ένα τριδιαγώνιο μητρώο στη μορφή που αναφέραμε και το B ένα array που θα περιέχει ως στήλες τα δεξιά μέλη (ο αλγόριθμος πρέπει να μπορεί να επιλύει για 1 ή περισσότερα δεξιά μέλη). Θα πρέπει να υλοποιήσετε και να παρουσιάσετε σε MATLAB τον αλγόριθμο χρησιμοποιώντας στο μέγιστο δυνατό βαθμό, χάριν αποδοτικότητας, πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων των διαγωνίων (με πολλαπλασιασμούς Hadamard διανυσμάτων) αντί για βρόχους. Υπολογίστε το Ω της διαδικασίας ως συνάρτηση του n .
- (β') Στη συνέχεια να ελέγξετε τη λειτουργία της μεθόδου για τις εξής περιπτώσεις για την επίλυση με 1 και 10 δεξιά μέλη που θα κατασκευάσετε πολλαπλασιάζοντας το τριδιαγώνιο μητρώο της κάθε περίπτωσης ως εξής: $B=A*\text{ones}(n,1)$ (δηλ. 1 δεξιά μέλος) και με το $B=A*\text{tril}(\text{ones}(n,10))$ (δηλ. 10 δεξιά μέλη). I) $A=\text{toeplitz}([4,-1,\text{zeros}(1,n-2)])$ για $n=2.^{[5:10]}$. II) Το τριδιαγώνιο μητρώο με τα εξής χαρακτηριστικά: Οι υπο- και υπερδιαγώνιοι είναι 1 και η διαγώνιος λαμβάνει τιμές από n (στη θέση $(1,1)$) ως 1 (στη θέση (n,n)) και από 1 (στη θέση $(n+1,n+1)$) ως $2n$ (στη θέση $(2n,2n)$). Να δοκιμάσετε για τις τιμές για $n=2.^{[4:9]}$.
- (γ') Να εξηγήσετε γιατί η μέθοδος αστοχεί για το παραπλήσιο μητρώο που προκύπτει με την εντολή `gallery('wilk',21)` και οποιοδήποτε μη μηδενικό δεξιά μέλος.

Παραδοτέα

Αποκλειστικά ηλεκτρονικά με ανάρτηση στο e-Class σε ζιπαρισμένο αρχείο (zip) με όνομα

`Ask4_EEISΓ_AM_ΕΠΙΘΕΤΟ.zip`

δηλ. αποτελούμενο από το έτος εισαγωγής (ΕΕΙΣΓ), τα τελευταία 4 ψηφία του ΑΜ σας, και το επίθετό σας με λατινικούς χαρακτήρες πρώτο γράμμα κεφαλαίο και τα υπόλοιπα πεζά. Για παράδειγμα αν υπήρχε (μάλλον αιώνιος) φοιτητής Γαλλόπουλος με ΑΜ που τελειώνει σε 0258 και έτος εισαγωγής 1996, θα πρέπει να χρησιμοποιήσει `Ask4_1996_0258_Gallopoulos.zip`.

Αναφορά Σε μορφή pdf (εκτός αν επιλέξετε να έχετε όλες τις απαντήσεις σε μορφή LiveScript) με σύνθετο όνομα όπως και του zip αρχείου, με το σωστό επίθεμα⁴. Να είστε ιδιαίτερα προσεκτικοί ώστε η αναφορά να είναι αναγνώσιμη χωρίς πρόβλημα συμβατότητας των γραμματοσειρών κ.λπ.

Κώδικες Ένα αρχείο `Ask4_EEISΓ_AM_ΕΠΙΘΕΤΟ.mlx` (MATLAB LiveEditor). Στο αρχείο αυτό πρέπει να συμπεριλαμβάνονται όλα τα scripts και συναρτήσεις που θα πρέπει να μπορούν να εκτελεστούν ως έχουν. Στο αρχείο πρέπει να αναφέρεται το όνομα και το ΑΜ σας.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Όλα τα script πρέπει να εκτελούνται άμεσα στο φάκελλο που θα κάνουν οι βαθμολογητές το unzip. Επίσης οι συναρτήσεις πρέπει να είναι όλες άμεσα εκτελέσιμες εφόσον δίνονται ορθά στοιχεία εισόδου.

⁴EEISΓ_AM_ΕΠΙΘΕΤΟ.pdf