

Επιστημονικός Υπολογισμός

Σετ Ασκήσεων #5

Διδάσκων: Ε. Γαλλόπουλος

18 Νοεμβρίου 2024

Παρατηρήσεις: Τέταρτο σετ προαιρετικών ασκήσεων με στόχο είναι να εξασκηθείτε στα ζητήματα που έχουμε καλύψει στο μάθημα. Προσπαθήστε να απαντήσετε σε όσες περισσότερες ερωτήσεις μπορείτε. Αναρτήστε τις απαντήσεις σας στην αντίστοιχη εργασία του eclass, συμπεριλαμβάνοντας για κάθε υποερώτημα αιτιολόγηση, τα αποτελέσματα και τον κώδικα αν υπάρχει. Παρακαλείστε να προσδιορίσετε επακριβώς στην εισαγωγική σελίδα σε ποιές ερωτήσεις απαντάτε. Επίσης, αν αντιγράψετε κάτι από το διαδίκτυο, παρακαλείστε να δώσετε τη σχετική αναφορά. Προτείνουμε να δώσετε τις απαντήσεις ως pdf μέσω \LaTeX . Ειδικότερα, η τελευταία ερώτηση να απαντηθεί χρησιμοποιώντας το MATLAB LiveEditor (αν θέλετε, μπορείτε να απαντήσετε όλες τις ερωτήσεις μέσω του LiveEditor!). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το template¹ στο χώρο Έγγραφα του eClass του μαθήματος. Σε επόμενο φροντιστήριο θα συζητήσουμε μερικές από τις ερωτήσεις, πιθανές απαντήσεις και σχόλια επί των δικών σας απαντήσεων.

Προσοχή, μέρος Α: Η άσκηση είναι για εξάσκηση σας. Δεν έχει νόημα, ούτε θα κερδίσετε κάτι, αν απλά επαναλάβετε την απάντηση που δίνει το ChatGPT (όποτε αυτό είναι δυνατό). Δείτε και το σχετικό άρθρο εδώ. Επιπλέον, ούτε έχει νόημα να αντιγράψετε την απάντηση συναδέλφου (πέραν του δεοντολογικού ζητήματος που προκύπτει). Σε κάθε περίπτωση, παρακαλώ αν δύο ή περισσότεροι από εσάς συνεργαστείτε για μία άσκηση, να το αναφέρετε! **Προσοχή, μέρος Β:** Όταν μία ερώτηση που εμπλέκει δική σας υλοποίηση αφορά πρωτίστως στην επίδοση του αλγορίθμου, ο κώδικάς σας πρέπει να περιέχει και ένα τμήμα στο οποίο ελέγχεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Βλ. για παράδειγμα την απάντηση στο 2ο ερώτημα του Σετ#1 Ασκήσεων.

Προσοχή, μέρος Γ: Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, η αναφορά σε αριθμημένες εξισώσεις, θεωρήματα και σχέσεις αφορά στο σύγγραμμά GnL. Όπως και σε προηγούμενες ασκήσεις, όπου γράφουμε my4AM, αντικαταστήστε το με τα 4 τελευταία ψηφία του AM σας.

1. Να περιγράψετε² σε μια παράγραφο τα χαρακτηριστικά του συστήματος που χρησιμοποιείτε (υλικό και λογισμικό): Σύστημα, επεξεργαστή, επίπεδα μνήμης και μέγεθός τους καθώς και την εκδοχή της MATLAB.
2. Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 276 & 21 & 17 & 0 & 0 & 37 & 0 \\ 21 & 222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 227 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 201 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 210 & 0 & 0 \\ 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 238 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 201 \end{pmatrix}$$

¹(δεν έχει ακόμα αναρτηθεί).

²Γιατί εσείς και εμείς πρέπει να γνωρίζουμε πού τρέχουν τα πειράματα - προσοχή, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αναφέρετε μετρήσεις από ένα μόνο σύστημα!

α) Να γράψετε τις μορφές CSR και CSC του παραπάνω μητρώου. Προσοχή, το μητρώο είναι συμμετρικό, επομένως θα μπορούσατε να αποθηκεύσετε μόνον το άνω ή κάτω τριγωνικό τμήμα. Στην περίπτωση μας όμως, ζητάμε όλο ο μητρώο (θα δείτε παρακάτω γιατί).

β) Με τις παρακάτω εντολές μπορείτε να σχεδιάσετε το γράφημα του A . Προσέξτε ότι το γράφημα δεν περιέχει αυτοβρόχους και ότι το οι κορυφές βρίσκονται σε κύκλο και είναι αριθμημένες διαδοχικά:

```
plot(graph(A,'omitselfloops'),'layout','circle')
```

γ) Δίνεται ότι το A είναι ΣΘΟ. Ενδιαφέρει το εξής: Αν καλούσαμε την Cholesky για να υπολογίσουμε τον κάτω τριγωνικό παράγοντα L , σε ποιές θέσεις ο παράγοντας αυτός θα περιέχει μη μηδενικά στοιχεία και ποιά από αυτά θα είναι νέα. Ειδικότερα, αποκλειστικά από το γράφημα, να προβλέψετε τις θέσεις των νέων στοιχείων (δηλ. το fill in) και να τροποποιήσετε την CSR ώστε να είναι έτοιμη να δεχτεί τα νέα μη μηδενικά στοιχεία όταν αυτά υπολογιστούν. Στη συνέχεια καλέστε `chol(A)` και με βάση τα αποτελέσματα να αποθηκεύσετε το `tril(L)` στις κάτω τριγωνικές θέσεις της τροποποιημένης CSR για το A . Προσοχή: Στο άνω τριγωνικό τμήμα θα παραμείνει άθικτο το `triu(A,1)`. Σημ.: Αν ήταν να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για υπολογισμούς και εφόσον χρειαζόταν, θάπρεπε να αποθηκεύσουμε την διαγώνιο του A αλλά εδώ δεν θα ασχοληθούμε με αυτό.

Επίσης να γράψετε μία λίστα που να περιέχει μόνον τις θέσεις (i, j) όπου θα υπάρξει fill in λόγω του L . Δηλ. σε ποιές κάτω τριγωνικές θέσεις του A υπήρχε μηδέν αλλά το L έχει μη μηδενική τιμή. Η σειρά απαρίθμησης πρέπει να είναι row major.

δ) Να βρείτε τον δείκτη κατατομής (profile) (κατατομή) του παραπάνω μητρώου.

3. Δίνεται ένα αραιό ΣΘΟ μητρώο. Να δείξετε ότι αν κάθε γραμμή από τη 2η και ύστερα περιέχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό πριν τη διαγώνιο, τότε στον κάτω τριγωνικό παράγοντα Cholesky, όλες οι θέσεις μεταξύ αυτής της θέσης και της διαγωνίου δεν θα είναι μηδέν. Ως συνήθως, δεν λαμβάνουμε υπόψη τις περιπτώσεις τυχαίου μηδενισμού λόγω αφαίρεσης ίσων τιμών.
4. (GvL A11.1.4) Να αποδείξετε ότι η διάταξη Cuthill-McKee μεταθέτει το A σε σύνθετη τριδιαγώνια μορφή όπου το k -στό διαγώνιο μπλοκ είναι $r \times r$, όπου r είναι η πληθικότητα του S_{k-1} .
5. Να δείξετε ότι αν το γράφημα ενός αραιού ΣΘΟ μητρώου είναι ένα δένδρο, τότε αν αναδιαταχθεί σύμφωνα με την αρίθμηση RCM, δεν δημιουργείται fill-in κατά την παραγοντοποίηση Cholesky.
6. (GvL A11.1.6) Να δείξετε ότι αν το L είναι ο (κάτω τριγωνικός) παράγοντας Cholesky του A και έχουμε ένα στοιχείο $\lambda_{ij} \neq 0$, τότε $j \geq f_i$, όπου το f_i όπως ορίζεται στο (11.1.6) με κατάλληλη προσαρμογή των ονομάτων. Να συμπεράνετε ότι $\text{nnz}(L) \leq \text{profile}(A)$.
7. α) Να υλοποιήσετε συνάρτηση MATLAB `profile_my4AM` για τον υπολογισμό του sparse matrix profile (βλ. το σχετικό ορισμό στη Διάλεξη 13 και GvL 11.1.5.) και να επαληθεύσετε την τιμή που λάβατε στο ερώτημα 2δ παραπάνω. β) Να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω μητρώο A και να υπολογίσετε τα διανύσματα `rcm`, `cm` από τις συμμετρικές αναδιατάξεις RCM (με `symrcm`), CM (με την αντίστροφη μετάθεση της `symrcm`, χρησιμοποιήστε μαζί με τη συνάρτηση `flip`) και το διάνυσμα `pamd` από τη συμμετρική AMD (μέσω `symamd`) και να οπτικοποιήσετε το B , τις αναδιατάξεις του και τους παράγοντες Cholesky καθώς και τους δείκτες κατατομής των A , $A(\text{rcm}, \text{rcm})$, $A(\text{cm}, \text{cm})$ και $A(\text{pamd}, \text{pamd})$.

γ) Να κάνετε το ίδιο για το μητρώο $B = \text{bucky} + 4 * \text{speye}(60)$; (αναδιατάξεις, οπτικοποιήσεις, υπολογισμός δεικτών κατατομής) και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

Παραδοτέα

Αποκλειστικά ηλεκτρονικά με ανάρτηση στο e-Class σε ζιπαρισμένο αρχείο (zip) με όνομα

Ask5_EEISΓ_AM_ΕΠΙΘΕΤΟ.zip

δηλ. αποτελούμενο από το έτος εισαγωγής (ΕΕΙΣΓ), τα τελευταία 4 ψηφία του ΑΜ σας, και το επίθετό σας με λατινικούς χαρακτήρες πρώτο γράμμα κεφαλαίο και τα υπόλοιπα πεζά. Για παράδειγμα αν υπήρχε (μάλλον αιώνιος) φοιτητής Γαλλόπουλος με ΑΜ που τελειώνει σε 0258 και έτος εισαγωγής 1996, θα πρέπει να χρησιμοποιήσει Ask5_1996_0258_Gallopoulos.zip.

Αναφορά Σε μορφή pdf (εκτός αν επιλέξετε να έχετε όλες τις απαντήσεις σε μορφή LiveScript) με σύνθετο όνομα όπως και του zip αρχείου, με το σωστό επίθεμα³. Να είστε ιδιαίτερα προσεκτικοί ώστε η αναφορά να είναι αναγνώσιμη χωρίς πρόβλημα συμβατότητας των γραμματοσειρών κ.λπ.

Κώδικες Ένα αρχείο Ask5_EEISΓ_AM_ΕΠΙΘΕΤΟ.mlx (MATLAB LiveEditor). Στο αρχείο αυτό πρέπει να συμπεριλαμβάνονται όλα τα scripts και συναρτήσεις που θα πρέπει να μπορούν να εκτελεστούν ως έχουν. Στο αρχείο πρέπει να αναφέρεται το όνομα και το ΑΜ σας.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Όλα τα script πρέπει να εκτελούνται άμεσα στο φάκελλο που θα κάνουν οι βαθμολογητές το unzip. Επίσης οι συναρτήσεις πρέπει να είναι όλες άμεσα εκτελέσιμες εφόσον δίνονται ορθά στοιχεία εισόδου.

©Ε. ΓΑΛΛΟΠΟΥΛΟΣ -CEID

³EEISΓ_AM_ΕΠΙΘΕΤΟ.pdf