

# Εργασία 2

Χαράλαμπος Αναστασίου

Οκτώβριος 2024

## 1 Εισαγωγή

μπλα μπλα μπλα

### 1.1 Ερώτημα 1

Αν  $x = [1 : 8]$  και  $P_{2,4}$  είναι το μητρώο τέλειας αναδιάταξης  $\bmod 2$ , τότε να γράψετε το διάνυσμα  $P_{2,4} \cdot x$ .

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:** Το  $x$  είναι ένα διάνυσμα-στήλη μεγέθους  $8 \times 1$ . Το μητρώο τέλειας αναδιάταξης  $P_{q,r} = P_{2,4}$  δίνεται από τον ακόλουθο τύπο, ο οποίος έχει αντληθεί από τις διαφάνειες μαθήματος:

$$P_{2,4} = I_8 ([1 : 4 : 8, 2 : 4 : 8, 3 : 4 : 8, 4 : 4 : 8])$$

Το  $P_{2,4}$  έχει μέγεθος  $8 \times 8$ .

Επομένως, το γινόμενο  $P_{2,4} \cdot x$  είναι:

$$P_{2,4} \cdot x = I_8 ([1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8]) \cdot x = \begin{bmatrix} x(1 : 4 : 8) \\ x(2 : 4 : 8) \\ x(3 : 4 : 8) \\ x(4 : 4 : 8) \end{bmatrix}$$

που είναι το τελικό διάνυσμα-στήλη μεγέθους  $8 \times 1$ .

### 1.2 Ερώτημα 2

(Σωστό/Λάθος) Αν  $P_{2,4}$  είναι το μητρώο τέλειας αναδιάταξης  $\bmod 2$ , τότε ισχύει:

$$P_{2,4} \cdot P_{2,4}^\top = I_8$$

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:** Σωστό.

### 1.3 Ερώτημα 3

(GvL A1.3.4) Έστω το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$$

όπου το  $B$  είναι άνω διδιαγώνιο. Να περιγράψετε τη δομή του  $T = PAP^\top$ , όπου η  $P = P_{2,n}$  είναι η μετάθεση τέλει αναδιάταξης mod 2.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

```
1 m = 4;
2
3
4 % Random values for the main diagonal
5 main_diag = randi(10, 1, m);
6
7 % Random values for the first upper diagonal
8 upper_diag = randi(10, 1, m-1);
9
10 % Create the upper bidiagonal matrix B
11 B = diag(main_diag) + diag(upper_diag, 1);
12
13 % Create the matrix A
14 A = [zeros(m), B; B', zeros(m)];
15
16 % Display the final square matrix A
17 disp('The matrix A is:')
18 disp(A);
19
20 n = size(A,1); % size of A
21
22 % Create the identity matrix I
23 I = eye(n);
24
25 % Define the row permutation of I
26 r = 3; % You can change this value to experiment
27 % r=4;
28 % r=5;
29 perm = [];
30 for i = 1:r
31     indices = i:r:n;
32     perm = [perm, indices];
33 end
34
```

```

35 % Row permutation of I
36 P = I(perm, :);
37
38 T = P * A * P';
39 D = T';
40
41 % I notice that for different values of r,
42 % the matrix T remains SYMMETRIC !!!

```

Σχόλια κώδικα: Στον παραπάνω κώδικα για τη δημιουργία της μετάθεσης τέλειας αναδιάταξης χρησιμοποιήθηκε ένας βρόγχος for ο οποίος δημιουργεί την μετάθεση (perm) με βάση τον τύπο από τις διαφάνειες του μαθήματος.

#### 1.4 Ερώτημα 4

(GvL A1.3.7 - προσοχή: στο βιβλίο εκ παραδρομής, αντί του συμβόλου της αναστροφής, γράφτηκε  $\otimes$ ). Να επαληθεύσετε ότι, αν  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , τότε ισχύει:

$$y \otimes x = \text{vec}(xy^\top).$$

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

- Έχουμε:

$$y \otimes x = \begin{bmatrix} y_1 x \\ y_2 x \\ \vdots \\ y_n x \end{bmatrix} \Rightarrow \text{διάνυσμα-στήλη } mn \text{ στοιχείων}$$

- Επίσης:

$$(xy^\top)_{ij} = x_i y_j \Rightarrow \text{μητρώο } m \times n$$

και

$$\text{vec}(xy^\top) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_1 \\ \vdots \\ x_m y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_m y_n \end{pmatrix}$$

Είναι εμφανές ότι το  $\text{vec}(xy^T)$  είναι ίσο με το  $y \otimes x$ , καθώς στους βαθμωτούς ισχύει η αντιμεταθετικότητα ( $x_1 y_1 = y_1 x_1$  κ.ο.κ.).

## 1.5 Ερώτημα 5

Να αποδείξετε αυτό που αναφέρεται στο σύγγραμμα (εξίσωση GvL 1.3.5) ότι ενώ για γενικά μητρώα  $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  ισχύει ότι  $B \otimes C \neq C \otimes B$  (το αναφέραμε και δείξαμε παράδειγμα στη Διάλεξη 4), υπάρχουν μητρώα μετάθεσης  $P, Q$  τέτοια ώστε  $P(B \otimes C)Q = C \otimes B$ . Να επιβεβαιώστε ότι τα μητρώα μετάθεσης είναι αυτά που αναφέρονται στο βιβλίο.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:** Στο βιβλίο αναφέρονται τα  $P$  και  $Q$  ως  $P = P_{m_1, m_2}$  και  $Q = P_{n_1, n_2}$  τέτοια ώστε

$$P(B \otimes C)Q^T = C \otimes B.$$

Έστω το πλήθος γραμμών  $M = m_1 m_2$  και το πλήθος στηλών  $N = n_1 n_2$  του γινομένου  $B \otimes C$ .

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(B \otimes C)Q^T &= P_{m_1, m_2}(B \otimes C)P_{n_1, n_2}^T \\ &= I_M([(1 : m_2 : M), (2 : m_2 : M), \dots, (m_2 : m_2 : M)], :) \\ &\quad (B \otimes C) \\ &\quad I_N([(1 : n_1 : N), (2 : n_1 : N), \dots, (n_1 : n_1 : N)], :) \end{aligned}$$

Ο όρος με το  $I_M$  είναι μεγέθους  $M \times M$ , ο όρος  $B \otimes C$  είναι  $M \times N$  και ο όρος με το  $I_N$  είναι μεγέθους  $N \times N$ . Επομένως το αποτέλεσμα θα είναι ένα  $M \times N$  μητρώο.

Αν κοιτάξουμε προσεκτικά τον παραπάνω τύπο και συγκρίνουμε με το αναλυτικό παράδειγμα με το μητρώο  $A$  στην αρχή της σελ. 27 του συγγράματος, παρατηρούμε πως στην πραγματικότητα το αποτέλεσμα πρόκειται για μεταθέσεις γραμμών του  $B \otimes C$  ανά  $m_2$  και μεταθέσεις στηλών ανά  $n_1$ . Αυτές οι ενέργειες οδηγούν στο γινόμενο  $C \otimes B$ .

## 1.6 Ερώτημα 6

(GvL A1.3.8 - προσοχή στο βιβλίο εκ παραδρομής αντί του συμβόλου της αναστροφής, γράφτηκε  $\otimes$ .) Να δείξετε ότι αν  $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$  και  $C \in \mathbb{R}^{q \times q}$  και

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix},$$

όπου  $x_i \in \mathbb{R}^q$ , τότε

$$x^T(B \otimes C)x = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \beta_{ij}(x_i^T C x_j)$$

Ακολουθούν τα μεγέθη για τον κάθε όρο στην παραπάνω έκφραση:

$$\begin{aligned} x^T &\rightarrow 1 \times pq, \\ (B \otimes C) &\rightarrow pq \times pq, \\ x &\rightarrow pq \times 1. \end{aligned}$$

Άρα το τελικό αποτέλεσμα είναι βαθμωτός.

Εάν εκτελέσουμε πρώτα το γινόμενο  $(B \otimes C)x$ , τότε έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}C & \cdots & \beta_{1p}C \\ \beta_{21}C & \cdots & \beta_{2p}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p1}C & \cdots & \beta_{pp}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

όπου το πρώτο μητρώο είναι ένα μπλοκ μητρώο που αποτελείται από τα στοιχεία  $\beta_{ij}C$ , και πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα-στήλη  $x$ .

Η εξίσωση που περιγράφει τον πολλαπλασιασμό αυτόν είναι:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\beta_{ij}C)x_j$$

Αυτός ο πολλαπλασιασμός δίνει ένα διάνυσμα-στήλη διαστάσεων  $pq \times 1$ , το οποίο στη συνέχεια πολλαπλασιάζεται με το

$$x^T = [x_1^T \quad x_2^T \quad \cdots \quad x_p^T]$$

δίνοντας την τελική εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p x_i^T (\beta_{ij}C)x_j$$

## 1.7 Ερώτημα 7

Δίνονται  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^n$  διανύσματα (στήλες) και  $k$  ακέραιος τέτοιος ώστε  $k \leq n$ . Να δείξετε ότι υπάρχουν μητρώα  $U, V \in \mathbb{R}^{n \times k}$  ώστε να ισχύει

$$(A + uv^T)^k = A^k + UV^T$$

και να δείξετε πώς να το υπολογίσετε αποδοτικά. Ποιό είναι το αντίστοιχο  $\Omega$ ;

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Δίνονται:

- Ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
- Δύο διανύσματα  $u, v \in \mathbb{R}^n$ .
- Ένας ακέραιος  $k \leq n$ .

Ο στόχος είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν μητρώα  $U, V \in \mathbb{R}^{n \times k}$  έτσι ώστε:

$$(A + uv^T)^k = A^k + UV^T,$$

και να υπολογίσουμε την έκφραση αυτή με αποδοτικό τρόπο.

### Υπολογισμός των Πρώτων Δυνάμεων

Θα υπολογίσουμε αρχικά τις πρώτες δυνάμεις για  $k=1,2,3$  ώστε να φτάσουμε επαγωγικά σε κάποιον τελικό τύπο που ενδεχομένως να αποκαλύψει τρόπους αποδοτικού υπολογισμού.

Για  $k = 1$ , έχουμε:

$$(A + uv^T)^1 = A + uv^T.$$

Αυτή είναι απλώς η αρχική μορφή του  $A + uv^T$ , χωρίς πρόσθετους όρους.

Για  $k = 2$ :

Χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$(A + uv^T)^2 = (A + uv^T)(A + uv^T),$$

αναπτύσσουμε το γινόμενο:

$$(A + uv^T)^2 = A \cdot A + A \cdot uv^T + uv^T \cdot A + uv^T \cdot uv^T.$$

Αναλυτικά, κάθε όρος είναι:

$$\begin{aligned} A \cdot A &= A^2, \\ A \cdot uv^T &= Au \cdot v^T, \\ uv^T \cdot A &= u \cdot (v^T A), \\ uv^T \cdot uv^T &= u \cdot (v^T u) \cdot v^T = (v^T u) \cdot (uv^T), \end{aligned}$$

που είναι το μητρώο  $uv^T$  scaled κατά τον βαθμωτό  $v^T u$ . Τελικά, για  $k = 2$ , προκύπτουν οι όροι:

$$(A + uv^T)^2 = A^2 + Au \cdot v^T + u \cdot (v^T A) + (v^T u) \cdot (uv^T).$$

Για  $k = 3$ , έχουμε:

Χρησιμοποιώντας ομοίως τη σχέση:

$$(A + uv^T)^3 = (A + uv^T) \cdot (A + uv^T)^2.$$

Αντικαθιστώντας το  $(A + uv^T)^2$  από πριν, έχουμε:

$$(A + uv^T)^3 = (A + uv^T) \cdot (A^2 + Au \cdot v^T + u \cdot (v^T A) + (v^T u) \cdot (uv^T)).$$

Αναπτύσσοντας το γινόμενο αυτό, κάθε όρος περιέχει μια διαδοχική εφαρμογή του  $A$  στους όρους  $u$  και  $v$ . Προκύπτουν τελικά όροι της μορφής  $A^i u \cdot (A^j v)^T$ , όπως:

$$\begin{aligned} A^3, \\ A^2 u \cdot v^T, \\ Au \cdot (v^T A), \\ u \cdot (v^T A^2). \end{aligned}$$

Επαγωγικά λοιπόν, κάθε επόμενη δύναμη  $(A + uv^T)^k$  θα περιέχει συνδυασμούς όρων της μορφής  $A^i u \cdot (A^j v)^T$ , όπου οι δείκτες  $i$  και  $j$  αντιστοιχούν σε διαδοχικές εφαρμογές του  $A$  ή του  $A^T$  στα διανύσματα  $u$  και  $v$ , αντίστοιχα. Αυτό είναι κρίσιμο για την κατασκευή των μητρώων  $U$  και  $V$  όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Για να συλλάβουμε όλους τους όρους που εμφανίζονται στις δυνάμεις του  $A + uv^T$  μέχρι την τάξη  $k$ , ορίζουμε τα μητρώα  $U$  και  $V$  ως εξής:

- **Ορισμός του  $U$ :**

$$U = [u, Au, A^2 u, \dots, A^{k-1} u] \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Κάθε στήλη του  $U$  είναι της μορφής  $A^i u$ , όπου  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , και αντιστοιχεί σε κάθε διαδοχική εφαρμογή του  $A$  πάνω στο  $u$ .

• **Ορισμός του  $V$ :**

$$V = [v, A^T v, (A^2)^T v, \dots, (A^{k-1})^T v] \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Κάθε στήλη του  $V$  είναι της μορφής  $(A^j)^T v$ , όπου  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , και αντιστοιχεί σε κάθε διαδοχική εφαρμογή του  $A^T$  πάνω στο  $v$ .

Έτσι, το γινόμενο  $UV^T$  περιέχει όλους τους συνδυασμούς των όρων  $A^i u \cdot (A^j v)^T$  που εμφανίζονται στις διαδοχικές δυνάμεις του  $(A + uv^T)^k$ , καλύπτοντας όλους τους απαραίτητους όρους που προκύπτουν από την σχέση που ανέλυσα παραπάνω με επαγωγή.

Το γινόμενο  $UV^T$  παράγει ακριβώς αυτούς τους όρους, ενώ ο όρος  $A^k$  διατηρεί τη βασική δύναμη του  $A$  χωρίς την επίδραση του  $uv^T$ .

Επομένως, έχουμε:

$$(A + uv^T)^k = A^k + UV^T.$$

Η κατασκευή των μητρώων  $U$  και  $V$  επιτρέπει τον αποδοτικό υπολογισμό της έκφρασης με πολυπλοκότητα  $\mathcal{O}(kn^2)$ , καθώς απαιτεί μόνο  $k$  πολλαπλασιασμούς με το μητρώο  $A$  και το ανάστροφό του, σε αντίθεση με την πλήρη εξαντλητική επέκταση του  $(A + uv^T)^k$ , η οποία θα ήταν πολύ πιο κοστοβόρα.

**Συμπέρασμα:** Απεδείχθη επομένως ότι υπάρχουν μητρώα  $U, V$  όπως κατασκευάστηκαν παραπάνω, ώστε:

$$(A + uv^T)^k = A^k + UV^T,$$

με αποδοτικό τρόπο υπολογισμού που εκμεταλλεύεται την προσθήκη του  $uv^T$  στο  $A$ , ώστε να προκύψει ένας αναδρομικός τύπος υπολογισμού των όρων του αποτελέσματος ο οποίος μας γλιτώνει από περίπλοκες πράξεις.

## 1.8 Ερώτημα 8

Δίνεται

$$A = \begin{bmatrix} I_n & xy^T \\ yx^T & -I_n \end{bmatrix}$$

όπου τα  $x, y \in \mathbb{R}^n$  είναι διανύσματα στήλες και  $I_n$  είναι το ταυτοτικό μητρώο συμβατού μεγέθους (πρόκειται για ειδική περίπτωση Χαμιλτονιανού μητρώου, βλ. GnL ενότητα 1.3.10). Έστω επίσης τυχαίο  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

- (α) Να κατασκευάσετε συνάρτηση MATLAB η οποία δοθέντων των  $x, y$  κατασκευάζει το  $A$ . Η συνάρτηση να λέγεται `HamIbuild(x,y)` όπου  $x, y$  είναι ισομεγέθη διανύσματα (στήλες).
- (β) Για  $n = 2^{[6:12]}$  να εκτελέσετε τις εντολές:



```

x = rand(n, 1);
y = rand(n, 1);
I = eye(n);
B = rand(n, 1);
A = HamIbuild(x, y);
C = mtimes(A, B)

```

και να χρονομετρήσετε τα runtimes της τελευταίας εντολής (πολλαπλασιασμού) με αξιόπιστο τρόπο.

- (γ) Να υλοποιήσετε εξειδικευμένο αλγόριθμο πολλαπλασιασμού μητρώων σαν και το παραπάνω με μητρώα  $2^n \times s$  όπου η δεύτερη διάσταση  $s$  είναι πολύ μικρότερη του  $n$ . Η συνάρτηση να λέγεται `HAMM(x,y,B)`. Να συγκρίνετε τα runtimes της με τα αποτελέσματα του (β). Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

#### ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Δες το αρχείο .mlx για τα  $\alpha$ ,  $\beta$ )