

Εργασία 2

Χαράλαμπος Αναστασίου

Οκτώβριος 2024

1 Εισαγωγή

μπλα μπλα μπλα

1.1 Ερώτημα 1

Αν $x = [1 : 8]$ και $P_{2,4}$ είναι το μητρώο τέλειας αναδιάταξης $\text{mod } 2$, τότε να γράψετε το διάνυσμα $P_{2,4} \cdot x$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το x είναι ένα διάνυσμα-στήλη μεγέθους 8×1 . Το μητρώο τέλειας αναδιάταξης $P_{q,r} = P_{2,4}$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο, ο οποίος έχει αντληθεί από τις διαφάνειες μαθήματος:

$$P_{2,4} = I_8 ([1 : 4 : 8, 2 : 4 : 8, 3 : 4 : 8, 4 : 4 : 8])$$

Το $P_{2,4}$ έχει μέγεθος 8×8 .
Επομένως, το γινόμενο $P_{2,4} \cdot x$ είναι:

$$P_{2,4} \cdot x = I_8 ([1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8]) \cdot x = \begin{bmatrix} x(1 : 4 : 8) \\ x(2 : 4 : 8) \\ x(3 : 4 : 8) \\ x(4 : 4 : 8) \end{bmatrix}$$

που είναι το τελικό διάνυσμα-στήλη μεγέθους 8×1 .

1.2 Ερώτημα 2

(Σωστό/Λάθος) Αν $P_{2,4}$ είναι το μητρώο τέλειας αναδιάταξης $\text{mod } 2$, τότε ισχύει:

$$P_{2,4} \cdot P_{2,4}^\top = I_8$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Σωστό.

1.3 Ερώτημα 3

(GvL A1.3.4) Έστω το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$$

όπου το B είναι άνω διδιαγώνιο. Να περιγράψετε τη δομή του $T = PAP^\top$, όπου η $P = P_{2,n}$ είναι η μετάθεση τέλει αναδιάταξης mod 2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

```
1 m = 4;
2
3
4 % Random values for the main diagonal
5 main_diag = randi(10, 1, m);
6
7 % Random values for the first upper diagonal
8 upper_diag = randi(10, 1, m-1);
9
10 % Create the upper bidiagonal matrix B
11 B = diag(main_diag) + diag(upper_diag, 1);
12
13 % Create the matrix A
14 A = [zeros(m), B; B', zeros(m)];
15
16 % Display the final square matrix A
17 disp('The matrix A is:')
18 disp(A);
19
20 n = size(A,1); % size of A
21
22 % Create the identity matrix I
23 I = eye(n);
24
25 % Define the row permutation of I
26 r = 3; % You can change this value to experiment
27 % r=4;
28 % r=5;
29 perm = [];
30 for i = 1:r
31     indices = i:r:n;
32     perm = [perm, indices];
33 end
34
```

```

35 % Row permutation of I
36 P = I(perm, :);
37
38 T = P * A * P';
39 D = T';
40
41 % I notice that for different values of r,
42 % the matrix T remains SYMMETRIC !!!

```

Σχόλια κώδικα: Στον παραπάνω κώδικα για τη δημιουργία της μετάθεσης τέλειας αναδιάταξης χρησιμοποιήθηκε ένας βρόγχος for ο οποίος δημιουργεί την μετάθεση (perm) με βάση τον τύπο από τις διαφάνειες του μαθήματος.

1.4 Ερώτημα 4

(GvL A1.3.7 - προσοχή: στο βιβλίο εκ παραδρομής, αντί του συμβόλου της αναστροφής, γράφτηκε \otimes). Να επαληθεύσετε ότι, αν $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, τότε ισχύει:

$$y \otimes x = \text{vec}(xy^\top).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

- Έχουμε:

$$y \otimes x = \begin{bmatrix} y_1 x \\ y_2 x \\ \vdots \\ y_n x \end{bmatrix} \Rightarrow \text{διάνυσμα-στήλη } mn \text{ στοιχείων}$$

- Επίσης:

$$(xy^\top)_{ij} = x_i y_j \Rightarrow \text{μητρώο } m \times n$$

και

$$\text{vec}(xy^\top) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_1 \\ \vdots \\ x_m y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_m y_n \end{pmatrix}$$

Είναι εμφανές ότι το $\text{vec}(xy^T)$ είναι ίσο με το $y \otimes x$, καθώς στους βαθμωτούς ισχύει η αντιμεταθετικότητα ($x_1 y_1 = y_1 x_1$ κ.ο.κ.).

1.5

Ερώτημα 5

Να αποδείξετε αυτό που αναφέρεται στο σύγγραμμα (εξίσωση GvL 1.3.5) ότι ενώ για γενικά μητρώα $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$, $C \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ισχύει ότι $B \otimes C \neq C \otimes B$ (το αναφέραμε και δείξαμε παράδειγμα στη Διάλεξη 4), υπάρχουν μητρώα μετάθεσης P, Q τέτοια ώστε $P(B \otimes C)Q = C \otimes B$. Να επιβεβαιώσετε ότι τα μητρώα μετάθεσης είναι αυτά που αναφέρονται στο βιβλίο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στο βιβλίο αναφέρονται τα P και Q ως $P = P_{m_1, m_2}$ και $Q = P_{n_1, n_2}$ τέτοια ώστε

$$P(B \otimes C)Q^T = C \otimes B.$$

Έστω το πλήθος γραμμών $M = m_1 m_2$ και το πλήθος στηλών $N = n_1 n_2$ του γινομένου $B \otimes C$.

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(B \otimes C)Q^T &= P_{m_1, m_2}(B \otimes C)P_{n_1, n_2}^T \\ &= I_M([(1 : m_2 : M), (2 : m_2 : M), \dots, (m_2 : m_2 : M)], :) \\ &\quad (B \otimes C) \\ &\quad I_N([(1 : n_1 : N), (2 : n_1 : N), \dots, (n_1 : n_1 : N)], :) \end{aligned}$$

Ο όρος με το I_M είναι μεγέθους $M \times M$, ο όρος $B \otimes C$ είναι $M \times N$ και ο όρος με το I_N είναι μεγέθους $N \times N$. Επομένως το αποτέλεσμα θα είναι ένα $M \times N$ μητρώο.

Αν κοιτάξουμε προσεκτικά τον παραπάνω τύπο και συγκρίνουμε με το αναλυτικό παράδειγμα με το μητρώο A στην αρχή της σελ. 27 του συγγράματος, παρατηρούμε πως στην πραγματικότητα το αποτέλεσμα πρόκειται για μεταθέσεις γραμμών του $B \otimes C$ ανά m_2 και μεταθέσεις στηλών ανά n_1 . Αυτές οι ενέργειες οδηγούν στο γινόμενο $C \otimes B$.

1.6

Ερώτημα 6

(GvL A1.3.8 - προσοχή στο βιβλίο εκ παραδρομής αντί του συμβόλου της αναστροφής, γράφτηκε \otimes .) Να δείξετε ότι αν $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ και $C \in \mathbb{R}^{q \times q}$ και

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix},$$

όπου $x_i \in \mathbb{R}^q$, τότε

$$x^T(B \otimes C)x = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \beta_{ij}(x_i^T C x_j)$$

Ακολουθούν τα μεγέθη για τον κάθε όρο στην παραπάνω έκφραση:

$$\begin{aligned} x^T &\rightarrow 1 \times pq, \\ (B \otimes C) &\rightarrow pq \times pq, \\ x &\rightarrow pq \times 1. \end{aligned}$$

Άρα το τελικό αποτέλεσμα είναι βαθμωτός.

Εάν εκτελέσουμε πρώτα το γινόμενο $(B \otimes C)x$, τότε έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}C & \cdots & \beta_{1p}C \\ \beta_{21}C & \cdots & \beta_{2p}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p1}C & \cdots & \beta_{pp}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

όπου το πρώτο μητρώο είναι ένα μπλοκ μητρώο που αποτελείται από τα στοιχεία $\beta_{ij}C$, και πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα-στήλη x .

Η εξίσωση που περιγράφει τον πολλαπλασιασμό αυτόν είναι:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\beta_{ij}C)x_j$$

Αυτός ο πολλαπλασιασμός δίνει ένα διάνυσμα-στήλη διαστάσεων $pq \times 1$, το οποίο στη συνέχεια πολλαπλασιάζεται με το

$$x^T = [x_1^T \quad x_2^T \quad \cdots \quad x_p^T]$$

δίνοντας την τελική εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p x_i^T (\beta_{ij}C)x_j$$