EXAMPLE 7.1 - EXTRA DATA

Consider the quaternion algebra $B\langle i,j,k\rangle = \left(\frac{-1,-3}{\mathbb{Q}}\right)$ where $i^2 = -1$, $j^2 = -3$, ij = k. The order $O = \mathbb{Z} + 2i\mathbb{Z} + 2j\mathbb{Z} + 2k\mathbb{Z}$ has 4 right equivalence classes with right order precisely O. We list the Brandt matrices T(n) for $n = 1, \ldots, 14$.

1

Below, we give the first coefficients of the corresponding theta series.

$$\begin{aligned} &\Theta_{1,1}(q) = \frac{1}{2} + q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 6q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{1,2}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 4q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 8q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{1,3}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 4q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 2q^{12} \\ &\Theta_{1,4}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 8q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 4q^{15} \\ &\Theta_{1,5}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 2q^6 + 0q^7 + 10q^8 + 0q^9 + 12q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 10q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{1,6}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 2q^6 + 0q^7 + 10q^8 + 0q^9 + 12q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 10q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{1,6}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 2q^6 + 0q^7 + 10q^8 + 0q^9 + 12q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 10q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{1,7}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 2q^6 + 0q^7 + 10q^8 + 0q^9 + 12q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 10q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{1,8}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 2q^6 + 0q^7 + 10q^8 + 0q^9 + 12q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 10q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{1,8}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 4q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{2,1}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 4q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{2,2}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15} \\ &\Theta_{2,2}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 4q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 4q^{15} \\ &\Theta_{2,3}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 4q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 2q^{15} \\$$

 $\Theta_{5,1}(q) = \frac{1}{2} + 0q + q^2 + 0q^3 + 0q^4 + 0q^5 + 2q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 2q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 12q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{5,2}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 4q^{10} + 0q^{11} + 0q^{12} + 0q^{13} + 12q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{5,3}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 8q^{10} + 0q^{11} + 0q^{12} + 0q^{13} + 4q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{5,4}(q) = \frac{1}{2} + 0q + q^2 + 0q^3 + 0q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 10q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 4q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{5,5}(q) = \frac{1}{2} + q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 6q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{5,6}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 4q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 8q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{5,7}(q) = \frac{1}{5} + 0q + 0q^2 + q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 4q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 2q^{15}$ $\Theta_{5,8}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 8q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 4q^{15}$ $\Theta_{6,1}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 4q^{10} + 0q^{11} + 0q^{12} + 0q^{13} + 12q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{6,2}(q) = \frac{1}{2} + 0q + q^2 + 0q^3 + 0q^4 + 0q^5 + 2q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 2q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 12q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{6,3}(q) = \frac{1}{2} + 0q + q^2 + 0q^3 + 0q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 10q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 4q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{6,4}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 8q^{10} + 0q^{11} + 0q^{12} + 0q^{13} + 4q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{6,5}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 4q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 8q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{6,6}(q) = \frac{1}{2} + q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 6q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{6,7}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 8q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 4q^{15}$ $\Theta_{6,8}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 4q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 2q^{15}$ $\Theta_{7,1}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 8q^{10} + 0q^{11} + 0q^{12} + 0q^{13} + 4q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{7,2}(q) = \frac{1}{2} + 0q + q^2 + 0q^3 + 0q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 10q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 4q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{7,3}(q) = \frac{1}{2} + 0q + q^2 + 0q^3 + 0q^4 + 0q^5 + 2q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 2q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 12q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{7,4}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 4q^{10} + 0q^{11} + 0q^{12} + 0q^{13} + 12q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{7,5}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 4q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 2q^{15}$ $\Theta_{7,6}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 8q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 4q^{15}$ $\Theta_{7,7}(q) = \frac{1}{2} + q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 6q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{7,8}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 4q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 8q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{8,1}(q) = \frac{1}{2} + 0q + q^2 + 0q^3 + 0q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 10q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 4q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{8,2}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 2q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 8q^{10} + 0q^{11} + 0q^{12} + 0q^{13} + 4q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{8,3}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 4q^{10} + 0q^{11} + 0q^{12} + 0q^{13} + 12q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{8,4}(q) = \frac{1}{2} + 0q + q^2 + 0q^3 + 0q^4 + 0q^5 + 2q^6 + 0q^7 + 6q^8 + 0q^9 + 2q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 12q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{8,5}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 8q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 4q^{15}$ $\Theta_{8,6}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + q^3 + 2q^4 + 0q^5 + 0q^6 + 4q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 4q^{11} + 2q^{12} + 0q^{13} + 0q^{14} + 2q^{15}$ $\Theta_{8,7}(q) = \frac{1}{2} + 0q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 4q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + 0q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 8q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15}$ $\Theta_{8,8}(q) = \frac{1}{2} + q + 0q^2 + 0q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 0q^6 + 0q^7 + 2q^8 + q^9 + 0q^{10} + 0q^{11} + 2q^{12} + 6q^{13} + 0q^{14} + 0q^{15}$