

SEMINAR TESIS I

MAGNETOHYDRODYNAMICS INSTABILITY

Muchamad Harry Yudha Pratama 20121026

Pembimbing: Dr. Agus Yodi Gunawan

Penguji: Rudy Kusdiantara, Ph. D.

22 Mei 2023



Pendahuluan

Fusi Nuklir

Perubahan iklim adalah ancaman terbesar dalam kehidupan manusia. Hal ini bisa merusak kesehatan, melalui polusi udara, penyakit, peristiwa cuaca ekstrem, dll. Ditambah, krisis energi sedang melanda dunia saat ini. Sehingga transisi ke energi terbarukan perlu diakselerasi.

Fusi nuklir dianggap sebagai jawaban dalam menghadapi permasalahan tersebut.

Matahari dan bintang lainnya semuanya ditenagai oleh reaksi yang disebut fusi nuklir. Prosesnya rumit dan sulit untuk ditiru, tetapi pada dasarnya melibatkan dua inti atom ringan yang digabungkan untuk membentuk satu inti yang lebih berat sekaligus melepaskan energi dalam jumlah besar.

Kelebihan: Bahan bakar mudah didapat dan "*unlimited*" (air laut), tidak menghasilkan karbon dioksida, tidak akan terjadi peristiwa *catastrophic*.

Kekurangan: Kondisi yang diperlukan untuk terjadinya fusi nuklir sangat ekstrim dan spesifik (temperatur dan tekanan tinggi), mengontrol reaksi fusi terbukti sulit.

PINN

Di sisi lain, sudah banyak inovasi di bidang matematika yang mempermudah kehidupan manusia (simulasi numerik, AI, dll). Harapannya, banyak inovasi ini bisa membantu dalam mengatasi kekurangan fusi nuklir.

Physics-Informed Neural Network (PINN) merupakan salah satu inovasi terbaru. Pendekatan ini bisa mendapatkan solusi dari persamaan differensial, serta bisa digunakan untuk mencari parameter persamaan differensial yang cocok dengan data.

Semoga dengan adanya PINN ini bisa membantu dalam mengatasi berbagai masalah di fusi nuklir.

Plasma

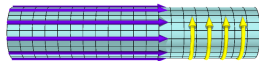
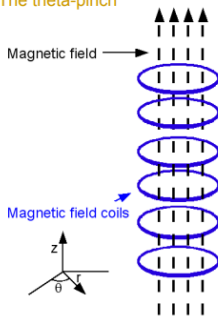
Plasma adalah keadaan materi selain padat, cair dan gas. Ketika gas netral dipanaskan sedemikian rupa sehingga beberapa elektron dibebaskan dari atom atau molekul, ia berubah wujud dan menjadi plasma. Ini terdiri dari gas terionisasi sebagian, yang mengandung ion, elektron, dan atom netral.

Contoh plasma: petir, matahari/bintang, aurora borealis.

Reaktor fusi memanaskan plasma ke suhu yang jauh lebih panas daripada inti matahari — lebih dari 100 juta derajat Celcius. Medan magnet yang kuat (*magnetic confinement*) kemudian membatasi plasma menjadi daerah kecil yang dapat dikontrol di mana fusi dapat terjadi.

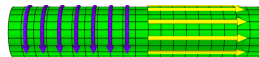
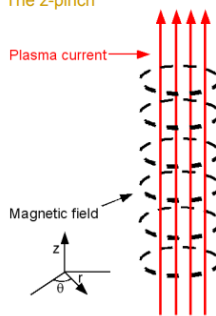
Magnetic Confinement

The theta-pinch



(a) θ pinch

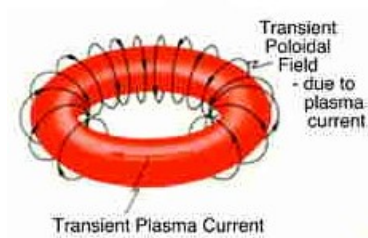
The z-pinch



(b) Z-pinch

Gambar: Theta-pinch and Z-pinch

Toroidal Pinches



To avoid end losses, wrap the pinch into torus.

Tujuan Penelitian

- Mengkonstruksi model matematika dari pergerakan plasma dalam *magnetic confinement*.
- Menganalisa ketidakstabilan dari pergerakan plasma.

Model Matematika

Navier-Stokes Equation (Momentum Balance)

Merupakan bentuk penerapan hukum newton kedua pada *infinitesimal* fluida.

$$\Sigma F = ma$$

$$\Sigma F = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

dengan operator $\frac{Dh}{Dt}$ didefinisikan sebagai $\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)h$, h merupakan suatu fungsi (bisa skalar maupun vektor).

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + f$$

Volumetric Lorentz Force

Gaya Lorentz adalah kombinasi gaya listrik dan magnet pada muatan titik akibat medan elektromagnetik. Sebuah partikel bermuatan q bergerak dengan kecepatan \mathbf{u} dalam medan listrik \mathbf{E} dan medan magnet \mathbf{B} mengalami gaya sebesar:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Volumetric Lorentz Force adalah gaya lorentz yang pada bagian infinitesimal fluida.

$$\frac{\mathbf{F}}{V_0} = \frac{q}{V_0}\mathbf{E} + \frac{q}{V_0}\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{f} = \rho_c\mathbf{E} + \rho_c\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Perhatikan bahwa $\rho_c\mathbf{u} = \mathbf{J}$ (arus listrik), kemudian asumsikan tidak ada medan listrik eksternal,

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Magnetohydrodynamics (MHD) Equation

Governing Equation	Keterangan
$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$	Mass Continuity
$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$	Energy equation of state, $\gamma = \frac{5}{3}$
$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$	Faraday's law (induction equation)
$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$	Momentum balance
$\mathbf{E} = \eta \mathbf{J} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}$	Ohm's law, η : electric resistivity. Untuk plasma yang panas, $\eta = 0$
$\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0}$	Ampere-Maxwell law (no external electric field), μ_0 : permeability of free space
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Gauss law, continuity equation for magnetic field

“We can therefore say that magnetic field lines move with the plasma flow in ideal MHD. The magnetic topology is conserved, “frozen in the fluid”, so to speak.”

MHD Ekuilibrium

Governing Equation	Equilibrium Equation
$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$	$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$
$(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla))(\frac{\rho}{\rho^\gamma}) = 0$	$(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\frac{\rho}{\rho^\gamma}) = 0$
$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$	$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$
$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$	
$\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0}$	
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	

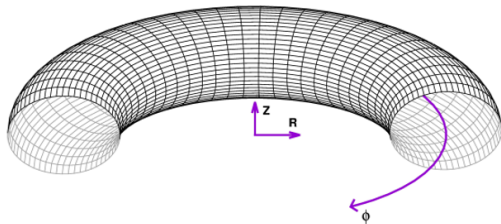
MHD Ekuilibrium Statis ($\mathbf{u} = 0$)

Equilibrium Equation	Static Equilibrium Equation
$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$	auto-satisfied
$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{p}{\rho \gamma} \right) = 0$	auto-satisfied
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	auto-satisfied
$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$	$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$
$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$	
$\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0}$	$\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

MHD Instabilities

- Ideal MHD sering digunakan untuk mendeskripsikan *macroscopic instabilities*.
- Ideal MHD seringkali merupakan *mediocre approximation*, namun secara mengejutkan dapat mendeskripsikan instability dengan sangat baik.
- Ideal instabilities biasanya merupakan yang terkuat dan yang paling tidak stabil.
 - current-driven vs pressure-driven
- Strategi dalam mempelajari plasma instability:
 - Dimulai dari ekuilibrium awal.
 - Linearkan persamaan MHD dan abaikan suku orde tinggi.
 - Lakukan sedikit perturbasi pada ekuilibrium.

Sistem Koordinat



Digunakan sistem koordinat silinder, dengan titik asal adalah center dari torus.

$$r = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ Z \end{pmatrix}$$

Bidang yang sejajar dengan $R - \phi$ disebut bidang **poloidal**. Bidang yang tegak lurus dengan ϕ disebut bidang **toroidal**.

Melinearkan persamaan ideal MHD

- Misalkan subscript '0' menandakan ekuilibrium dan '1' menandakan perturbasi. Misal $\mathbf{r} = (R, \phi, Z)$ vektor posisi.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r}, t)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(\mathbf{r}) + p_1(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$$

dengan $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ untuk ekuilibrium statis.

- Untuk ekuilibrium statis:

$$\nabla p = \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0$$

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0$$

Melinearkan persamaan ideal MHD

- Abaikan hasil perkalian dari elemen perturbasi, memberikan

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 \quad (2)$$

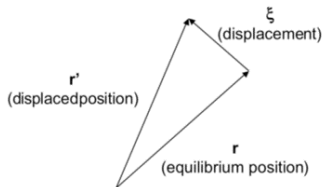
$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \quad (3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0 \quad (4)$$

- Perhatikan bahwa hanya \mathbf{u}_1 yang merupakan time-dependent variable pada sisi kanan pers (1), (2), dan (3).

Displacement vector (ξ)

- Definisikan vektor perpindahan, ξ , yang mendeskripsikan seberapa jauh plasma berpindah dari keadaan ekuilibrium



- Jika $\xi(\mathbf{r}, t = 0) = 0$, maka perpindahannya adalah

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t') dt'$$

- Turunan terhadap waktunya hanyalah kecepatan perturbasi.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$$

Kembali ke persamaan continuity (1)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1$$

Substitusikan vektor perpindahan ke persamaan.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Kemudian, integrasikan terhadap waktu

$$\int_0^t \frac{\partial \rho_1}{\partial t'} dt' = \int_0^t \left[-\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \right]$$

Sehingga diperoleh solusi ρ_1 dalam ξ .

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = -\xi(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \xi(\mathbf{r}, t)$$

Solusi untuk \mathbf{B}_1 dan p_1

Dengan cara yang sama, akan didapat solusi untuk medan magnet dan tekanan perturbasi:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times [\xi(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r})] \\ p_1(\mathbf{r}, t) &= -\xi(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla p_0(\mathbf{r}) - \gamma p_0(\mathbf{r}) \nabla \cdot \xi(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

Momentum balance equation dalam ξ

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0$$

Substitusikan solusi untuk $\rho_1, \mathbf{B}_1, p_1$, akan diperoleh

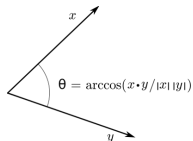
$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}[\xi(\mathbf{r}, t)] \quad (5)$$

Yang mana terlihat seperti hukum newton kedua, dengan:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\xi) = & \nabla (\xi \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \xi) + \\ & \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times (\nabla \times [\xi \times \mathbf{B}_0]) + \\ & \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \nabla \times [\xi \times \mathbf{B}_0]) \times \mathbf{B}_0 \end{aligned} \quad (6)$$

Operator \mathbf{F} merupakan fungsi dari ξ dan ekuilibrium, namun tidak dengan turunannya $(\frac{\partial \xi}{\partial t})$

Intuisi untuk operator gaya (\mathbf{F})



$$\xi \cdot \mathbf{F} = |\xi| |\mathbf{F}| \cos \theta$$

dengan, θ merupakan sudut antara ξ dan \mathbf{F}

- Jika $\xi \cdot \mathbf{F} < 0$:
 - Perpindahan dan gaya berada pada arah yang berlawanan.
 - Gaya menentang perpindahan.
 - Sistem biasanya akan berosilasi di sekitar kesetimbangan.
 - Hal ini mengarah ke kestabilan.
- Jika $\xi \cdot \mathbf{F} > 0$:
 - Perpindahan dan gaya berada pada arah yang sama.
 - Gaya mendorong perpindahan.
 - Perturbasi akan semakin bertumbuh.
 - Hal ini akan mengarah ke instability.
- Jika $\xi \cdot \mathbf{F} = 0$, maka perturbasinya stabil secara netral.

Initial Value Formulation

MHD Stability dapat diinvestigasi sebagai initial value problem dengan mencari solusi persamaan

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}[\xi(\mathbf{r}, t)]$$

dengan kondisi awal dan kondisi batas yang sesuai.

Metode ini dapat menghasilkan banyak informasi:

- Evolusi sistem sepanjang waktu.
- Solusi yang menghasilkan fastest growing mode.

Formulasi ini berguna untuk ekuilibrium yang rumit atau non-analitik ketika linearisasi atau seluruh persamaan MHD dapat diselesaikan secara numerik.

Mencari Titik Ekuilibrium

Suku Poloidal dan Toroidal

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{pol} + \mathbf{B}_{tor}$$

dengan,

$$\mathbf{B}_{pol} = B_R \mathbf{e}_R + B_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B}_{tor} = B_\phi \mathbf{e}_\phi$$

$\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ merupakan basis standar. Atau dapat ditulis,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_R \\ B_\phi \\ B_z \end{pmatrix}$$

Magnetic Flux

Flux dari medan magnet yang melintasi permukaan yang berada pada bidang toroidal (\mathbf{S}_{pol}) disebut poloidal magnetic flux.

Total Flux

$$\Psi = \int_{\mathbf{S}_{pol}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Poloidal Magnetic Flux

$$\psi(R, Z) = -\frac{1}{2\pi} \Psi$$

Menggunakan teorema divergensi,

$$\psi(R, Z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{S}_{pol}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z R' dR' d\phi$$

$$\psi(R, Z) = -\int_0^R \mathbf{B}(R, Z) \cdot \mathbf{e}_z R' dR' = -\int_0^R B_z(R', Z) R' dR'$$

Ekspresi \mathbf{B} dalam ψ

Berdasarkan persamaan untuk poloidal magnetic flux dan teorema dasar kalkulus, dapat ditulis

$$\mathbf{B}_z(R, Z) = -\frac{1}{R} \partial_R \psi(R, Z) \mathbf{e}_z$$

Dan dengan memandang persamaan $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ dan simetri axial terhadap arah toroidal ($\partial_\phi = 0$), dapat ditulis

$$\mathbf{B}_R(R, Z) = \frac{1}{R} \partial_Z \psi(R, Z) \mathbf{e}_R$$

Bukti

Untuk \mathbf{B}_z . Berdasarkan teorema dasar kalkulus, $\partial_R \psi = -B_z(R, Z)R$ sehingga,

$$-\frac{1}{R} \partial_R \psi(R, Z) \mathbf{e}_z = -\frac{1}{R} B_z(R, Z) R \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} = \mathbf{B}_z$$

Untuk \mathbf{B}_R

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_R B_R + \partial_\phi B_\phi + \partial_z B_z = 0$$

Dengan asumsi simetri axial terhadap arah toroidal, $\partial_\phi = 0$, sehingga $\partial_R B_R = -\partial_z B_z$. Maka,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \partial_z \psi(R, Z) \mathbf{e}_R &= -\frac{1}{R} \int_0^R \partial_z B_z(R', Z) R' dR' \mathbf{e}_R \\ &= -\frac{1}{R} \int_0^R \partial_R B_R(R', Z) R' dR' \mathbf{e}_R = \frac{1}{R} B_R R \mathbf{e}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ B_R \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_R \end{aligned}$$

Curl pada koordinat silinder (R, ϕ, Z)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_R & R\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \partial_R & \partial_\phi & \partial_z \\ A_R & RA_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R}(-\partial_\phi A_z + \partial_z RA_\phi)\mathbf{e}_R + (-\partial_z A_R + \partial_R A_z)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R}(-\partial_R RA_\phi + \partial_\phi A_R)\mathbf{e}_z$$

Magnetic Vector Potential

Karena $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, dan menggunakan identitas vektor kalkulus

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$$

untuk sembarang vektor \mathbf{X} . Maka dapat ditulis

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Dengan \mathbf{A} dapat disebut sebagai magnetic vector potential.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R}(-\partial_\phi A_z + \partial_z R A_\phi) \mathbf{e}_R + (-\partial_z A_R + \partial_R A_z) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R}(-\partial_R R A_\phi + \partial_\phi A_R) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = \partial_z A_\phi \mathbf{e}_R + (-\partial_z A_R + \partial_R A_z) \mathbf{e}_\phi - \frac{1}{R} \partial_R R A_\phi \mathbf{e}_z$$

Hubungan antara ψ dan \mathbf{A}

$$B_R = -\frac{1}{R}\partial_z\psi = \partial_z A_\phi$$

$$B_z = -\frac{1}{R}\partial_R\psi = -\frac{1}{R}\partial_R R A_\phi$$

Sehingga,

$$\psi = R A_\phi$$

Bentuk lain yang lebih kompak untuk mendeskripsikan medan magnet untuk geometri toroidal

- Magnetic field dan current density dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{pol} + B_{\phi} \mathbf{e}_{\phi} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 (\mathbf{J}_{pol} + J_{\phi} \mathbf{e}_{\phi}) = \nabla \times \mathbf{B}$$

- Fungsi skalar F yang berhubungan dengan toroidal magnetic field ($F = RB_{\phi}$) dapat digunakan untuk mengekspresikan poloidal current density.
- Oleh karena itu, dapat ditulis

$$\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \phi + B_{\phi} \mathbf{e}_{\phi}$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 \nabla F \times \nabla \phi + \mu_0 J_{\phi} \mathbf{e}_{\phi}$$

ide bukti: gunakan identitas vektor kalkulus $\nabla \psi \times \nabla \phi = \nabla \times (\psi \nabla \phi)$

Kembali ke force balance equation, $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$

Dapat dilihat bahwa $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$, yang menandakan bahwa tekanan juga merupakan fungsi dari flux ($p = p(\psi)$).

Bukti

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = B_R \partial_R p + B_\phi \partial_\phi p + B_z \partial_z p = 0$$

Maka,

$$B_R \partial_R p = -B_z \partial_z p$$

Agar persamaan ini terpenuhi untuk setiap titik pada domain, haruslah $p = p(\psi)$.

$$B_R \partial_\psi p \partial_R \psi + B_z \partial_\psi p \partial_z \psi = B_R \partial_\psi p (-R B_z) + B_z \partial_\psi p (R B_R) = 0$$

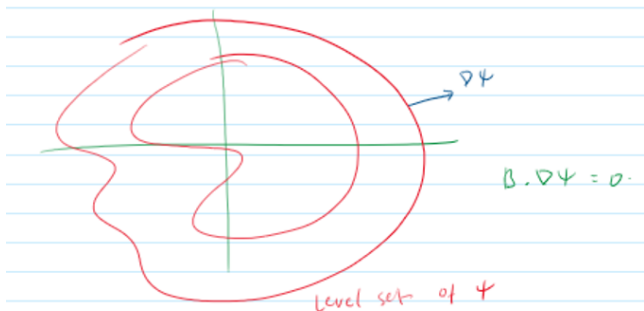
Konsekuensinya,

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{B} \cdot d_\psi p \nabla \psi = d_\psi p (\mathbf{B} \cdot \nabla \psi) = 0$$

$$\iff \mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$$

Interpretasi $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$

Magnetic field lines lie on surface of constant ψ .



Poloidal current density I

Secara similar, $\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0$ mengharuskan F fungsi dari flux juga ($F = F(\psi)$).

Bukti:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} \cdot \nabla p &= (\nabla F \times \nabla \phi + \mu_0 J_\phi \mathbf{e}_\phi) \cdot \nabla p \\ &= (\nabla F \times \nabla \phi) \cdot \nabla p + \mu_0 J_\phi \mathbf{e}_\phi \cdot \nabla p\end{aligned}$$

dengan menggunakan identitas cross-product, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{J} \cdot \nabla p &= -(\nabla \phi \times \nabla F) \cdot \nabla p + \mu_0 J_\phi \partial_\phi p \\ \mathbf{J} \cdot \nabla p &= -\nabla \phi \cdot (\nabla F \times \nabla p) = 0\end{aligned}$$

Agar persamaan tersebut dipenuhi untuk setiap titik pada domain, haruslah

$$\nabla F \times \nabla p = 0$$

Poloidal current density II

$$\nabla F \times \nabla p = 0$$

$$\iff \nabla \times F \nabla p = 0$$

$$\frac{1}{R} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_R & R\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \partial_R & \partial_\phi & \partial_z \\ F\partial_R p & RF\partial_\phi p & F\partial_z p \end{vmatrix} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_R F \partial_z p - \partial_z F \partial_R p \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\partial_R F \partial_z p = \partial_z F \partial_R p$$

Oleh karena itu haruslah $F = F(\psi)$, karena

$$\partial_R F \partial_z p = \partial_\psi F \partial_R \psi \partial_\psi p \partial_z \psi = \partial_\psi F (-RB_z) \partial_\psi p (RB_R)$$

$$\partial_z F \partial_R p = \partial_\psi F \partial_z \psi \partial_\psi p \partial_R \psi = \partial_\psi F (RB_R) \partial_\psi p (-RB_z)$$

Grad-Shafranov Equation

Dari informasi di atas, apabila disubstitusikan $p(\psi)$ dan $F(\psi)$ ke persamaan ekuilibrium statis, diperoleh

$$\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} + F \frac{dF}{d\psi} + \Delta^* \psi = 0$$

dengan,

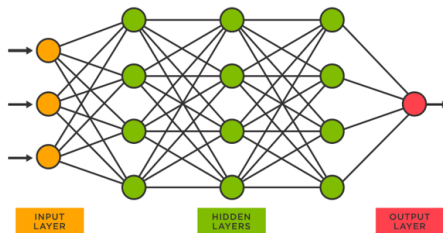
$$\Delta^* \psi = R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi}{R^2} \right) = R^2 \partial_R \left(\frac{1}{R^2} \partial_R \psi \right) + \partial_\phi^2 \psi + \partial_z^2 \psi$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{R} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi + \frac{F}{R} \mathbf{e}_\phi$$

$$\mu_0 \mathbf{J}_0 = \frac{1}{R} \frac{dF}{d\psi} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi - \frac{1}{R} \Delta^* \psi \mathbf{e}_\phi$$

Physics-Informed Neural Network

Neural Networks



Neural network merupakan pemetaan non-linear $\mathbf{X} \rightarrow g(\mathbf{X})$, dengan $g(X)$ terdiri dari banyak komposisi fungsi. \mathbf{X} dapat terdiri dari beberapa variabel, termasuk variabel ruang dan waktu.

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{z}_1 = \mathbf{W}_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}_1 \rightarrow \mathbf{a}_1 = f(\mathbf{z}_1) \rightarrow \mathbf{z}_2 = \mathbf{W}_2 \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2 \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \mathbf{a}_{n-1} = f(\mathbf{z}_{n-1}) \rightarrow u = z_n = \mathbf{W}_n \mathbf{z}_{n-1}$$

\mathbf{X} : input

u : output

$\mathbf{W}_i, \mathbf{b}_i$: bobot dan bias layer i

f : activation function

Physics-Informed Neural Networks

Diberikan persamaan differensial,

$$N(u) = 0$$

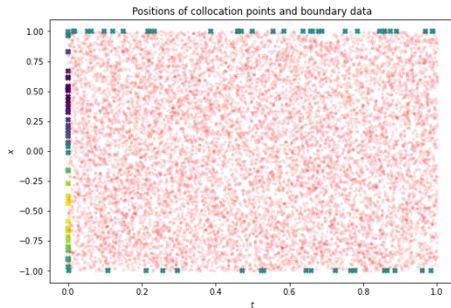
dilengkapi dengan kondisi awal dan atau kondisi batas. Definisikan

$$loss = N(u) + loss_0 + loss_b$$

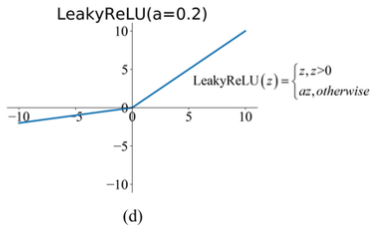
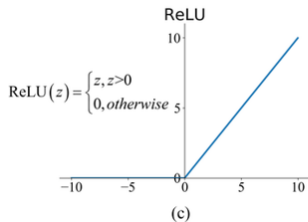
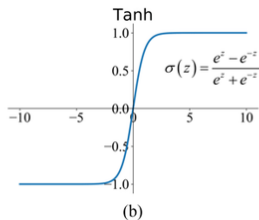
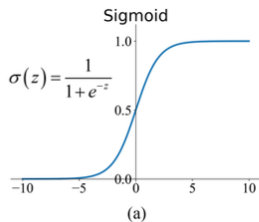
dengan $loss_0$ dan $loss_b$ merupakan fungsi penalti dari kondisi awal dan kondisi batas. Objectif: mencari $\mathbf{W}_i, \mathbf{b}_i$ untuk setiap- i sehingga fungsi $loss$ minimum (atau bahkan 0).

Collocation Points

Ide: dengan hanya beberapa titik di domain, harapannya dapat menemukan himpunan solusi yang memenuhi persamaan differensial dan dan kondisi awal dan atau kondisi batas pada semua titik.



Activation Function



Rencana Penelitian

Rencana Penelitian

- Mencari kondisi ekuilibrium dari persamaan MHD dengan menyelesaikan Grad-Shafranov Equation menggunakan pendekatan PINN.
- Menentukan kestabilan MHD apabila diberikan initial displacement / velocity perturbation.

TERIMAKASIH

Referensi

- Boyd, T.J.M dan Sanderson, J.J. 2003. The Physics of Plasmas. Cambridge University Press.
- de Blank, H.J. MHD Instabilities in TOKAMAKS. Dutch Institute for Fundamental Energy Research.
- Freidberg, J.P. 2007. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge University Press.
- Freidberg, J.P. 2014. Ideal MHD. Cambridge University Press.
- Raissi, M et al. 2018. Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems involving Nonlinear Partial Differential Equations. Journal of Computational Physics.
- Ramasamy, R. 2022. Equilibrium and initial value problem simulation studies of nonlinear magnetohydrodynamics in stellarators. Disertasi. TU Munich.
- Zohuri, B. 2017. Magnetic Confinement Fusion Driven Thermonuclear Energy. Springer International Publishing.