

毕业设计选题报告

径向基函数的高阶有限体积变分重构

周涵宇

清华大学航天航空学院

目录

- 1 研究背景
- 2 研究目标
- 3 研究方法
- 4 研究成果预期

高阶有限体积方法

高阶CFD

流体力学等对流问题中有三种典型的高阶方法：有限差分（FD）、有限体积（FV）与间断伽辽金（DG）。目前有限体积方法能够在有效处理非结构网格的同时在计算有间断问题时拥有较好的鲁棒性[1]。

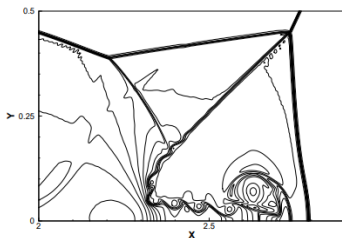


图 1: [1]中展示的高阶有限体积WENO方法的高分辨能力

高阶有限体积方法

高阶有限体积方法

有限体积方法相当于权为分片常数的加权余量法。有限体积记录控制体中的未知函数均值，通过均值重构出分片光滑的函数，并在重构的函数上求解控制体上的积分（弱形式）方程。一般来说，有限体积法的精度阶数由重构的函数逼近精度决定。记 \mathcal{R} 是重构算子， \mathcal{M} 是单元平均算子，则重构的任务是使对任意（希望解出的）未知函数 u ：

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}(u)) \approx u$$

主流的高阶重构方法是定义分片的多项式并利用周围单元的均值信息确定其系数。广泛使用的k-exact重构，以及较新的紧致型重构方法[2-5]，都如此。

径向基函数

径向基函数——高维散点数据表示

- 径向基函数（RBF）空间一般定义为赋范空间 \mathbb{R}^d 上的 $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 函数空间：

$$\left\{ s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^q \alpha_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \right\}$$

- 其中 \mathbf{x}_i 是每个基的基点（reference point）。基点是函数空间本身的属性。不同的 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 函数 ϕ 就决定了径向基函数的种类。
- 相比于全局定义的多项式函数来说，径向基函数天然在基点附近具有局部性。
- 径向基函数空间的定义和基点相关，意味着其对坐标平移和刚体旋转不封闭（ k 阶多项式函数空间是封闭的）。

径向基函数

径向基函数——高维散点数据表示

给定散点数据，在散点上建立径向基函数空间即可进行插值、拟合等操作。除了位置，径向基的尺度大小对其性质影响也很显著，如下所示：

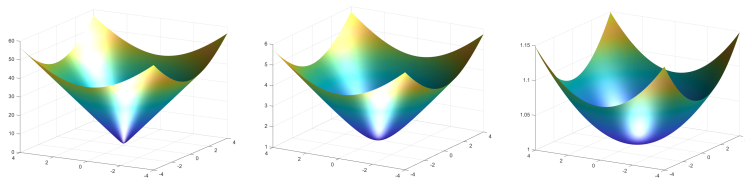


图 2: 不同形状因子 (shape factor) 对二维MQ径向基函数的影响

径向基函数

径向基函数的偏微分方程格式

RBF的无网格性质使得的RBF数值方法是无网格方法。

- 最早发展的配点法（RBFCM），即定义离散空间为RBF空间，同时加权余量只在每个基点上约束。早期的RBFCM采用全局的径向基函数，需要解全局的稠密矩阵 [6–9]。后期的工作如 [10–12]提出了一系列局部性质的配点法。
- 基于有限差分的思想，无网格表示中还发展了基于导数估计的RBFFD方法 [13]。由于RBFFD本身是中心的，此方法在推广至对流类问题中需要人工粘性等额外手段保障稳定性[14, 15]。
- RBF在有限体积（FV）方法中的应用也有多方面的研究，下一节中详述。

有限体积中的径向基

CV-FE应用

较早在有限体积框架下应用径向基函数是结点型FV方法[16–18]。其思路是在原有的形函数重构方法中，将已有重构多项式在更大模板上延拓，将残差用RBF拟合。由于扩充了模板，其精度比原有二阶有提升，二维下可以达到五阶。

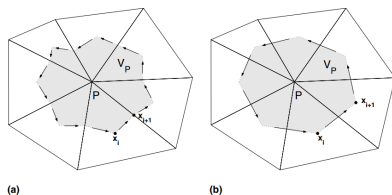


图 3: 原有二阶CV—FE方法的重构模板示意

有限体积中的径向基

WENO/k-exact应用

WENO中使用RBF有较多研究，包括较早开始的[19, 20]，还有不同角度研究的[21–23]，都是将WENO原有的 k -exact 重构替换为RBF相关的算法。同时[24]也是将 k -exact 用RBF改进，但并未提及间断处理。其共同的特点是，重构模板同时采用 k -exact 或者WENO中的形式，模板内每个单元控制体定义一个RBF进行插值。具体采用的RBF形式和WENO的光滑指示器实施方案都有差别。报告称精度有不同提高。

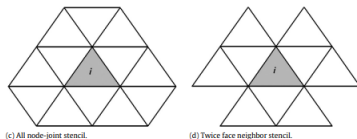


图 4: k -Exact型模板示意，RBF参考点定义在每个模板单元上

有限体积中的径向基

DQ思路的重构

文献[25]本身的重构依然是多项式，但是多项式的系数按照泰勒展开，视作场的偏导数，而偏导数的近似通过RBF插值得到。同WENO/k-exact 中的RBF，这里用来估算偏导数的RBF依然定义在每个模板单元上。

$$\begin{aligned} U(x, y) = & U_i + \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_i (x - x_i) + \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_i (y - y_i) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_i \frac{(x - x_i)^2}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_i \frac{(y - y_i)^2}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Big|_i (x - x_i)(y - y_i) \\ & + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_i \frac{(x - x_i)^3}{6} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \Big|_i \frac{(y - y_i)^3}{6} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} \Big|_i \frac{(x - x_i)^2 (y - y_i)}{2} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^2 \partial x} \Big|_i \frac{(y - y_i)^2 (x - x_i)}{2}, \end{aligned}$$

图 5: 幂级数视角下的重构多项式，RBF负责确定其中的偏导数

研究目标

研究工作的方向

根据已有文献，现计划设计并测试一个非结构网格有限体积格式：

- 将重构多项式适当替换为RBF；
- 在[4]给出的变分有限体积方法中实施；
- 首先结合对流重构方法[26]，在线性对流方程和eikonal方程上测试其特性；
- 研究具体的限制措施，尝试在限制器型格式中使其能够处理间断。

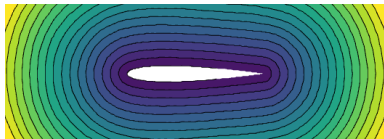


图 6: Eikonal方程是非线性双曲方程，可以计算距离场

研究目标

题目重点

研究中主要的创新性工作（对应每点）。

- 获取RBF相对于多项式重构的优势以及RBF可调参数对格式的影响；
- 相对于其他RBF有限体积方法，获取变分有限体积中的紧致等好特性；
- 具体到Eikonal方程，探究RBF对对其固有间断的近似能力；
- 尝试提出相应的RBF类型限制器的构造方案。

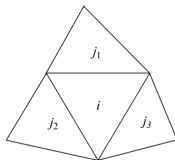


图 7: 变分重构的模板，具有DG等方法中紧致的特性

研究方法

具体工作方案

- 研究具体工作是推导格式、编写程序、进行测试和比对
- 格式推导基于变分重构的框架修改
- 程序主要基于实验室已有的变分重构CFD程序
- 不同算例中给出合适的精度指标

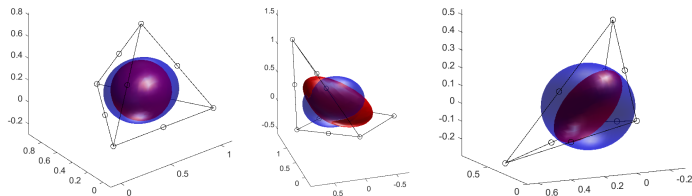


图 8: 在单元内部定义的两RBF形式对比

研究成果预期

成果预期

- 一个（双曲方程中）稳定、高精度的RBF变分重构新型有限体积格式
- 以上格式在具体的标量方程对流重构实施的程序
- RBF变分重构中RBF参数设定的普遍方法
- 一系列相关算例以及结论

Thanks for your attention!

Q & A

参考文献 I

- [1] Shu C-W. High-order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for CFD[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2003, 17(2): 107-118.
- [2] Wang Q, Ren Y-X, Li W. Compact high order finite volume method on unstructured grids I: Basic formulations and one-dimensional schemes[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 314: 863-882.
- [3] Wang Q, Ren Y-X, Li W. Compact high order finite volume method on unstructured grids II: Extension to two-dimensional Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 314: 883-908.
- [4] Wang Q, Ren Y-X, Pan J, et al. Compact high order finite volume method on unstructured grids III: Variational reconstruction[J]. Journal of Computational physics, 2017, 337: 1-26.

参考文献 II

- [5] Zhang Y-S, Ren Y-X, Wang Q. Compact high order finite volume method on unstructured grids IV: Explicit multi-step reconstruction schemes on compact stencil[J]. Journal of Computational Physics, 2019, 396: 161-192.
- [6] Golberg M, Chen C, Karur S. Improved multiquadric approximation for partial differential equations[J]. Engineering Analysis with boundary elements, 1996, 18(1): 9-17.
- [7] Kansa E J. Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates[J]. Computers & Mathematics with applications, 1990, 19(8-9): 127-145.
- [8] Šarler B, Perko J, Chen C. Radial basis function collocation method solution of natural convection in porous media[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2004.

参考文献 III

- [9] Šarler B. A radial basis function collocation approach in computational fluid dynamics[J]. Computer Modelling in Engineering & Sciences, 2005, 7: 185-193.
- [10] Sarra S A. A local radial basis function method for advection–diffusion–reaction equations on complexly shaped domains[J]. Applied mathematics and Computation, 2012, 218(19): 9853-9865.
- [11] Sanyasiraju Y, Chandhini G. Local radial basis function based gridfree scheme for unsteady incompressible viscous flows[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(20): 8922-8948.
- [12] Divo E, Kassab A J. An efficient localized radial basis function meshless method for fluid flow and conjugate heat transfer[J], 2007.

参考文献 IV

- [13] Tolstykh A, Shirobokov D. On using radial basis functions in a “finite difference mode” with applications to elasticity problems[J]. Computational Mechanics, 2003, 33(1): 68-79.
- [14] Shankar V, Wright G B, Kirby R M, et al. A radial basis function (RBF)-finite difference (FD) method for diffusion and reaction–diffusion equations on surfaces[J]. Journal of scientific computing, 2015, 63(3): 745-768.
- [15] Fornberg B, Lehto E. Stabilization of RBF-generated finite difference methods for convective PDEs[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(6): 2270-2285.
- [16] Moroney T J. An investigation of a finite volume method incorporating radial basis functions for simulating nonlinear transport[D]. [S.l.]: [s.n.], 2006.

参考文献 V

- [17] Moroney T J, Turner I W. A finite volume method based on radial basis functions for two-dimensional nonlinear diffusion equations[J]. Applied mathematical modelling, 2006, 30(10): 1118-1133.
- [18] Moroney T J, Turner I W. A three-dimensional finite volume method based on radial basis functions for the accurate computational modelling of nonlinear diffusion equations[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225(2): 1409-1426.
- [19] Aboiyar T, Georgoulis E H, Iske A. High order WENO finite volume schemes using polyharmonic spline reconstruction[J], 2006.
- [20] Aboiyar T, Georgoulis E H, Iske A. Adaptive ADER methods using kernel-based polyharmonic spline WENO reconstruction[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2010, 32(6): 3251-3277.

参考文献 VI

- [21] Aràndiga F, Donat R, Romani L, et al. On the reconstruction of discontinuous functions using multiquadric RBF–WENO local interpolation techniques[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2020, 176: 4-24.
- [22] Bigoni C, Hesthaven J S. Adaptive WENO methods based on radial basis function reconstruction[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 72(3): 986-1020.
- [23] Guo J, Jung J-H. A RBF-WENO finite volume method for hyperbolic conservation laws with the monotone polynomial interpolation method[J]. Applied Numerical Mathematics, 2017, 112: 27-50.
- [24] Liu Y, Zhang W, Jiang Y, et al. A high-order finite volume method on unstructured grids using RBF reconstruction[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2016, 72(4): 1096-1117.

参考文献 VII

- [25] Liu Y, Yang L, Shu C, et al. Efficient high-order radial basis-function-based differential quadrature–finite volume method for incompressible flows on unstructured grids[J]. Physical Review E, 2021, 104(4): 045312.
- [26] Huang Q-M, Ren Y-X, Wang Q. High Order Finite Volume Schemes for Solving the Non-Conservative Convection Equations on the Unstructured Grids[J]. Journal of Scientific Computing, 2021, 88(2): 1-34.