

变分重构+对流重构：有关径向基的试验

1. 格式构造：

变分重构：

单元 i ：

$$u_i(x) = \bar{u}_i + \sum_{l=1}^{VR_DOF} u_i^l \phi_{l,i}(x)$$

界面 f ：

$$IJI_f = \frac{1}{d_{LR}} \int_f \sum_{m=1}^{VR_DIFF} [W_{m,f} D_m(u_L - u_R)]^2 df$$

其中 m 指标指示微分算子， VR_DIFF 是不同微分算子的数量。比如已有的二维 VR 中， $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ， $D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ ， $D_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 等等，三阶重构（二次多项式）时使用最高二阶导数，则 $VR_DIFF = 5$ 。 $W_{m,f}$ 是平衡公式量纲并且减小奇异性的权重，和导数阶数以及参考尺度有关。

VR 重构即约束 $\sum IJI$ 取极小，是关于单元均值的线性问题。

VR 是全局计算的，而且是中心的。

对流重构：

非守恒对流方程的有限体积格式中，源项包含对流，其需要在体积分中迎风。

对 VR 重构后的单元 i ，依次取每个 f 上 state Riemann solver 的界面值 uc_f ，

进行插值：

$$\tilde{u}_i(x) = \bar{u}_i + \sum_{l=1}^{CR_DOF} \tilde{u}_i^l \phi_{CRl,i}(x)$$
$$ICR_f = \sum_{f \text{ in cell}} \int_f (\tilde{u}_{if} - uc_f)^2 df$$

表明 CR 是单元内的积分约束的、对连续边界的插值, 用 `state Riemann solver` 的界面值插值计算源项使其迎风。

VR、CR 中的基函数 φ, φ_{CR} 都是零均值基。

已有的 VR+CR 方案采用同一套多项式基函数, 目的是保障相同的精度阶数。但是, 此处的写法将其区分开以便下面讨论。

2. 函数的参数空间

在已有的 VR 与 CR 实现中, 其基函数是多项式, 且是全局坐标系下的自然多项式基。此处为了在大长宽比的网格中表示径向基, 引入参数空间的基函数表达。具体而言, 就是

$$\varphi(x) = \varphi(x(\xi)) = \phi(\xi)$$

当提及一个函数是参数空间下写的时, 表示 $\phi(\xi)$ 是 ξ 空间的径向基或者自然多项式。其中 $x(\xi)$ 是单元形函数插值, 是多项式形函数, 如果单元畸变不大, 近似是一个线性变换, 其 **Jacobian** 接近常数, 此时参数空间的完全多项式基等趋近于等价全局空间的完全多项式基。网格畸变大时全局下参数空间多项式不是多项式。

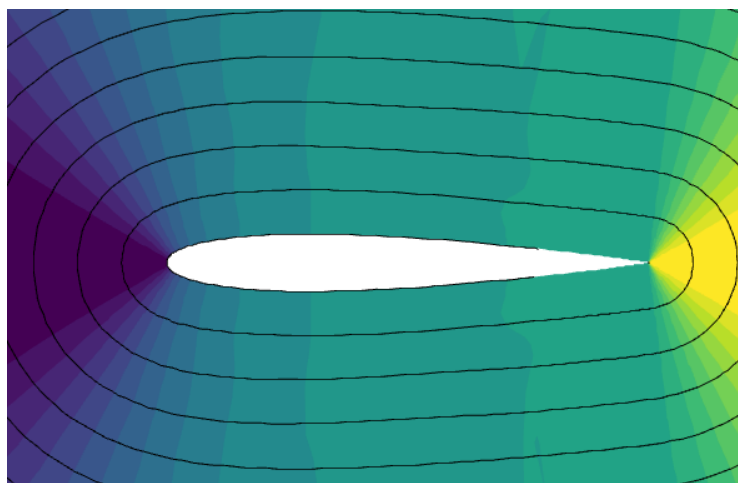
值得注意的是, 相对于全局坐标的多项式, 参数空间的多项式基是随着网格旋转的, 而全局多项式与网格的相对角度会导致格式变化。同时, 可以发现原有 IJI 也不是旋转不变的, 如果将

$$IJI_f = \frac{1}{d_{LR}} \int_f \sum_{m=1}^{VR_DIFF} [W_{m,f} D_m(u_L - u_R)] \cdot [W_{m,f} D_m(u_L - u_R)] df$$

中的微分算子 D_m 改为张量微分算子, 尺度相关的权重 $W_{m,f}$ 也构造为张量, 乘法视为缩并, 平方构造为张量的某个二次度量, 可以取得旋转不变性。目前的测

试（本文测试目前仅包括 **Eikonal** 方程）中，对于参数空间多项式的 **VR+CR**，在 2 阶情况下采用旋转不变的 *IJI* 比采用原形式稳定，但 3、4 阶由于高阶导数不容易构造足够多项的旋转不变的 *IJI*，同时加入原形式的 *IJI* 似乎更加稳定。2、3、4 阶中参数空间多项式单纯采用原有的 *IJI* 都并不稳定。

试验表明参数空间纯多项式的性质和全局差异不大，而且有可能受网格畸变影响。这些结果的意义是在 **VR** 中采用参数空间的 **RBF** 时可以沿用相应的 *IJI* 方案。



4 阶参数空间多项式，等值线：解，颜色：x 偏导

一阶导计算不如全局多项式光滑

3. 径向基函数

1 中阐述的 **CR** 和 **VR** 格式并没有规定基函数的选取，原则上可以任意加入径向基。注意到，**CR** 的过程与径向基插值的过程有类似之处，如果径向基函数基点正好处于所有面积分点，那么可以等价一个径向基插值。但是目前来看四边形单元一共有 12 个面积分点，**CR** 自由度太高暂时不考虑。

当然，可以考虑通过更少的边界点进行直接的 **RBF** 插值，而非更为广义的 **CR**

积分形式，此处暂不考虑。

因此，目前考虑三种实施 RBF 的情况：

A: VR、CR 采用同一组基，含有 RBF

B: VR 采用纯多项式，CR 采用含有 RBF 的基

C: VR 采用含有 RBF 的基，CR 采用纯多项式

同时，对于 VR、CR 的基函数，可以细分为参数空间或全局空间的多项式、参数空间或全局空间的 RBF。由于 2、3 阶下参数空间和全局纯多项式的性能差异很小，以下讨论对纯多项式的空间不作区分。

具体的 RBF 方案涉及：

RBF 形式：Gaussian, Multiquadric, Poly-Harmonic Spline 3rd order for 2D

RBF 尺度：全局空间下以单元尺度分别 x 、 y 缩放，参数空间下 四边形单元以 1 为单位。形状因子在 0.2~2 间进行试验。

RBF 布点：

1 点：重心处（或者参数空间的重心）

4 点：对四边形单元，位置在参数空间 $(0.5 \pm 0.5h, 0.5 \pm 0.5h)$ 的位置， $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 即为体积分高斯点。

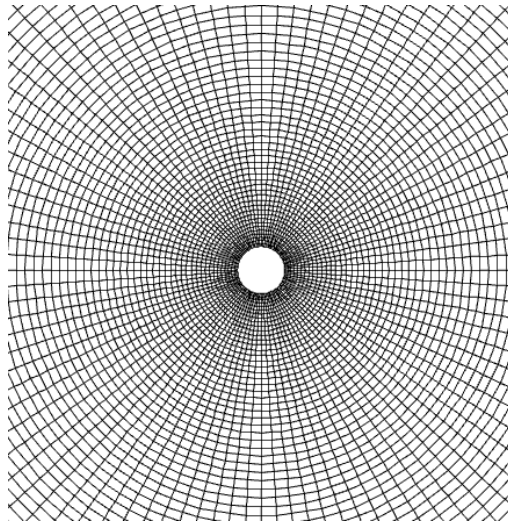
RBF 重构可以包含 0~2 阶多项式。

测试表明，影响 RBF 基稳定性的主要有 RBF 形式和尺度，1 点的格式一般比

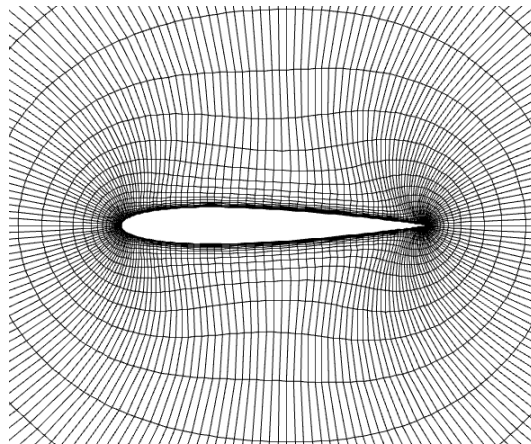
4 点稳定，4 点中 $h = 1$ 时一般最不稳定，但 $h \sim 0.5$ 时不同取值差别不大。

不同方案情况汇总：(+)

圆柱算例：壁面-远场



0012 算例：壁面-远场



A

A1: VR、CR 都是 1 阶多项式+1 点 RBF PHSpline $c=0.5$ 全局空间

IJI 纳入 0-1 阶导数

圆柱: 比 1 阶多项式略好

0012: 不稳定 (与长宽比有关)

A2: VR、CR 都是 1 阶多项式+1 点 RBF PHSpline $c=1$ 参数空间

IJI 纳入 0-1 阶导数

圆柱: 比 1 阶多项式略好

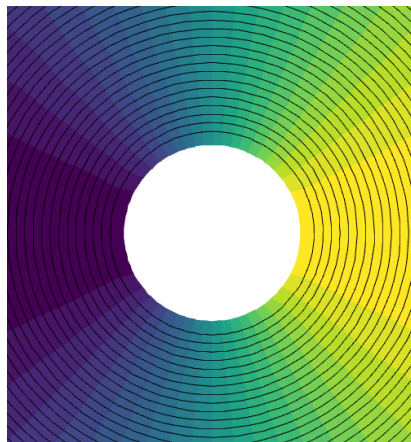
0012: 不稳定 (间断相关?)

A3: VR、CR 都是 1 阶多项式+4 点 RBF $h=0.2$ MQ $c=0.3$ 参数空间

IJI 纳入 0-1 阶导数

圆柱: 类似二阶多项式

0012: 不稳定



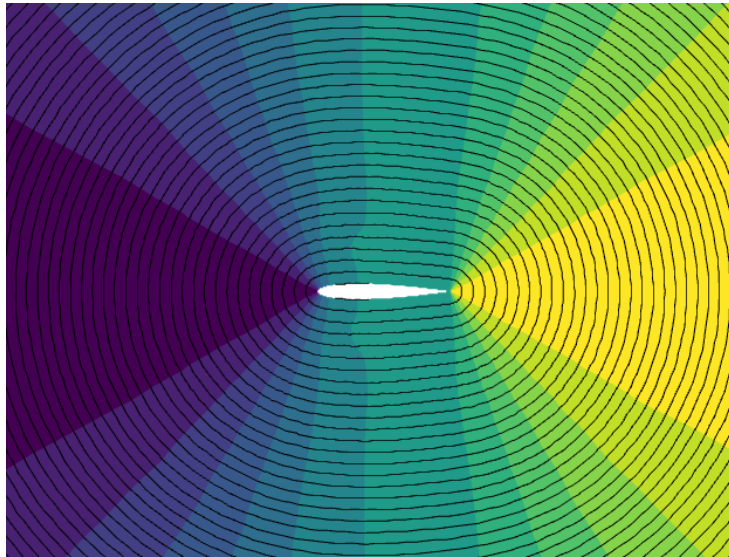
A3 圆柱

A 中 2 阶多项式+RBF 都很不稳定

B

B1: VR 2 阶多项式, CR 1 阶多项式+1 点 RBF MQ $c=0.3$ 参数空间

圆柱, 0012: 类似 2 阶多项式, CR 计算量明显减小

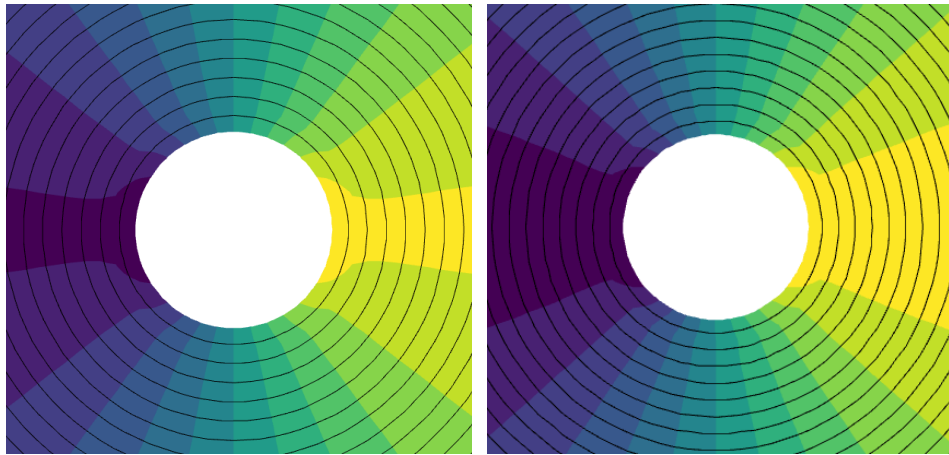


B1 0012, 一阶导不光滑

B2: VR 2 阶多项式, CR 1 阶多项式+4 点 RBF MQ $c=0.3$ $h=0.2$ 参数空间

圆柱: 稳定, 有待比较

0012: 不稳定



左 B2, 右 B3

B3: VR 2 阶多项式, CR 0 阶多项式+4 点 RBF MQ $c=0.3$ $h=0.2$ 参数空间

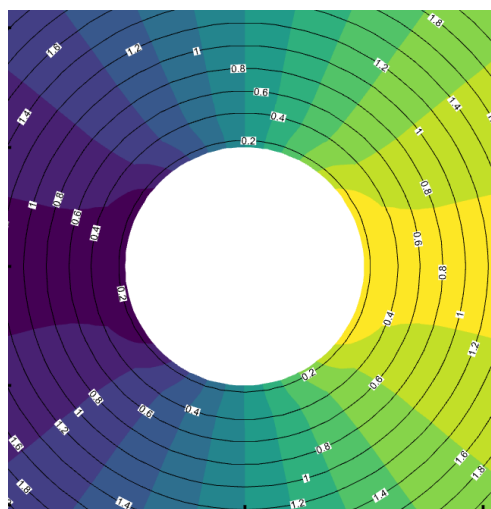
圆柱: 稳定, 有待比较

0012: 不稳定

C

C1: VR 1 阶多项式+1 点 RBF MQ $c=0.3$, 参数空间 CR 1 阶多项式

圆柱: 稳定, 奇怪



C1, 壁面很奇怪, 同 C2

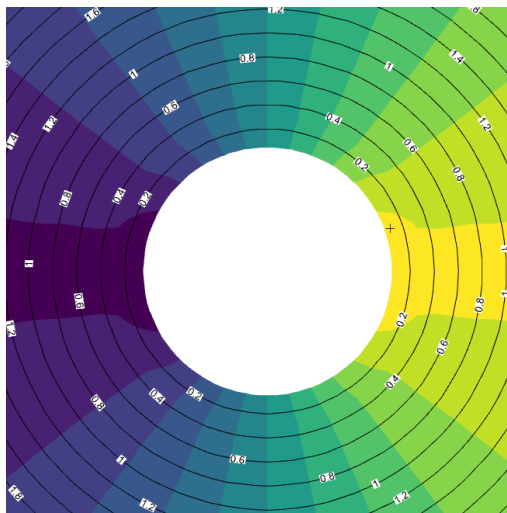
C2: VR 1 阶多项式+4 点 RBF MQ $c=0.3$, $h=0.2$, 参数空间 CR 1 阶多项式

圆柱: 稳定, 奇怪

C3: VR 1 阶多项式+4 点 RBF MQ $c=0.3$, $h=0.2$, 参数空间 CR 2 阶多项式

圆柱: 稳定, 奇怪有改善

0012: 不稳定

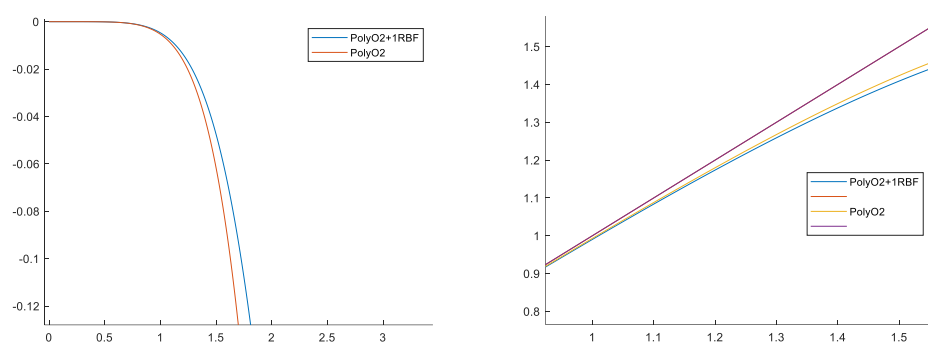


C3, 边界处较 C1C2 有改观

4. 关于 VR 守恒型格式 RBF

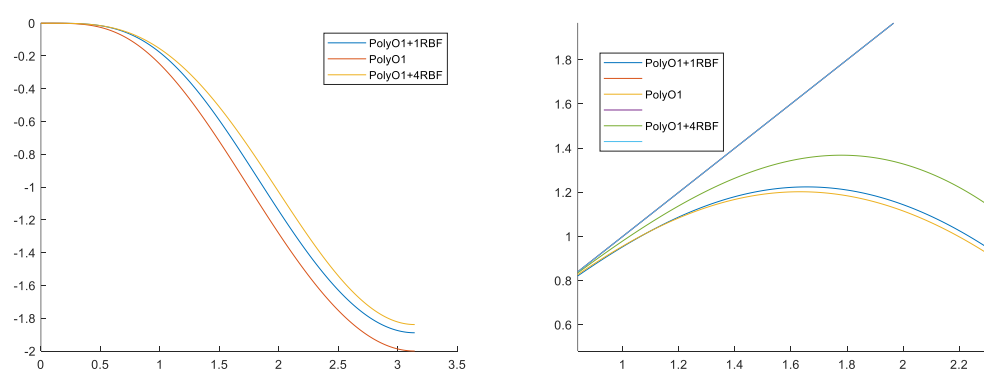
线性对流方程，Riemann Solver，傅里叶分析，二维正方形无限大网格，考虑 x 方向恒定对流速度。

如下给出 3 阶精度 VF 以及附加 1 点 RBF 的色散耗散特性，可见此时耗散略为改善，色散略为变差。



上图左为耗散特性，右为色散特性

给出二阶精度多项式 VF 的，以及分别添加 1RBF 与 4RBF 的结果，可见此时添加 4RBF 有最好的色散耗散特性。



上图左为耗散特性，右为色散特性

5. 总结

虽然还没有进行 VR+CR 在线性对流中的色散耗散分析，但是上述表明线性对流中 VR 的 RBF 部分不会直接引起负的耗散（或许证明？），但是 VR+CR 的 Eikonal 算例中以上情况经常引起发散（2 阶多项式+1 点，1 阶多项式+4 点），推测可能是 VR 方程奇异性导致的全局迭代收敛问题？

B、C 型重构中全局 RBF 的测试还比较少，但其实圆柱算例参数坐标比较接近全局 RBF 的情况。

看好 B、C 型？

B 型重构的可能改进：针对 CR 中 RBF 自由度过多，可以附加 1 阶导的插值约束；可以尝试在界面上直接布点 RBF 插值（猜测与积分型 CR 类似）

C 型重构：测试还较少，有待进一步观察。

测试：尚未测试散乱（长宽比有限）的网格（包括三角形）

尚未测试对极点的分辨能力

其他思路：发挥 RBF 经过验证的优势：散点插值，或许考虑域外插值（例，VR 或 CR 重构后，填补延拓多项式的体积分残量）（考虑不影响原多项式系数的方法）