变分重构方法测试

周涵宇 2022310984

1. 基函数

1.1. Local 泰勒基函数

物理空间的位置：

$$\mathbf{x} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$$

二维为例，泰勒基函数为

$$[\hat{\varphi}_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ X^2 \\ XY \\ Y^2 \\ X^3 \\ X^2Y \\ XY^2 \\ Y^3 \end{bmatrix}_i$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X & & \\ & \Delta Y & \\ & & \Delta Z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x - x_c \\ y - y_c \\ z - z_c \end{bmatrix}$$

经过零均值化后是此前 VR 的基函数用法。

1.2. 正交基函数

设有某组基函数 φ_i，以及一个函数空间上的内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$，那么可找到一个系数矩阵 $\mathcal{O}$，使得

$$\psi_i = \sum_j \mathcal{O}_{ij}\varphi_j$$

为单位正交基函数。事实上，由于

$$\delta_{ij} = \langle\psi_i|\psi_j\rangle = \langle\mathcal{O}_{il}\varphi_l|\mathcal{O}_{jm}\varphi_m\rangle = \mathcal{O}_{il}\mathcal{O}_{jm}\langle\varphi_l|\varphi_m\rangle$$

（上式中 l, m 求和），不妨要求 $\mathcal{O}_{ij}$ 可逆，则有：

$$\mathcal{O}^{-1}_{li}\mathcal{O}^{-1}_{mi} = \langle\varphi_l|\varphi_m\rangle$$

也就是说

$$[\mathcal{O}]^{-1}[\mathcal{O}]^{-\mathrm{T}} = [\langle\varphi_l|\varphi_m\rangle]$$

需要对对称阵 $[\langle\varphi_l|\varphi_m\rangle]$ 进行某个对称分解。最简单的方案是 Gram-Schmidt 过程，等价于对度量矩阵进行 Cholesky 分解，获得的下三角矩阵的逆即为 $[\mathcal{O}]$。问题是需要保证原始基函数的独立性，否则 Gram-Schmidt 过程不存在。

2. 投影后构建的变分重构（PVR）

定义（i 单元）cell-wise 的内积：

$$\langle f_1|f_2\rangle_{\Omega_i}=\frac{1}{\Omega_i}\int_{\Omega_i}f_1f_2d\Omega$$

对于每个单元上某组零均值正交基函数 ψ_i^l（此处下标为单元，上标为基维度），定义重构：

$$u_i=\overline{u}_i+\sum_{l>0}u_i^l\psi_i^l$$

这样，$\psi_i^0=1$ 恰为正交基的一部分，非常数部分与之正交且自身为单位大小。则可以定义基于正交投影（系数）的泛函：

$$I_f=\sum_m w_{b,ij,m}\left\langle u_i-u_j|\psi_i^m\right\rangle_{\Omega_i}^2+\sum_m w_{b,ji,m}\left\langle u_i-u_j|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}^2$$

简单推导：

$$\begin{aligned}
I_f&=\sum_m w_{b,ij,m}\left\langle\overline{u}_i+\sum_{l>0}u_i^l\psi_i^l-\overline{u}_j-\sum_{l>0}u_j^l\psi_j^l\middle|\psi_i^m\right\rangle_{\Omega_i}^2+\sum_m w_{b,ji,m}\left\langle\overline{u}_i+\sum_{l>0}u_i^l\psi_i^l-\overline{u}_j-\sum_{l>0}u_j^l\psi_j^l\middle|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}^2\\
&=\sum_m w_{b,ij,m}\left(\left\langle\overline{u}_i-\overline{u}_j|\psi_i^m\right\rangle_{\Omega_i}+\left\langle\sum_{l>0}u_i^l\psi_i^l-\sum_{l>0}u_j^l\psi_j^l\middle|\psi_i^m\right\rangle_{\Omega_i}\right)^2\\
&+\sum_m w_{b,ji,m}\left(\left\langle\overline{u}_i-\overline{u}_j|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}+\left\langle\sum_{l>0}u_i^l\psi_i^l-\sum_{l>0}u_j^l\psi_j^l\middle|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}\right)^2\\
&=\sum_m w_{b,ij,m}\left((\overline{u}_i-\overline{u}_j)\delta_{m0}+u_i^m(1-\delta_{m0})-\sum_{l>0}u_j^l\left\langle\psi_j^l|\psi_i^m\right\rangle_{\Omega_i}\right)^2\\
&+\sum_m w_{b,ji,m}\left((\overline{u}_j-\overline{u}_i)\delta_{m0}+u_j^m(1-\delta_{m0})-\sum_{l>0}u_i^l\left\langle\psi_i^l|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}\right)^2\\
&=w_{b,ij,0}\left[(\overline{u}_i-\overline{u}_j)-\sum_{l>0}u_j^l\left\langle\psi_j^l|1\right\rangle_{\Omega_i}\right]^2+w_{b,ji,0}\left[(\overline{u}_j-\overline{u}_i)-\sum_{l>0}u_i^l\left\langle\psi_i^l|1\right\rangle_{\Omega_j}\right]^2\\
&+\sum_{m>0}w_{b,ij,m}\left(u_i^m-\sum_{l>0}u_j^l\left\langle\psi_j^l|\psi_i^m\right\rangle_{\Omega_i}\right)^2+\sum_{m>0}w_{b,ji,m}\left(u_j^m-\sum_{l>0}u_i^l\left\langle\psi_i^l|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}\right)^2
\end{aligned}$$

那么

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial I_f}{\partial u_i^k} = {} & w_{b,ji,0}\left[(\overline{u}_j-\overline{u}_i)-\sum_{l>0}u_i^l\left\langle\psi_i^l|1\right\rangle_{\Omega_j}\right]\left[-\left\langle\psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_j}\right] \\
& + w_{b,ij,k}u_i^k - w_{b,ij,k}\sum_{l>0}u_j^l\left\langle\psi_j^l|\psi_i^k\right\rangle_{\Omega_i} + \sum_{m>0}w_{b,ji,m}\left[\left(u_j^m-\sum_{l>0}u_i^l\left\langle\psi_i^l|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}\right)\left(-\left\langle\psi_i^k|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}\right)\right] \\
& = w_{b,ij,k}u_i^k + \sum_{m>0}\sum_{l>0}w_{b,ji,m}\left\langle\psi_i^k|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}\left\langle\psi_i^l|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}u_i^l + w_{b,ji,0}\sum_{l>0}\left\langle\psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_j}\left\langle\psi_i^l|1\right\rangle_{\Omega_j}u_i^l \\
& - \sum_{m>0}w_{b,ji,m}\left\langle\psi_i^k|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}u_j^m - \sum_{l>0}w_{b,ij,k}\left\langle\psi_j^l|\psi_i^k\right\rangle_{\Omega_i}u_j^l + w_{b,ji,0}(\overline{u}_i-\overline{u}_j)\left\langle\psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_j}, k>0
\end{aligned}
$$

组装向量 $k>0$，$\mathbf{u}_i=[u_i^k]$，则上式为

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial I_f}{\partial \mathbf{u}_i} = A_{f,i}\mathbf{u}_i - B_{ij}\mathbf{u}_j - b_{ij}(\overline{u}_j-\overline{u}_i)
$$

其中系数矩阵与向量为：

$$
[A_{f,i}]_{kl} = w_{b,ij,k}\delta_{kl} + \sum_{m>0}w_{b,ji,m}\left\langle\psi_i^k|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}\left\langle\psi_i^l|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j} + w_{b,ji,0}\left\langle\psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_j}\left\langle\psi_i^l|1\right\rangle_{\Omega_j}
$$

$$
[B_{ij}]_{kl} = w_{b,ji,l}\left\langle\psi_i^k|\psi_j^l\right\rangle_{\Omega_j} + w_{b,ij,k}\left\langle\psi_j^l|\psi_i^k\right\rangle_{\Omega_i}
$$

$$
[b_{ij}]_k = w_{b,ji,0}\left\langle\psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_j}
$$

记

$$
[\mathcal{B}_{i,j}]_{km} = \left\langle\psi_i^k|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}
$$

$$
[\hat{b}_{ij}]_k = \left\langle\psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_j} = \frac{1}{w_{b,ji,0}}[b_{ij}]_k
$$

则矩阵表示下：

$$
[A_{f,i}] = IW_{b,ij} + [\mathcal{B}_{i,j}]W_{b,ji}[\mathcal{B}_{i,j}]^{\mathrm{T}} + w_{b,ji,0}[\hat{b}_{ij}][\hat{b}_{ij}]^{\mathrm{T}}
$$

$$
[B_{ij}] = [\mathcal{B}_{i,j}]W_{b,ji} + W_{b,ij}[\mathcal{B}_{j,i}]^{\mathrm{T}}
$$

其中 $W_{b,ij}=\mathrm{diag}(w_{b,ij,1},w_{b,ij,2},...w_{b,ij,N_{base}-1})$ 为（试验）基权重。注意 ij 顺序不同可取不同的权，即几何权不光是不同面之间的比例，也有面两侧的比例。

因此，如果已经获知每个单元的正交基函数，同时可进行临单元延拓并求内积，即可计算 $[\mathcal{B}_{i,j}]$ 以及 $[b_{ij}]$，进一步获得重构系数。

如果不采用正交基函数而仅仅为一般的零均值基函数，则

$$
\begin{aligned}
I_f &= \sum_m w_{b,ij,m} \left\langle \overline{u}_i + \sum_{l>0} u_i^l \psi_i^l - \overline{u}_j - \sum_{l>0} u_j^l \psi_j^l \middle| \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i}^2 + \sum_m w_{b,ji,m} \left\langle \overline{u}_i + \sum_{l>0} u_i^l \psi_i^l - \overline{u}_j - \sum_{l>0} u_j^l \psi_j^l \middle| \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j}^2 \\
&= \sum_m w_{b,ij,m} \left(\langle \overline{u}_i - \overline{u}_j | \psi_i^m \rangle_{\Omega_i} + \left\langle \sum_{l>0} u_i^l \psi_i^l - \sum_{l>0} u_j^l \psi_j^l \middle| \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} \right)^2 \\
&+ \sum_m w_{b,ji,m} \left(\langle \overline{u}_i - \overline{u}_j | \psi_j^m \rangle_{\Omega_j} + \left\langle \sum_{l>0} u_i^l \psi_i^l - \sum_{l>0} u_j^l \psi_j^l \middle| \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} \right)^2 \\
&= \sum_m w_{b,ij,m} \left((\overline{u}_i - \overline{u}_j)\delta_{m0} + \sum_{l>0} u_i^l \left\langle \psi_i^l | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} - \sum_{l>0} u_j^l \left\langle \psi_j^l | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} \right)^2 \\
&+ \sum_m w_{b,ji,m} \left((\overline{u}_j - \overline{u}_i)\delta_{m0} + \sum_{l>0} u_j^l \left\langle \psi_j^l | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} - \sum_{l>0} u_i^l \left\langle \psi_i^l | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} \right)^2 \\
&= w_{b,ij,0} \left[(\overline{u}_i - \overline{u}_j) - \sum_{l>0} u_j^l \left\langle \psi_j^l | 1 \right\rangle_{\Omega_i} \right]^2 + w_{b,ji,0} \left[(\overline{u}_j - \overline{u}_i) - \sum_{l>0} u_i^l \left\langle \psi_i^l | 1 \right\rangle_{\Omega_j} \right]^2 \\
&+ \sum_{m>0} w_{b,ij,m} \left(\sum_{l>0} u_i^l \left\langle \psi_i^l | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} - \sum_{l>0} u_j^l \left\langle \psi_j^l | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} \right)^2 + \sum_{m>0} w_{b,ji,m} \left(\sum_{l>0} u_j^l \left\langle \psi_j^l | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} - \sum_{l>0} u_i^l \left\langle \psi_i^l | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} \right)^2
\end{aligned}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial I_f}{\partial u_i^k} &= w_{b,ji,0} \left[(\overline{u}_j - \overline{u}_i) - \sum_{l>0} u_i^l \left\langle \psi_i^l | 1 \right\rangle_{\Omega_j} \right] \left[- \left\langle \psi_i^k | 1 \right\rangle_{\Omega_j} \right] \\
&+ \sum_{m>0} w_{b,ij,m} \left[\left(\sum_{l>0} u_i^l \left\langle \psi_i^l | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} - \sum_{l>0} u_j^l \left\langle \psi_j^l | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} \right) \left\langle \psi_i^k | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} \right] \\
&+ \sum_{m>0} w_{b,ji,m} \left[\left(\sum_{l>0} u_j^l \left\langle \psi_j^l | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} - \sum_{l>0} u_i^l \left\langle \psi_i^l | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} \right) \left(- \left\langle \psi_i^k | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} \right) \right] \\
&= \sum_{m>0} \sum_{l>0} w_{b,ij,m} \left\langle \psi_i^l | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} \left\langle \psi_i^k | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} u_i^l + \sum_{m>0} \sum_{l>0} w_{b,ji,m} \left\langle \psi_i^k | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} \left\langle \psi_i^l | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} u_i^l \\
&+ w_{b,ji,0} \sum_{l>0} \left\langle \psi_i^k | 1 \right\rangle_{\Omega_j} \left\langle \psi_i^l | 1 \right\rangle_{\Omega_j} u_i^l \\
&- \sum_{l>0} \sum_{m>0} w_{b,ji,m} \left\langle \psi_j^l | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} \left\langle \psi_i^k | \psi_j^m \right\rangle_{\Omega_j} u_j^l - \sum_{l>0} \sum_{m>0} w_{b,ij,m} \left\langle \psi_j^l | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} \left\langle \psi_i^k | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i} u_j^l \\
&+ w_{b,ji,0} (\overline{u}_i - \overline{u}_j) \left\langle \psi_i^k | 1 \right\rangle_{\Omega_j}, \\
& k > 0
\end{aligned}
$$

不妨记（对称的）基函数度量矩阵为

$$
[G_i]_{lm} = \left\langle \psi_i^l | \psi_i^m \right\rangle_{\Omega_i}
$$

则将系数矩阵改写为：

$$
[A_{f,i}] = [G_i] W_{b,ij} [G_i] + [\mathcal{B}_{i,j}] W_{b,ji} [\mathcal{B}_{i,j}]^{\mathrm{T}} + w_{b,ji,0} [\hat{b}_{ij}] [\hat{b}_{ij}]^{\mathrm{T}}
$$

$$
[B_{ij}] = [\mathcal{B}_{i,j}] W_{b,ji} [G_j] + [G_i] W_{b,ij} [\mathcal{B}_{j,i}]^{\mathrm{T}}
$$

即可使用非正交的零均值基函数。

3. 体积分变分重构（VVR）

遵循上一节的内积：

$$\langle f_1|f_2\rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{\Omega_i}\int_{\Omega_i} f_1 f_2 d\Omega$$

则泛函则定义为：

$$I_f = w_{ij}\left\langle u_i - u_j|u_i - u_j\right\rangle_{\Omega_i} + w_{ji}\left\langle u_i - u_j|u_i - u_j\right\rangle_{\Omega_j}$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial I_f}{\partial u_i^k} =& w_{ij}\left\langle \psi_i^k|u_i - u_j\right\rangle_{\Omega_i} + w_{ji}\left\langle \psi_i^k|u_i - u_j\right\rangle_{\Omega_j} \\
=& w_{ij}(\overline{u}_i - \overline{u}_j)\left\langle \psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_i} + w_{ij}\sum_{l>0}\left\langle \psi_i^k|\psi_i^l\right\rangle_{\Omega_i} u_i^l - w_{ij}\sum_{l>0}\left\langle \psi_i^k|\psi_j^l\right\rangle_{\Omega_i} u_j^l \\
&+ w_{ji}(\overline{u}_i - \overline{u}_j)\left\langle \psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_j} + w_{ji}\sum_{l>0}\left\langle \psi_i^k|\psi_i^l\right\rangle_{\Omega_j} u_i^l - w_{ji}\sum_{l>0}\left\langle \psi_i^k|\psi_j^l\right\rangle_{\Omega_j} u_j^l \\
=& w_{ij}\sum_{l>0}\left\langle \psi_i^k|\psi_i^l\right\rangle_{\Omega_i} u_i^l + w_{ji}\sum_{l>0}\left\langle \psi_i^k|\psi_i^l\right\rangle_{\Omega_j} u_i^l \\
&- w_{ij}\sum_{l>0}\left\langle \psi_i^k|\psi_j^l\right\rangle_{\Omega_i} u_j^l - w_{ji}\sum_{l>0}\left\langle \psi_i^k|\psi_j^l\right\rangle_{\Omega_j} u_j^l + w_{ji}(\overline{u}_i - \overline{u}_j)\left\langle \psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_j}
\end{aligned}$$

沿用上一小节的符号：

$$[\mathcal{B}_{i,j}]_{km} = \left\langle \psi_i^k|\psi_j^m\right\rangle_{\Omega_j}$$

$$[\hat{b}_{ij}]_k = \left\langle \psi_i^k|1\right\rangle_{\Omega_j} = \frac{1}{w_{ji}}$$

$$[G_i]_{lm} = \left\langle \psi_i^l|\psi_i^m\right\rangle_{\Omega_i}$$

并且新定义一个（对称的）延拓度量矩阵：

$$[G_{i,j}]_{lm} = \left\langle \psi_i^l|\psi_i^m\right\rangle_{\Omega_j}$$

则有系数矩阵为：

$$[A_{f,i}] = w_{ij}[G_i] + w_{ji}[G_{i,j}]$$

$$[B_{ij}] = w_{ij}[\mathcal{B}_{j,i}]^{\mathrm{T}} + w_{ji}[\mathcal{B}_{i,j}]$$

$$[b_{ij}] = w_{ji}[\hat{b}_{ij}]$$

4. 数值测试

4.1. 一维静态重构

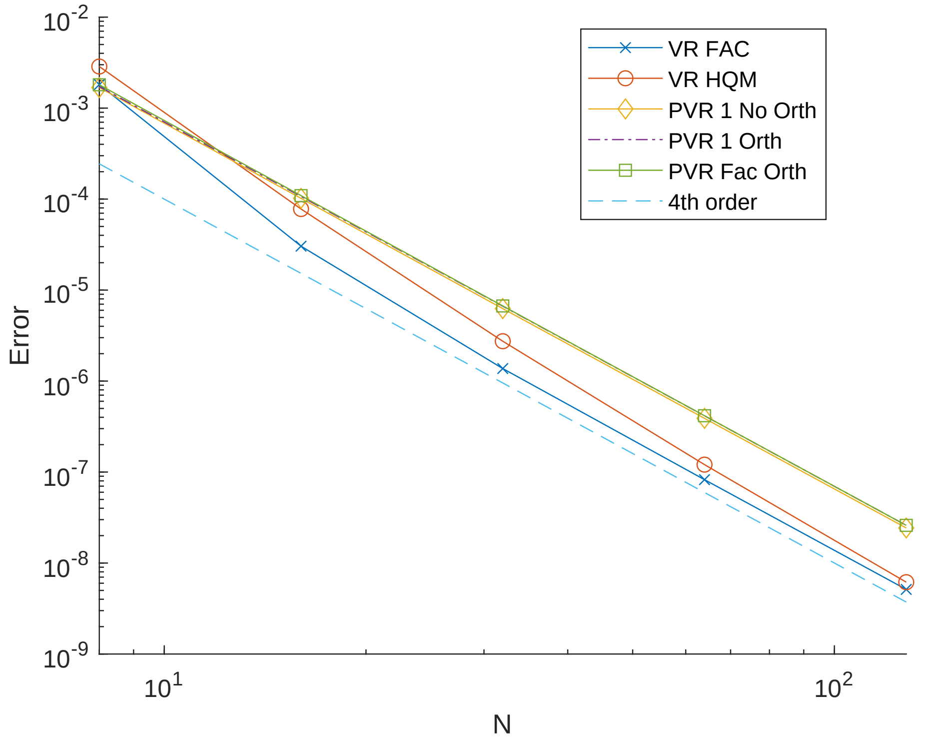

图 1: 静态重构的误差

图1中为 1 维均匀网格静态重构单波分布（$cos(\pi x), x \in [-1, 1]$）的误差 1 范数。基函数采用端点为 1 进行缩放，导数采用单元中心间距无量纲化，No Orth 为普通的泰勒零均值基函数，VR 中均采用此组基函数；PVR 中基函数与试验函数相同，No Orth 为零均值泰勒基，Orth 为 Gram-Schmidt 正交化的零均值泰勒基。PVR 中“1”代表所有权都是 1，Fac 代表 $[1, 1, 1/2, 1/6]$.^2 的权。

除了重构精度的差别，PVR 的收敛性似乎不理想。PVR 1 Orth 在 128 网格需要 77 步收敛到 1E-10 残差，而 VR HQM 需要 29 步。

4.2. 等熵涡

等熵涡没有边界泛函问题，可单独测试各种体积分形式的性质。为了与 VR 的量纲平衡，本处的积分中都额外乘了交界面面积。

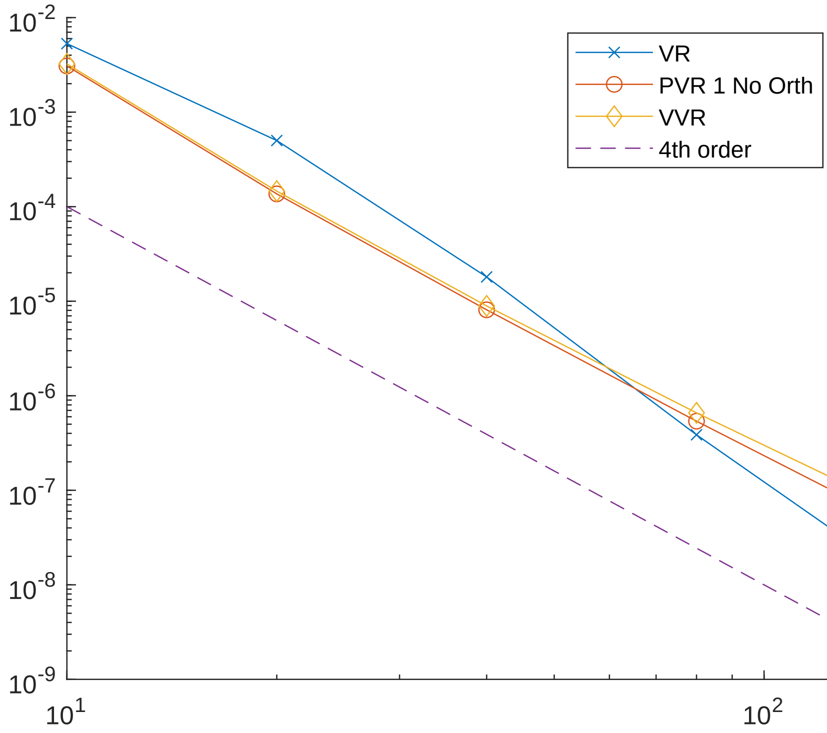

图 2: 等熵涡误差

图2为等熵涡误差。等熵涡为迭代收敛到 1E-8 推进，时间步 0.005 推进到 $t = 0.2$。VR 为 HQM 权重。PVR 1 No Orth 在 10×10 网格需要 109 步收敛，而 VR 需要 22 步。

10×10 网格上，VR 的矩阵：

$$\begin{pmatrix}
7.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.2 & 0 & 4.32 & 0 \\
0 & 7.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.32 & 0 & 11.2 \\
0 & 0 & 24.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 13.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 24.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
11.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 506.0 & 0 & 5.37 & 0 \\
0 & 4.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 170.0 & 0 & 5.37 \\
4.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.37 & 0 & 170.0 & 0 \\
0 & 11.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.37 & 0 & 506.0
\end{pmatrix}$$

PVR 的矩阵：

$$\begin{pmatrix}
9.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43.6 & 0 & 4.12 & 0 \\
0 & 9.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.12 & 0 & 43.6 \\
0 & 0 & 36.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2.27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 36.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
43.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 241.0 & 0 & 14.9 & 0 \\
0 & 4.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.48 & 0 & 14.9 \\
4.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.9 & 0 & 6.48 & 0 \\
0 & 43.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.9 & 0 & 241.0
\end{pmatrix}$$

VVR 的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 10.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48.9 & 0 & 6.22 & 0 \\ 0 & 10.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.22 & 0 & 48.9 \\ 0 & 0 & 42.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 48.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 302.0 & 0 & 17.2 & 0 \\ 0 & 6.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17.2 & 0 & 17.2 \\ 6.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17.2 & 0 & 17.2 & 0 \\ 0 & 48.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17.2 & 0 & 302.0 \end{pmatrix}$$

参考文献