时间刚性源项的高效处理方法

任玉新

考虑带源项的Burgers方程



如果的时间尺度远远小于流场的时间尺度，则除非计算时间步长很小，数值误差受影响。为了在流场时间尺度上比较准确的计算数值解，必须对刚性源项进行合适的处理。

下面提出一种可能的处理方法。

基本思想：

1. 基于n时刻数值解构造源项影响的近似解析解。
2. 推导满足的微分方程。如果很好地描述了源项时间效应，则的时间尺度将与源项时间尺度关联较弱。
3. 求解的微分方程。

下面以有限体积方法为例，介绍具体求解过程。

1）计算近似解析解。略去中的对流项，因变量记为，有



如果常微分方程有解析解。如果无解析解，则通过线化、冻结系数等手段，构造能反映主要时间特性的，使



有解析解。对于有限体积方法，由重构，以为初值，逐点求解，记解析解为，其时间导数

。

这就是只考虑源项时的近似解析解。

2）推导满足的微分方程。为了求解方便，将满足的方程写成和相同的形式。



即满足的方程为



显然当



时，源项影响不直接体现在中。由

。

即体现了源项的积分效应。显然在数学上比原方程刚性要小。

3）求解方程。方程写成：



其中



用有限体积方法求解。

上述方法与Adams-Moulton方法如何结合？

先考虑式的求解。其半离散格式记为：



将积分



以三阶格式为例，设（高阶类似）



且



则



因此，



即



式也适用于求解式。但式7中源项（式）需要考虑如何处理。

参照上述推导：

**1）**对源项中的项，需要计算



因此，只需计算其积分效果。由于随时间变化应该比较平缓，可以和一样，假定随时间是一个二次多项式。为了确定这个多项式，只需知道：



直接根据式计算等不能反映它们可能随时间高频变化。为此，记



假定是二次多项式，记为



且满足



其中



求得后，带入计算多项式，然后计算积分式。

**2）**的计算。空间积分后，只需计算处的

算法为，由于变化平缓，可以假定沿时间是二次多项式。



的计算和式相同。则

