时间刚性源项的高效处理方法

任玉新

考虑带源项的Burgers方程



如果的时间尺度远远小于流场的时间尺度，则除非计算时间步长很小，数值误差受影响。为了在流场时间尺度上比较准确的计算数值解，必须对刚性源项进行合适的处理。

下面提出一种可能的处理方法。

基本思想：

1. 基于n时刻数值解构造源项影响的近似解析解。
2. 推导满足的微分方程。如果很好地描述了源项时间效应，则的时间尺度将与源项时间尺度关联较弱。
3. 求解的微分方程。

下面以有限体积方法为例，介绍具体求解过程。

1）计算近似解析解。略去中的对流项，因变量记为，有



如果常微分方程有解析解。如果无解析解，则通过线化、冻结系数等手段，构造能反映主要时间特性的，使



有解析解。对于有限体积方法，由重构，以为初值，逐点求解，记解析解为，其时间导数

。

这就是只考虑源项时的近似解析解。

如果用有限体积方法离散，可以写为



可以先求解，再积分；或者可以直接解，看哪个更能体现源项的尺度特点，或者比较容易求解。

2）推导满足的微分方程。



即求解 的方程变为



这种方法的好处是通量计算无需变化。

有限体积格式：



令



则Adams-Moulton格式为



源项计算



因此，只需计算其积分效果。由于随时间变化应该比较平缓，可以和假定随时间是一个二次多项式。为了确定这个多项式，只需知道：



直接根据式计算等不能反映它们可能随时间高频变化。为此，记



假定是二次多项式，记为



且满足



其中



注意，似乎应该用或者向后推一个时间步，不知是否对稳定性有影响。这样做的好处是辅助解只在一个时间步内有效，不跨时间步（无累积效应）。求得后，带入计算二次多项式，然后计算时间积分式。

以上的讨论中，的确定条件是分段均值和点的值，已知其原函数。如果退化为一阶多项式，则直接有结果：

隐式格式，用双时间步求解。线性化



其中



做代换



把有关项放方程右侧，显式处理（操作上相当于冻结，相容性？从的收敛阶考虑？）（对收敛性有何影响？）参与迭代。