源项处理方法试验

考虑线性的模型方程：

对于任意初值，特征线法可知，结果为逐点的弹性振动。

周期边界，初值为，解为

其对流的时间尺度由决定，源项的时间尺度由决定。能量是守恒的。

考虑源项推进：

则有

源项差方程：

考虑记那么：

（如果考虑非线性的对流项，则需要将改写成；考虑源项的残量，即，则右侧加入，这一项是低频的源项残量）

由于这里源项的辅助解构造是完美消除了高频，相应的时间推进应当对任意高的都有效。

假设解出，即已知，欲求，构造：

1. 后向欧拉  
   在为基础，且使得展开为

则可有，，构造方法求解，则

直接按照一阶后向差分构造：

得到一个隐式格式。

虽然是线性的且可代入上一步的解析解，但由于是隐式格式且Jacobian无法简单求解（循环下三角），采用数值方法验证，即为（CFL松弛的）牛顿迭代求解隐式代数方程组。

#数值验证：采用N=50网格计算，，流动CFL=0.5，空间离散为二阶有限体积（线性），计算一个流动周期，统计能量相对损失：，和误差：：

后向欧拉

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 10 | 100 | 1000 |
|  | 3.284e-01 | 3.284e-01 | 3.284e-01 | 3.284e-01 |
|  | 1.150e-01 | 1.150e-01 | 1.150e-01 | 1.150e-01 |

作为对比，没有源项处理的SDIRK4：

SDIRK4（传统）

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 10 | 100 | 1000 |
|  | 3.310e-03 | -5.803e-03 | 发散 | 发散 |
|  | 5.322e-03 | 5.638e-03 | 发散 | 发散 |

其中能量损失为负时，代表格式实质上发散。

1. 后向梯形与AM2，AM3

为了向一般的Adams-Moulton推广，先考虑最简单的情况，即二阶情况。

其中右侧积分项中，用梯形公式积分，即：

考虑其具有高频性质，则：**先假设空间导数存在，积分号与求导交换：**

在**本模型方程**中，上式可解析积分得到：

则时间离散为：

根据上式，计算可得：

梯形/AM2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 10 | 100 | 1000 |
|  | -7.490e-02 | 发散 | 发散 | 发散 |
|  | 1.122e-02 | 发散 | 发散 | 发散 |

（数值表明，时，加密网格，能量误差和解的误差都收敛，且解的误差二阶收敛）

考虑某种变通（？）：

即，辅助解时间上只做零阶重构进行积分；？

梯形/AM2-修正

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 10 | 100 | 1000 |
|  | 3.101e-03 | 3.101e-03 | 3.101e-03 | 3.101e-03 |
|  | 4.005e-03 | 4.005e-03 | 4.005e-03 | 4.005e-03 |

网格收敛性计算表明格式有二阶精度。

考虑三阶情况，则有AM3修正方法：

问题：残量方程的右端项需要在再计算一次（非线性代数方程求解迭代中每次迭代都更新RHS），方便起见保存的不是，而是，然后计算，需要注意的是需要反推，本模型方程可以容忍这一点（无耗散系统），但是对于耗散的源项系统应该无法容忍。（可改进为，计算时，从展开）（**效果似乎不好？**）

注意上面通量修正项也是只取了零阶插值积分。

改为三阶有限体积（二次多项式）线性重构，计算：

梯形/AM3-修正

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 10 | 100 | 1000 |
|  | 7.732e-04 | -4.450e-02 | 1.285e-03 | 1.285e-03 |
|  | 2.622e-04 | 1.391e-02 | 4.122e-04 | 4.122e-04 |