第三次作业

周涵宇 2018011600

考虑铁木辛哥梁直梁单元，x 为梁的方向。由于只考虑了小变形和直梁，弯曲可以单独求解，以下只考虑一个平面内的弯曲自由度，即考虑自由度 w、$\theta_y = -\frac{dw}{dx}$。

拉格朗日 2 节点一维插值为:

$$N^1(\xi) = \frac{1-\xi}{2},\ N^2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{1}$$

拉格朗日 3 节点一维插值为：

$$N^1(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2},\ N^2(\xi) = 1-\xi^2,\ N^3(\xi) = \frac{\xi(\xi+1)}{2} \tag{2}$$

以上插值都定义在 $[-1,1]$。

铁木辛哥直梁内关于面内弯曲的势能为：

$$\begin{aligned}\Pi_p = &\int_l \left[\frac{1}{2}EI_y\left(\frac{d\theta_y}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{GA}{k}\left(\frac{dw}{dx}+\theta_y\right)^2\right]dl+ \\ &-\int_l [wP_z + \theta_y M_y]\,dl \\ &-\sum_{\forall i_c}[w_{i_c}P_{zi_c} + \theta_{yi_c}M_{yi_c}]\end{aligned} \tag{3}$$

注意此处的力矩载荷都是定义为 y 轴右手方向，与 $\frac{dw}{dx}$ 不同。

势能变分原理为

$$\delta\Pi_p = 0$$

其中要求满足位移可能。

变分并取形函数近似则有:

$$(\boldsymbol{K_b} + \boldsymbol{K_s})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} \tag{4}$$

拆分为单元则:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K_b^e} &= \int_l EI_y \left(\frac{d\boldsymbol{N_\theta}}{dx}\right)^T \left(\frac{d\boldsymbol{N_\theta}}{dx}\right) dl \\
\boldsymbol{K_s^e} &= \int_l \frac{GA}{k} \boldsymbol{B_s}^T \boldsymbol{B_s} dl \\
\boldsymbol{P^e} &= \int_l \left[\boldsymbol{N_w}^T P_z + \boldsymbol{N_\theta}^T M_y\right] dl + \sum_{i_c} \left[\boldsymbol{N_w}(\boldsymbol{\xi_{ic}})^T P_{zi_c} + \boldsymbol{N_\theta}(\boldsymbol{\xi_{ic}})^T M_{yi_c}\right]
\end{aligned} \tag{5}$$

其中给出了形函数矩阵以及局部自由度排列为:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N_w} &= \begin{bmatrix} N^1 & 0 & N^2 & 0 & \cdots \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{N_\theta} &= \begin{bmatrix} 0 & N^1 & 0 & N^2 & \cdots \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{B_s} &= \frac{d\boldsymbol{N_w}}{dx} + \boldsymbol{N_\theta} \\
\boldsymbol{a^e} &= \begin{bmatrix} w^1 & \theta^1 & w^2 & \theta^2 & \cdots \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{6}$$

应对剪切锁死的方案是采用减缩积分，因此给出几种一维的高斯积分方案:

$$\begin{aligned}
&1).\boldsymbol{\xi_p} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w_p} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\
&2).\boldsymbol{\xi_p} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w_p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&3).\boldsymbol{\xi_p} = \begin{bmatrix} -0.774596669241483 & 0 & 0.774596669241483 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w_p} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
A^H &= A \\
AV &= VD \\
v^H A v &= v^H v \lambda \\
\overline{v^H A v} &= v^T A^T v^H T = (v^H A v)^T = v^H A v = \text{somereal} \\
v^H v &= \text{somereal} \\
\Rightarrow \lambda &= \text{somereal} \\
u^H A v &= u^H v \lambda_v = v^H A u = v^H u \lambda_u = \overline{u^H v} \lambda_u \\
\Rightarrow u^H v &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$