# 第二次作业

周涵宇 2018011600

考虑欧拉-伯努利梁直梁单元，$x$ 为梁的方向，2 节点单元，扭转转角、拉伸位移采用拉格朗日插值，弯曲位移与弯曲转角共同通过 Hermite 三次多项式插值及其导数取得，单元自由度记为:

$$\boldsymbol{a_e} = [u^1\ \ v^1\ \ w^1\ \ \theta_x^1\ \ \theta_y^1\ \ \theta_z^1\ \ u^2\ \ v^2\ \ w^2\ \ \theta_x^2\ \ \theta_y^2\ \ \theta_z^2]^T \tag{1}$$

拉格朗日 2 节点一维插值为:

$$N^1(\xi) = \frac{1-\xi}{2},\ N^2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{2}$$

Hermite 插值为:

$$\begin{aligned}
N_H^1(\xi) =& \ \ \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\
N_H^2(\xi) =& \ \ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \\
N_H^3(\xi) =& \ \ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\
N_H^4(\xi) =& -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3
\end{aligned} \tag{3}$$

其中，$1,2$ 对应 $\xi = -1$ 的函数值和**参数空间**内的一阶导，$3,4$ 对应 $\xi = 1$。

以上插值都定义在 $[-1,1]$。

欧拉-伯努利直梁内的总势能为：

$$\begin{aligned}
\Pi_p =& \int_l \left[\frac{1}{2}EI_y\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + \frac{1}{2}EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + \frac{1}{2}EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}GI_x\left(\frac{d\theta_x}{dx}\right)^2 + \right] dl + \\
& - \int_l [uP_x + vP_y + wP_z + \theta_x M_x + \theta_y M_y + \theta_z M_z]\, dl \\
& - \sum_{\forall i_c} [u_{i_c}P_{xi_c} + v_{i_c}P_{vi_c} + w_{i_c}P_{zi_c} + \theta_{xi_c}M_{xi_c} + \theta_{yi_c}M_{yi_c} + \theta_{zi_c}M_{zi_c}]
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $i_c$ 代表的是集中载荷。

势能变分原理为

$$\delta\Pi_p = 0$$

其中要求位移满足可能，即边界满足位移约束，转角满足:

$$\theta_y = -\frac{dw}{dx}, \quad \theta_z = \frac{dv}{dx} \tag{5}$$

通过以上泛函变分原理构建有限元格式，与刚度阵有关部分是其二次部分，有单元刚度阵如:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K_e} = &\int_l \left[ EI_z \left( \frac{d^2\boldsymbol{N_y}}{dx^2} \right)^T \left( \frac{d^2\boldsymbol{N_y}}{dx^2} \right) + EI_y \left( \frac{d^2\boldsymbol{N_z}}{dx^2} \right)^T \left( \frac{d^2\boldsymbol{N_z}}{dx^2} \right) \right] dl \\ &+ \int_l \left[ EA \left( \frac{d\boldsymbol{N_u}}{dx} \right)^T \left( \frac{d\boldsymbol{N_u}}{dx} \right) + GI_x \left( \frac{d\boldsymbol{N_{\theta_x}}}{dx} \right)^T \left( \frac{d\boldsymbol{N_{\theta_x}}}{dx} \right) \right] dl\end{aligned} \tag{6}$$

对于 2 节点单元参数空间-物理空间采用线性变换，则可知有:

$$\int_L f dl = \frac{l}{2} \int_{-1}^{1} f d\xi$$

以及:

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{l} \bullet \frac{df}{d\xi}$$

则可知其中，形函数矩阵分别定义为：

$$\boldsymbol{N_y}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & N_H^1 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{2}N_H^2 & 0 & N_H^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{2}N_H^4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{N_z}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_H^1 & 0 & -\frac{l}{2}N_H^2 & 0 & 0 & 0 & N_H^3 & 0 & -\frac{l}{2}N_H^4 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{N_u}(\xi) = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{N_{\theta_x}}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

注意以上由于所有的形函数矩阵需要右乘物理自由度，而物理自由度中的一阶导并不是参数空间的一阶导，其变换需要事先确定参数变换（比如等参变换等方案），此处是线性的所以直接通过缩放来获得。同时注意以上角度和一阶导的对应关系，包括 (8) 中的符号问题。

此时，假设梁的弹性常数和截面都是均匀的，则积分可得：

$$\begin{bmatrix}
\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\
-\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l}
\end{bmatrix}
= \boldsymbol{K_e} \tag{11}$$

给出了单元刚度阵。

事实上，小变形直梁里面单元刚度阵是完全解耦的，拉伸、弯曲和扭转共 4 部分。梁的几何是弯曲时坐标变换使其各部分出现耦合。