第一次作业

周涵宇 2018011600

给出力边界与位移边界，设已知应力模式满足平衡方程与力边界，有总余能：

$$\Pi_c(\sigma_{ij}) = \int_V W_c\, dV - \int_{S_u} p_i \bar{u}_i\, dS$$

其中$W_c = \frac{1}{2} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$，$p_i = \sigma_{ij} n_j$

放松静力可能，引入拉格朗日乘子，变分问题等价为有：

$$\Pi_c'(\sigma_{ij}, \lambda_i, \mu_i) = \int_V \left[W_c\ + \lambda_i(\sigma_{ij,j} - \bar{f}_i)\right] dV - \int_{S_u} p_i \bar{u}_i\, dS + \int_{S_\sigma} \mu_i (p_i - \bar{p}_i)\, dS$$

变分则有：

$$\delta\Pi_c' = \int_V \left[C_{ijkl}\sigma_{kl}\delta\sigma_{ij}\ + \delta\lambda_i(\sigma_{ij,j} - \bar{f}_i) + \lambda_i \delta\sigma_{ij,j}\right] dV - \int_{S_u} \delta p_i \bar{u}_i\, dS + \int_{S_\sigma} \delta\mu_i (p_i - \bar{p}_i) + \mu_i \delta p_i\, dS$$

边界形状不变，则其中$\delta p_i = \delta\sigma_{ij} n_j$

分部积分第二个一阶导项，可得：

$$\delta\Pi_c' = \int_V \left[C_{ijkl}\sigma_{kl}\delta\sigma_{ij}\ + \delta\lambda_i(\sigma_{ij,j} - \bar{f}_i) - \lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij}\right] dV + \int_{S_u} -\delta p_i \bar{u}_i\ + \lambda_i \delta p_i dS$$
$$+ \int_{S_\sigma} \delta\mu_i (p_i - \bar{p}_i) + \mu_i \delta p_i + \lambda_i \delta p_i\, dS$$

不难通过应用σ_{ij}对称性得到：$\lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i})\delta\sigma_{ij}$

通过变分的任意性则有微分关系：

$$\frac{1}{2}(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) = \varepsilon_{ij} \qquad (V)$$

$$\lambda_i + \mu_i = 0 \qquad (S_\sigma)$$

$$\lambda_i = \bar{u}_i \qquad (S_u)$$

以及完整定义弹性系统的其他方程。

因此，良好定义的问题中最终一定有：$\lambda_i = -\mu_i = u_i$

则有 H-R 余能变分原理：

$$\Pi_{H-Rc}(\sigma_{ij}, u_i) = \int_V \left[\frac{1}{2} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\ + u_i(\sigma_{ij,j} - \bar{f}_i)\right] dV - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i\, dS - \int_{S_\sigma} u_i(\sigma_{ij} n_j - \bar{p}_i)\, dS$$

同时根据$W_p + W_c = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$

$$\Pi_{H-Wc}(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij},u_i) = \int_V \left[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \ + u_i(\sigma_{ij,j} - \overline{f_i})\right] dV - \int_{S_u} \sigma_{ij}n_j\overline{u_i}\, dS - \int_{S_\sigma} u_i(\sigma_{ij}n_j - \overline{p_i})\, dS$$

分部积分一阶导项，同时应用σ_{ij}对称

$$\begin{aligned}
&\Pi_{H-Wc}(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij},u_i) \\
&= \int_V \left[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\sigma_{ij} - \overline{u_i f_i}\right] dV - \int_{S_u} \sigma_{ij}n_j\overline{u_i} - \sigma_{ij}n_j u_i dS \\
&\qquad\qquad - \int_{S_\sigma} u_i(\sigma_{ij}n_j - \overline{p_i}) - u_i\sigma_{ij}n_j\, dS \\
&= \int_V \left[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\sigma_{ij} - \overline{u_i f_i}\right] dV + \int_{S_u} \sigma_{ij}n_j(u_i - \overline{u_i})\, dS + \int_{S_\sigma} u_i\overline{p_i}\, dS \\
&= -\Pi_{H-Wp}(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij},u_i)
\end{aligned}$$

可以得到$\Pi_{H-Wc} + \Pi_{H-Wp} = 0$，两个泛函是相反数。