第三次作业

周涵宇 2018011600

1. 铁木辛哥直梁的格式

考虑铁木辛哥梁直梁单元，x 为梁的方向。由于只考虑了小变形和直梁，弯曲可以单独求解，以下只考虑一个平面内的弯曲自由度，即考虑自由度 w、$\theta_y = -\frac{dw}{dx}$。

拉格朗日 2 节点一维插值为:

$$N^1(\xi) = \frac{1-\xi}{2},\ N^2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{1}$$

拉格朗日 3 节点一维插值为：

$$N^1(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2},\ N^2(\xi) = 1-\xi^2,\ N^3(\xi) = \frac{\xi(\xi+1)}{2} \tag{2}$$

以上插值都定义在 $[-1,1]$。

铁木辛哥直梁内关于面内弯曲的势能为：

$$\begin{aligned}\Pi_p = &\int_l \left[\frac{1}{2}EI_y\left(\frac{d\theta_y}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{GA}{k}\left(\frac{dw}{dx}+\theta_y\right)^2\right]dl+ \\ &-\int_l [wP_z + \theta_y M_y]\,dl \\ &-\sum_{\forall i_c}[w_{i_c}P_{zi_c} + \theta_{yi_c}M_{yi_c}]\end{aligned} \tag{3}$$

注意此处的力矩载荷都是定义为 y 轴右手方向，与 $\frac{dw}{dx}$ 不同。

势能变分原理为

$$\delta\Pi_p = 0$$

其中要求满足位移可能。

变分并取形函数近似则有:

$$(\boldsymbol{K_b} + \boldsymbol{K_s})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} \tag{4}$$

拆分为单元则:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K_b^e} &= \int_l EI_y \left(\frac{d\boldsymbol{N_\theta}}{dx}\right)^T \left(\frac{d\boldsymbol{N_\theta}}{dx}\right) dl \\
\boldsymbol{K_s^e} &= \int_l \frac{GA}{k} \boldsymbol{B_s}^T \boldsymbol{B_s} dl \\
\boldsymbol{P^e} &= \int_l \left[\boldsymbol{N_w}^T P_z + \boldsymbol{N_\theta}^T M_y\right] dl + \sum_{i_c} \left[\boldsymbol{N_w}(\boldsymbol{\xi_{ic}})^T P_{zi_c} + \boldsymbol{N_\theta}(\boldsymbol{\xi_{ic}})^T M_{yi_c}\right]
\end{aligned} \tag{5}
$$

其中给出了形函数矩阵以及局部自由度排列为:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N_w} &= \begin{bmatrix} N^1 & 0 & N^2 & 0 & \cdots \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{N_\theta} &= \begin{bmatrix} 0 & N^1 & 0 & N^2 & \cdots \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{B_s} &= \frac{d\boldsymbol{N_w}}{dx} + \boldsymbol{N_\theta} \\
\boldsymbol{a^e} &= \begin{bmatrix} w^1 & \theta^1 & w^2 & \theta^2 & \cdots \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{6}
$$

2. 积分方案

应对剪切锁死的方案是采用减缩积分，因此给出几种一维的高斯积分方案:

$$
\begin{aligned}
&1)\boldsymbol{\xi_p} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w_p} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\
&2)\boldsymbol{\xi_p} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w_p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&3)\boldsymbol{\xi_p} = \begin{bmatrix} -0.774596669241483 & 0 & 0.774596669241483 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w_p} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}
$$

2 节点插值为 1 次多项式，3 节点为 2 次多项式，对应弯曲刚度分布为 0 次、2 次，对应剪切刚度分布为 2 次、4 次。不考虑 Jacobian 非均匀。因此，精确积分为 2 节点采用 2 积分点，3 节点采用 3 积分点，减缩积分保障弯曲刚度阵非奇异则 2 节点采用 1 积分点，3 节点采用 2 积分点。

3. 算例描述

梁的截面都采用 $0.1m \times hm$ 的矩形，剪应力不均匀系数 $k = \frac{6}{5}$，即高度不同。$E = 1GPa, \nu = 0$，全长 $L = 1m$ 涉及模态时 $\rho = 1e3kg/m^3$。边界条件为一端固支。

以上条件下，$1N/m$ 的均布力载荷下，欧拉-伯努利梁的端部挠度是 $\frac{1.5\times10^{-8}}{h^3}m^4$，$1N\cdot m$ 的端部弯矩载荷下，欧拉-伯努利梁的端部挠度是 $\frac{6\times10^{-8}}{h^3}m^4$。

4. 结果

不同情况的计算结果可见表 1、表 2。事实上由于纯弯（见表 2）时没有剪应力，则铁木辛哥梁的精确解与欧拉-伯努利梁完全一样。在表 1 所示均匀载荷下，由于有剪应力，铁木辛哥梁的精确解总比欧拉伯努利梁偏大，即更加柔软。在 $h \to 0$ 时两者精确解接近。

表 1: 均布载荷下的结果

节点数	积分方案	单元数	$h = 1m$	$h = 0.1m$	$h = 0.05m$	$h = 0.01m$
2	精确	1	2.258858E-08	4.715673E-07	9.557154E-07	4.799184E-06
		10	2.693784E-08	1.070826E-05	4.524006E-05	3.527629E-04
		10000	2.700000E-08	1.511999E-05	1.202397E-04	1.500069E-02
	减缩	1	2.700039E-08	1.512001E-05	1.202400E-04	1.500120E-02
		10	2.700008E-08	1.512003E-05	1.202401E-04	1.500120E-02
		10000	2.700000E-08	1.512000E-05	1.202399E-04	1.500130E-02
3	精确	1	2.661567E-08	1.065572E-05	8.140507E-05	1.000719E-02
		10	2.697466E-08	1.427542E-05	1.113115E-04	1.375717E-02
		10000	2.700000E-08	1.511998E-05	1.202387E-04	1.500070E-02
	减缩	1	2.700029E-08	1.512001E-05	1.202400E-04	1.500120E-02
		10	2.700004E-08	1.512002E-05	1.202401E-04	1.500120E-02
		10000	2.700000E-08	1.511999E-05	1.202403E-04	1.499968E-02
欧拉-伯努利解			1.500000E-08	1.500000E-05	1.200000E-07	1.500000E-02

表 2: 一端力矩载荷下的结果

节点数	积分方案	单元数	$h = 1m$	$h = 0.1m$	$h = 0.05m$	$h = 0.01m$
2	精确	1	4.235339E-08	1.406257E-06	2.862837E-06	1.439662E-05
		10	5.975116E-08	4.235299E-05	1.800001E-04	1.406251E-03
		10000	6.000000E-08	5.999997E-05	4.799990E-04	5.999794E-02
	减缩	1	6.000053E-08	6.000001E-05	4.800000E-04	6.000000E-02
		10	6.000012E-08	6.000005E-05	4.800002E-04	6.000000E-02
		10000	6.000000E-08	5.999999E-05	4.799997E-04	6.000038E-02
3	精确	1	6.000040E-08	6.000002E-05	4.800000E-04	6.000000E-02
		10	6.000005E-08	6.000004E-05	4.800002E-04	6.000000E-02
		10000	6.000000E-08	5.999993E-05	4.799954E-04	5.999819E-02
	减缩	1	6.000042E-08	6.000002E-05	4.800000E-04	6.000000E-02
		10	6.000005E-08	6.000004E-05	4.800002E-04	6.000000E-02
		10000	6.000000E-08	5.999995E-05	4.800008E-04	5.999492E-02
欧拉-伯努利解			6.000000E-08	6.000000E-05	4.800000E-07	6.000000E-02

两种载荷中，都出现了剪切锁死。表 1 精确积分方案中当 $h \to 0$ 发现挠度会远小于欧拉-伯努利梁的结果，即为锁死。此时加密网格为 10 个时有一定效果，加密到 10000 个单元后才能趋近于精确值。表 2 即弯矩载荷中只有 2 节点单元出现剪切锁死，3 单元由于刚好可以表达其解析解而恰好没有锁死。

相比之下，表 1 所有的减缩积分都对加密不敏感。这大概是因为其欧拉-伯努利梁或者铁木辛哥梁的精确解挠度分布比较接近线性或者二次多项式分布。（事实上欧拉-伯努利梁此时的精确解应当是一个 4 次多项式）

表 2 中，采用 2 节点单元时，减缩积分对加密都不敏感，而精确积分止呕加密后才能得出合理的结果。

均布载荷中，2 节点单元的剪切锁死最为明显，而 3 节点的剪切锁死问题比较轻微。当然无论载荷形式，所有的减缩积分都在 1 个单元时达到了较高的精度，因此精确积分此时是基本不可取的。

综合来看，采用 3 节点单元相比 2 节点可以取得更好的精度，在较小的单元数下可以表达更复杂的变形情况。减缩积分可以消除剪切锁死的问题，采用减缩积分的算例，对于以上的简单载荷，即使是在 1 单元时也可以达到较好的精度。此外，如果不考虑计算成本，剪切锁死也可以通过加密网格来缓解，但以上结果表明其效果不明显，代价很大。

5. 总结

本文讨论了采用减缩积分方法的铁木辛哥梁直梁的有限元方法，探讨了积分方案、单元数目、节点数目、梁的高度和载荷形式对解的影响。实验表明精确积分会导致剪切锁死，而剪切积分基本上规避了这个问题。同时，实验还表明了剪切锁死可以通过加密网格缓解，但效率不佳。

6. 代码说明

提交代码为 MATALB 脚本。

运行 run.m 脚本可以计算某个算例，其中调用的 CASE* 代表的是算例配置。

调用的 CASE*.m 文件中可以定义更加详细的算例配置。

采用记号‘nn[p/r]nelem‘来表示节点、积分和单元数（均匀划分）的方案，例如：‘2r1’是 2 节点单元，减缩积分，1 个单元；‘3p10’是 3 节点单元，精确积分，10 个单元。

记号‘h[height]‘代表算例选取的梁高度，如‘h0.1’代表梁高 0.1m。

记号‘L1’代表载荷为 $1N/m$ 的均布力，‘L2’代表载荷为 $1N \cdot m$ 的端部弯矩。

代码为单进程，建议自由度不超过 5000000。