

第二次作业

周涵宇 2018011600

考虑欧拉-伯努利梁直梁单元, x 为梁的方向, 2 节点单元, 扭转转角、拉伸位移采用拉格朗日插值, 弯曲位移与弯曲转角共同通过 Hermite 三次多项式插值及其导数取得, 单元自由度记为:

$$\mathbf{a}_e = [u^1 \ v^1 \ w^1 \ \theta_x^1 \ \theta_y^1 \ \theta_z^1 \ u^2 \ v^2 \ w^2 \ \theta_x^2 \ \theta_y^2 \ \theta_z^2]^T \quad (1)$$

拉格朗日 2 节点一维插值为:

$$N^1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad N^2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (2)$$

Hermite 插值为:

$$\begin{aligned} N_H^1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ N_H^2(\xi) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \\ N_H^3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ N_H^4(\xi) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \end{aligned} \quad (3)$$

其中, 1,2 对应 $\xi = -1$ 的函数值和参数空间内的一阶导, 3,4 对应 $\xi = 1$ 。

以上插值都定义在 $[-1, 1]$ 。

欧拉-伯努利直梁内的总势能为:

$$\begin{aligned} \Pi_p = \int_l & \left[\frac{1}{2}EI_y \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{2}EI_z \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{2}EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2}GI_x \left(\frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 + \right] dl + \\ & + \int_l [uP_x + vP_y + wP_z + \theta_x Mx + \theta_y My + \theta_z Mz] dl \\ & + \sum_{\forall i_c} [u_{i_c} P_{xi_c} + v_{i_c} P_{yi_c} + w_{i_c} P_{zi_c} + \theta_{xi_c} M_{xi_c} + \theta_{yi_c} M_{yi_c} + \theta_{zi_c} M_{zi_c}] \end{aligned} \quad (4)$$

势能变分原理为

$$\delta \Pi_p = 0$$

其中要求位移满足可能, 即边界满足位移约束, 转角满足:

$$\theta_y = -\frac{dw}{dx}, \quad \theta_z = \frac{dv}{dx} \quad (5)$$

通过以上泛函变分原理构建有限元格式，与刚度阵有关部分是其二次部分，有单元刚度阵如：

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e = & \int_l \left[EI_z \left(\frac{d^2 \mathbf{N}_y}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2 \mathbf{N}_y}{dx^2} \right) + EI_y \left(\frac{d^2 \mathbf{N}_z}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2 \mathbf{N}_z}{dx^2} \right) \right] dl \\ & + \int_l \left[EA \left(\frac{d \mathbf{N}_u}{dx} \right)^T \left(\frac{d \mathbf{N}_u}{dx} \right) + GI_x \left(\frac{d \mathbf{N}_{\theta_x}}{dx} \right)^T \left(\frac{d \mathbf{N}_{\theta_x}}{dx} \right) \right] dl \end{aligned} \quad (6)$$

对于 2 节点单元参数空间-物理空间采用线性变换，则可知有：

$$\int_L f dl = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 f d\xi$$

以及：

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{l} \bullet \frac{df}{d\xi}$$

则可知其中，形函数矩阵分别定义为：

$$\mathbf{N}_y(\xi) = [0 \quad N_H^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{l}{2} N_H^2 \quad 0 \quad N_H^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{l}{2} N_H^4] \quad (7)$$

$$\mathbf{N}_z(\xi) = [0 \quad 0 \quad N_H^1 \quad 0 \quad -\frac{l}{2} N_H^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_H^3 \quad 0 \quad -\frac{l}{2} N_H^4 \quad 0] \quad (8)$$

$$\mathbf{N}_u(\xi) = [N^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (9)$$

$$\mathbf{N}_{\theta_x}(\xi) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad N^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N^2 \quad 0 \quad 0] \quad (10)$$

注意以上由于所有的形函数矩阵需要右乘物理自由度，而物理自由度中的一阶导并不是参数空间的一阶导，其变换需要事先确定参数变换（比如等参变换等方案），此处是线性的所以直接通过缩放来获得。同时注意以上角度和一阶导的对应关系，包括 (8) 中的符号问题。

此时，假设梁的弹性常数和截面都是均匀的，则积分可得：

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\
-\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l}
\end{array} \right] \\
& = \mathbf{K}_e
\end{aligned} \tag{11}$$

给出了单元刚度阵。

事实上，小变形直梁里面单元刚度阵是完全解耦的，拉伸、弯曲和扭转共 4 部分。梁的几何是弯曲时坐标变换使其各部分出现耦合。