Unit-3(A)

Fourier Series

*** આવર્ત વિધેય :-**

સરળ આવર્ત તરંગની શરૂઆત હાર્મોનિક વિધેયથી કરવામાં આવે છે.

$$Y = A\sin(kx - \omega t) \quad \ldots\ldots 1)$$

જ્યાં Y = કેન્દ્રથી time t માટેનું અંતર

$K = \frac{2\pi}{\lambda}$ = તરંગ સદિશ

$\omega = 2\pi f$ = કોણીય આવૃત્તિ

→ t = 0 સમયે, $Y = A\sin kx \quad \ldots\ldots 2)$

$$Y = A\sin k(x+\lambda)$$

$$Y = A\sin(kx + k\lambda)$$

$$\boxed{\therefore Y = A\sin kx} \qquad \left(\because \lambda = \frac{2\pi}{k}\right)$$

→ λ અંતરે વિધેયનું મૂલ્ય પુનરાવર્તિત થાય છે. i.e λ એ વિધેયનો આવર્ત છે.

→ સમી. 1) માં $x = 0 \Rightarrow Y = -A\sin\omega t \quad \ldots\ldots 3)$

જે આવર્ત 'T' માટેનું સરળ આવર્ત વિધેય દર્શાવે છે.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore Y = -A\sin\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$Y = -A\sin(\omega t + 2\pi)$$

$$\boxed{Y = -A\sin\omega t} \quad \ldots\ldots 4)$$

→ સમી. 2), 4) એ sine અને cosine નું સરળ આવર્ત વિધેય છે. તેથી જટિલ આવર્ત વિધેય માટે,

$$Y = A\sin\left(\frac{2\pi n}{L}\right)(x+L)$$

$$Y = A\left[\sin\frac{2\pi n x}{L} + \sin 2\pi n\right]$$

$$\boxed{Y = A\sin\frac{2\pi n x}{L}} \quad \ldots 5)$$

આવર્ત વિધેય $\sin \frac{2\pi x}{L}$ નો x માં આવર્ત L છે. આવર્ત વિધેય $f(x)$ હોય તો $f(x) = f(x+p)$. જો દરેક x માટે સાચું હોય તો $f(x)$ ને આવર્ત વિધેય કહે છે. તથા p ને આવર્તમાન કહે છે.

દા.ત.

(1) $\sin x$ નો આવર્ત 2π છે. $\therefore \sin(x+2\pi) = \sin x$

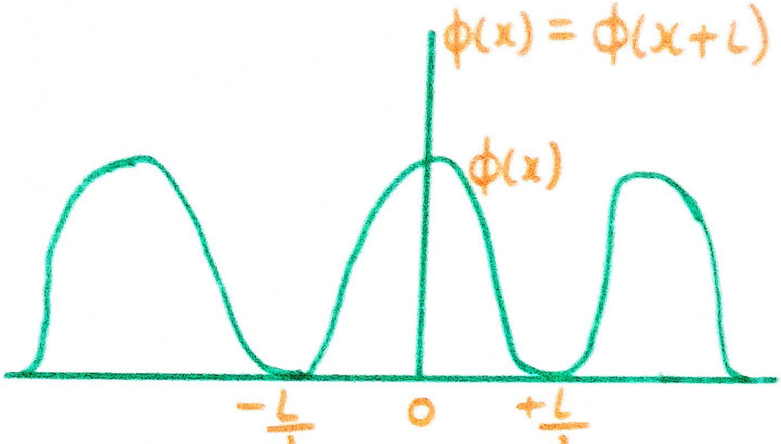
(2) $\sin 2\pi$ નો આવર્ત 1 છે. $\therefore \sin 2\pi(x+1) = \sin 2\pi x$

(3) $\sin \frac{\pi x}{L}$ નો આવર્ત $2L$ છે. $\therefore \sin \frac{\pi}{L}(x+2L) = \sin \frac{\pi x}{L}$

(4) $\sin \frac{2\pi x}{L}$ નો આવર્ત T છે. $\therefore \sin \frac{2\pi}{L}(x+T) = \sin \frac{2\pi x}{L}$

[illegible]: આવર્ત વિધેયને રજૂ કરતી sine અને cosine પદોની જે શ્રેણી હોય તેને ફુરિયર શ્રેણી કહે છે.

ધારોકે $\phi(x)$ આવર્ત વિધેય છે. જે $-\frac{L}{2}$ થી $+\frac{L}{2}$ વિસ્તારમાં વિસ્તરીત થાય છે.



જ્યાં $\phi(x)$ એ,

(1) Single Value

(2) Finite

(3) એક આવર્તમાં એ પરિમિત સંખ્યા અસાતત્ય અને પરિમિત સંખ્યામાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ હોય.

જેને ડીરીક્લેટ ની શરતો કહે છે.

→ ફુરિયર ની વ્યાખ્યા પરથી $\phi(x)$ ને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય.

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right] \quad \text{......(1)}$$

જ્યાં a_0, a_n, b_n એ ફુરિયર શ્રેણીના અચળાંકો

→ $\phi(x)$ નો જેટલો આવર્ત છે. તેટલો જ આવર્ત sine અને cosine વિધેયનો છે.

→ અચળાંકની ગણતરી :-

(1) $\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \cos\frac{2\pi mx}{L} \sin\frac{2\pi nx}{L}\, dx = 0$

(2) $\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \cos\frac{2\pi mx}{L} \cos\frac{2\pi nx}{L}\, dx = \delta_{mn}$

(3) $\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \sin\frac{2\pi mx}{L} \sin\frac{2\pi nx}{L}\, dx = \delta_{mn}$

$\left\{ \begin{array}{ll} \delta_{mn} = 1 & \text{for } m=n \\ \quad\;\; = 0 & \text{for } m \neq n \end{array} \right.$; δ_{mn}ને ક્રોનેકર ડેલ્ટા કહે છે.

(4) $\int_{-L/2}^{+L/2} \sin nx\, dx = \int_{-L/2}^{+L/2} \cos nx\, dx = 0$

* સહગુણાંક a_0 ની ગણતરી :-

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right] \quad \ldots\ldots 1)$$

સમી. 1) ની બંને બાજુ $-\frac{L}{2}$ થી $+\frac{L}{2}$ વચ્ચે સંકલન કરતાં,

$$\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\,dx = \int_{-L/2}^{+L/2}\frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L/2}^{+L/2}\cos\frac{2\pi nx}{L}\,dx + b_n\int_{-L/2}^{+L/2}\sin\frac{2\pi nx}{L}\,dx\right]$$

$$\therefore \int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L/2}^{+L/2}dx + [0+0] \qquad (\because \text{સમી. *})$$

$$\therefore \int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\left[x\right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$\therefore \int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\left[\frac{L}{2}-\left(-\frac{L}{2}\right)\right] = \frac{a_0}{2}\cdot L$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\,dx \quad \ldots\ldots 2)}$$

* સહગુણાંક a_n ની ગણતરી :-

સમી. 1) ની બંને બાજુ $\frac{2}{L}\cos\frac{2\pi mx}{L}$ વડે ગુણીને $-\frac{L}{2}$ થી $+\frac{L}{2}$ વચ્ચે સંકલન કરતાં,

$$1) \Rightarrow \int_{-L/2}^{+L/2}\frac{2}{L}\phi(x)\cos\frac{2\pi mx}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{a_0}{2}\cos\frac{2\pi mx}{L}\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}a_n\int_{-L/2}^{+L/2}\cos\frac{2\pi mx}{L}\cdot\cos\frac{2\pi nx}{L}\,dx + \frac{2}{L}b_n\int_{-L/2}^{+L/2}\cos\frac{2\pi mx}{L}\cdot\sin\frac{2\pi nx}{L}\,dx\right]$$

(i) $m \neq 0 \Rightarrow$ R.H.S માં પ્રથમ પદ નું સંકલન મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

(ii) $m = n \Rightarrow$ R.H.S માં ત્રીજ પદનું સંકલન મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

(iii) $m = n$ i.e $\delta_{mn} = 1$ થાય.

$$\therefore \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\cos\frac{2\pi mx}{L}\,dx = 0 + \frac{2}{L}a_n\int_{-L/2}^{+L/2}\cos\frac{2\pi mx}{L}\cdot\cos\frac{2\pi nx}{L}\,dx$$

$$\therefore \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\cos\frac{2\pi mx}{L}\,dx = a_n\cdot\delta_{mn}$$

($\because$ સમી $*$)
($m \neq n$, $\delta_{mn} = 1$)

$$\boxed{\therefore a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\cos\frac{2\pi mx}{L}\,dx \quad \ldots\ldots 3)}$$

*** સહગુણક b_n ની ગણતરી:-**

સમી. 1) ને $\frac{2}{L}\sin\frac{2\pi mx}{L}$ વડે ગુણીને $-\frac{L}{2}$ થી $+\frac{L}{2}$ વચ્ચે સંકલન લેતાં,

$$\therefore \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\sin\frac{2\pi mx}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{a_0}{2}\sin\frac{2\pi mx}{L}\,dx.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}a_n\int_{-L/2}^{+L/2}\cos\frac{2\pi nx}{L}\cdot\sin\frac{2\pi mx}{L}\,dx + \frac{2}{L}b_n\int_{-L/2}^{+L/2}\sin\frac{2\pi mx}{L}\cdot\sin\frac{2\pi nx}{L}\,dx\right]$$

(i) $m \neq 0 \Rightarrow$ R.H.S નું પ્રથમ પદ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

(ii) $m = n \Rightarrow$ R.H.S નું બીજ પદનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

(iii) $m = n \Rightarrow \delta_{mn} = 1$ તેથી ત્રીજ પદનું મૂલ્ય 1 થાય છે.

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\sin\frac{2\pi m x}{L}\,dx = 0+0+b_n\delta_{mn} \qquad \left(\because \begin{array}{c}\delta_{mn}=1\\ m=n\end{array}\right)$$

$$\cancel{\therefore b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\,2\pi m x}$$

$$\boxed{\therefore b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\sin\frac{2\pi m x}{L}\,dx \quad \ldots\ldots 4)}$$

સમી. ૨), ૩), ૪) ને અચળાંક a_0, a_n, b_n ની ગણતરી ના સમી. દર્શાવે છે.

* ફુરિયર શ્રેણી નું સંકર સ્વરૂપ દર્શાવો.

→ $$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{2\pi n x}{L} + b_n\sin\frac{2\pi n x}{L}\right] \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\dfrac{2\pi n x}{L} = \dfrac{e^{\frac{2\pi n x i}{L}} + e^{-\frac{2\pi n x i}{L}}}{2} \\[3ex] \sin\dfrac{2\pi n x}{L} = \dfrac{e^{\frac{2\pi n x i}{L}} - e^{-\frac{2\pi n x i}{L}}}{2i} \end{array}\right\} \xrightarrow{2)} \boxed{\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{array}}$$

સમી.૨) માં ફુરિયર શ્રેણીને sin અને cosine ના બદલે સંકર સ્વરૂપમાં દર્શાવે છે. તેથી તે સંકર શ્રેણીની રજૂઆત સહેલી બનાવી શકાય છે.

→ સમી.૨) ની કિંમત સમી.૧) માં મૂકતાં,

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{\frac{2\pi n x i}{L}} + e^{-\frac{2\pi n x i}{L}}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{\frac{2\pi n x i}{L}} - e^{-\frac{2\pi n x i}{L}}}{2i}\right)\right]$$

$$\phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{\frac{2\pi nx}{L}i}+e^{-\frac{2\pi nx}{L}i}}{2}\right)+ib_n\left(\frac{e^{\frac{2\pi nx}{L}i}-e^{-\frac{2\pi nx}{L}i}}{2i^2}\right)\right] \quad \ldots\ldots 3)$$

$$\therefore \phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left\{e^{\frac{i2\pi nx}{L}}(a_n-ib_n)+e^{-\frac{i2\pi nx}{L}}(a_n+ib_n)\right\}\right]$$

$$\therefore \phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n e^{\frac{i2\pi nx}{L}}+C_n e^{-\frac{i2\pi nx}{L}}\right] \quad \ldots\ldots 4)$$

જ્યાં $C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$ જ્યારે $n>0$

$C_n=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$ જ્યારે $n<0$

$C_n=\frac{a_0}{2}$ જ્યારે $n=0$

$$\boxed{\therefore \phi(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{i\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)} \quad \ldots\ldots 5)}$$

સમી.5) નો ફુરિયર શ્રેણીનું સંકર સ્વરૂપ દર્શાવે છે.
જ્યાં C_n સહગુણાક છે.

$\Longrightarrow$ સહગુણાક C_n ની ગણતરી :-

$$C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$$

$$\therefore C_n=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\cos\frac{2\pi mx}{L}\,dx-i\cdot\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\sin\frac{2\pi mx}{L}\,dx\right]$$

$$C_n=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\left[\cos\frac{2\pi mx}{L}-i\sin\frac{2\pi mx}{L}\right]dx \quad \ldots\ldots 6)$$

$$\therefore C_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \phi(x)\, e^{-i\frac{2\pi n x}{L}}\, dx \qquad \text{.........7)}$$

* પર્સેવાલ નું સૂત્ર :-

→ જ્યારે કોઈ વિધેય ને sine કે cos ના સ્વરૂપમાં દર્શાવવામાં આવે છે. ત્યારે આપેલી શ્રેણી આપેલા વિધેયને કેટલી ચોકસાઈપૂર્વક રજૂ કરી શકે છે. i.e. શ્રેણીમાં સ્વતંત્ર ચલનું મૂલ્ય મૂકી શ્રેણી નું મૂલ્ય કેટલું સમાન છે એ જાણવું જરૂરી છે. આ સમજવા માટે બીજુ એક ત્રિકોણમીતીય બહુપદી વિચારવામાં આવે છે.

ધારોકે બહુપદી S_N છે.

$$\therefore S_N = \sum_{n=-N}^{N} d_n\, e^{i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)} \qquad \text{.........1)}$$

જ્યાં d_n = સંકર સંખ્યા અચળાંક

→ ધારોકે S_N એ $-\frac{L}{2}$ થી $+\frac{L}{2}$ વિસ્તારમાં $\phi(x)$ ને રજૂ કરે છે. જો S_N વડે $\phi(x)$ ને વધારેમાં વધારે સારી રીતે સચોટતાપૂર્વક રજૂ કરવું હોય તો S_N ના સહગુણક d_n ને યોગ્ય રીતે નક્કી કરવો જોઈએ.

→ S_N એ $\phi(x)$ થી કેટલો જુદો છે. i.e S_N અને $\phi(x)$ વચ્ચેનો તફાવત ε_N વડે દર્શાવી શકાય.

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x) - S_N|^2\, dx \qquad \text{.........2)}$$

→ ε_N ને minimum લઈને S_N ને $\phi(x)$ ની નજીક લાવી શકાય.

→ સમી. 1) ની કિંમત સમી. 2) માં મૂકતાં,

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} \left|\phi(x) - \sum_{n=-N}^{N} d_n\, e^{i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)}\right|^2 dx \qquad \text{.......3)}$$

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x) - ч(x)|^2 dx$$

$$\left(\because ч(x) = \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)}\right)$$

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x) - ч(x)| \cdot |\phi(x) - ч(x)|^* dx \quad \cdots\cdots 4)$$

ч(x) = સંકુર વિધેય
ч*(x) = complex conjugate ч(x)

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)\phi^*(x) - \phi(x)ч^*(x) - ч(x)\phi^*(x) + ч(x)ч^*(x)| dx$$

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx - \int_{-L/2}^{+L/2} \phi(x)ч^*(x) dx - \int_{-L/2}^{+L/2} ч(x)\phi^*(x) dx + \int_{-L/2}^{+L/2} ч(x)ч^*(x) dx \quad \cdots\cdots 5)$$

→ સમી. 5) માં ч(x) અને ч*(x) ની કિંમત મૂકતાં,

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx - \int_{-L/2}^{+L/2} \phi(x) \sum_n d_n^* e^{-i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)} \cdot dx - \int_{-L/2}^{+L/2} \sum_n d_n e^{i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)} \cdot \phi^*(x) dx + \int_{-L/2}^{+L/2} \sum_n d_n e^{i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)} \cdot \sum_{n'} d_{n'}^* e^{-i\left(\frac{2\pi n' x}{L}\right)} dx \quad \cdots\cdots 6)$$

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx - \sum_n d_n^* \int_{-L/2}^{+L/2} \phi(x) e^{-i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)} dx$$

$$- \sum_n d_n \int_{-L/2}^{+L/2} \phi^*(x) e^{i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)} dx + \sum_n \sum_{n'} d_n d_{n'}^* \int_{-L/2}^{+L/2} e^{i\frac{2\pi(n-n')}{L}} \cdot dx \quad \cdots\cdots 7)$$

સમી. 7) માં $n \neq n'$ ત્યારે છેલ્લા પદનું સંકલન નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \phi(x)\, e^{-i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)} dx \\ L C_n^* &= \int_{-L/2}^{+L/2} \phi^*(x)\, e^{i\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)} dx \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots 8)$$

$n = n'$ ત્યારે છેલ્લા પદનું સંકલન મૂલ્ય L થાય છે.

→ આ કિંમત સમી. 7) પર લાગુ પાડતાં,

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx - \sum_n d_n^* \cdot L C_n - \sum_n d_n \cdot L C_n^* + \sum_n L \cdot d_n d_n^* \quad \cdots\cdots 9)$$

→ સમી. 9) માં R.H.S $\Sigma L C_n C_n^*$ ઉમેરીને બાદ કરતાં,

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx - \sum_n d_n^* \cdot L C_n - \sum_n d_n \cdot L C_n^* + \sum_n L \cdot d_n d_n^* + \sum_n L C_n C_n^* - \sum_n L C_n C_n^*$$

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx - L \sum_n d_n^* (C_n - d_n) - L \sum_n C_n^* (d_n - C_n) - L \sum_n |C_n|^2$$

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx + L \sum_n d_n^* (d_n - C_n) - L \sum_n C_n^* (d_n - C_n) - L \sum_n |C_n|^2$$

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx - L \sum_n |C_n|^2 + L \sum_n (d_n - C_n)(d_n^* - C_n^*)$$

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx - L\sum_n |C_n|^2 + L\sum_n |d_n - C_n|^2 \quad \text{......10)}$$

→ જો $d_n = C_n$ લઈએ તો ε_N એ ન્યુનતમ બને છે. અને જો $C_n = d_n$ લઈએ;

$$\therefore \varepsilon_N = \int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx - L\sum_{-N}^{N} |C_n|^2 \quad \text{......11)}$$

$$\boxed{\therefore \varepsilon_N = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx \geq \sum_{-N}^{N} |C_n|^2 \quad \text{......12)}}$$

(જ્યારે $\varepsilon_n > 0$)

સમી. ૧૨) માં R.H.S $\sum |C_n|^2$ પરિમિત છે. તેથી $N \to \infty$ લેતાં,

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx \quad \text{......13)}}$$

જ્યાં અસમાનતા જળવાય છે. આ અસમાનતા ને બેસેલ ની અસમાનતા કહે છે.

→ જો $\lim_{n\to\infty}$ તો $\varepsilon_N = 0$ થાય.

$$\boxed{\therefore \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} |\phi(x)|^2 dx \quad \text{......14)}}$$

સમી. ૧૪) ને પર્સેવાલ નું સમીકરણ કહે છે.