૨.અ નીચેના કોઈપણ બે પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

૧. ફ્રેન્ક હર્ટ્ઝ પ્રયોગની આકૃતિ દોરી તેની કાર્ય પધ્ધતિ સમજાવો.

૨. પરમાણુ ઉતેજના અને ક્રાંતિ સ્થિતિનું વર્ણન કરો.

૩. મુકણ કત માટે એક પરિમાણીય શ્રોડીન્જર સમીકરણ મેળવો.

૨.બ નીચેનામાંથી કોઈપણ એકનો જવાબ આપો.

૧. બોહર મોડલની મર્યાદા લખો.

૨. સોમરફિલ્ડ મોડલની મર્યાદા લખો.

Schrodinger Equations:→

પ્રસ્તાવના :→

કોઈપણ કણને અનુરૂપ એક તરંગપેકેટ તૈયાર કરવું હોય તો તે તરંગ પેકેટમાં જુદા જુદા હાર્મોનિક ઘટકો કેટલા પ્રમાણમાં આવે છે તે જાણવું જોઈએ. ત્યાર પછી આવા ઘટકોના સતત સરવાળા વડે જ તરંગ પેકેટ બની શકે. એક પરિમાણમાં ગતિ કરતા કણને તરંગ પેકેટ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

જો કોઈ કણ સાથે ડી-બ્રોગ્લી તરંગ સંબંધિત હોય તો તરંગ પ્રવૃત્તિ કણ પાસેના મર્યાદિત વિસ્તાર પૂરતી જ હોવી જોઈએ. આ મર્યાદિત વિસ્તારમાં રહેલા અનેક હાર્મોનિક તરંગોના સંપાતીકરણ વડે બનેલા તરંગોને તરંગ પેકેટ (પડીકાઓ) કહે છે.

જો કણ અવકાશમાં ગતિ કરતું હોય તો કણ સાથે સંયોજિત તરંગ પેકેટ પણ ગતિ કરતું હોય. આમ તેઓ અવકાશીય યામો અને સમય પર પણ આધાર રાખતા હોય. આવા તરંગ પેકેટ e^{ikx} હાર્મોનિકતરંગોને બદલે $e^{i(kx-\omega t)}$ પ્રકારના હાર્મોનિક તરંગના સંપાતીકરણ વડે મેળવી શકાય.

જ્યાં k = તરંગસદિશ

ω = કોણીય આવૃત્તિ.

શ્રોડિંજરે તરંગ-કણના વિચાર ઉપરથી તરંગ સમીકરણો મેળવ્યા. આપણે પ્રથમ મુક્ત કણ માટે શ્રોડિંજર નું સમી. મેળવીશું.

એક પરિમાણમાં ગતિ કરતા મુક્ત કણ માટેનું શ્રોડિંજર સમીકરણ:→

એક પરિમાણમાં v જેટલા વેગથી ગતિ કરતો મુક્ત કણ વિચારો. જેનું વેગમાન p અને ઉર્જા E છે.

$$p = mv \quad \text{———— (1)}$$

તથા

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{———— (2)}$$

દ્રવ્ય કણ મુક્ત હોવાથી તેના પર બળો લાગતા નથી. તેથી દ્રવ્યકણને સ્થિતિ ઉર્જા નથી. તેની સમગ્ર ઉર્જા ગતિઊર્જાના સ્વરૂપમાં છે.

ડિ-બ્રોગ્લી અધિતર્ક મુજબ.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$p = \hbar k \quad \left(\because \hbar = \frac{h}{2\pi},\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{તરંગસદિશ}\right) \quad \text{———— (3)}$$

તથા $E = h\nu$ $\quad (\omega = 2\pi\nu = 2\pi f = \text{કોણીયઆવૃત્તિ})$

$$= \frac{h}{2\pi} \times 2\pi\nu$$

$$E = \hbar\omega \quad \text{———} (4)$$

સૂત્ર (3) અને (4) ના મૂલ્યો સૂત્ર (2) માં મૂકતાં

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\frac{\omega}{k^2} = \frac{\hbar}{2m} \quad \text{———} (5)$$

મુક્ત કણ સાથે સંકળાયેલ સરળ (આવર્ત) તરંગને તરંગવિધેય ψ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આવા હાર્મોનિક તરંગોનું સ્વરૂપ $\cos(kx-\omega t)$ અથવા $\sin(kx-\omega t)$ વડે અથવા વધારે વ્યાપક રીતે બંનેના રેખીય સંયોજન વડે દર્શાવી શકાય છે. ψ એ સ્થાન (x) અને સમય (t) નું વિધેય છે.

$$\therefore \psi(x,t) = a\cos(kx-\omega t) + b\sin(kx-\omega t) \quad \text{———} (6)$$

જ્યાં a અને b (સ્વૈચ્છિક) અચળાંકો છે.

સૂત્ર (6) નું x અને t ના સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -ak\sin(kx-\omega t) + bk\cos(kx-\omega t)$$

$$= k\left[-a\sin(kx-\omega t) + b\cos(kx-\omega t)\right] \quad \text{———} (7)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = k\left[-ak\cos(kx-\omega t) - bk\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$= -k^2\left[a\cos(kx-\omega t) + b\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$= -k^2\psi \quad \text{———} (8)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \omega a\sin(kx-\omega t) - \omega b\cos(kx-\omega t)$$

$$= -\omega\left[-a\sin(kx-\omega t) + b\cos(kx-\omega t)\right] \quad \text{———} (9)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega\left[a\omega\cos(kx-\omega t) + b\omega\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$= -\omega^2\left[a\cos(kx-\omega t) + b\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$= -\omega^2\psi \quad \text{———} (10)$$

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}}{\frac{\partial\psi}{\partial x}} = -\frac{\omega}{k} \quad \text{———} (11)$$

તથા $\dfrac{\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}} = \dfrac{\omega^2}{k^2}$

$$\therefore \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad \text{——— (12)}$$

આ સમીકરણો દ્રવ્યતરંગોનું વર્ણન કરવા માટે સગવડ ભરેલા નથી કારણકે $E=\hbar\omega$ અને $P=\hbar k$.

$\therefore \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{E}{P} = \dfrac{P^2}{2m\times P} = \dfrac{P}{2m}$ જે વેગમાન પર

આધાર રાખતો હોવાથી દ્રવ્યતરંગની જુદી જુદી સ્થિતિ માટે જુદો જુદો હોય છે. આપણને એવું સમીકરણ જોઈએ છે કે જે વેગમાનની બધી જ કિંમતો માટે સંતોષાતું હોય.

ω/k વેગમાન પર આધાર રાખે છે પરંતુ ω/k^2 વેગમાન પર આધાર રાખતું નથી. (સમી. 5)

આમ આપણે એવું સમી. જોઈએ જેમાં ω/k^2 અચળાંક રહે. આ માટે $\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ ને $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ સાથે સરખાવવું જોઈએ.

પરંતુ આ ત્યારે જ શક્ય બને કે જ્યારે આ સમીમાં કૌંસમાં રહેલા પદો અર્થાત $[-a\sin(kx-\omega t)+b\cos(kx-\omega t)]$ અને $[a\cos(kx-\omega t)+b\sin(kx-\omega t)]$ એકબીજાને સપ્રમાણમાં હોય.

આ માટે બંનેમાં cosine પદોના સહગુણકોનો ગુણોત્તર અને sine પદોના ગુણકોનો ગુણોત્તર સમાન થવો જોઈએ.

$$\frac{a}{b} = \frac{-b}{a} \qquad \left[\frac{b}{a} = \frac{-a}{b}\right]$$

$$b^2 = -a^2 \qquad b^2 = -a^2$$

$$\therefore b = \pm ia \qquad b = \pm ia$$

સમી. (6) માં $b = ia$ મૂકતાં

$$\phi(x,t) = a\cos(kx-\omega t) + ia\sin(kx-\omega t)$$
$$= a[\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)]$$
$$\phi(x,t) = a\,e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{——— (13)}$$

આમ, p જેટલું વેગમાન ધરાવતા દ્રવ્યકણનાં દ્રવ્યતરંગો x અને t ના સંકર હાર્મોનિક વિધેયો વડે દર્શાવી શકાય છે. $b = -ia$ મૂકતાં ભૌતિક પરિણામમાં કોઈ ફેર પડતો નથી.

સમી. (13) નું વિકલન કરતાં

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -i\omega\, a\, e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{——— (14)}$$
$$= -i\omega\phi$$

તથા $\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik a e^{i(kx-\omega t)}$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i^2 k^2 a e^{i(kx-\omega t)}$$
$$= -k^2 \psi$$

હવે $\frac{\omega}{k^2} = \frac{\hbar}{2m}$ (સમી. (5))

$$\frac{k^2}{\omega} = \frac{2m}{\hbar}$$

$k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$ આ મૂલ્ય ઉપરના સમી.માં મૂકતાં

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{2m\omega}{\hbar}\cdot\psi \qquad \text{——— (15)}$$

સમી. (14) અને (15) ઉપરથી

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} = \frac{-i\omega\psi}{-\frac{2m\omega}{\hbar}\cdot\psi}$$
$$= \frac{i\hbar}{2m}$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

બંને બાજુ '$i\hbar$' વડે ગુણતાં

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i^2\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\therefore \boxed{i\hbar\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}} \qquad \text{——— (16)}$$

સમી. (16) એક પરિમાણમાં ગતિ કરતા દ્રવ્ય કણ માટેનું શ્રોડિંજર સમી. છે.

શ્રોડિંજર સમીકરણની વિશિષ્ટતાઓ :→

(1) શ્રોડિંજર સમી. એ દ્વિતીય ક્રમનું રેખીય વિકલન સમી. છે. $\psi(x,t) = \int a(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$ તેનો (શ્રોડિંજર સમીકરણનો) ઉકેલ છે. આથી માત્ર હાર્મોનિક તરંગો જ નહિ પરંતુ તેમના કોઈપણ રેખીય સંયોજનો પણ આ સમી.ના ઉકેલ છે.

(2) પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્રના વિકલ સમી. કરતાં શ્રોડિંજર સમી. જુદું પડે છે. તેમાં કાલ્પનિક એકમ 'i' આવે છે. જે સૂચવે છે કે તરંગવિધેયો સંકર વિધેયો પણ હોઈ શકે છે.

ત્રિ-પરિમાણમાં મુક્ત કણ માટે શ્રોડિંજર સમીકરણ: →

$$\psi(x,t) = A\cos(kx-\omega t) + B\sin(kx-\omega t)$$

$B = iA$ લેતાં

$$= A\cos(kx-\omega t) + iA\sin(kx-\omega t)$$
$$= Ae^{i(kx-\omega t)}$$

હવે ત્રિ-પરિમાણમાં x ના સ્થાને સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ અને k ના સ્થાને $\vec{k}$ લેતાં

$$\psi(\vec{r},t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

શ્રોડિંજર સમી. $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ માં y અને z રાશિને પણ ધ્યાનમાં લેતાં

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t)} \quad \text{——— (1)}$$

ઉપરોક્ત સમી. (1) ત્રિ-પરિમાણમાં ગતિ કરતા મુક્ત કણ માટેનું શ્રોડિંજર સમી. છે. જેમાં $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ને લાપ્લાસીયન કારક કહે છે. ∇^2 ને નેબ્લા સ્ક્વેર કહે છે.

સમી. (1) નો વ્યાપક ઉકેલ

$$\psi(\vec{r},t) = \int a(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\, dk.$$

ઓપરેટર (કારક) અનુરૂપતા અને જેના પર બળ લાગતું હોય તેવા કણ ~~ ~~ માટેનું શ્રોડિંજર સમીકરણ: →

ધારો કે $y = x^3$ એક વિધેય છે. તેનું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં $dy/dx = 3x^2$. અહીં $\frac{dy}{dx}$ પણ એક બીજુ વિધેય છે. જ્યારે d/dx એક ઓપરેટર છે. આમ,

" ઓપરેટર એ ચોક્કસ ગાણિતીય પ્રક્રિયાનો નિર્દેશક છે, જે ચોક્કસ નિયમને આધારે આપેલ વિધેયને બીજા વિધેયમાં બદલે

(ઓપરેટર કોઈ વિધેય પર લગાડતાં તે આપેલા વિધેયને ચોક્કસ નિયમને આધારે બીજા વિધેયમાં બદલી નાખે છે.)

નાખે છે.
આ અર્થમાં સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર, સંકલન અને વિકલન એ ઓપરેટરો કહે છે. તે તો માત્ર ગાણિતિક પ્રક્રિયાના સંકેત જ છે. જ્યાં સુધી ઓપરેટર કોઈક પર લાગે નહિ ત્યાં સુધી તેનો વ્યાવહારિક દ્રષ્ટિએ કંઈ અર્થ નથી.

- પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્ર પ્રમાણે

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \text{——— (1)} \qquad \frac{dE}{dp} = \frac{2p}{2m} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v.$$

ત્રિ-પરિમાણમાં શ્રોડિંજર સમી.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

ઉપરોક્ત સમી.માં ~~…~~ ડાબીબાજુ $i\hbar \partial/\partial t$ અને જમણી. $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ ઓપરેટર છે.

$$\therefore \; i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \quad \text{——— (2)}$$

(બંને બાજુ ψ ને દૂર કરતાં)

• સમી. (1) અને (2)ને સરખાવતા

$$E \rightarrow i\hbar \partial/\partial t \quad \text{તથા} \quad \frac{p^2}{2m} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2.$$

$$p^2 \rightarrow -\hbar^2\nabla^2$$
$$p^2 = i^2\hbar^2\nabla^2$$
$$\therefore p \rightarrow -i\hbar\nabla$$

આમ ~~…~~ ઊર્જા અને વેગમાનને બીજેના કારક વડે દર્શાવી શકાય.

$$E \rightarrow i\hbar \partial/\partial t \quad \text{—— (2)}$$
$$p \rightarrow -i\hbar\nabla \quad \text{—— (3)}$$

પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર~~ના~~ના યાંત્રિક ચલોને યોગ્ય આવા ઓપરેટરો વડે દર્શાવીને ક્વોન્ટમ યંત્રશાસ્ત્રમાં સમી. મેળવી શકાય.
જ્યારે કણ પર બળ લાગતું હોય ત્યારે પણ ઓપરેટર અનુરૂપતા જળવાઈ રહે છે.

~~બળ લાગુ પડતું હોય ત~~

બળ લાગતું હોય તથા કણ માટે શ્રોડિંજર સમીકરણ :-

ધારોકે કણ પર F બળ લાગે છે

$$F = -\nabla V(\vec{r},t) \quad \text{જ્યાં } V(\vec{r},t) = \text{સ્થિતિઊર્જા}$$

કણ માટે કુલ ઊર્જા $E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r},t)$ —— (4)

$= \text{ગતિઊર્જા} + \text{સ્થિતિઊર્જા}$

આ સમીકરણ ઉપર ઓપરેટરોને કાર્ય કરાવતા (સમી. (2),(3) પ્રમાણે)

$$\therefore i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r},t)$$

બંને તરફ તરંગવિધેય $\psi(\vec{r},t)$ લાગુ પાડતાં

$$\therefore \boxed{i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)} \quad -(5)$$

સમી. (5) એ બળક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા કણ માટે નું ત્રિપરિમાણિક શ્રોડિંગર સમી છે.

Unit 4
Cha. 5

પરમાણુ વર્ણપટ શાસ્ત્ર

5.1 ફ્રેન્ક-હર્ટ્ઝનો પ્રયોગ (Franck - Hertz Experiment) :

પરમાણુની સ્થિર કક્ષામાં રહેલા ઈલેક્ટ્રોનને તેની ધરાસ્થિતિમાંથી ઉંચી ઉત્તેજીત અવસ્થાવાળી કક્ષામાં લઈ જવા માટે આપવી પડતી જરૂરી લઘુત્તમ ઉર્જાને **ક્રાંતિ સ્થિતિમાન** કહે છે. ક્રાંતિ સ્થિતિમાન માપવાની મુખ્ય બે રીત છે.

(૧) વાયુના પરમાણુ સાથે ઈલેક્ટ્રોનની અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાતના અભ્યાસ પરથી.

(૨) વર્ણપટશાસ્ત્રમાં ઉત્તેજીત થતી વિકિરણની તરંગલંબાઈઓ માપીને.

ક્રાંતિ સ્થિતિમાન માપવાની મુખ્ય અને સૌ પ્રથમ ચોકસાઈવાળી રીત ફ્રેન્ક અને હર્ટ્ઝ નામના વૈજ્ઞાનિકે ઈ.સ. ૧૯૧૪માં આપી હતી. આ પ્રયોગ પરમાણુને ઉર્જા સ્તરો છે તેની ખાત્રી કરાવે છે.

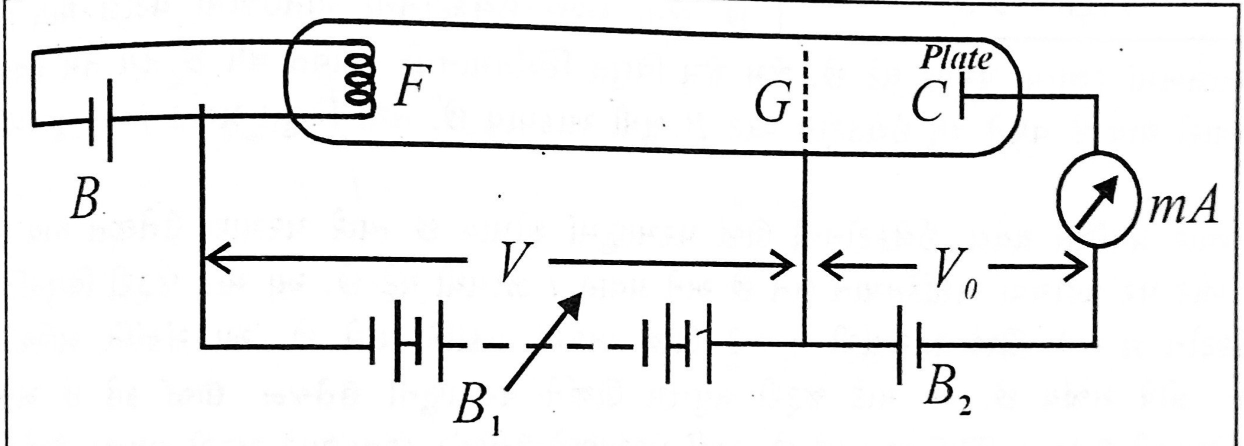

Figure-5.1

ફ્રેન્ક અને હર્ટ્ઝના પ્રયોગની રેખાકૃતિ ઉપર આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. તેમાં એક કાચની નળીમાં લગભગ 1 mm Hg ના દબાણે એક તત્ત્વના વાયુને ભરવામાં આવે છે. નળીમાં ફિલામેન્ટ F, ગ્રીડ G અને પ્લેટ P ને ટ્રાયોડ વાલ્વની જેમ જ ગોઠવેલ છે. ફિલામેન્ટ F ને ઓછા વોલ્ટેજવાળી બેટરી B દ્વારા ગરમ કરી ઈલેક્ટ્રોનનું ઉત્સર્જન કરવામાં આવે છે. ફિલામેન્ટ F અને ગ્રીડ G વચ્ચે ઊંચું વિદ્યુતદબાણ V બેટરી B_1 દ્વારા આપવામાં આવે છે. જેમાં ફિલામેન્ટ F ની સાપેક્ષ ગ્રીડ G ને ઘન રાખવામાં આવે છે.

ગ્રીડ G અને પ્લેટ P વચ્ચે બેટરી B_2 દ્વારા નાનું વિદ્યુત સ્થિતિમાન રાખવામાં આવે છે.

પ્લેટ P ને ગ્રીડ G ની સાપેક્ષ ઋણ રાખવામાં આવે છે તેથી ગ્રીડમાં થઈને પ્લેટ પર આવતા ઈલેક્ટ્રોનની ગતિ અવરોધાય છે. ગ્રીડમાંથી બહાર આવતા ઈલેક્ટ્રોનની ઉર્જા વધારે હોવાથી ઈલેક્ટ્રોન પ્લેટ P સુધી પહોંચી જાય છે અને એમીટર વિદ્યુતપ્રવાહ i દર્શાવે છે. અહીં, ફિલામેન્ટ અને ગ્રીડ વચ્ચે ઈલેક્ટ્રોન તથા નળીમાંના વાયુના પરમાણુઓ અસંખ્ય અથડામણો (સંઘાત) અનુભવે છે.

ફ્રેન્ક અને હર્ટ્ઝે પ્લેટ પરનું ઋણ વોલ્ટેજ અચળ રાખીને ફિલામેન્ટ અને ગ્રીડ વચ્ચેના વિદ્યુત સ્થિતિમાનના તફાવતનું V નું મૂલ્ય ધીમે ધીમે વધારીને દરેક વખતે પ્લેટ પ્રવાહ i અને V ના મૂલ્યની નોંધ કરી i વિરુધ્ધ V નો આલેખ દોરતા તે નીચેની આકૃતિ મુજબ મળે છે. આલેખ પરથી કહી શકાય કે પ્રારંભમાં વિદ્યુત પ્રવાહ ધીરે ધીરે

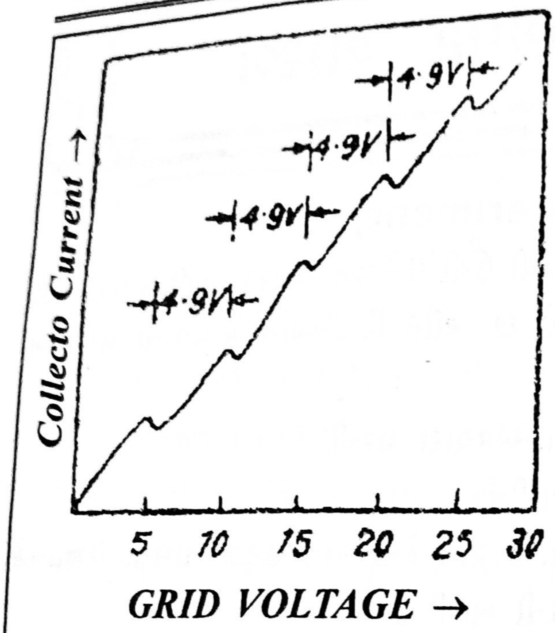

Figure-5.2

વધે છે. શરૂમાં ઈલેક્ટ્રોન પ્લેટ સુધી પહોંચી શકતા નથી તેનું કારણ પ્લેટનો ઋણ વોલ્ટેજ છે. ત્યારબાદ વિજ સ્થિતિમાન V ના મૂલ્યમાં વધારો થતાં પ્લેટના ઋણ વોલ્ટેજની અસરમાં ઘટાડો જોવા મળે છે. જેને લીધે વધુ સંખ્યામાં ઈલેક્ટ્રોન પ્લેટ સુધી પહોંચે છે. તેથી વિજપ્રવાહમાં વધારો થતો જોઈ શકાય છે. પરંતુ અમુક ચોક્કસ વોલ્ટેજ ($V = 10.2$ *Volt*) માટે અચાનક વિજપ્રવાહમાં ઘટાડો થાય છે. પછી પુનઃ વોલ્ટેજમાં વધારો થતાં પ્રવાહ વધે છે. આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે અન્ય બીજા વોલ્ટેજ ($V = 12.09$ *Volt*) માટે વિજપ્રવાહ પુનઃ એકદમ ઘટે છે અને આ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન થાય છે.

નળીમાં વાયુનું દબાણ એટલું રાખવામાં આવે છે કે ઈલેક્ટ્રોનની વાયુના પરમાણુ સાથે અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણો થાય છે. જેના કારણે ઈલેક્ટ્રોનની ગતિઉર્જામાં ઘટાડો થાય છે. તેથી કરન્ટ i આલેખમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ઘટે છે. જેમ જેમ વિદ્યુત સ્થિતિમાનનો તફાવત વધે છે તેમ તેમ પ્રવાહ i ના મૂલ્યમાં વધારો થાય છે વધુને વધુ ઈલેક્ટ્રોન પ્લેટ P સુધી આકર્ષાય છે. તેથી વિદ્યુત પ્રવાહ i ના મૂલ્યમાં વધારો થાય છે.

જ્યારે પ્રવેગિત થયેલા ઈલેક્ટ્રોનની ઊર્જા પરમાણુમાં શોષાય છે ત્યારે પરમાણુ ઉત્તેજીત થાય છે. તેથી ઈલેક્ટ્રોન પ્લેટ પર પહોંચવા અશક્તિમાન બને છે અને પ્રવાહ i ઝડપથી ઘટે છે. આ માટે જરૂરી વિદ્યુતસ્થિતિમાન દ્વારા ઈલેક્ટ્રોન $n = 1$ ઊર્જા સ્તરમાંથી $n = 2$ ઊર્જા સ્તરમાં સંક્રાંતિ પામે છે. આ સંક્રાંતિ અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણને લીધે સર્જાય છે. આ માટે જરૂરી લઘુત્તમ ઊર્જાને પરમાણુની **ઉત્તેજન ઊર્જા** કહે છે અને જરૂરી વિદ્યુતસ્થિતિમાનને **ઉત્તેજન સ્થિતિમાન** કહે છે. અહીં પરમાણુને ઉત્તેજીત કરવા માટે જરૂરી લઘુત્તમ ઉર્જા બે ક્રમિક ઉર્જા સ્તરોની ઊર્જાના તફાવત જેટલી હોય છે. અર્થાત્, જરૂરી ઊર્જા $E_2 - E_1$ જેટલી હોય છે.

ફ્રેન્ક અને હર્ટ્ઝે મરક્યુરી પરમાણુને તેની ઉત્તેજીત અવસ્થામાંથી ધરાસ્થિતિમાં પાછુ આવતા ઉત્સર્જીત થતા વિકિરણની ($\lambda = 2357$ Å) સાથે સંકળાયેલ ઉર્જાની ગણત્રી કરી હતી.

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.62\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{2537\times10^{-10}\times1.6\times10^{-19}}eV = 4.9\,eV$$

આમ પારાના પરમાણુ માટે પ્રથમ અનુનાદ સ્થિતિમાન 4.9 eV મળે છે. એક વિદ્યુત સ્થિતિમાન એટલું મળે છે કે તે સ્થિતિમાને વાયુ આયનીકરણ પામે છે અને વિદ્યુત પ્રવાહ વધુ માત્રામાં વધે છે. આ અવસ્થામાં જુદી જુદી રેખાઓ ધરાવતો વર્ણપટ પ્રાપ્ત થાય છે. આ માટેના વિજસ્થિતિમાનનું મૂલ્ય તેની ગતિઉર્જા $\frac{1}{2}mv^2$ જેટલું હોય છે. જેનાથી ઈલેક્ટ્રોન પરમાણુની કક્ષાની બહાર ($n = \infty$ કક્ષા)માં પહોંચી જાય છે. આ રીતે પરમાણુમાં વિભક્ત (discrete) સ્થિર ઉર્જા સ્તરો હોય છે. તે સાબિત થાય છે. અહીં પ્લાંકની વિચારધારા "વિકિરણનું ઉત્સર્જન ફોટોનના નિશ્ચિત જથ્થા સ્વરૂપે અસતત થાય છે." તેને પણ સમર્થન મળે છે.

ક્રાંતિ સ્થિતિમાન (Critical Potential) :

જ્યારે વાયુ અથવા બાષ્પમાંથી ઈલેક્ટ્રોનને પસાર કરવામાં આવે છે ત્યારે વાયુના પરમાણુ સાથે ઈલેક્ટ્રોનની બે પ્રકારની અથડામણ શક્ય બને છે. (1) સ્થિતિસ્થાપક અને (2) અસ્થિતિસ્થાપક

સ્થિતિસ્થાપક સંઘાતમાં સંઘાત પહેલા અને પછી ઉર્જાના મૂલ્યનું સંરક્ષણ થાય છે. જ્યારે અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાતમાં ઉર્જાનું મૂલ્ય બદલાય છે. જો ઈલેક્ટ્રોનની ઉર્જાનું મૂલ્ય પરમાણુના બે સ્તરના ઉર્જાના મૂલ્યના તફાવત કરતા ઓછું હોય તો સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ શક્ય બને છે.

પરમાણુની સ્થિર કક્ષામાં રહેલા ઈલેક્ટ્રોનને તેની ધરાસ્થિતિમાંથી ઊંચી ઉત્તેજીત અવસ્થાવાળી કક્ષામાં લઈ જવા માટે આપવી પડતી જરૂરી લઘુત્તમ ઉર્જા (ઈલેક્ટ્રોન વોલ્ટ-eV)ને ક્રાંતિ સ્થિતિમાન કહે છે.

5.2 બોહરના વાદની ક્ષતિઓ (Shortcomings of Bohr Theory) :

બોહરનો વાદ (Theory) નીચેની વિગતો સમજાવવામાં નિષ્ફળ જાય છે.

(i) પરમાણુમાં ઈલેક્ટ્રોનની ગોઠવણી અને વહેંચણી વિશે આ વાદમાં કોઈ માહિતી મળતી નથી.

(ii) અહીં પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર (ક્લાસીકલ) અને ક્વોન્ટમ એમ બંને વાદનો ઉપયોગ થયો છે. પ્રણાલીના સંતુલન માટે ક્લાસીકલ વાદ અને વિકિરણના ઉત્સર્જનની સમજૂતી માટે ક્વોન્ટમ વાદનો ઉપયોગ થયો છે.

(iii) વર્ણપટ રેખાઓની આવૃત્તિ વિશે ખ્યાલ મળે છે પરંતુ આ વાદ વર્ણપટ રેખાઓની તીવ્રતા સમજાવી શકતુ નથી.

(iv) આ વાદ વડે વર્ણપટ રેખાઓનું સૂક્ષ્મ બંધારણ સમજી શકાતુ નથી.

(v) હાઈડ્રોજન અને હાઈડ્રોજન જેવા હલકા પરમાણુના વર્ણપટ આ વાદથી સમજાવી શકાય છે. પરંતુ જટીલ પરમાણુના વર્ણપટ સમજાવી શકાતા નથી.

(vi) પરમાણુની કક્ષા વર્તુળાકાર લેવા માટે સરળતા સિવાય બીજુ કોઈ કારણ નહોતું.

5.3 સોમરફેલ્ડ મોડેલની સમજૂતી (Sommerfield Extension of Bohr Theory) :

ઈ.સ. 1916 માં ભૌતિકશાસ્ત્રી સોમરફેલ્ડે બોહરના કાર્યને આગળ ધપાવ્યું. જે રીતે પૃથ્વી સહિત અન્ય ગ્રહો સૂર્યની આસપાસ લંબવૃત્ત માર્ગે ભ્રમણ કરે છે તેજ રીતે સોમરફેલ્ડે જણાવ્યું કે ઈલેક્ટ્રોન ન્યુક્લિયસની આસપાસ ઉપવલય માર્ગે ભ્રમણ કરે છે અને ન્યુક્લિયસને ઉપવલયના કોઈ એક કેન્દ્ર પર લેવામાં આવે છે. કેપ્લરના નિયમો અનુસાર જ્યારે બે કણ વચ્ચે કેન્દ્રિય બળ લાગુ પડતું હોય ત્યારે એક કણના ક્ષેત્રમાં બીજુ કણ શંકુછેદ માર્ગે ગતિ કરે છે. જે નીચેના સૂત્રથી દર્શાવાય છે.

$$\frac{l}{r} = 1^{\nu} + \in \cos\phi \qquad \text{------------- (1)}$$

જ્યાં $\in$ એ ઉપવલય માટે અસેન્ટ્રીસીટી (ઉત્કેન્દ્રિતા) દર્શાવે છે.

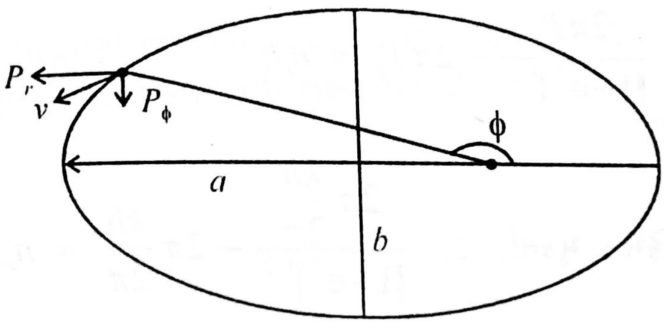

Figure-5.3

અહીં સોમરફેલ્ડે કોયડાના ઉકેલ માટે મુક્તતાના બં અંશોનો ઉપયોગ કર્યો. અહીં, દ્વિપારિમાણિક યામ પધ્ધતિમાં ઈલેક્ટ્રોનનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે જરૂરી લઘુત્તમ બે સ્વતંત્ર સ્વરૂપના યામ r અને ϕ હોવાથી સોમરફેલ્ડે દરેક પર ક્વોન્ટમીકરણની શરતો સંકલન સ્વરૂપે રજુ કરી. જેને **ફેઝ સંકલન** કહે છે.

$$\oint p_i \, dq_i = n_i h \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

અહીં q_i વિસ્તૃત યામો દર્શાવે છે અને તેને આવર્તીય યામ પણ કહે છે. p_i એ તેને અનુરૂપ વેગમાનો છે. આ ફેઝ સંકલનને આપેલા યામોના સંપૂર્ણ આવર્ત પર લેવાય છે.

$$\therefore \int_0^{2\pi} p_\phi \, d\phi = kh \qquad \text{------------} (2)$$

$$\int p_r \, dr = n_r h \qquad \text{------------} (3)$$

જો $p_\phi \to \phi$ નો ગ્રાફ દોરીએ તો તે બંધ વક્ર મળે છે. અને ϕ નું મૂલ્ય 0 થી 2π જેટલું બદલાય છે. વળી, $P_r \to r$ નો ગ્રાફ પણ બંધ વક્ર જ મળે છે અને તેમાં r ની કિંમત ન્યુનતમથી મહત્તમ થઈ મૂળ અવસ્થાએ મળે છે.

$$\text{અહીં} \quad n = k + n_r \qquad \text{------------} (4)$$

વળી, k ને એઝીમથલ ક્વોન્ટમ અંક અને n_r ને ત્રિજ્યાવર્તી ક્વોન્ટમ અંક કહે છે. અને n ને મુખ્ય ક્વોન્ટમ અંક તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે.

એઝિમથલ અને ત્રિજ્યાવર્તી વેગમાનને નીચે મુજબ દર્શાવવામાં આવે છે.

$$P_r = m\dot{r} = mv \qquad \text{------------} (5)$$

$$P_\phi = mr^2\dot{\phi} = mr^2\omega \qquad \text{------------} (6)$$

જ્યાં $\omega = \dot{\phi} = \dfrac{d\phi}{dt}$ (કોણીય ઝડપ) તથા $v = \dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$ (રેખીય ઝડપ), m એ ઈલેક્ટ્રોનનું દ્રવ્યમાન છે.

સમીકરણ (2) પરથી

$$P_\phi [2\pi] = kh$$

$$P_\phi = \frac{kh}{2\pi} = k\hbar \qquad \text{જ્યાં } \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ લીધેલ છે.} \qquad \text{------------} (7)$$

સમીકરણ (3) પરથી મળતું પરિણામ નીચે મુજબ મળે છે.

$$\therefore \frac{2\pi P_\phi}{[1-\epsilon^2]^{1/2}} - 2\pi P_\phi = n_r h$$

અહીં $\in$ એ લંબવૃત્તની ઉત્કેન્દ્રિતા છે.

સમીકરણ (7) માંથી P_ϕ ની કિંમત મૂકતાં, $\therefore \dfrac{2\pi \dfrac{kh}{2\pi}}{[1-\epsilon^2]^{1/2}} - 2\pi \dfrac{kh}{2\pi} = n_r h$

$$\therefore \quad \frac{kh}{[1-\in^2]^{1/2}} - kh = n_r h$$

$$\therefore \quad \frac{kh}{[1-\in^2]^{1/2}} = (n_r + k)h$$

$$\therefore \quad [1-\in^2]^{1/2} = \frac{k}{k+n_r} \qquad \text{-------------(8)}$$

હવે લંબવૃત કક્ષા માટે $[1-\in^2]^{1/2} = \dfrac{b}{a}$ -------------(9)

સમીકરણ (8) અને (9) પરથી

$$\frac{b}{a} = \frac{k}{k+n_r}$$

$$\therefore \quad \frac{b}{a} = \frac{k}{n}$$ જ્યાં $n = k + n_r$ લીધેલ છે. -------------(10)

અહીં b અને a લંબવૃત્તની અર્ધલઘુ અક્ષ અને અર્ધ દીર્ઘઅક્ષ છે.

ઉપરોક્ત સમીકરણ (10) ઈલેક્ટ્રોનની શક્ય કક્ષાઓ દર્શાવે છે. આમ આપેલ n મૂલ્ય માટે n ઉપવલયો સંભવી શકે. ઈલેક્ટ્રોન તે પૈકી કોઈ એક કક્ષામાં ગતિ કરે છે. સમી. (10) પરથી કહી શકાય કે b નું વધુમાં વધુ મૂલ્ય a જેટલું જ મળે છે. તેથી k નું વધુમાં વધુ મૂલ્ય n જેટલું જ મળે.

વળી, k નું મૂલ્ય શૂન્ય થશે નહીં. કારણ કે, જો $k=0$ લઈએ તો $b=0$ મળે છે તેથી ઈલેક્ટ્રોનની ગતિપથ લંબવૃત્ત ન રહેતા માત્ર સુરેખ જ મળે. જે શક્ય નથી.

$\therefore \quad k \neq 0$ તથા આપેલા n ના મૂલ્ય માટે k નાં n મૂલ્યો મળે. (k = 1, 2, 3...n)

સાપેક્ષવાદીય સુધારા અનુસાર

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ જ્યાં c પ્રકાશનો વેગ છે.

m_0 ઈલેક્ટ્રોનનું સ્થિર દળ દર્શાવે છે.

ઉપરોક્ત સૂત્ર લાગુ પાડવાથી અપકર્ષતા (degenercy) દૂર થાય છે. અને આપેલ n મૂલ્ય માટે જુદી જુદી મળતી n કક્ષાઓમાં ઈલેક્ટ્રોનની ઉર્જા જુદી જુદી શક્ય બને છે.