① ① UNIT 1 (A)   FY B.SC (Semester I)

સદિશોનું પૃથક્કરણ

Q. વ્યાખ્યાઓ આપો : (1) અદિશ રાશિઓ (2) સદિશ રાશિઓ.

A. તમામ પ્રકારની ભૌતિકરાશિઓને બે પ્રકારમાં વિભાજિત કરી શકાય.

(1) **અદિશ રાશિઓ** :- જે ભૌતિક રાશિઓને માત્ર મૂલ્ય (માન) દ્વારા દર્શાવવામાં આવે તે ભૌતિકરાશિઓને અદિશરાશિઓ કહે છે.
ઉદાહરણ તરીકે લંબાઈ, દળ, સમય, અંતર, ઝડપ, ઘનતા, કાર્ય, પાવર, તાપમાન, ઊર્જા, વિદ્યુત સ્થિતિમાન અને વિદ્યુતભાર વગેરે.

(2) **સદિશ રાશિઓ** :- જે ભૌતિક રાશિઓને દર્શાવવા મૂલ્ય સાથે દિશાની પણ જરૂર હોય તેવી ભૌતિક રાશિઓને સદિશ રાશિઓ કહે છે.
ઉદાહરણ તરીકે સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ, બળ, રેખીય વેગમાન કોણીય વેગમાન, ચુંબકીય પ્રેરણ, ટોર્ક, વિદ્યુત ડાયપોલ મોમેન્ટ.
સદિશને $\vec{A}$ વડે દર્શાવાય છે. આવા સદિશનું મૂલ્ય $A = |\vec{A}|$ વડે દર્શાવાય છે.
કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ હોય તો
$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ થાય
અને $\vec{A}$નો એકમ સદિશ

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$ થાય.

[એક એકમ મૂલ્ય ધરાવતા સદિશને એકમ સદિશ કહે છે. કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં એકમ સદિશો અનુક્રમે $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ છે જે x, y, z દિશામાં આવેલા છે. આ ત્રણેય એકમ સદિશો પરસ્પર લંબ છે.

Q. અદિશ ગુણાકાર અને સદિશ ગુણાકાર સમજાવો.

A. **અદિશ ગુણાકાર** : બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$નું એ પ્રકારનું સંયોજન કે જેથી પરિણામ અદિશ રાશિ મળે તો આ પ્રકારના સંયોજનને અદિશ ગુણાકાર કહે છે.
$\vec{A}$ અને $\vec{B}$નો અદિશ ગુણાકાર એટલે

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$ થાય

જ્યાં A એ $\vec{A}$નું મૂલ્ય, B એ $\vec{B}$નું મૂલ્ય અને θ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ છે.

(i) જો $\vec{A} \parallel \vec{B}$ હોય તો $\theta = 0^\circ$ થાય

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 0^\circ = AB$

(ii) જો $\vec{A} \perp \vec{B}$ હોય તો $\theta = 90^\circ$ થાય

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 90^\circ = 0$ થાય.

(iii) જો $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ અને

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ હોય તો

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ થાય.

<u>સદિશ ગુણાકાર</u> : બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ નું એ પ્રકારનું સંયોજન કે જેથી પરિણામ સદિશ રાશિ મળે તો આ પ્રકારના સંયોજનને સદિશ ગુણાકાર કહે છે.
$\vec{A}$ અને $\vec{B}$નો સદિશ ગુણાકાર એટલે

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \, \hat{n}$$

~~A = $\vec{A}$ નું~~

$A = \vec{A}$ નું મૂલ્ય

$B = \vec{B}$ નું મૂલ્ય

$\theta = \vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો ખૂણો

$\hat{n} = \vec{A}$ અને $\vec{B}$ થી બનતા સમતલની લંબ દિશામાંનો એકમ સદિશ.

(i) જો $\vec{A} \parallel \vec{B}$ હોય તો $\theta = 0^\circ$ થાય

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 0^\circ \hat{n} = 0\hat{n}$ = શૂન્યસદિશ.

આ શૂન્ય સદિશની વ્યાખ્યા આપે છે.

(ii) જો $\vec{A} \perp \vec{B}$ હોય તો $\theta = 90^\circ$ થાય

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 90^\circ \hat{n} = AB\hat{n}$ થાય.

(iii) જો $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ અને

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ હોય તો

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$ થાય.

CC:PHY-101

Vector Algebra & Vector Analysis.

From June, 2020 effective   PHYSICS SEMESTER-I (UNIT-1)

* પ્રસ્તાવના :-

ગમે તે યામાક્ષ પદ્ધતિની પસંદગી કરવામાં આવે તો પણ અદિશ રાશિ (Scalar quantity)ને દર્શાવવા માત્ર એક સંખ્યાની જરૂર હોય છે, જ્યારે સદિશ રાશિને (Vector quantity) દર્શાવવા ત્રણ સંખ્યાઓની જરૂર પડે છે.

અદિશ રાશિને ત્રિ પારિમાણિક અવકાશમાં શૂન્ય રેન્કનો ટેન્સર (tensor) [ie $3^0 = 1$ ઘટક (component)] પણ કહે છે, જ્યારે સદિશ રાશિ ત્રિ પારિમાણિક અવકાશમાં એક રેન્કનો ટેન્સર [i.e $3^1 = 3$ ઘટકો] છે.
આમ n રેન્કનો ટેન્સર 3^n ઘટકો ધરાવશે.

જેની રેન્ક (Rank) ૨ હોય તેવા ટેન્સરને dyadic અથવા (dyad) ડાયડ કહે છે. આમ તે $3^2 = 9$ ઘટકો ત્રિ પારિમાણિક અવકાશમાં ધરાવે છે.

* Dyadic અથવા ડાયડ (dyad) એટલે શું? સવિસ્તર સમજાવો.

Dyadic અથવા dyad એ રેન્ક ૨ (બે)નો ટેન્સર છે. Dyadic (dyad)ને દર્શાવવા બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$નો સાદો ગુણાકાર કરવામાં આવે છે જેમાં (·) ડોટ કે (×) ક્રોસનું કોઈ સ્થાન હોતું નથી.
ઉપર જોયું તેમ dyadic (dyad) ત્રિપારિમાણીક અવકાશમાં $3^2 = 9$ ઘટકો ધરાવે છે, જેને નીચે દર્શાવેલ છે.

i.e
$$\begin{aligned}\vec{A}\vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= A_xB_x\hat{i}\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\hat{k} \\ &\quad + A_yB_x\hat{j}\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\hat{k} \\ &\quad + A_zB_x\hat{k}\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\hat{k}\end{aligned}$$

Prof J.M. Kadiya

Dyadic (dyad)ના ગુણધર્મો :-

(1) Dyadic (dyad)માં બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$નો ગુણાકાર (product) બિન સમક્રમી (non-commutative) છે.
i.e $\vec{A}\vec{B} \neq \vec{B}\vec{A}$

Prof J.M. Kadiya

(2) Dyadic (dyad) $\vec{A}\vec{B}$ ને ત્રીજા સદિશ $\vec{C}$ સાથે ડાબી (left) કે જમણી (Right) બાજુથી ડોટ (·) ગુણાકાર કરી શકાય છે. એટલે કે, પહેલાં ડાબી બાજુ માટે,

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\vec{B}) = (\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} \quad \text{---(1)}$$

સ્વરૂપ — ① સાદિશ $\vec{B}$ ની દિશામાંનો સદિશ સૂચવે છે.
આજ રીતે, dyadic (dyad) $\vec{A}\vec{B}$ ને ત્રીજા સાદિશ $\vec{C}$ સાથે જમણી બાજુથી (·) ગુણાકાર કરતાં,

$$(\vec{A}\,\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}) = \vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B}) \quad --- ②$$

જે સાદિશ $\vec{A}$ ની દિશામાંનો સદિશ સૂચવે છે,
આમ આપણે સમી. ① અને સમી. ② પરથી જોઈ શકીએ છીએ કે

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\,\vec{B}) \neq (\vec{A}\,\vec{B})\cdot\vec{C}$$

Prof. J. M. Kadiya

રેન્ક બે (2) ના ટેન્સર એટલે કે dyadic (dyad) ના જાણીતા ઉદાહરણ તરીકે જડત્વની ચાકમાત્રાનો ટેન્સર, પ્રતિબળ ટેન્સર, વિકૃતી ટેન્સર, ઉર્જા ટેન્સર અને વેગમાન ટેન્સર છે.

જૂના પુસ્તકો અને સાહિત્યમાં dyadic (dyad) નો ઉલેખ જોવા મળે છે, પણ અત્યારે તે અપ્રસ્તુત છે.

③ (5)

* ત્રણ સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર (ત્રિ અદિશ ગુણાકાર)

જો કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં
$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$; $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$
અને $\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$ હોય તો.
તો ત્રિ અદિશ ગુણાકારને $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ વડે દર્શાવાય છે.

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{B}\times\vec{C} = (B_yC_z - B_zC_y)\hat{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\hat{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot\left\{\begin{array}{l}(B_yC_z - B_zC_y)\hat{i} \\ +(B_zC_x - B_xC_z)\hat{j} \\ +(B_xC_y - B_yC_x)\hat{k}\end{array}\right\}$$

$$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$ થાય

$$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$ થાય.

Jevadules
Prof. J. M. Kadiya

ત્રિ અદિશ ગુણાકાર $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ને $[ABC]$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

*→ જો ત્રિ અદિશ ગુણાકાર $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$માં બે સદિશો સમાન હોય (ધારો કે $\vec{A} = \vec{B}$ છે, એટલે કે $\vec{A} \parallel \vec{B}$ છે અને $A = B$ પણ છે.)

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot 0\hat{n}$$
$$= 0$$ થાય

$\therefore$

→ જો ત્રિ અદિશ ગુણાકાર $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$માં બે સદિશો સમાંતર હોય (ધારો કે $\vec{A} \parallel \vec{B}$ છે, એટલે કે $\vec{B} = n\vec{A}$ જ્યાં n અદિશ સંખ્યા છે.)

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times n\vec{A}) =$$

$$= n\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{A}) =$$

$$= n\vec{C}\cdot 0\hat{n} = 0 \text{ થાય.}$$

→ જો $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ પરસ્પર સમાંતર હોય એટલે કે તેઓ એકજ સમતલમાં આવેલા (સમતલસ્થ) હોય તો

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0 \text{ થાય.}$$

આ શરતને coplanarity (સમતલસ્થાની) શરત કહે છે.

→ ત્રિ અદિશ ગુણાકારનો ચક્રીય ગુણધર્મ :-

ત્રિ અદિશ ગુણાકારમાં $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના સ્થાનો ચક્રીય રીતે બદલતાં જઈએ તો, ત્રિ અદિશ ગુણાકારના મૂલ્યમાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી. આમ ત્રિ અદિશ ગુણાકાર ડૉટ અને ક્રોસના સ્થાનોથી સ્વતંત્ર છે. આમ હવે ચક્રીય રીતે ત્રિ અદિશ ગુણાકારમાં ડૉટ અને ક્રોસના સ્થાન બદલવાથી ત્રિ અદિશ ગુણાકારના મૂલ્યમાં કોઈ ફેરફાર થશે નહિ.

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) \text{ થાય}$$

અને

$$-\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B}) = -\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A}) = -\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C}) \text{ થાય.}$$

આ ચક્રીય ગુણધર્મને નીચે મુજબ તાદૃશ્ય કરી શકાય

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

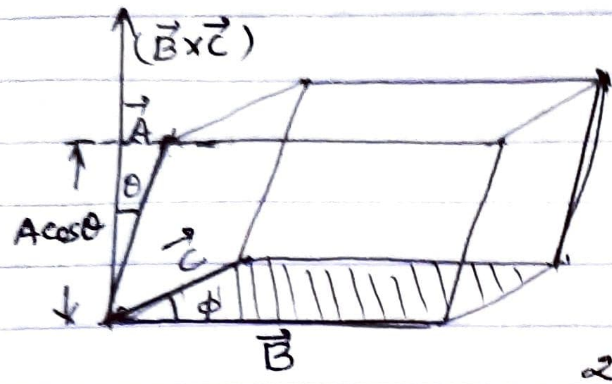
$$= -\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

5

ઉપર આપણે જોયું કે નિશ્ચાયકની હારના ઘટકોની ચક્રીય રીતે બદલવાથી નિશ્ચાયકના મૂલ્યમાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી જે ત્રિ અદિશ ગુણાકારના ચક્રીય ગુણધર્મની સાબિતી છે.

→ ત્રિ અદિશ ગુણાકારનું ભૌતિક મહત્વ



ધારો કે $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ આકૃતિમાં દોરેલ લંબઘનની ધારો છે.

$(\vec{B}\times\vec{C})$ સદિશ, સદિશ $\vec{B}$ અને $\vec{C}$થી બનતા સમતલને લંબ હોય છે.

આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય છે કે દોરેલ લંબઘનના પાયાનું ક્ષેત્રફળ $|\vec{B}\times\vec{C}| = BC\sin\phi$ છે.

$\vec{A}$ અને $(\vec{B}\times\vec{C})$નો અદિશ ગુણાકાર $[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})]$ એટલે લંબઘનના પાયાનું ક્ષેત્રફળ $|\vec{B}\times\vec{C}| = BC\sin\phi$ અને $(\vec{B}\times\vec{C})$ સદિશની દિશામાં $\vec{A}$ના પ્રક્ષેપ $A\cos\theta$ [જે લંબઘનની ઊંચાઈ છે.) ના ગુણાકાર બરાબર થાય.

એટલે કે $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A\cos\theta\,|\vec{B}\times\vec{C}| = A\cos\theta\, BC\sin\phi$

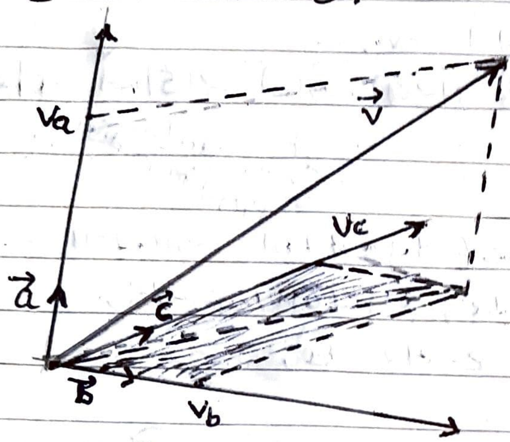
$= \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) =$ ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = કદ થાય

આ આ કિસ્સામાં $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ આપેલ લંબઘનનું કદ (V) દર્શાવે છે.

જો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ સમતલસ્થ હોય તો $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$ થાય.

* વ્યસ્ત (Reciprocal) સદિશો સમજાવો.

વ્યસ્ત સદિશોની ચર્ચા ઘન અવસ્થા ભૌતિકશાસ્ત્ર (Solid State Physics)માં વ્યસ્ત લેટિસની સમજૂતી માટે કરવામાં આવે છે.



તીર્યક્ અક્ષો (oblique axes) પર સદિશ $\vec{V}$નું નિરૂપણ

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સદિશ $\vec{V}$ના ત્રણ ઘટકો V_a, V_b અને V_c જે એક સમતલમાં ન હોય (non-coplaner) તેવી તીર્યક્ અક્ષો પર દર્શાવ્યા છે.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ આધાર સદિશો (base vectors) $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ થી આ તિર્યક્ યામિક અક્ષો રચાય છે. આ આધાર સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ પરસ્પર લંબ નથી (Non-orthogonal) તે યાદ રાખશો.

યાદ રાખો કે આ પરસ્પર બિનલંબ (Non-orthogonal) આધાર સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ એ એકમ સદિશો હોવા જરૂરી નથી. આવા સદિશોનો ઉપયોગ ક્રિસ્ટલોગ્રાફી (crystallography) જ્યાં ઘન પદાર્થમાં પ્રસરણ પામતા તરંગોનો અભ્યાસ કરવાનો હોય તેવા કિસ્સામાં જોવા મળતા હોય છે.

આમ, આ કિસ્સામાં કોઈપણ સદિશ $\vec{V}$ ને Prof J.M. Kadiya

$$\vec{V} = V_a\vec{a} + V_b\vec{b} + V_c\vec{c} \quad \text{---} (1)$$

વડે દર્શાવી શકાય.

સમી. (1) માં સદિશ $\vec{V}$ ના ઘટકો V_a, V_b અને V_c ને અનુક્રમે આધાર સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ ની દિશામાં લેવામાં આવ્યા છે, અહીં યામિક અક્ષો પરસ્પર બિન લંબ (Non orthogonal) હોવાથી

$$\vec{V}\cdot\vec{V} = V^2 \neq V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 \text{ છે.}$$

હવે આપણે એવા ત્રણ સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ને વ્યાખ્યાયીત કરીશું જે આધાર સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ ના અનુક્રમે વ્યસ્ત સદિશો છે અને તેમને નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે.

$$\vec{A} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]} \text{ અને } \vec{C} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]} \quad \text{---} (2)$$

સ્વરૂપ – (2) પરથી દેખાય છે કે સદિશ $\vec{A}$ એ $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ થી બનતા સમતલને લંબ છે, આજ રીતે સદિશ $\vec{B}$ એ $\vec{c}$ અને $\vec{a}$ થી બનતા સમતલને લંબ છે અને સદિશ $\vec{C}$ એ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ થી બનતા સમતલને લંબ છે. તે ઉપરાંત સદિશ $\vec{A}$નું માન (મૂલ્ય) $A \propto \frac{1}{a}$ (a ના વ્યસ્તપ્રમાણમાં) છે, તેજ રીતે સદિશ $\vec{B}$નું માન $B \propto \frac{1}{b}$ અને સદિશ $\vec{C}$નું માન $C \propto \frac{1}{c}$ હોય છે.

આ વ્યાખ્યા પરથી,

$$\vec{a}\cdot\vec{A} = \vec{a}\cdot\frac{(\vec{b}\times\vec{c})}{[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]} = 1 \text{ થાય}$$

Prof J.M. Kadiya

તેજ રીતે

$$\vec{b}\cdot\vec{B} = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}{[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]} = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} = 1 \text{ થાય}$$

અને

$$\vec{c}\cdot\vec{C} = \frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]} = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} = 1$$

આમ $\vec{a}\cdot\vec{A} = \vec{b}\cdot\vec{B} = \vec{c}\cdot\vec{C} = 1$ થાય અને

$$\vec{A}\cdot\vec{b} = \vec{A}\cdot\vec{c} = \vec{B}\cdot\vec{a} = \vec{B}\cdot\vec{c} = \vec{C}\cdot\vec{a} = \vec{C}\cdot\vec{b} = 0$$

(પરસ્પર લંબ સદિશો હોવાથી અદિશ ગુણાકાર શૂન્ય મળે છે.)

હવે જો કોઈ સદિશ $\vec{P}$ ને વ્યસ્ત સદિશોના સંદર્ભમાં દર્શાવવામાં આવે તો તેનું સ્વરૂપ

$$\vec{P} = P_A\vec{A} + P_B\vec{B} + P_C\vec{C} \text{ થાય} \quad \text{---} (3)$$

સમી. (3) માં P_A, P_B અને P_C અનુક્રમે સદિશ $\vec{P}$ ના સદિશ $\vec{A}, \vec{B}$ અને $\vec{C}$ ની દિશામાંના ઘટકો છે.
સદિશ $\vec{V}$ અને $\vec{P}$ નો અદિશ (ડોટ) ગુણાકાર કરતાં,

$$\vec{V}\cdot\vec{P} = (V_a\vec{a} + V_b\vec{b} + V_c\vec{c})\cdot(P_A\vec{A} + P_B\vec{B} + P_C\vec{C})$$

$$\vec{V}\cdot\vec{P} = V_aP_A\,\vec{a}\cdot\vec{A} + V_bP_B\,\vec{b}\cdot\vec{B} + V_cP_C\,\vec{c}\cdot\vec{C}$$

પણ વ્યસ્ત સદિશો માટે $\vec{a}\cdot\vec{A} = \vec{b}\cdot\vec{B} = \vec{c}\cdot\vec{C} = 1$ થાય

$\therefore \vec{V}\cdot\vec{P} = V_aP_A + V_bP_B + V_cP_C$ થાય — (4)

જો $\vec{V} = \vec{P}$ ($\vec{V}$ અને $\vec{P}$ સમાન સદિશો હોય) તો સમી. (4)
હવે,

Devadula
Prof J.M. Kadiya

$\vec{V}\cdot\vec{P} = \vec{V}\cdot\vec{V} = V^2 = V_aV_A + V_bV_B + V_cV_C$ થાય — (5)

અહીં $\vec{V}$ અને $\vec{P}$ ના ઘટકોને જુદી જુદી યામાક્ષ પદ્ધતિમાં લેવામાં આવેલ છે.

વ્યસ્ત સદિશોની વ્યાખ્યા પરથી એ સ્પષ્ટ થાય છે કે પરસ્પર લંબ એકમ સદિશોનો ગણ તે પોતાનો જ વ્યસ્ત સદિશનો ગણ હોય છે.

* ત્રિ સદિશ (ત્રણ સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર) નું કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં સ્વરૂપ.

ત્રણ સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ નો સદિશ ગુણાકાર એટલે $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ થાય.

જો $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ અને

$\vec{C}=C_x\hat{i}+C_y\hat{j}+C_z\hat{k}$ હોય તો

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{B}\times\vec{C}=(B_yC_z-B_zC_y)\hat{i}+(B_zC_x-B_xC_z)\hat{j}+(B_xC_y-B_yC_x)\hat{k}$$

થાય

6

જો $(\vec{B}\times\vec{C})$ ને $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ વડે દર્શાવીએ તો

$V_x = (B_yC_z - B_zC_y)$

$V_y = (B_zC_x - B_xC_z)$

$V_z = (B_xC_y - B_yC_x)$ થાય

$\therefore \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{V}$ થાય

$$\vec{A}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{V} = (A_yV_z - A_zV_y)\hat{i} + (A_zV_x - A_xV_z)\hat{j} + (A_xV_y - A_yV_x)\hat{k} \quad \text{--- (1)}$$

સમી. (1) ના માત્ર x - ઘટકને જ ધ્યાનમાં લેતાં

$$(\vec{A}\times\vec{V})_x = (A_yV_z - A_zV_y)\hat{i}$$

ઉપરના સમીકરણમાં V_z અને V_y ના મૂલ્યો મુકતાં,

$$(\vec{A}\times\vec{V})_x = \left[A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z)\right]\hat{i}$$

$$(\vec{A}\times\vec{V})_x = A_yB_xC_y\hat{i} + A_zB_xC_z\hat{i} - A_yB_yC_x\hat{i} - A_zB_zC_x\hat{i}$$

ઉપરના સમીકરણમાં $A_xB_xC_x\hat{i}$ ઉમેરીને બાદ કરતાં,

$$(\vec{A}\times\vec{V})_x = A_xB_xC_x\hat{i} + A_yB_xC_y\hat{i} + A_zB_xC_z\hat{i} - A_xB_xC_x\hat{i} - A_yB_yC_x\hat{i} - A_zB_zC_x\hat{i}$$

$$= (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)B_x\hat{i} - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)C_x\hat{i}$$

$$(\vec{A}\times\vec{V})_x = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \text{ થાય.}$$

$$\therefore \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \text{ થાય} \quad \text{--- (2)}$$

જો $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ નો Y ઘટક મેળવી $A_yB_yC_y\hat{j}$ ઉમેરીને બાદ કરતાં, તેમજ તેનો Z ઘટક મેળવી $A_zB_zC_z\hat{k}$

કૌંસનો ઓર્ડરને બદલ કરતાં, ભિન્ન ગુણાકારનું પરિણામ મળશે.

સદિશ આપેલ ત્રિ સદિશ ગુણાકાર $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ જૂથના નિયમ (Associative law)નું પાલન કરતો નથી એટલે કે

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A}$$

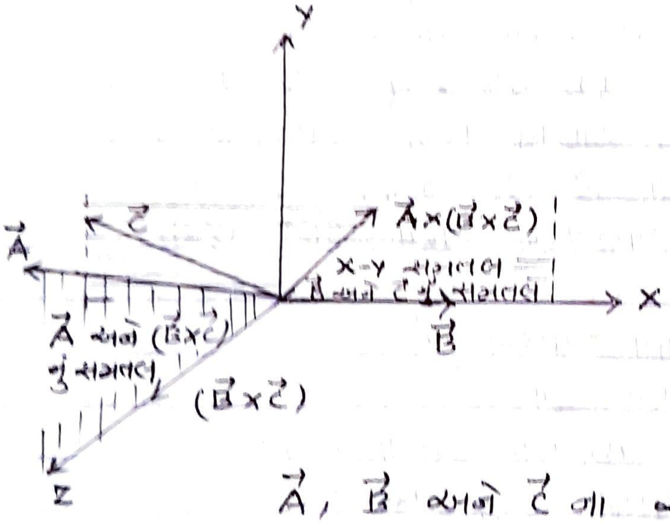
હકીકતમાં $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -(\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A}$ થાય છે.

$$= -\left[(\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{C} - \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})\right]$$

$$= \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A}) - (\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{C} \text{ થાય.}$$

$$= \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \text{ થાય.}$$

→ ત્રિ સદિશ ગુણાકારમાં કૌંસના સ્થાનોનું મહત્વ



Prof. J M Kodiya

$\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના સદિશ ગુણાકાર (ત્રિ-સદિશ ગુણાકાર)ને $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉપરના સમીકરણમાં $(\vec{B}\times\vec{C})$ એ $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ થી બનતા સમતલને લંબ છે. આથી $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ એ $\vec{A}$ અને $(\vec{B}\times\vec{C})$ થી બનતા સમતલને લંબ થશે એટલે કે તે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ થી બનતા સમતલમાં હશે અને તે $\vec{A}$ને લંબ હશે.

આજ રીતે $\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{C})$ એ $\vec{A}$ અને $\vec{C}$ થી બનતા સમતલમાં $\vec{B}$ ને લંબ હશે. અને $\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ થી બનતા સમતલમાં $\vec{C}$ ને લંબ હશે.

8

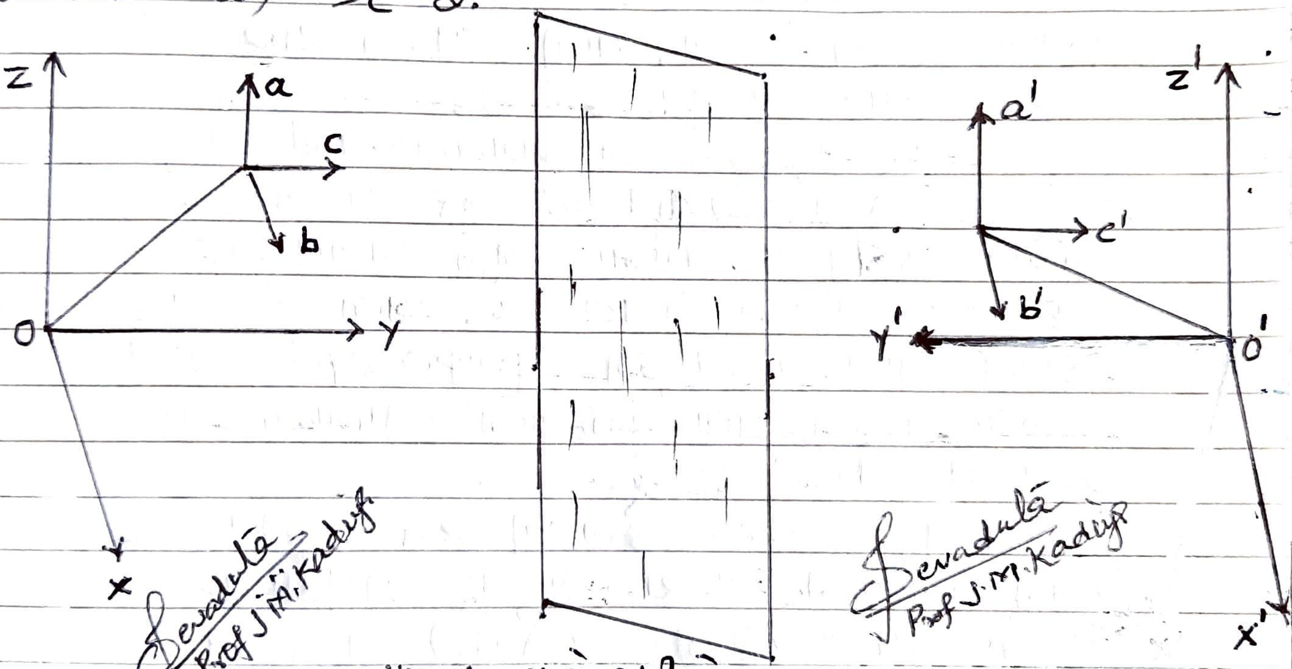
આમ ત્રિ સદિશ ગુણાકારમાં સદિશોના સ્થાન બદલવાથી તેના મૂલ્યમાં ફેરફાર થાય છે.

આથી ત્રિ સદિશ ગુણાકારમાં કૌંસનું સ્થાન ખૂબજ અગત્યનું છે, સ્થાન ફેર કરવાથી તેની દિશા ઊલટાઈ જાય છે.

* Pseudovectors (આભાસી સદિશો) અને Pseudoscalars (આભાસી અદિશો)ની સમજૂતી આપો.

સદિશ રાશિઓ જેવી કે સ્થાનાંતર, બળ inversion (વ્યુત્ક્રમ) પ્રક્રીયામાં પોતાનું ચિહ્ન (sign) બદલે છે. આવી ભૌતિક રાશિઓને ધ્રુવીય સદિશો (polar vectors) કહે છે.

સદિશ રાશિઓ જેવી કે કોણીય વેગ ($\vec{\omega}$) અને ટોર્ક ($\vec{\tau}$) inversion (વ્યુત્ક્રમ) પ્રક્રિયામાં પોતાનું ચિહ્ન (sign) બદલતાં નથી તેઓ અચળ રહે છે. આવી સદિશ રાશિઓને અક્ષીય સદિશો (axial vectors) અથવા આભાસી સદિશો (Pseudovectors) કહે છે.



સમતલ સાદો અરીસો
(Plane Mirror)

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ જમણી બાજુવાળી યામાક્ષ પદ્ધતિમાં (right handed coordinate system) X-Z સમતલમાં આવેલ Y-અક્ષ પરાવર્તિત પામી ડાબી બાજુવાળી યામાક્ષ પદ્ધતિ પ્રાપ્ત થાય છે. આવા અયોગ્ય ભ્રમણ (improper rotation)ને અરીસા પરાવર્તન (mirror reflection) કહે છે. આવી પ્રક્રિયામાં Y અક્ષને સમાંતર સદિશ પોતાનું ચિહ્ન બદલે છે, જ્યારે X અને Z અક્ષને સમાંતર સદિશો પોતાનું ચિહ્ન બદલતાં નથી.

ધારો કે જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ (Right handed screw rule) મુજબ $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ લેવામાં આવે તો, અને તેનું અરીસા પરાવર્તન (mirror reflection) પ્રક્રીયા કરવામાં આવે તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના ચિહ્ન અફર રહે છે, અને આજ રીતે $\vec{c}' = \vec{a}'\times\vec{b}'$ નું અરીસા પરાવર્તનમાં અફર રહેશે. આજ કારણથી અરીસા પરાવર્તનમાં કોણીય વેગમાન $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ તેમજ ટોર્ક $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$ અફર રહે છે તે પોતાનું ચિહ્ન બદલતાં નથી. આમ બે ધ્રુવીય સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર (Cross product) એક આભાસી સદિશ (Pseudovector) આપે છે.

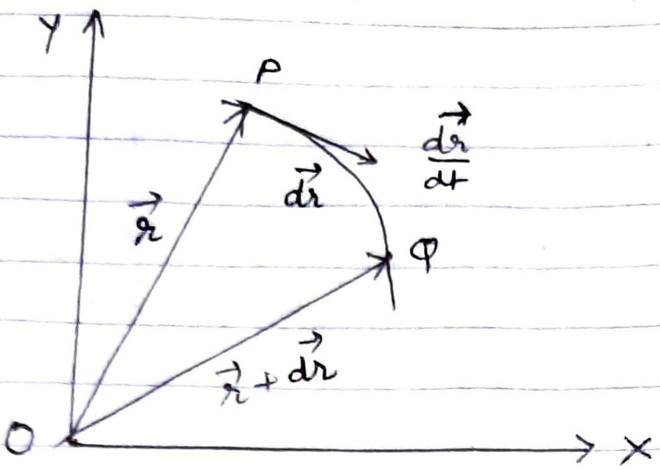
Devadutta
Prof. J.M. Kadiya

જો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ ધ્રુવીય (અથવા અક્ષીય) સદિશો હોય તો, તેમનો અદિશ ગુણાકાર $S = \vec{A}\cdot\vec{B}$ અરીસા પરાવર્તન પ્રક્રિયામાં અફર રહેશે, આવી અદિશ રાશિ S ને સાચો અદિશ (true scalar) કહે છે.

જો $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ એ સમલંબઘનની બાજુઓ હોય તો તેનું કદ $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ થાય જે એક અદિશ છે, અને તે આપેલ સદિશ ગુણધર્મના ક્રમને જાળવે નહીં તો તે કદ ઋણ ચિહ્ન ધરાવે છે. આમ જે અદિશ રાશિઓમાં ઘટકો યોગ્ય ચક્રિય ક્રમ (proper cyclic order) પર આધારિત હોય તેવા અદિશોને આભાસી અદિશો (Pseudoscalars) કહે છે.

તે ઉપરાંત, $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ માંથી એક ધ્રુવીય સદિશ અને બીજો આભાસી સદિશ હોય તો અરીસા પરાવર્તનમાં તેમનો અદિશ ગુણાકાર $(\vec{A}\cdot\vec{B})$ ચિહ્ન બદલે છે. આવા અદિશને આભાસી અદિશ (Pseudoscalar) કહે છે.

સદિશોનું વિકલન :



આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે t સમયે કણનો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ છે. δt જેટલા સૂક્ષ્મ સમય બાદ આ કણ સ્થાન બદલે છે અને $\delta\vec{r}$ જેટલું સ્થાનાંતર કરી બિંદુ Q પર આવે છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે અહીં કણ વક્રાકાર ગતિ કરે છે. આથી, તેની ગતિ દરમિયાન સમય સાથે સ્થાનાંતરનું મૂલ્ય અને દિશા બંને સતત બદલાયા કરે છે.

t સમય કણનું સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ છે.
t+δt સમય કણનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}+\delta\vec{r}$ છે.
આથી δt જેટલા સૂક્ષ્મ સમયમાં કણના સ્થાનમાં થતા ~~ફેરફારનું સરેરાશ~~ ફેરફારના દરનું સરેરાશ

$$\left\langle \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \right\rangle = \frac{(\vec{r}+\delta\vec{r})-\vec{r}}{(t+\delta t)-t} \text{ થાય } \quad \text{—(1)}$$

સમી. (1) સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ના ફેરફારના સમયદરનું સૂત્ર છે.

જો $\delta t \to 0$ થાય તો

$$\lim_{\delta t \to 0} \left\langle \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \right\rangle = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ થાય } \quad \text{—(2)}$$

સમી. (2) સ્થાન સદિશ $\vec{r}$નું સમય વિકલન છે જે વેગ $\vec{v}$ની વ્યાખ્યા આપે છે.

i.e. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

કાર્તેઝીય યામ પદ્ધતિમાં સ્થાનસદિશ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ હોય તો.

સ્થાનસદિશના ફેરફારનો સમય દર (વેગ)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

અને

વેગના ફેરફારનો સમયદર (પ્રવેગ)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

જો પદાર્થનું દળ m હોય તો ન્યુટનના ગતિના બીજા નિયમ મુજબ

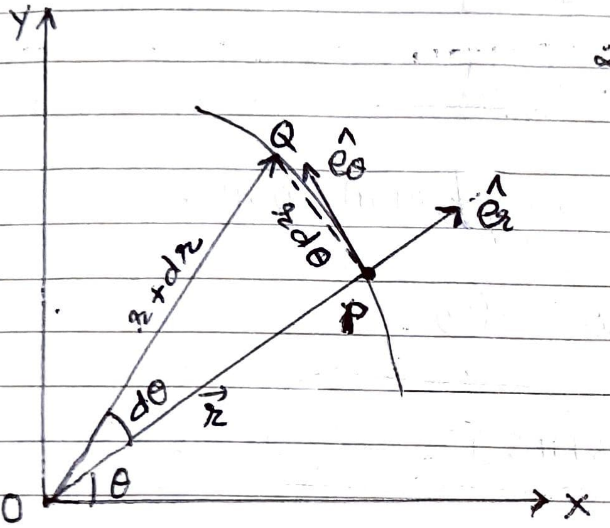
$$\vec{F} = m\vec{a} = ma_x\hat{i} + ma_y\hat{j} + ma_z\hat{k} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$ થાય.

$$F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

Kadiya
M.M. Kadiya

* કેન્દ્રીય બળક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા કણના કિસ્સામાં ધ્રુવીય એકમ સદિશો, સ્થાનસદિશ, વેગના ત્રિજ્યાવર્તી તેમજ સ્પર્શીય ઘટકો, અને પ્રવેગના ત્રિજ્યાવર્તી અને સ્પર્શીય ઘટકોના સ્વરૂપ મેળવો.

કેન્દ્રીય બળક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા કણ પર લાગતું બળ ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં યામાક્ષ પદ્ધતિના ઉદ્ગમ તરફ લાગતું હોય છે. સમતલ ધ્રુવીય યામ તંત્રમાં ગતિ કરતા કણનું સ્થાન નક્કી કરવા ધ્રુવીય યામો (r, θ) નો ઉપયોગ થાય છે.



આકૃતિ પરથી $x = r\cos\theta$ અને $y = r\sin\theta$

∴ સ્થાનસદિશ

$$\therefore \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\therefore \vec{r} = r\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j} \quad \text{—(1)}$$

Prof. J.M. Kadiya

સમતલ ધ્રુવીય યામ પદ્ધતિના એકમ સદિશો.

(1) $\hat{e}_r = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$ (∵ θ = અચળ છે.)

∴ સમી. (1) પરથી

$$\hat{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \quad \text{---(2)}$$

(2) $\hat{e}_\theta = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$ (સમી. 1 પરથી) ---(3)

યાદ રાખો. ધ્રુવીય યામ પદ્ધતિના એકમ સદિશો $\hat{e}_r$ અને $\hat{e}_\theta$ અચળ સદિશો નથી પણ જેમ કણ વક્ર પર ગતિ કરે તેમ આ એકમ સદિશો $\hat{e}_r$ અને $\hat{e}_\theta$ ની દિશાઓ બદલાતી જાય છે. તે ઉપરાંત $\hat{e}_r$ અને $\hat{e}_\theta$ બંન્ને એકમ સદિશો ધ્રુવીય યામ θ ના વિધેયો છે. તે ઉપરાંત $\hat{e}_r$ અને $\hat{e}_\theta$ બંન્ને સમય સાથે બદલાય છે.

$\hat{e}_r \neq 0$ તેમજ $\hat{e}_\theta \neq 0$ છે. પણ $\hat{e}_r$ અને $\hat{e}_\theta$ નો અદિશ ગુણાકાર

$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = 0$ થાય છે જે દર્શાવે છે કે $\hat{e}_r$ અને $\hat{e}_\theta$ બંન્ને પરસ્પર લંબ છે.
એકમ સદિશ $\hat{e}_r$ ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં અને એકમ સદિશ $\hat{e}_\theta$ સ્પર્શીય દિશામાં હોય છે.
આમ સમતલીય ધ્રુવીય યામ Orthogonal યામિક તંત્ર બનાવે છે.

સમી. ① મુજબ સ્થાનસદિશ

$$\vec{r} = r(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$$

$$\therefore \vec{r} = r\hat{e}_r \text{ થાય} \quad \text{---- (4)}$$

હવે $\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$ [સમી. ② નો θ સાપેક્ષે વિકલન]

$$\therefore \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \hat{e}_\theta \quad \text{— (5)}$$

અને $\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} = -[\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}]$

$$\therefore \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\hat{e}_r \quad \text{— (6)}$$

Devadatta
Prof. J.M. Kadiya

હવે સમી. ④ નું સમય t સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

વેગ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt}$

$$\therefore \vec{V} = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \vec{V} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}$$

સમી. ⑤ નો ઉપયોગ કરતાં

વેગ $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ — (7)

સમી. ⑦ માં $\dot{r} = V_r$ એ વેગનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક છે
અને $r\dot{\theta} = V_\theta$ એ વેગનો સ્પર્શીય ઘટક છે.

સમી. (7) નું સમય t સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

પ્રવેગ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta\right)$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r})\,\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{d}{dt}(r)\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\frac{d}{dt}(\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\therefore \vec{a} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \vec{a} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}$$

$$\therefore \vec{a} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}^2\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}$$

પણ $\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \hat{e}_\theta$ થાય અને $\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\hat{e}_r$ થાય

Devadula Prof. J.M. Kadiya

આથી ઉપરનું સમી.

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r$$

$$\therefore \vec{a} = \ddot{r}\,\hat{e}_r - r\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\therefore \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \quad \text{—(8)}$$

સમી. (8) માં $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = a_r$ એ પ્રવેગનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક છે

સમી. (8) માં પ્રવેગના ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક a_r માં $r\dot{\theta}^2 = \frac{r^2\dot{\theta}^2}{r} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = \frac{v^2}{r}$

કેન્દ્રગામી પ્રવેગ (centripetal accelaration) દર્શાવે છે

જેની અસર નીચે કણ સમાંગ વર્તુળમય ગતિ (Uniform circular motion) કરે છે, આવી ગતિમાં

(i) r = અચળ $\therefore$ $\dot{r} = 0$ અને $\ddot{r} = 0$ મળે

$\therefore$ ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ $a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ માં $\ddot{r} = 0$ લેતાં,

ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ $a_r = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{r^2\dot{\theta}^2}{r} = -\frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = -\frac{v^2}{r}$

જે નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરતા કણનો કેન્દ્રગામી પ્રવેગ (Centripetal accelaration) છે.

Prof J M Kadiya

(ii) નિયમિત વર્તુળમય ગતિમાં $\dot{\theta}$ = અચળ છે, $\therefore$ $\ddot{\theta} = 0$
આથી આવી ગતિમાં કણના પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટકમાં $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{r} = 0$
થવાથી $a_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$ થાય. આમ નિયમિત (સમાંગ) વર્તુળમય ગતિમાં પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક શૂન્ય હોય છે.

* ક્ષેત્ર, અદિશ ક્ષેત્ર અને સદિશ ક્ષેત્ર સમજાવો.

જ્યારે કોઈ ભૌતિકરાશી કોઈ અવકાશમાં આવેલા જુદા જુદાં બિંદુઓએ બદલાતી હોય એટલે કે ભૌતિકરાશી અવકાશના બિંદુઓનું વિધેય હોય તો આવા અવકાશને ક્ષેત્ર કહે છે. ક્ષેત્ર બે પ્રકારના હોય છે.

(1) અદિશ ક્ષેત્ર :-

અવકાશના જે વિસ્તારમાં અદિશ રાશીઓ વિતરીત થયેલી હોય તે વિસ્તારને અદિશ ક્ષેત્ર કહે છે. અદિશ ક્ષેત્રમાં એક બિંદુથી તેના નજીકતમ બિંદુ તરફ જતાં અદિશ રાશીના મૂલ્યમાં કોઈ ખાસ ફેરફાર થતો નથી. દા.ત તાપમાનનું વિતરણ, ચુંબકીય તેમજ સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાનોનું વિતરણ વગેરે વાળા વિસ્તારને અદિશ ક્ષેત્ર કહે છે અદિશ ક્ષેત્રમાં અદિશ રાશીનું સમાન મૂલ્ય ધરાવતા પૃષ્ઠો દોરી શકાય છે. આવા પૃષ્ઠોને લેવલ પૃષ્ઠો કહે છે. દા.ત. સમતાપીય પૃષ્ઠ, સમસ્થિતિમાનપૃષ્ઠ વગેરે લેવલ પૃષ્ઠો છે. દરેક લેવલ પૃષ્ઠ પર આપેલ અદિશ રાશીનું મૂલ્ય એકસમાન હોય છે. અદિશ ક્ષેત્રમાં બે લેવલ પૃષ્ઠો

એકબીજાને છેદી શકતા નથી કારણ કે લેવલ પૃષ્ઠોના છેદન બિંદુ પાસે અદિશ રાશીના બે મૂલ્યો મળે જે શક્ય નથી.
અદિશ ક્ષેત્રના અદિશ વિધેય $\phi(x,y,z)$ એકમૂલ્ય (single valued) તેમજ દરેક બિંદુએ સમાન રીતે વિતરીત થયેલ હોય છે.

સદિશ ક્ષેત્ર :-
જે વિસ્તારમાં સદિશ રાશી વિતરીત થયેલી હોય તે વિસ્તારને સદિશ ક્ષેત્ર કહે છે. સદિશ ક્ષેત્રના દરેક બિંદુએ સતત સદિશ વિધેય વ્યાખ્યાયીત થયેલ હોય છે. જો સદિશ ક્ષેત્રમાં વ્યાખ્યાયિત સદિશ વિધેય $\vec{F}(x,y,z)$ હોય તો, સદિશ ક્ષેત્રના દરેક બિંદુએ આ સદિશ વિધેયનું મૂલ્ય અને દિશા સતત બદલાતી રહે છે.
દા.ત. તરલમાં વેગનું વિતરણ, વિદ્યુત કે ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતાનું વિતરણ, સદિશ ક્ષેત્રમાં કોઈ બિંદુથી શરૂ કરી સદિશની દિશામાં આ બિંદુથી નજીકતમ બિંદુ તરફ જતાં એક વક્રરેખા મળે છે. આ વક્ર રેખાને સદિશ રેખા (vector line) અથવા ~~...~~ વહન રેખા અથવા ફ્લક્સ રેખા કહે છે. આ સદિશ રેખાના કોઈ બિંદુ પાસે દોરેલ સ્પર્શક, તે સદિશ રાશીની દિશા દર્શાવે છે.
વક્ર સદિશ રેખાના કોઈ બિંદુ પાસે બિંદુને લંબ સૂક્ષ્મ પૃષ્ઠ દોરવામાં આવે તો, આ પૃષ્ઠના એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ બિંદુઓની સંખ્યા આપેલ સદિશ રાશીનું મૂલ્ય દર્શાવે છે. આવા દરેક બિંદુમાંથી ફ્લક્સ રેખા દોરી શકાય. આથી સદિશ ક્ષેત્ર ઘણીબધી ફ્લક્સ રેખાઓથી રચાય છે.

* અદિશ વિધેય $\phi(x,y,z)$નું આંશિક વિકલન :-

અદિશ વિધેય $\phi(x,y,z)$નું આંશિક વિકલન

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)dz \text{ થાય} \quad (1)$$

સમી. (1) માં y અને z અચળ હોય ત્યારે $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ એ xની સાપેક્ષે વિધેય ϕના ફેરફારનો દર છે.
આજ રીતે x અને z અચળ હોય ત્યારે $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ એ yની

સાપેક્ષે વિધેય ϕના ફેરફારનો દર છે અને x અને y અચળ હોય ત્યારે $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ એ zની સાપેક્ષે વિધેય ϕના ફેરફારનો દર છે.

સમી. ① ને નીચે મુજબ પણ દર્શાવી શકાય

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right)$$

$$\therefore d\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\phi\cdot\left(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{dr} \quad -② $$

સમી. ② પરથી જોઈ શકાય છે કે અદિશ વિધેય $\phi(x,y,z)$નું અંશતઃ વિકલન $\vec{\nabla}\phi$ અને $\vec{dr}$ ના અદિશ ગુણાકાર (ડોટ ગુણાકાર) બરાબર હોય છે.

$\vec{\nabla}\phi$ ને અદિશ વિધેય $\phi(x,y,z)$નો ગ્રેડીયન્ટ કહે છે.
i.e Grad $\phi = \vec{\nabla}\phi$ થાય

આથી

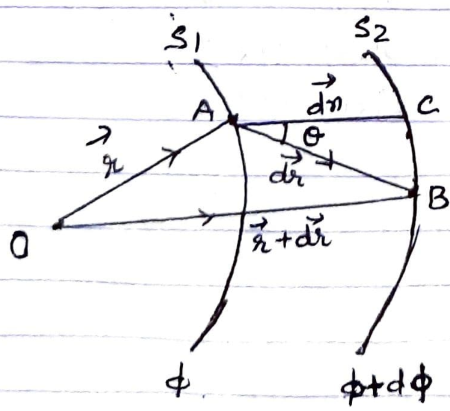
$$\vec{\nabla}\phi = \text{grad}\,\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\phi \text{ થાય} \quad -③$$

યાદ રાખો $\phi(x,y,z)$ અદિશ વિધેય છે જ્યારે grad $\phi = \vec{\nabla}\phi$ સદિશ છે.

સમી. ③ માં $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$ સદિશ વિકલ કારક (vector differential operator) છે.

Prof. J. M. Kadiya

* અદિશ વિધેયના ગ્રેડીયન્ટનું ભૌતિક અર્થઘટન



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે ϕ અને $\phi + d\phi$ અદિશ વિધેયો ધરાવતા બે લેવલ પૃષ્ઠો S_1 અને S_2 એકબીજાની નજીક આવેલા છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ લેવલ પૃષ્ઠ S_1 પરના બિંદુ Aનો ઉદ્ગમની સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે.

(12)

આકૃતિ મુજબ $\vec{OA} = \vec{r}$ સ્થાનસદિશ છે,
$\vec{OB} = \vec{r} + \vec{dr}$
$\vec{AB} = \vec{dr}$ છે.

આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય છે કે બે લેવલ પૃષ્ઠો S_1 અને S_2 વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર બિંદુ A એ દોરેલ લંબની દિશા $\vec{AC}$ માં મળે છે.

$\therefore$ સદિશ $\vec{AC} = \vec{dn} = \hat{n} \cdot \vec{dr} = dr\cos\theta$ થાય —(1)

જ્યાં $\hat{n}$ એ સદિશ $\vec{AC}$ ની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે.

લેવલ પૃષ્ઠ S_1 પરના બિંદુ A પાસે અદિશ વિધેય ϕ ના વધારાના દરનું મૂલ્ય $\vec{AB}$ દિશામાં $\frac{\delta\phi}{\delta r}$ જેટલું મળે.

અદિશ વિધેય ϕ ના આ વધારાનો દર મહત્તમ થાય તે માટે δr લઘુતમ થવું જોઈએ. આમ ϕ ના વધારાનો દર $\vec{AC}$ દિશામાં મહત્તમ થશે. (એટલે કે $\vec{dn}$ ની દિશામાં)

અહીં અદિશ વિધેય ϕ ના વધારાનો દરનું મહત્તમ મૂલ્ય $\hat{n}$ ની દિશામાં $\frac{\delta\phi}{\delta n}$ થાય

$$\therefore \quad d\phi = \frac{\delta\phi}{\delta n}\vec{dn} = \frac{\delta\phi}{\delta n}\hat{n}\cdot\vec{dr} \quad —(2)$$

પણ

$$d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{dr} \text{ થાય છે.} \quad —(3)$$

સમી. (2) અને સમી. (3) પરથી,

$$\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{dr} = \frac{\delta\phi}{\delta n}\hat{n}\cdot\vec{dr}$$

$$\therefore \quad \vec{\nabla}\phi = \frac{\delta\phi}{\delta n}\hat{n} = \text{Grad } \phi \text{ થાય} \quad —(4)$$

સમી. (4) દર્શાવે છે કે અદિશ વિધેય ϕ નો ગ્રેડીયન્ટ એક સદિશ હોય છે જેનું કોઈ બિંદુએ મૂલ્ય તે બિંદુએ અદિશ વિધેયના વધારાના દરના મહત્તમ મૂલ્ય બરાબર હોય છે, અને તેની દિશા તે બિંદુએ દોરેલ લંબની દિશામાં હોય છે.

(13) (27)

યાદ રાખો :-

(1) $\vec{\nabla}$ એ સદિશ વિકલન કારક (vector differential operator) છે તેનું સ્વરૂપ કાર્તેઝીય યામ પદ્ધતિમાં,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$ છે.

(2) જો $\phi(x, y, z)$ અદિશ વિધેય હોય તો

$$\text{Grad}\ \phi = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$$ થાય.

સદિશ થાય

(3) જો $\vec{A}(x, y, z)$ સદિશ વિધેય હોય તો $\vec{\nabla}$ અને $\vec{A}$ નો અદિશ ગુણાકાર (ડૉટ ગુણાકાર) ને સદિશ વિધેય $\vec{A}$ નો ~~ડા~~ ડાઈવર્જન્સ (Divergence) કહે છે.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \text{div}\ \vec{A}$$ અદિશ છે

(4) જો $\vec{A}(x, y, z)$ સદિશ વિધેય હોય તો $\vec{\nabla}$ અને $\vec{A}$ ના સદિશ ગુણાકાર (ક્રોસ ગુણાકાર) ને સદિશ વિધેય $\vec{A}$ નો કર્લ (curl) કહે છે.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \text{curl}\ \vec{A}$$ સદિશ છે.

Prof. J.M. Kadiya

* સદિશ વિધેયના ડાઈવર્જન્સનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપ :-

જો સદિશ વિધેય $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ હોય તો

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \text{div}\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}\right)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \text{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$ થાય

યાદ રાખો $\vec{\nabla}$ અને $\vec{F}$ બંને સદિશ છે પણ $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ અદિશ છે.

* સદિશ વિધેયના કર્લનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ.

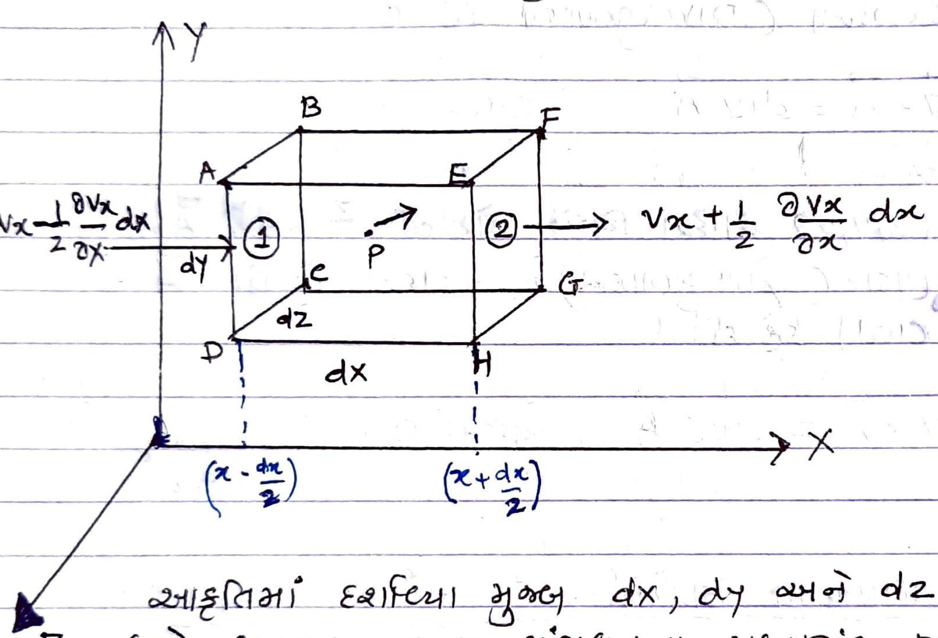
જો સદિશ વિધેય $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ હોય તો

$$\text{Curl}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$ પરથી

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} \quad \text{—(1)}$$

યાદ રાખો $(\vec{\nabla}\times\vec{F})$ સદિશ છે.

* સદિશ ક્ષેત્રના ડાઈવર્જન્સનું ભૌતિક મહત્વ :-



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ dx, dy અને dz ધારો ધરાવતા નાના લંબઘનના મધ્યબિંદુ P પાસે તરલના વેગથી રચાયેલ સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{V}(x, y, z)$ છે. લંબઘનની ABCD બાજુના મધ્ય બિંદુ $(x - \frac{dx}{2})$ પાસે સદિશ વિધેય $\vec{V}$ નો x-ઘટક

$$V_x - \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial x}dx \quad \text{છે.} \quad \text{—(1)}$$

નાના લંબઘનની બાજુઓ અત્યંત નાની હોવાથી લંબઘનની બાજુના સમગ્ર વિસ્તારમાં ઉપર મુજબનું મૂલ્ય એકસરખું જ રહેશે.

આજ રીતે નાના લંબઘનની બાજુ EFGHના મધ્યબિંદુ $(x + \frac{dx}{2})$ પાસે સદિશ વિધેય $\vec{V}$ નો x-ઘટક

$$V_x + \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial x}dx \quad \text{છે.} \quad \text{—(2)}$$

ફલક્સની વ્યાખ્યા મુજબ

ફલક્સ = (બાજુ પર સદિશનો લંબ ઘટક) × (તે બાજુનું ક્ષેત્રફળ)

આથી આ વ્યાખ્યા મુજબ નાના લંબઘનની ABCD બાજુમાંથી દર સેકન્ડે દાખલ થતું ફલક્સ $= \left(V_x - \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial x}dx\right) dy\, dz$ — (3)

અને EFGH બાજુમાંથી દર સેકન્ડે બહાર આવતું

ફલક્સ $= \left(V_x + \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial x}dx\right) dy\, dz$ થાય — (4)

અહીં $dy\,dz$ = બાજુઓ ABCD અને EFGH ના ક્ષેત્રફળો દર્શાવે છે.

આથી X દિશામાંથી દર સેકન્ડે બહાર આવતું વધારાનું ફલક્સ

$$= \left(V_x + \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz - \left(V_x - \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x}dx\,dy\,dz \text{ થાય} \quad \text{— (5)}$$

આજ રીતે Y દિશામાંથી દર સેકન્ડે બહાર આવતું વધારાનું ફલક્સ $= \frac{\partial V_y}{\partial y}dx\,dy\,dz$ થાય અને,

Z દિશામાંથી દર સેકન્ડે બહાર આવતું વધારાનું ~~ફલક્સ~~ ફલક્સ $= \frac{\partial V_z}{\partial z}dx\,dy\,dz$ થાય — (6)

આમ $dx\,dy\,dz = dV$ કદના નાના લંબઘનમાંથી દર સેકન્ડે બહાર આવતું ફલક્સ $= \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$

$$\therefore \text{ ફલક્સ} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)dV$$

$$\therefore \text{ ફલક્સ} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\,dV \text{ થાય} \quad \text{— (7)}$$

Prof. J.M. Kadiya

સમી. (7) પરથી સદિશ વિધેય $\vec{V}$ ના ડાઈવર્જન્સનું ભૌતિક મહત્વ નીચે મુજબ આપી શકાય.

કોઈ સદિશ વિધેયનું ડાઈવર્જન્સ એટલે કે એકમ કદ દીઠ ફલક્સ થાય.

∴ Div $\vec{V} = \nabla\cdot\vec{V}$ ને સંકલન સ્વરૂપમાં રજૂ કરવા ધારો કે પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ $d\vec{\sigma} = \hat{n}\, d\sigma$ છે. આ ક્ષેત્રફળમાંથી બહાર નીકળતું ફ્લક્સ $\vec{V}\cdot\hat{n}\, d\sigma$ થાય, તો સમગ્ર પૃષ્ઠમાંથી બહાર નીકળતું ફ્લક્સ, સંકલન સ્વરૂપમાં

$$\int_S \vec{V}\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

આ ફ્લક્સ (સદીશ $\vec{V}$નું) સમગ્ર પૃષ્ઠ જેનો કદખંડ $d\tau$ છે તેમાંથી બહાર નીકળતું હોવાથી તે $\nabla\cdot\vec{V}\, d\tau$ જેટલું હોવું જોઈએ

$$\therefore \nabla\cdot\vec{V}\, d\tau = \int_\sigma \vec{V}\cdot\hat{n}\, d\sigma$$

$$\therefore \nabla\cdot\vec{V} = \frac{\int_\sigma \vec{V}\cdot\vec{n}\, d\sigma}{d\tau}$$

* સાતત્ય સમીકરણ (Continuity Equation) સમજાવો.

તરલના વહન માટે સમીકરણ $\nabla\cdot\vec{V} = \nabla\cdot(\rho V) = 0$ દર્શાવે છે કે કદખંડ $d\tau$ માં તરલનો જથ્થો અચળ જળવાઈ રહે છે. આ કિસ્સામાં ઘનતા (ρ) અચળ હોય છે અને તરલ દ્રવ્યનું સંરક્ષણ થાય છે.

પણ જ્યારે તરલ બહારની તરફ વહી જતું હોય ત્યારે સમય સાથે તરલની ઘનતા (ρ) આપેલા કદમાંથી ઘટતી જાય છે. આથી કુલ દળ ($m = \rho V$ જ્યાં ρ તરલની ઘનતા અને V તરલનું કદ છે.) ના સંરક્ષણના સિદ્ધાંત મુજબ

$$\nabla\cdot(\rho V)\, d\tau = -\frac{d\rho}{dt}\, d\tau \quad —(1)$$

સમી. (1) ની ડાબી બાજુનું પદ તરલ બહાર વહી જતું હોવાથી તેના દળમાં થતો ઘટાડો સૂચવે છે જ્યારે જમણી બાજુનું પદ ઋણ ચિહ્ન દર્શાવે છે જે સૂચવે છે કે તરલ બહાર વહી જતું હોવાથી કદખંડ $d\tau$ માંથી દર સેકંડે

તરલની ઘનતા ρ માં થતો ઘટાડો થાય છે.

∴ સમી. (1) પરથી

$$\nabla \cdot (\rho V) + \frac{d\rho}{dt} = 0 \text{ થાય } \quad \text{—(2)}$$

સમી. (2) ને સાતત્ય સમીકરણ (Continuity equation) કહે છે, જેને તરલના દળના સંરક્ષણના સિદ્ધાંત પરથી મેળવવામાં આવે છે.

હવે જો $\psi(x, y, z)$ એ ઉદ્ગમની ચોખ્ખી (net) ઘનતા હોય [અહીં ψ એ એકમ કદ દીઠ દર સેકંડે ઉત્પન્ન થતા તરલનું દળ છે.] અહીં આપણે એવી ધારણા કરીએ છીએ કે બહારથી તરલનો ચોક્કસ જથ્થો તરલ વહન તંત્રમાં ઉમેરવામાં આવે તો, કદ $d\tau$ માં

બહાર નીકળતા તરલનો દર − ઉમેરવામાં આવતા તરલનો દર
= તરલમાં થતા ઘટાડાનો દર થાય.

$$\therefore \quad \nabla \cdot \vec{V}\, d\tau - \psi\, d\tau = -\frac{d\rho}{dt}\, d\tau$$

Prof J.M. Vadadiya

$$\therefore \quad \nabla \cdot \vec{V} + \frac{d\rho}{dt} = \psi \text{ થાય } \quad \text{—(3)}$$

જો $\psi = 0$ લેવામાં આવે તો સમી. (2) જે સાતત્ય સમીકરણ છે તે પ્રાપ્ત થશે.

નોંધ :-

(1) જો $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} > 0$ એટલે કે ધન હોય તો તરલ વિસ્તૃત થઈ રહ્યું છે તેની ઘનતા ઘટી રહી છે. અથવા સદિશ ક્ષેત્રમાં આવેલ તે બિંદુ તરલના ઉદ્ગમ તરીકે વર્તે છે.

(2) જો $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} < 0$ એટલે કે ઋણ હોય તો તરલ સંકોચાઈ રહ્યું છે તેની ઘનતા વધી રહી છે. અથવા સદિશ ક્ષેત્રમાં આવેલ તે બિંદુ તરલના સંગ્રહસ્થાન તરીકે વર્તે છે.

(3) જો $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$ હોય તો તે ઘટકમાં દાખલ થતું અને બહાર આવતા ફ્લક્સમાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી. આથી તરલની ઘનતા પણ અચળ રહે છે, અને તરલ અદબનીય છે.

* $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (જ્યાં $\vec{B}$ = ચુંબકીય ક્ષેત્ર છે.) શું દર્શાવે છે?

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ દર્શાવે છે કે ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ક્ષેત્રરેખાઓનું કોઈ ઉદ્ગમ નથી, તેઓ બંધ વક્રો રચે છે. તે ઉપરાંત એકજ ચુંબકીય ધ્રુવનું કોઈજ અસ્તિત્વ નથી.
અહીં ચુંબકીય ક્ષેત્ર સદિશ $\vec{B}$ એ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ શરતનું પાલન કરે છે આથી આવા ચુંબકીય ક્ષેત્ર સદિશને સોલેનોઈડલ સદિશ કહે છે.

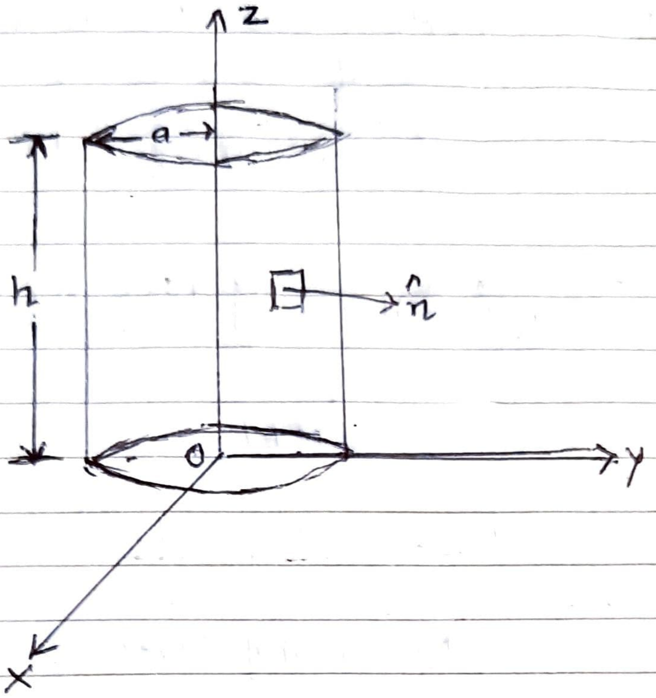
* $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \neq 0$ શું દર્શાવે છે. ($\vec{E}$ = વિદ્યુત ક્ષેત્ર સદિશ છે.)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \neq 0$ એટલે કે વિદ્યુતક્ષેત્રની ક્ષેત્રરેખાઓ કોઈ ઉદ્ગમ (વિદ્યુતભાર) માંથી ઉદ્ભવે છે.

33

દાખલો:- આપેલ નળાકારના સમગ્ર પૃષ્ઠ માટે $\int_{\sigma} \vec{V}\cdot d\vec{\sigma}$ મેળવો.

$x^2+y^2=a^2$ અને $z=h$ જો $\vec{V}= x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ હોય.



વક્ર પૃષ્ઠ પર એકમ લંબ સદિશને નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય

$$\hat{n}= \frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Prof. J. M. Kadiya

$$\therefore \vec{V}\cdot\hat{n} = (x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\left(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\therefore \vec{V}\cdot\hat{n} = \sqrt{x^2+y^2} = a$$

[આપેલ છે કે $x^2+y^2=a^2$ છે.

∴ નળાકારના વક્રપૃષ્ઠ પર પૃષ્ઠ સંકલન કરતાં,

$$\int_{\sigma} \vec{V}\cdot d\vec{\sigma} = \int_{\sigma} \vec{V}\cdot\hat{n}\, d\sigma = a\int_{\sigma} d\sigma = a\times 2\pi a h = 2\pi a^2 h$$

હવે નળાકારના તળીયાના પૃષ્ઠ જેના માટે $\hat{n}=-\hat{k}$ છે. અને $z=0$ છે, તેવા પૃષ્ઠ માટે પૃષ્ઠ સંકલન કરતાં

$$\int_{\sigma} \vec{V}\cdot d\vec{\sigma} = \int_{\sigma} \vec{V}\cdot\hat{n}\, d\sigma = -\int_{\sigma} (x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\hat{k}\, d\sigma$$

પણ અહીં $z = 0$ હોવાથી

$$\int_\sigma \vec{V} \cdot \vec{d\sigma} = -\int_\sigma (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot \hat{k} \, d\sigma = 0$$ નળાકારના પૃષ્ઠ માટે.

આજ રીતે નળાકારની ઉપર (top)ના પૃષ્ઠ માટે $\hat{n} = \hat{k}$ અને $z = h$ છે. ∴ નળાકરની ઉપરના પૃષ્ઠ માટે પૃષ્ઠ સંકલન

$$\int_\sigma \vec{V} \cdot \vec{d\sigma} = \int_\sigma \vec{V} \cdot \hat{n} \, d\sigma = \int_\sigma (x\hat{i} + y\hat{j} + h\hat{k}) \cdot \hat{k} \, d\sigma$$

$$\therefore \int_\sigma \vec{V} \cdot \vec{d\sigma} = h \int_\sigma \hat{k} \cdot \hat{k} \, d\sigma = h \int_\sigma d\sigma = h(\pi a^2) = \pi a^2 h$$

∴ સમગ્ર નળાકરના પૃષ્ઠ પર સંકલન

$$\int_\sigma \vec{V} \cdot d\sigma = \int \vec{V} \cdot \hat{n} \, d\sigma = 2\pi a^2 h + \pi a^2 h = 3\pi a^2 h$$

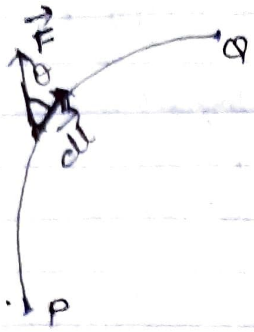
જે સમગ્ર નળાકર પર લીધેલ પૃષ્ઠસંકલનનું પરિણામ છે.

Sevadule
Prof J. M. Kadiya

(17) (35)

સદિશોનું સંકલન :-

રેખા સંકલન (Line Integral) :-



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{F}$ માં એક કણ P થી Q બિંદુ તરફ સ્થાનાંતર અનુભવી રહ્યો છે.
આ સદિશ સ્થાનાંતર $\vec{PQ}$ ને નાના સૂક્ષ્મ રેખા ખંડો $\vec{dl_1}, \vec{dl_2}, \dots, \vec{dl_n}$ માં વિભાજિત થયેલો કલ્પી શકાય
યાદ રાખો અહીં રેખા ખંડો સદિશો છે.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સૂક્ષ્મ રેખા ખંડ $\vec{dl}$ સાથે સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{F}$ એ θ કોણ રચે છે.
આમ જ્યારે કણ P થી Q બિંદુ તરફ જશે તેમ તેમ આપેલ સદિશ વિધેય $\vec{F}$ નું મૂલ્ય અને દિશા સતત બદલાયા કરશે.

સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{F}$ અને સૂક્ષ્મ રેખા ખંડ $\vec{dl}$ નો અદિશ ગુણાકાર (ડોટ ગુણાકાર) કરતાં $\vec{F}\cdot\vec{dl} = F\,dl\cos\theta$ —(1) થાય

આથી કણના P બિંદુ થી Q બિંદુ સુધીના સ્થાનાંતર માટે

$$\int_P^Q \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_P^Q F\,dl\cos\theta$$ થાય

$\int_P^Q \vec{F}\cdot\vec{dl}$ ને સદિશ વિધેય $\vec{F}$ નું રેખા સંકલન કહે છે.

Prof. J.M.Kadiya

રેખા સંકલનનું મહત્વ અથવા સંરક્ષી ક્ષેત્ર (Conservative field) ની શરત :-

કોઈ સદિશ વિધેય $\vec{F}$ ને અદિશ વિધેય ϕ ના ગ્રેડીયન્ટ તરીકે દર્શાવી શકાય i.e $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$

$$\int_P^Q \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_P^Q \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{dl} = \int_P^Q \frac{d\phi}{dl}\cdot dl = \int_P^Q d\phi$$

$$\therefore \quad = \phi(Q) - \phi(P) \quad —(1)$$

(18)

અહીં $\phi(Q) =$ Q બિંદુએ અદિશ ક્ષેત્ર

$\phi(P) =$ P બિંદુએ અદિશ ક્ષેત્ર છે.

સમી. ① પરથી જોઈ શકાય છે કે અદિશ વિધેય ϕનું મૂલ્ય અંતિમ બિંદુ (Q) અને પ્રારંભિક બિંદુ (P) પાસેના મૂલ્યો પર આધાર રાખે છે, પણ બિંદુ P અને Q ને જોડતા માર્ગ પર આધાર રાખતું નથી. આ પરથી કહી શકાય કે સદિશ વિધેય ($\vec{F}$) નું રેખા સંકલન સદિશ ક્ષેત્રમાં આવેલા બે બિંદુઓના સ્થાનો પર આધાર રાખે છે પણ આ બે બિંદુઓને જોડતા માર્ગ પર આધાર રાખતું નથી. આવા સદિશ ક્ષેત્રને સંરક્ષી ક્ષેત્ર કહે છે. સ્થિત વિદ્યુત ક્ષેત્ર, ચુંબકીય ક્ષેત્ર અને ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્ર આવા સંરક્ષી ક્ષેત્રો છે.

(1) જો કોઈ કણ પર બળ $\vec{F}$ લાગતું હોય અને તે આ બળની અસર નીચે $\vec{dl}$ જેટલું સ્થાનાંતર કરે તો આ સ્થાનાંતર દરમિયાન કણ પર થયેલું કાર્ય

$$\text{કાર્ય} = W = \int_P^Q \vec{F} \cdot \vec{dl} = \text{રેખા સંકલન છે.}$$

(2) જો કોઈ વિદ્યુતભાર q વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ માં બિંદુ P થી Q તરફ સ્થાનાંતર અનુભવે તો આ વિદ્યુતભાર q પર થયેલ કુલ કાર્ય

$$\text{કુલ કાર્ય } W = \int_P^Q q\vec{E} \cdot \vec{dl} \text{ થાય}$$

આથી એકમ વિદ્યુતભાર પર થયેલ કુલ કાર્ય

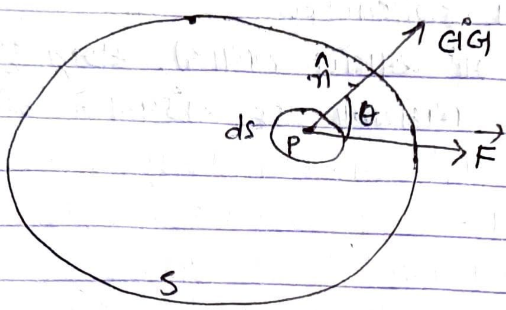
$$W = \int_P^Q \vec{E} \cdot \vec{dl} = \left[V \right]_P^Q = V(Q) - V(P)$$

જે બિંદુ P અને બિંદુ Q વચ્ચે વિદ્યુત સ્થિતિમાનનો તફાવત આપે છે. વિદ્યુત સ્થિતિમાનનો તફાવત માત્ર બિંદુ P અને બિંદુ Q ના સ્થાન પર આધાર રાખે છે પણ P અને Q વચ્ચેના માર્ગ પર આધાર રાખતો નથી.

રેખા સંકલનનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

$$\int_P^Q \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_P^Q (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad \text{છે.}$$

* પૃષ્ઠ સંકલન (Surface Integral)



સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{F}$ માં, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ, એક પૃષ્ઠ દર્શાવ્યું છે. આ પૃષ્ઠ S ની અંદર એક સૂક્ષ્મ પૃષ્ઠ ખંડ ds દર્શાવેલો છે જેમાં આ સદિશ વિધેય $\vec{F}$ સતત બદલાય છે. આવા સૂક્ષ્મ પૃષ્ઠ ખંડ ds માં આવેલા બિંદુ P પાસે લંબ દોરવામાં આવે તો આ લંબની દિશામાંનો એકમ સદિશ $\hat{n}$ અને સદિશ વિધેય $\vec{F}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ છે.

ds પૃષ્ઠખંડને લંબ દિશામાં સદિશ વિધેય $\vec{F}$ નો લંબ ઘટક $\vec{F}\cdot\hat{n} = F\cos\theta$ છે.

ફ્લક્સની વ્યાખ્યા મુજબ આ સૂક્ષ્મ પૃષ્ઠખંડ ds માંથી બહાર નીકળતું ફ્લક્સ = ($\vec{F}$ નો લંબ ઘટક) × પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ

$$\therefore \text{ફ્લક્સ} = \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds = \vec{F}\cdot\vec{ds} = F\cos\theta\, ds \quad \text{—(1)}$$

તો સમગ્ર પૃષ્ઠ S સાથે સંકળાયેલ કુલ ફ્લક્સ મેળવવા માટે સમીકરણનું સમગ્ર પૃષ્ઠ પર સંકલન લેવું પડે.

$$\text{કુલ ફ્લક્સ} = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{ds} = \iint_S F\cos\theta\, ds \quad \text{થાય —(2)}$$

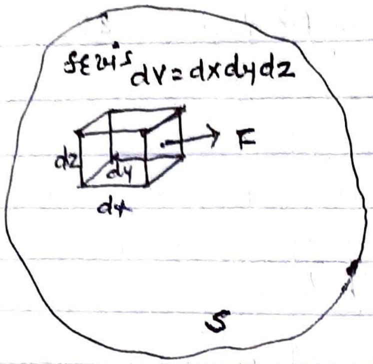
સમી. (2) ને સદિશ વિધેય $\vec{F}$ નું સમગ્ર પૃષ્ઠ પર લીધેલ પૃષ્ઠ સંકલન કહે છે.

કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં પૃષ્ઠ સંકલનનું સ્વરૂપ

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds = \iint_S (F_x ds_x + F_y ds_y + F_z ds_z) \quad \text{—(3)}$$

અહીં $\hat{n}\, ds = \vec{ds} = \hat{i}\, ds_x + \hat{j}\, ds_y + \hat{k}\, ds_z$ છે.

* કદ સંકલન (Volume Integral)



આકૃતિમાં V કદનું એક પૃષ્ઠ S દર્શાવ્યું છે. આ સમગ્ર પૃષ્ઠ S નાના નાના અનેક પાસે પાસે સતત ગોઠવાયેલા સૂક્ષ્મ કદખંડોનું બનેલું ગણી શકાય. આકૃતિમાં આવા એક પ્રતિનિધિ કદ ખંડ $dV = dx\,dy\,dz$ ને દર્શાવ્યો છે.

આ પૃષ્ઠ સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{F}$ માં આવેલ હોવાથી, સમગ્ર પૃષ્ઠને ગણતરીમાં લેતાં, સદિશ વિધેયના કદ સંકલનને નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

$$\text{કદ સંકલન} = \iiint_{V=\text{સમગ્ર કદ પર}} \vec{F}\cdot dV$$

કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં આ કદ સંકલનનું સ્વરૂપ

$$\iiint_V \vec{F}\cdot \vec{dV} = \iiint_{x\,y\,z} (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k})\cdot dx\,dy\,dz$$

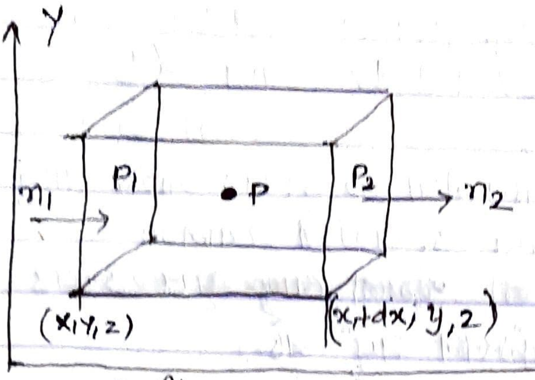
અહીં કદખંડ $dV = dx\,dy\,dz$ છે.

* ગૉસ ડાઇવર્જન્સ પ્રમેય :-

વિધાન: કોઈપણ સદિશ ક્ષેત્રના ડાઇવર્જન્સનું અમુક કદ પર લીધેલ કદ સંકલન તે કદને ઘેરતા પૃષ્ઠ પરના સદિશના પૃષ્ઠ સંકલન બરાબર હોય છે. એટલે કે.

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

સાબિતી:- કોઈ પૃષ્ઠ S વડે ઘેરાતા કદ V ને ધ્યાનમાં લો. આ પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતા કદ V ને અનેક સૂક્ષ્મ નાના પાસે પાસે સતત રીતે ગોઠવાયેલા dV જેવા કદખંડોમાં વિભાજિત થયેલ ગણી શકાય. આવો એક dx, dy, dz બાજુવાળો સૂક્ષ્મ લંબઘન કદખંડ પ્રતિનિધિ સ્વરૂપે આકૃતિમાં દર્શાવ્યું છે.



Verified
Prof. J. M. Kadiya

અહીં સમગ્ર પૃષ્ઠ સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{F}$ માં આવેલ હોઈ સદિશ વિધેય $\vec{F}$ ના X, Y અને Z દિશામાંના ઘટકો અનુક્રમે F_x, F_y, અને F_z છે.

ધારો કે ઘનખંડના P_1 બિંદુ પાસે (ઘનખંડના ડાબી બાજુના પૃષ્ઠ) ફ્લક્સ X દિશામાં $= -F_x(P_1)\,dy\,dz$ થાય —(1)

અને ઘનખંડની જમણી બાજુ P_2 બિંદુ પાસે X દિશામાં ફ્લક્સ

ફ્લક્સ $= F_x(P_2)\,dy\,dz$ થાય. —(2)

જો X દિશામાં વિધેય $\vec{F}$ ના ફેરફારનો દર $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ હોય તો

$$F_x(P_2) = F_x(P_1) + \frac{\partial F_x}{\partial x}dx \quad \text{થાય} \quad —(3)$$

આથી સમી. (2) મુજબ ઘનખંડની જમણી બાજુ P_2 બિંદુ પાસે X દિશામાં ફ્લક્સ

$$F_x(P_2)\,dy\,dz = \left(F_x(P_1) + \frac{\partial F_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz \quad \text{થાય} \quad —(4)$$

આથી X દિશામાં ઘનખંડની ડાબી અને જમણી બાજુમાંથી નીકળતું વધારાનું ફ્લક્સ

$$= \left(F_x(P_1) + \frac{\partial F_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz - F_x(P_1)\,dy\,dz$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x}dx\,dy\,dz \quad \text{થાય} \quad —(5)$$

આજ રીતે Y દિશામાં ઘનખંડની ઉપરની અને નીચેની બાજુમાંથી નીકળતું વધારાનું ફ્લક્સ $= \frac{\partial F_y}{\partial y}dx\,dy\,dz$ થાય —(6)

અને Z દિશામાં ઘનખંડમાંથી નીકળતું વધારાનું ફ્લક્સ $= \frac{\partial F_z}{\partial z}dx\,dy\,dz$ થાય —(7)

આથી સમગ્ર ઘનખંડ $dV = dx\,dy\,dz$ માંથી નીકળતું ફ્લક્સ

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \quad \text{થાય} \quad —(8)$$

$\therefore \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dv$ થાય. —(9)

સમી. (9) માત્ર અહીં દર્શાવેલ પ્રતિનીધી કદખંડ માટેજ સાચું છે. જો સમગ્ર પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતા બધાજ કદખંડોને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે તો, સમી. (9) ની જમણી બાજુ પૃષ્ઠ S વડે ઘેરાતા સમગ્ર કદ પર કદ સંકલન લેવું પડે.

i.e $$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dv \quad \text{—(10)}$$

સમી. (10) ગૉસ ડાઇવર્જન્સ પ્રમેયની સાબિતી છે. સમી. (10) પરથી જોઈ શકાય છે કે ગૉસ ડાઇવર્જન્સ પ્રમેય પૃષ્ઠ સંકલન અને કદસંકલન વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. આ પ્રમેયનું પ્રતિવિધાન પણ સાબિત કરી શકાય.

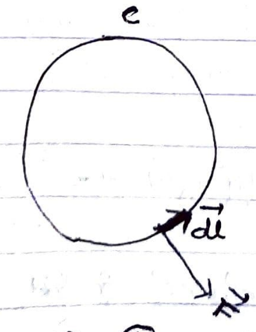
* સ્ટોક્સનો પ્રમેય :-

વિધાન :- કોઈ સદિશ ક્ષેત્રના કર્લ (curl)નું કોઈ પૃષ્ઠ પરનું પૃષ્ઠ સંકલન તે સદિશના તે પૃષ્ઠની સીમા પર લીધેલા રેખા સંકલન બરાબર હોય છે.

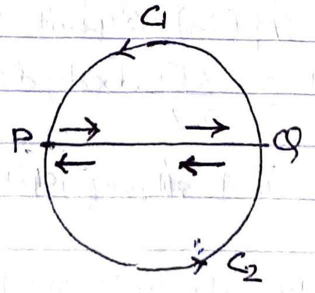
$$\iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

સાબિતી :- ધારો કે સદિશ વિધેય $\vec{F}$ સ્થાનનું વિધેય છે. આથી આ સદિશ વિધેય $\vec{F}$ નું બંધ વક્ર પરનું રેખા સંકલન

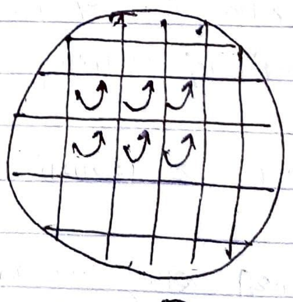
$$L = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} \text{ થાય} \quad \text{—(1)}$$



આકૃતિ (1)



આકૃતિ (2)



આકૃતિ (3)

આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ બંધ વક્ર C ને C_1 અને C_2 બંધવક્રો બને તે રીતે બે ભાગ કરવા રેખા PQ દોરો. જો C_1 બંધ વક્ર માટે રેખા સંકલન $L_1 = \oint_{C_1} \vec{F}\cdot\vec{dl}$ અને

બંધવક્ર C_2 માટે રેખા સંકલન $L_2 = \oint_{C_2} \vec{F}\cdot\vec{dl}$ હોય તો

$L = L_1 + L_2$ પરથી.

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dl} = \oint_{C_1} \vec{F}\cdot\vec{dl} + \oint_{C_2} \vec{F}\cdot\vec{dl}$$ થાય.

આકૃતિ (2) માં દર્શાવ્યા મુજબ વક્ર C_1 માં પથ P થી Q તરફ જાય છે. અને વક્ર C_2માં પથ Q થી P છે. જે એકબીજાની અસરો નાબૂદ કરે છે.
હવે જો આકૃતિ (3) માં દર્શાવ્યા મુજબ ~~બંધ~~ બંધ વક્ર C ને નાના નાના, પાસે પાસે, સતત ગોઠવાયેલા પૃષ્ઠ ખંડો $dS_1, dS_2, \ldots, dS_n$ વડે દર્શાવીએ તો આ પૃષ્ઠ ખંડો $dS_1, dS_2, \ldots, dS_n$ સૂક્ષ્મ બંધ વક્રો $C_1, C_2, \ldots, C_n$ વડે ઘેરાય છે. આથી

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dl} = \sum \oint_{C_n} \vec{F}\cdot\vec{dl} \quad -(2)$$

કર્લની વ્યાખ્યા મુજબ $\oint \vec{F}\cdot\vec{dl} = (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot dS$ થાય

$\therefore$ સમી. (2)

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dl} = \sum \oint_{C_n} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \sum (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot \vec{dS_n}$$ થાય $-(3)$

બંધ વક્ર C ને ઘેરતા બધા જ પૃષ્ઠ ખંડો એકબીજા સાથે જોડાયેલા અને સતત હોવાથી Σ ની જગ્યાએ સમી. (3) ની જમણી બાજુ ∫ લેવામાં આવે છે. આ સંકલન ∫ સમગ્ર પૃષ્ઠ S પર લેવામાં આવે છે.

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dl} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{dS} \quad -(4)$$

સમી. (4) સ્ટોક્સ પ્રમેયની સાબિતી છે.
સ્ટોક્સ પ્રમેય રેખા સંકલન અને પૃષ્ઠ સંકલન વચ્ચેનો સંબંધ રજૂ કરે છે.

24

* ગૉસ ડાઈવર્જન્સ પ્રમેય પરથી ગ્રીનનો પ્રમેય

ગૉસ ડાઈવર્જન્સ પ્રમેય મુજબ

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dv \quad -(1)$$

ϕ, ψ અદિશ વિધેયો હોયનો

અને $\vec{F} = \phi\vec{\nabla}\psi$ લેવામાં આવે તો. $-(2)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\phi + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\nabla\psi \quad -(3)$$

સમી. (2) અને સમી. (3) સમી. (1) માં મૂકતાં,

$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\nabla\psi)\,dv = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{s} \quad -(3)$$

સમી. (3) માં ϕ અને ψ ની અદલાબદલી કરતાં,

$$\iiint_V (\psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\nabla\psi)\,dV = \iint_S (\psi\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{s} \quad -(4)$$ થાય.

સમી. (3) માંથી સમી. (4) બાદ કરતાં

$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,dv = \iint (\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{s} \quad -(5)$$

થાય.

સમી. (5) ગ્રીનનો પ્રમેય છે.

Prof. J. M. Kadiya

* DEL OPERATIONS

(a) $\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

(b) $$\nabla \times \nabla\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial y}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z}\right)\hat{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}\right)\hat{k}$$

Prof. J.M. Kadiya

$$= \nabla \times \nabla\phi = 0$$

આપણે જાણીએ છીએ કે $\nabla \times \vec{V} = 0$ હોય તો સદિશ $\vec{V}$ બિન ભ્રમણીય સદિશ કહેવાય છે. આથી $\nabla\phi$ પણ બિનભ્રમણીય (irrotational) સદિશ છે. આવા સદિશ વિધેય ϕ ને અદિશ સ્થિતિમાન (Scalar potential) કહે છે. ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્ર અને સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્ર બિનભ્રમણીય (irrotational) ક્ષેત્રો છે.

(c) $$\nabla(\nabla \cdot \vec{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x\,\partial z}\right)\hat{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y\,\partial z}\right)\hat{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\hat{k}$$

(d) $$\nabla\cdot\nabla\times V = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 V_z}{\partial x\,\partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 V_y}{\partial x\,\partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y\,\partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 V_z}{\partial y\,\partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 V_y}{\partial z\,\partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 V_x}{\partial z\,\partial y}}$$

$\therefore \nabla\cdot\nabla\times V = 0$

(e) $\nabla\times(\nabla\times\vec{V}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{V}) - (\nabla\cdot\nabla)V$ [Triple vector product $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) =$

$= \nabla(\nabla\cdot\vec{V}) - \nabla^2 V$

(f) $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ એ અદિશ કારક છે.

આ દ્વિતીય ક્રમનો વિકલ કારક છે જેને લાપ્લાસીયન (Laplacian) કહે છે.

ભૌતિકશાસ્ત્રમાં Laplacian operator ઘણીવાર ઉપયોગમાં થાય છે જેમ કે

(i) Laplacian $\nabla^2\phi = 0$

Prof J.M. Kadiya

(ii) Poisson's eqn $\nabla^2\phi = \rho/\epsilon_0$

(iii) Wave equation $\nabla^2\phi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ તરંગ સમી. છે.

(iv) Equation of conduction of heat $\nabla^2\phi = \frac{1}{h^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$
ઉષ્માવહન સમી. છે.

(v) Schrödinger Wave equation $\nabla^2\phi = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\phi$
શ્રોડીંજર તરંગ સમી. છે જે ક્વોન્ટમ મિકેનિક્સમાં આવે છે.

* સદિશના curl નું ભૌતિક મહત્વ સમજાવો.

સ્ટોક્સના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી કોઈ સદિશના curl ની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય

ધારો કે $d\vec{\sigma} = \hat{n}\, d\sigma$ ક્ષેત્રફળ ધરાવતા પૃષ્ઠખંડની પરિસીમા પર લીધેલ સદિશ $\vec{V}$ નું રેખા સંકલન

$$\oint \vec{V}\cdot d\vec{l} = (\nabla\times\vec{V})\cdot d\sigma$$

Prof. J.M. Kadiya

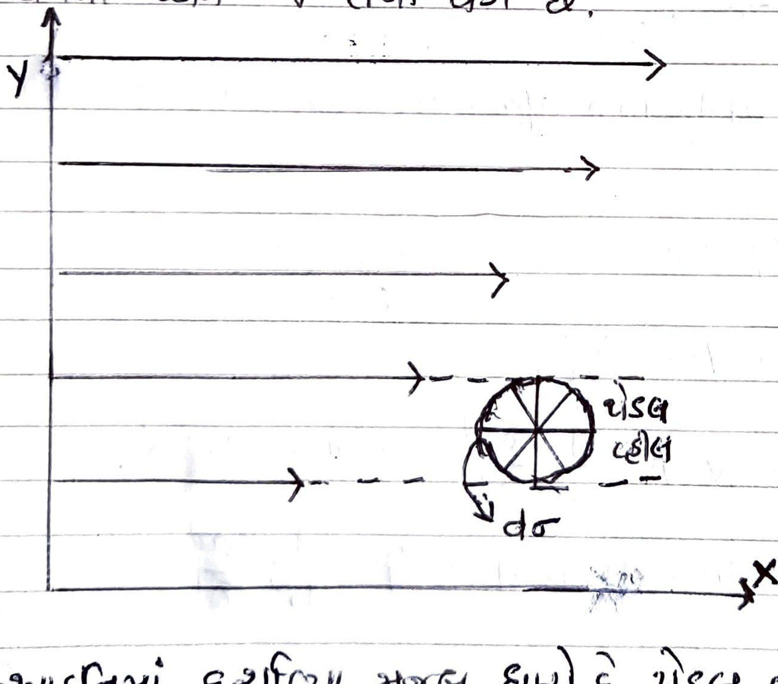
અથવા $\oint \vec{V}\cdot d\vec{l} = (\nabla\times\vec{V})\cdot\hat{n}\, d\sigma$ — (1) થાય.

આથી એકમ સદિશ $\hat{n}$ ની દિશામાં $\nabla\times\vec{V}$ નો ઘટક

$$(\nabla\times\vec{V})\cdot\hat{n} = \lim_{d\sigma\to 0}\frac{1}{d\sigma}\oint\vec{V}\cdot d\vec{l} \quad -(2)$$

રેખા સંકલન $\oint\vec{V}\cdot d\vec{l}$ સમતલીય બંધ વક્ર પર લીધેલ હોય તો, તેને સદિશ $\vec{V}$ નું બંધ વક્રને ઘેરતા ક્ષેત્રફળમાંનું ભ્રમણ (circulation) કહે છે.

ધારો કે સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{V} = \rho v$ થાય જ્યાં ρ પ્રવાહીની ઘનતા અને v તેનો વેગ છે.



Prof. J.M. Kadiya

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે પેડલ વ્હીલ જેનું ક્ષેત્રફળ $d\sigma$ નાના પૃષ્ઠખંડના ક્ષેત્રફળ જેટલું છે. આ પેડલ વ્હીલની અક્ષ z અક્ષને સમાંતર છે. જો $\vec{V}$ પેડલ વ્હીલના જુદાજુદા બિંદુઓ માટે અચળ ના હોય તો પેડલ વ્હીલ ભ્રમણ

કરશે. પણ જો $\vec{V}$ અચળ હોય (દરેક જગ્યાએ મૂલ્ય અને દિશામાં) તો પેડલ વ્હીલ ભ્રમણ નહીં કરે. બીજા શબ્દોમાં પૃષ્ઠ ખંડ $d\sigma$ ની આસપાસ રેખા સંકલન $\oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$ અથવા $\vec{V}$ નું ભ્રમણ શૂન્ય થશે.

આથી કહી શકાય કે ભ્રમણ એ $d\sigma \to 0$ limitમાં curlનો દ્યોતક છે. આ ભ્રમણ આપેલ સદિશ ક્ષેત્ર અને સદિશ ક્ષેત્રની સાપેક્ષમાં પૃષ્ઠખંડના ભ્રમણની પ્રકૃતિ પર આધારીત છે. જ્યારે પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ $d\sigma = \hat{k} d\sigma$ થાય ત્યારે અતિતીવ્ર ભ્રમણ થશે અને X કે Y અક્ષની સમાંતર દિશામાં બિલકુલ ભ્રમણ થશે નહીં.

Prof J.M. Kadiya