CC. PHYSICS - 302

MAGNETOSTATICS

UNIT - I

SEM - III

Dr. V. D. Patel

ચુંબકીય અદિશ સ્થિતિમાન :

આપણે જાણીએ છીએ તે મુજબ વિદ્યુતસ્થિતિમાન V જેમ વિદ્યુત-ક્ષેત્ર $\vec{E}$ સાથે સંબંધ ધરાવે છે તેમ ચુંબકીય સ્થિતિમાન ϕ_m એ $\vec{B}$ સાથે સંબંધ ધરાવે છે. $\vec{E}$ ને જેમ V ના ગ્રેડીયન્ટ તરીકે રજૂ કરી $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ મેળવી શકાય છે તેમ $\vec{B}$ ને ϕ_m ના ગ્રેડીયન્ટ તરીકે રજૂ કરી શકાય છે.

$$\therefore \vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_m \quad \text{------ (1)}$$

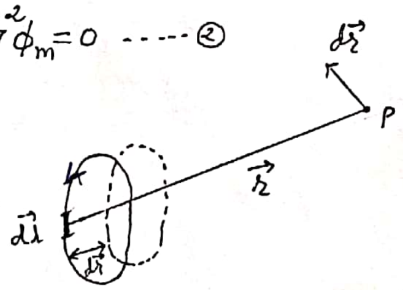
જ્યાં ϕ_m ચુંબકીય અદિશ સ્થિતિમાન છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

હવે, $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_m$ મૂકતાં,

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi_m) = \vec{\nabla}^2\phi_m = 0 \quad \text{----- (2)}$$

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ વિદ્યુત-પ્રવાહ I એ બિંદુ P આગળ ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ ઉત્પન્ન કરે છે. જે નીચે મુજબ દર્શાવાય છે.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

જો બિંદુ P ને $d\vec{r}$ જેટલું સ્થાનાંતર કરાવવામાં આવે તો,

$$\vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}\times d\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r} \quad \text{--- (3)}$$

હવે, $d\vec{l}\times\vec{r}\cdot d\vec{r} = d\vec{l}\times(+d\vec{r})\cdot\vec{r} = d\vec{l}\times(-d\vec{r})\cdot\vec{r}$ લેતાં, (∵ વિષમ ઘડી દિશા હોવાથી)

અને P બિંદુના $d\vec{r}$ સ્થાનાંતરને લીધે પરિપથ સાથે બનાવેલ ઘનકોણ $d\Omega$ જેટલો બદલાય છે. અહીં આપણે આકૃતિ મુજબ બિંદુ P ને ફીક્સ રાખી પરિપથના લૂપને $-d\vec{r}$ જેટલું સ્થાનાંતર કરાવી ઘનકોણમાં $d\Omega$ ફેરફાર થાય છે એમ ધારીશું.

$d\vec{l}\times(-d\vec{r}) = -d\vec{S}^2$ એ પરિપથના $d\vec{l}$ ભાગનું $(-d\vec{r})$ સ્થાનાંતર થતાં ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ છે.

સમી. (3) ને હવે નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$d\phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left|\int\frac{-d\vec{S}^2}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left|\int -d\Omega\right|$$

$$\therefore \phi_m = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\Omega \quad \text{-------- (4)}$$

જેને ચુંબકીય અદિશ સ્થિતિમાન કહે છે. જો ઘનકોણનું મૂલ્ય ધન લેવામાં આવે ત્યારે પ્રવાહ સમઘડી દિશામાં વહન પામે છે એમ કહેવાય. સમી. (4) નું મૂલ્ય સમી. (1) માં મૂકતાં,

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_m = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega$$

$$\therefore |\vec{B}| = \left|-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega$$

$$\boxed{\therefore |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega}$$

સ્થિત વિદ્યુત માટેના સમી. $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ મુજબ ϕ_m ચુંબકીય અદિશ સ્થિતિમાન દર્શાવે છે. $-\phi_m$ ને કેટલાક સંજોગોમાં "Magnetive Motive Force" તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ચુંબકીય સદિશ સ્થિતિમાન :

ચુંબકીય અદિશ સ્થિતિમાન વિદ્યુત પ્રવાહ રહિત ($\vec{J}=0$) અવકાશ માટે જ ઉપયોગી છે. આવા અવકાશમાં અદિશ ચુંબકીય સ્થિતિમાન પરથી ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ મેળવી શકાય છે. $\vec{J}=0$ શરતનું પાલન ન થતું હોય અને આપેલ વિસ્તારમાં $\vec{J}$ ના કોઈ ચોક્કસ મૂલ્ય માટે બીજું કોઈ સ્થિતિમાન હોય ? જો ત્યાં કોઈ સ્થિતિમાન છે, તો તે નીચેના સમી. ને સંતોષે છે.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad \text{------} ①$$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\text{div}\cdot\text{curl}\,\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$$

તેથી આપણે, $\vec{B}$ ને $\vec{A}$ ના curl તરીકે દર્શાવી શકીએ છીએ.

$$\therefore\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \text{----} ②$$

અહીં $\vec{A}$ ને ચુંબકીય સદિશ સ્થિતિમાન કહે છે.

બાયો સાવર્ટના નિયમ મુજબ પ્રવાહધારિત લૂપ થી કોઈ બિંદુ આગળ ચુંબકીય તીવ્રતા $\vec{B}$ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે.

$$\therefore\ \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$$

પણ, $\frac{\vec{r}}{r^3}=-\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$

જો કોઈ બિંદુના યામ $P(x,y,z)$ હોય તો,

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\vec{dl}\times\nabla\left(-\frac{1}{r}\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times\vec{dl} \quad \text{--} ③$$

$$\therefore\ \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\oint\nabla\times\frac{\vec{dl}}{r}-\oint\frac{1}{r}(\nabla\times\vec{dl})\right]$$

$$\left[\because\ \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times\vec{dl}=\nabla\times\frac{\vec{dl}}{r}-\frac{1}{r}(\nabla\times\vec{dl})\right]$$

અહીં $\vec{dl}$ ક્ષેત્રના કોઈ બિંદુના યામનું વિધેય નથી.

$$\therefore\ \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\left(\nabla\times\frac{\vec{dl}}{r}\right)$$

$$\therefore\ \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\times\oint\frac{\vec{dl}}{r}=\nabla\times\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{\vec{dl}}{r}$$

$$\therefore\ \vec{B}=\nabla\times\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{\vec{dl}}{r} \quad \text{-----} ④$$

સમી. ④ ને સમી. ② સાથે સરખાવતાં,

$$\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{\vec{dl}}{r}$$

$\vec{A}$ ને ચુંબકીય સદિશ સ્થિતિમાન કહે છે. તેથી પ્રેરીત ચુંબકીયક્ષેત્ર ચું. સદિશ સ્થિતિમાનના curl વડે રજૂ કરી શકાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, $I=\vec{J}\cdot\vec{ds}$

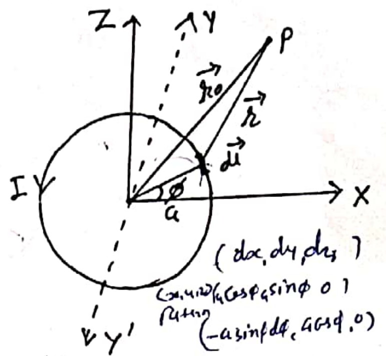
$$\therefore\ \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}}{r}\cdot d\tau \quad \text{-----} ⑤$$

જ્યાં $d\tau=\vec{dl}\cdot\vec{ds}=$ કદ

પ્રથમ સમી. ⑤ નો ઉપયોગ કરી $\vec{A}$ મેળવવામાં આવે છે, $\vec{A}$ ની કિંમત સમી. ② માં મૂકી વિદ્યુત પ્રવાહ વડે પ્રેરિત ચુંબકીયક્ષેત્ર મેળવી શકાય છે.

નાની પ્રવાહ લૂપને લીધે મળતું ચુંબકીય સદિશ સ્થિતિમાન:

ચુંબકીય સદિશ સ્થિતિમાન સમજવા માટે આપણે a ત્રિજ્યાની નાની પ્રવાહ લૂપને ધ્યાનમાં લઈશું. અહીં આપણે કાર્ટેઝીયન યામ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીશું. હવે ધારોકે રેફરન્સ ફ્રેમનું ઉદ્ગમ બિંદુ કોઈલ (લૂપ) ના કેન્દ્ર પર સંપાત થાય છે અને તેની બે અક્ષો કોઈલને લંબ છે. dl ખંડથી બિંદુ P નું અંતર $\vec{r}$ છે અને $\vec{dl}$ ખંડનો લંબકોણ (દિક્કોણ) ϕ છે.



$\therefore \vec{dl} = \vec{a}\, d\phi$ અને $(-a\sin\phi\, d\phi, a\cos\phi\, d\phi, 0)$

અહીં, $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}}{r} d\tau = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\vec{dl}}{r}$ $\quad (\because I = \vec{J}\cdot\vec{da},\ d\tau = \vec{da}\,\vec{dl})$

$\vec{A}$ નો x-દિશાનો ઘટક,

$$A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{-a\sin\phi\, d\phi}{r}$$

હવે, $r^2 = (x - a\cos\phi)^2 + (y + a\sin\phi)^2 + z^2$ — વિસ્તરણ કરી દ્વિપદી પ્રમેય વાપરતાં.

$a << r_0$ હોવાથી

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{ax\cos\phi + ay\sin\phi}{r_0^3} + \cdots$$

જ્યાં r_0 એ ઉદ્ગમથી બિંદુ P નું અંતર છે.

$$\therefore A_x = -\frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int^{2\pi}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{ax\cos\phi + ay\sin\phi}{r_0^3}\right)\sin\phi\, d\phi$$

$$= -\frac{\mu_0 I a}{4\pi}\cdot\frac{a\pi y}{r_0^3} = -\frac{\mu_0 I a^2 \pi y}{4\pi r_0^3} \quad \text{---- (1)}$$

આજ પ્રમાણે,

$$A_y = \frac{\mu_0 I a^2 \pi x}{4\pi r_0^3} \quad \text{અને} \quad A_z = 0 \quad \text{---- (2)}$$

કોઈલનો મેગ્નેટીક ડાઈપોલ મોમેન્ટ m = ક્ષેત્રફળ × વિદ્યુતપ્રવાહ

$$\therefore m = \pi a^2 I$$

m ની દિશા કોઈલના સમતલ આગળ લંબ છે એટલેકે તે Z દિશામાં છે.

$$\therefore m_x = 0, \quad m_y = 0, \quad m_z = \pi a^2 I$$

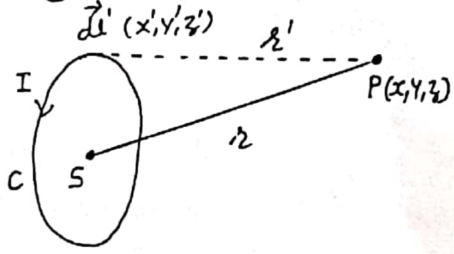
સમી. (1) અને (2) માં દર્શાવેલ $\vec{A}$ ના ઘટકો સદિશ $\vec{m}\times\vec{r}$ ના સમપ્રમાણમાં છે. તેની કિંમતો મૂકી ફરીથી લખતાં,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\vec{m}\times\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\vec{m}\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$\left[\because \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

પ્રવાહધારિત લૂપને લીધે ચુંબકીય સદિશ સ્થિતિમાન A અને ચુંબકીય ક્ષેત્ર B ને શોધવાની ઉલટ-સુલટ (Alternative) રીત:

ચુંબકીય સદિશ સ્થિતિમાન



પ્રવાહ ધારિત લૂપ C ને ધ્યાનમાં લો. પ્રવાહ ધારિત લૂપ માંથી direct current I વહન પામે છે. બિંદુ P આગળ ચુંબકીય સદિશ સ્થિતિમાન $\vec{A}$ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}'}{r'}$$

જ્યાં $dl'(x',y',z')$ લૂપનો ભાગ છે, અને r' સ્ટોક્સના નિયમ મુજબ બિંદુ P અને dl' વચ્ચેનું અંતર છે.

સ્ટોક્સના નિયમ પ્રમાણે,

$$\oint \frac{d\vec{l}'}{r'} = \int_S \hat{n} \times \nabla'\left(\frac{1}{r'}\right) ds$$

$$\therefore \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \hat{n} \times \nabla'\left(\frac{1}{r'}\right) ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \left(\hat{n} \times \frac{\hat{n}'}{r'^2}\right) ds$$

જ્યાં, પરિપથ વડે ઘેરાતી સપાટી અને r' ને અનુલક્ષી લંબ એકમ સદિશ અનુક્રમે $\hat{n}$ અને $\hat{n}'$ છે. જો વિદ્યુત પ્રવાહ ધારિત લૂપનું પરિમાણ બિંદુ P ના અંતરની સરખામણીએ ખૂબજ નાનું હોય તો ફેક્ટર $\hat{n}'/r'^2$ સંકલન દરમ્યાન ખૂબજ નજીકનું અચળ મૂલ્ય ધરાવે છે.

$$\therefore \vec{A} = -\frac{\mu_0 I \hat{n}_r}{4\pi r^2} \times \int_S \hat{n}_n\, ds = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\, \hat{n}_r \times \hat{n}_n S$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{m} \times \frac{\hat{n}_r}{r^2}\right) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\cdot\left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}\right)$$

જ્યાં મેગ્નેટીક ડાઈપોલ મોમેન્ટ = પ્રવાહ × ક્ષેત્રફળ = $IS = \vec{m}$

ચુંબકીય ફ્લક્સ ઘનતા $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{m}\, \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) - (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]$$

અહીં, $\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$

$$\therefore \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

હવે, $\vec{\nabla}\left(\vec{m}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) + \vec{m} \times \left(\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right)$

છેલ્લું પદ શૂન્ય થાય

$$\therefore (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \nabla\left(\vec{m}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \left[\frac{\vec{m}}{r^3} - \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right]$$

અને $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{m}\right]$$

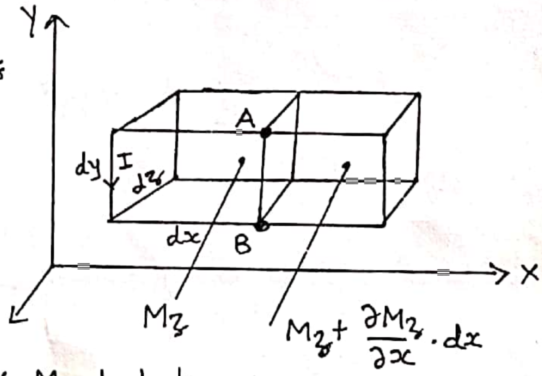
મેગ્નેટાઈઝેશન:

દ્રવ્યને પોતાનું અણું કે પરમાણું બંધારણ હોય છે. પરમાણુંની અંદર વિદ્યુતભારોની ગોઠવણ નાનો ચુંબકીય ડાઈપોલ બનાવે છે, જે નાના (આઈકોક્રમ) વિદ્યુતપ્રવાહને લીધે હોય છે.

$$\therefore \text{ચુંબકીય વેગમાન} = Q_m l = \hat{n} I ds \quad -----①$$

જ્યાં Q_m ચુંબકીય ધ્રુવની તીવ્રતા છે. l બે ધ્રુવો વચ્ચેનું અંતર છે. ds એ અણું કે પરમાણુંમાં ઈલેક્ટ્રોનની કક્ષીય ગતિ વડે બનતી લૂપનું ક્ષેત્રફળ છે. પદાર્થની સામાન્ય સ્થિતિમાં, અણું કે પરમાણુના બધા ચુંબકીય ડાઈપોલ અસ્તવ્યસ્ત ગોઠવાયેલા હોય છે. જો આપણે પદાર્થ પર ચુંબકીય ક્ષેત્ર લાગુ પાડીએ તો બધા અસ્તવ્યસ્ત ડાઈપોલ ચુંબકીય ક્ષેત્રની દિશામાં ગોઠવાય છે, ત્યારે દ્રવ્યને મેગ્નેટાઈઝ્ડ કર્યામાં આવે છે. એકમ કદદીઠ ચુંબકીય ડાઈપોલ મોમેન્ટને મેગ્નેટાઈઝેશન (M) કહે છે.

$$M = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{1}{\Delta\tau}\sum m_i = \frac{dm}{d\tau} \quad -----②$$



M એ દરેક વિદ્યુત પરિપથના અસરકારક ચુંબકીય ડાઈપોલ ના આણ્વીક પ્રવાહ પરિપથની સંખ્યા એકમ કદદીઠ સૂચવે છે. મેગ્નેટાઈઝ્ડ સપાટી સાથેના બિંદુ (x, y, z) આગળ dx, dy, dz બાજુઓ વાળું નાનું કદ ધ્યાનમાં લો. (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ)

Z-દિશામાં આ કદ સાથે સંકળાયેલ ચુંબકીય વેગમાનનો ઘટક $M_z dx dy dz$ છે.

સમી. ① પરથી, $M_z dx dy dz = I ds = I dx dy$

જ્યાં I XY સમતલને સમાંતર સમતલમાં લૂપમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ છે.

$$\therefore I = M_z dz \quad -----------③$$

$(x+dx, y, z)$ આગળ નજીકના લૂપમાં પ્રવાહ,

$$I' = I + \frac{\partial I}{\partial x}\cdot dx = M_z dz + \frac{\partial M_z}{\partial x} dx dz$$

તેથી, બે ભાગની AB બાજુમાં પ્રવાહનો ઘટક Y-દિશામાં હશે. જે નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$I - I' = -\frac{\partial M_z}{\partial x}\cdot dx dy$$

આજ રીતે YZ સમતલ માટે, $\frac{\partial M_z}{\partial x} dx dz$ મેગ્નીટ્યુડ ધરાવતો Y-દિશામાં પ્રવાહનો બીજો ઘટક મળશે.

હવે, Y-દિશામાં કુલ પ્રવાહ $I_y = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) dx\cdot dz$

તેથી દરેક પ્રવાહ માટે અસરકારક ક્ષેત્રફળ સમાન હશે.

$$\therefore (j_m)_y = \frac{I_y}{dx dz} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) \quad ---④$$

આજ રીતે,

$$(j_m)_x = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) \text{ અને } (j_m)_z = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right)$$

આમ, $\vec{j}_m = \text{curl}\,\vec{M} = \vec{\nabla}\times\vec{M}$

અહીં મહત્વનું એ છે કે મેગ્નેટાઈઝેશન પ્રવાહ માટે M યોગ્ય રીતે બદલાય છે. જો M અચળ હોય તો $\vec{j}_m = 0$. આ સંબંધ સદિશ સ્થિતિમાનનો ઉપયોગ કરીને પણ મેળવી શકાય છે.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\vec{M}(r)\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau \quad \text{------} (5)$$

$\vec{\nabla}\times(a\vec{b}) = \phi\vec{\nabla}\times\vec{P} - \vec{P}\times\vec{\nabla}\phi$ ગાણિતીય સંબંધનો ઉપયોગ કરીને સમી. (5) નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}\times\vec{M}}{r}d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)\right\}d\tau$$

કોઈ પણ સદિશ માટે આપણી પાસે ચોક્કસ સંબંધ હોય છે, ધારોકે સદિશ $\vec{a}$ છે.

$$\therefore \int(\vec{\nabla}\times\vec{a})d\tau = -\int\vec{a}\times\hat{n}_n\,ds$$

$\vec{b}$ ને અચળ સદિશ લેતાં,

$$\vec{b}\cdot\int_S\vec{a}\times\hat{n}_n\,ds = \int_S(\vec{b}\times\vec{a})\hat{n}_n\,ds$$

$$= \int_V\vec{\nabla}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})\,d\tau \quad (\because \text{ડાયવર્જન્સ પ્રમેય મુજબ})$$

$$= -\vec{b}\cdot\int_V\vec{\nabla}\times\vec{a}\,d\tau$$

અહીં $\vec{b}$ સ્વતંત્ર સદિશ છે.

$$\therefore \int_S\vec{a}\times\hat{n}_n\,ds = -\int_V\vec{\nabla}\times\vec{a}\,d\tau \quad \text{-----} (6)$$

સમી. (6) નો ઉપયોગ સમી. (5) માં કરતાં

$$\therefore \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}\times\vec{M}}{r}d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{M}\times\hat{n}_n}{r}\cdot ds$$

સપાટીના બહારના વિસ્તાર ઉપર લીધેલ પૃષ્ઠ સંકલન માટે $\vec{M}$ સ્થાનિક છે, તેથી પ્રવાહ શૂન્ય થાય છે.

$$\therefore \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}\times\vec{M}}{r}d\tau$$

પણ આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(r)}{r}d\tau$$

$$\therefore \vec{j}_m = \vec{\nabla}\times\vec{M}$$

ચુંબકીય ક્ષેત્ર સદિશ :

(7)

જ્યારે માધ્યમ ચુંબકીય અને વિદ્યુતકીય રીતે વાહક હોય ત્યારે તેમાં વાસ્તવિક પ્રવાહઘનતા $\vec{J}$ અને ચુંબકીય પ્રવાહઘનતા $\vec{J}_m$ બંને હાજર હોય છે. તેથી ગણતરીમાં એમ્પિયરના નિયમમાં બંને પ્રવાહનો ઉપયોગ કરવો પડશે.

$$\therefore \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m)$$

હવે, $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$ મુકતાં,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \nabla \times \vec{M}] \quad \text{--- (1)}$$

$$\therefore \nabla \times (\underbrace{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}_{\mu_0 H}) = \mu_0 \vec{J} \quad \text{--- (2)}$$

આપણે, જાણીએ છીએ કે,

$$\underline{\vec{B} - \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H}} \quad \text{or} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{M} + \vec{H}) \quad \text{--- (3)}$$

સમી. (2) માં સમી. (3) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\therefore \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad \text{--- (4)}$$

જે એમ્પિયરના નિયમનું નવું સ્વરૂપ છે. જે શૂન્યાવકાશ અને માધ્યમ બંનેમાં પળાય છે.

સમી. (4) પરથી,

$$\therefore \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\because \vec{B} = \mu_0 \vec{H})$$

સંકલન સ્વરૂપમાં

$$\int \nabla \times \vec{H}\, \hat{n}_n\, ds = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J}\, \hat{n}_n \cdot ds$$

$$\therefore \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{--- (5)}$$

H ને ચુંબકીયક્ષેત્રની તીવ્રતા કહે છે. સમી. (5) નો ઉપયોગ કરી H નું પરિમાણ Amper·meter^{-1} મેળવી શકાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે જેમ ચુંબકીયક્ષેત્રમાં $\vec{B}$ છે. એવું જ વિદ્યુતક્ષેત્રમાં $\vec{E}$ છે. તેથી $\vec{H}$ એ ઇલેક્ટ્રિક ડીસ્પ્લેસમેન્ટ સદિશ $\vec{D}$ જેવો છે. મોટાભાગે આપણે $\vec{B}$ નો ઉપયોગ કરીએ છીએ કારણ કે $\vec{B}$ એ વાસ્તવિક પ્રવાહઘનતા $\vec{J}$ અને ચુંબકીય પ્રવાહઘનતા $\vec{J}_m$ ના સરવાળા સાથે સંબંધ ધરાવે છે. જ્યાં $\vec{H}$ એટલે કે (પણ) $\vec{H}$ એ વાસ્તવિક પ્રવાહઘનતા વડે સીધી રીતે શોધી શકાય છે.

* ચુંબકીય સસેપ્ટીબીલિટી અને પરમીઆબિલિટી :

મોટાભાગના પદાર્થમાં મેગ્નેટાઈઝેશન $\vec{M}$ અને $\vec{H}$ નો સંબંધ રેખીય જેવા મળે છે જે નીચે મુજબ છે.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{——} \ (1)$$

અહીં χ_m એકમરહીત અચળાંક છે અને તેને દ્રવ્યની મેગ્નેટીક સસેપ્ટીબિલીટી કહે છે. સસેપ્ટીબિલિટી χ_m એ તાપમાનનું વિધેય છે. તેમ છતાં પણ, પેરામેગ્નેટીક પદાર્થો માટે તેનું મૂલ્ય નાનું અને ધન હોય છે. જ્યારે ડાયામેગ્નેટિક પદાર્થ માટે તેનું મૂલ્ય નાનું અને ઋણ હોય છે. અને ફેરો-મેગ્નેટિક પદાર્થ માટે (χ_m) તેનું મૂલ્ય મોટું અને ધન હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$
$$= \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H})$$
$$= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$
$$= \mu_0 \mu_r \vec{H} \qquad [\because \mu_r = (1 + \chi_m)]$$
$$\therefore \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{——} \ (2)$$

અહીં μ ને દ્રવ્યની મેગ્નેટીક પરમીઆબિલિટી કહે છે. અહીં, μ_0 શૂન્યવકાશની પરમીઆબિલિટી છે, $\mu_r = \mu/\mu_0$ ને માધ્યમની સાપેક્ષ પરમિઆબિલિટી કહે છે.

પેરામેગ્નેટિક પદાર્થ માટે $\mu > 1$

ડાયામેગ્નેટિક પદાર્થ માટે $\mu < 1$

ફેરોમેગ્નેટિક પદાર્થ માટે μ ની ખૂબ જ મોટી કિંમત જે આશરે 1000 છે. આ જ ધ્રુવીય ડાઈ-ઈલેક્ટ્રિક પદાર્થમાં હોય છે.

અહીં મેગ્નેટાઈઝ પદાર્થ માટે,

$$\vec{M} = \frac{Nm^2}{3kT} \vec{B} = \frac{Nm^2 \mu_0}{3kT} \vec{H} \quad \text{——} \ (3)$$

જ્યાં N એકમ કદ દીઠ અણુની સંખ્યા છે અને m એ સમી. (1) અને (3) વડે દરેક અણુ સાથે સંકળાયેલ કાયમી ચુંબકીય ડાઈપોલ મોમેન્ટ છે.

$$\therefore \chi_m = \frac{Nm^2 \mu_0}{3kT}$$

સીમા શરતો :

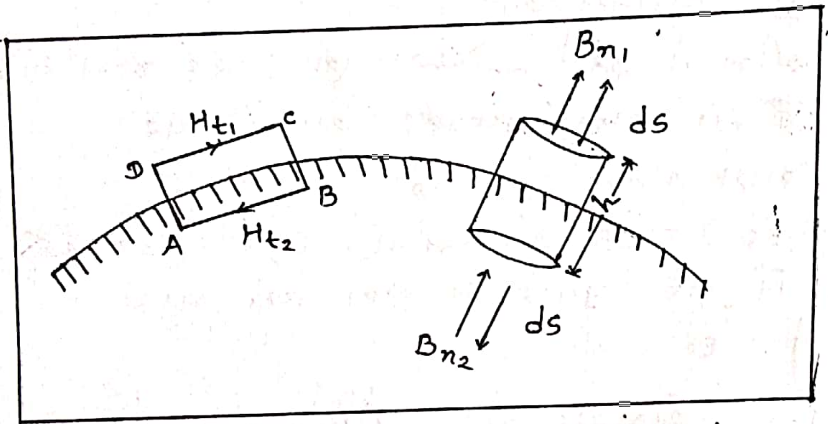
હવે આપણે, ચુંબકીય દ્રવ્યની અંદર અને બહારના $\vec{B}$ અને $\vec{H}$ ના મૂલ્યો વચ્ચેનો સંબંધ બે મૂળભૂત નિયમોનો ઉપયોગ કરી મેળવીશું.

પ્રથમ ગૉસના નિયમ, $\vec{B}$ બંધ રેખાઓ ધરાવે છે એટલે કે બંધ સપાટી સાથે સંકળાયેલ $\vec{B}$ નું ફ્લક્સ શૂન્ય છે.

$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ or ——— (1)

બીજો એમ્પિયરનો નિયમ કે જે,

$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$ ——— (2)



ઉપરની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ,

h ઊંચાઈની નળાકારીય સપાટીને સમી. (1) લાગુ પાડતાં,

$B_{n1}\Delta S - B_{n2}\Delta S = 0$ or

$\int \vec{B}_{n1}\cdot d\vec{S} - \int \vec{B}_{n2}\, d\vec{S} = 0$ ——— (3)

અહીં, B_{n1} એ નળાકારની ઉપરની સપાટીને લંબ $\vec{B}$ નો સરેરાશ ઘટક છે. અને B_{n2} એ નળાકારની નીચેની સપાટીને લંબ અંદર તરફ જતો $\vec{B}$ નો સરેરાશ ઘટક છે. નળાકારની વક્રસપાટી પર $\vec{B}$ નું સંકલન શૂન્ય થશે કારણ કે વક્રસપાટી આગળ $\vec{B} \perp \Delta\vec{S}$ ($\because \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int B\cdot ds\cos 90^\circ = 0$) ઉપરની અને નીચેની સપાટી આગળ $B_{n1} \parallel \Delta S$ અને $B_{n2} \parallel \Delta S$ હોવાથી સમી. (3) મુજબ,

$B_{n1} = B_{n2}$ ——— (4)

તેથી, $\vec{B}$ ના ઉપરની અને નીચેની સપાટી આગળ તેના સરેરાશ લંબ ઘટકો B_{n1} અને B_{n2}. દ્રવ્યની અંદર અને બહાર સમાન થશે. જુદી જુદી પરમીઆબિલિટીના બે માધ્યમોને જુદી પાડતી સપાટી આગળ સમી. (4) માન્ય છે.

હવે, એમ્પીયરનો નિયમ આકૃતિમાં દર્શાવેલ પથ AB ને લાગુ પાડતાં અને $AB = \Delta l$ લેતાં તથા બહારના CD માર્ગ માટે $\vec{H}$ tangent નું સરેરાશ મૂલ્ય H_{t_1} અને અંદરના AB માર્ગ માટે $\vec{H}$ tangent નું સરેરાશ મૂલ્ય H_{t_2} લેતાં,

$$H_{t_1}\Delta l - H_{t_2}\Delta l = I \quad \text{or} \quad \oint H\,dl = I \qquad \text{——} (5)$$

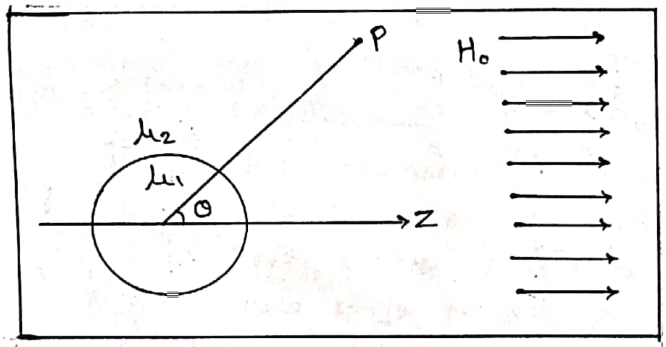
અહીં AD અને BC માર્ગ પર તેનું મૂલ્ય શૂન્ય થશે. હવે, પ્રવાહ શૂન્ય થાય તો,

$$H_{t_1} = H_{t_2}$$

ઇલેક્ટ્રોસ્ટેટીક્સ અને મેગ્નેટોસ્ટેટીક્સમાં સીમા શરતોની સરખામણી કરતાં રસપ્રદ બાબત એ છે કે,

1. $\vec{B}$ નો સામાન્ય ઘટક સીમાને ફરતે ચોક્કસપણે (દરેક જગ્યાએ) સતત હોય છે. જ્યારે $\vec{D}$ નો સામાન્ય ઘટક સપાટી પર વિ.ભાર ન હોય ત્યાં માત્ર સતત હોય છે.
2. $\vec{E}$ ના tangential (લંબ) ઘટક ચોક્કસપણે (દરેક જગ્યાએ) સતત હોય છે. જ્યારે $\vec{H}$ પૃષ્ઠ પ્રવાહ ન હોય ત્યાં માત્ર સીમાને ફરતે સતત હોય છે.

* બાહ્ય ચુંબકીયક્ષેત્રમાં સમચુંબકીય ગોળો :



આકૃતિમાં સમાન ચું.ક્ષેત્ર H_0 માં મૂકેલ ગોળો છે. H_0 ની દિશા Z-અક્ષની દિશામાં છે. ગોળાની અંદર અને બહારની પરમીઆબિલિટી અનુક્રમે μ_1 અને μ_2 લો.

ગોળાની અંદર અને બહારનું સ્થિતિમાન અનુક્રમે ϕ_1 અને ϕ_2 નીચે પ્રમાણે ધારો.

$$\phi_1 = -H_1 r\cos\theta \quad (r < a) \qquad \text{——} (1)$$

$$\phi_2 = -H_0 r\cos\theta + A r^{-2}\cos\theta \quad (r > a) \qquad \text{——} (2)$$

જ્યાં H_1 ગોળાની અંદરનું ચું.ક્ષેત્ર છે. અને θ એ ત્રિજ્યાની દિશામાંના સદિશો ચું.ક્ષેત્ર સાથે બનાવેલ ખૂણો છે. અહીં નોંધનીય બાબત એ છે કે ϕ_1 માં $r^{-2}\cos\theta$ પદને ધ્યાનમાં લીધું નથી. કારણ કે તેને ધ્યાનમાં લેતાં $r = 0$

...ળ ϕ_1 અનંત બની જાય છે. આ પરથી શરત એ છે કે
...ને tangential (લંબ) ઘટક સપાટી આગળ સતત છે જે
...શાવે છે કે

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \text{જ્યાં } r = a \text{ છે.}$$

અહીં, $-H_1 a\cos\theta = -H_0 a\cos\theta + Aa^{-2}\cos\theta$

એટલે કે, $H_1 = H_0 - Aa^{-3}$ —— ③ (∵ Aa^{-2} ને પક્ષ ગુણાકાર કરતાં)

આપણે ધારીશું કે, મેગ્નેટાઈઝેશન $\vec{M}$, ગોળાની અંદર H_0 ને સમાંતર છે અને બે ઘટકો મળશે. ① કાયમી ઘટક $\vec{M}_0$ અને ② $\vec{H}_1$ ક્ષેત્ર વડે પ્રેરિત ઘટક જે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય છે.

$$\vec{M}' = \chi_m \vec{H}_1 = (\mu_1 - 1)H_1$$

$$\therefore \vec{M}_1 = (\mu_1 - 1)\vec{H}_1 + \vec{M}_0$$

અહીં,
$$\vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M}_1)$$
$$= \mu_0\{\vec{H}_1 + (\mu_1 - 1)\vec{H}_1 + \vec{M}_0\}$$
$$= \mu_0\mu_1\vec{H}_1 + \mu_0\vec{M}_0 \quad \text{—— ④}$$

અને $\vec{B}_2 = \mu_0\mu_2\vec{H}_0$ —— ⑤

$\vec{B}$ ના ત્રિજ્યાવર્તી ઘટકો :

$$-\mu_0\mu_1\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right) + \mu_0\vec{M}_0\cos\theta = \mu_0(\mu_1\vec{H} + \vec{M}_0)\cos\theta$$
(અંદરની બાજુ)

અને
$$-\mu_0\mu_2\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\right) = \mu_0\mu_2(\vec{H}_0 + 2Aa^{-3})\cos\theta$$
(બહારની બાજુ)

સીમાશરતોનો ઉપયોગ કરતાં, $r = a$ આગળ આ બંને ઘટકો એકબીજાને સમાન થશે.

$$\mu_0(\mu_1\vec{H}_1 + \vec{M}_0)\cos\theta = \mu_0\mu_2(\vec{H}_0 + 2Aa^{-3})\cos\theta$$

$$A = \frac{H_0 - H_1}{a^{-3}}$$

$$\therefore \mu_0\vec{H}_1 + \vec{M}_0 = \mu_2\vec{H}_0 + 2\mu_2(\vec{H}_0 - \vec{H}_1)$$

$$\therefore (\mu_1 + 2\mu_2)\vec{H}_1 = 3\mu_2\vec{H}_0 - \vec{M}_0$$

$$\vec{H}_1 = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}\vec{H}_0 - \frac{1}{\mu_1 + 2\mu_2}\vec{M}_0 \quad \text{—— ⑥}$$

$$\vec{H}_d = \vec{H}_1 - \vec{H}_0 \quad \text{—— ⑦}$$

આ તફાવતને ડાયામેગ્નેટિક ક્ષેત્ર કહે છે.