

B.Sc.  
SEMESTER - II

MULTI PHYSICS 203  
UNIT - 1(b)

MAJOR PHYSICS 201  
UNIT - 3(b)

NETWORK THEOREMS  
(જાળનાં પ્રમેયો)

By, PROF. K.C. MEVADA

Major  
Unit-III(b) NETWORK THEOREMS MULTI  
Unit-I(b)

⇒ Superposition Theorem

⇒ Thevenin's Theorem

⇒ Norton's Theorem

⇒ Maximum Power Transfer Theorem.

Basic Reference Book :

Electricity and Magnetism

By, K. K. Tiwari

(S. Chand & Company Ltd.)

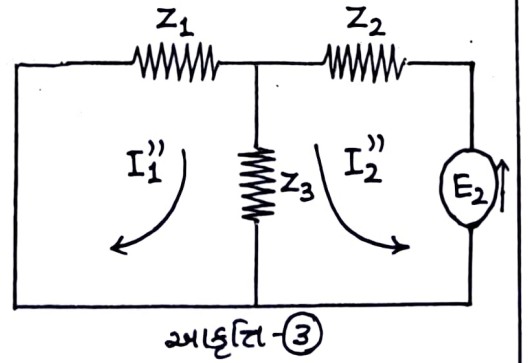
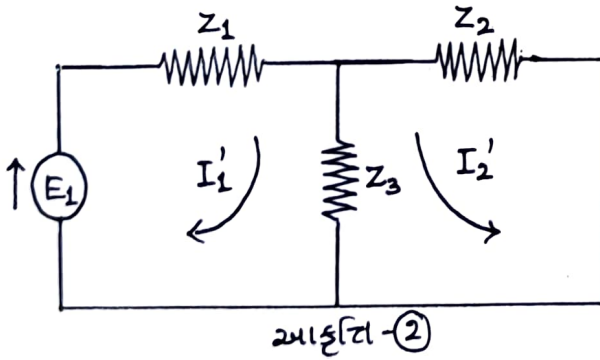
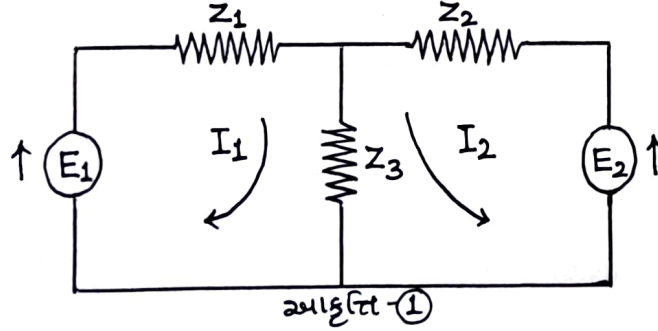
Que. 80 આધારોપણનું પ્રમેય (Superposition Theorem) લખો અને યોગ્ય ઉદાહરણ આપી સમજાવો.

“એક કરતાં વધારે ઉર્જા ઉદ્દામો અને ઈમ્પેડન્સ ધરાવતા કોઈપણ સુરેખ કાળાંત્રમાં કોઈપણ ઘટકમાંથી વહેતો વિદ્યુતપ્રવાહ, દરેક ઉર્જા ઉદ્દામમાંથી તે ઘટકમાં અલગ રીતે વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહોના સદિશ સરવાળા જેટલો હોય છે.”

અહીં ક્યારે એક જ ઉર્જા ઉદ્દામ લઈએ છીએ ત્યારે બાકીના બધા ઉદ્દામો દૂર કરી માત્ર તેમના આંતરિક ઈમ્પેડન્સને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે.

આ પ્રમેયને સમજવા માટે બે વોલ્ટેજ ઉદ્દામો  $E_1$  અને  $E_2$  તથા ત્રણ ઈમ્પેડન્સ  $Z_1, Z_2$ , અને  $Z_3$  ધરાવતું નેટવર્ક વિચારો. આકૃતિ (1), (2) અને (3) દ્વારા આધારોપણ પ્રમેય સમજાવી શકાય છે પ્રમેય મુજબ, અત્રે  $I_1 = I_1' + I_1''$

$$\text{અને } I_2 = I_2' + I_2''$$



આકૃતિ (1) માટે કિર્ચોફના બીજા નિયમ મુજબ,

$$E_1 = I_1 Z_1 + I_1 Z_3 + I_2 Z_3 \quad \therefore E_1 = I_1 (Z_1 + Z_3) + I_2 Z_3 \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{અને } E_2 = I_1 Z_3 + I_2 Z_2 + I_2 Z_3 \quad \therefore E_2 = I_1 Z_3 + (Z_2 + Z_3) I_2 \quad \text{--- (2)}$$

હવે આકૃતિ (2) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે માત્ર  $E_1$  ઉદ્દામ જોડેલ હોય ત્યારે

$$E_1 = I_1' (Z_1 + Z_3) + I_2' Z_3 \quad \text{--- (3)}$$

$$\text{અને } 0 = I_1' Z_3 + I_2' (Z_2 + Z_3) \quad \text{--- (4)}$$

આ જ પ્રમાણે આકૃતિ (3) માં જ્યારે માત્ર  $E_2$  ઉદ્દામ કોડેલ હોય ત્યારે

$$0 = I_1'' (Z_1 + Z_3) + I_2'' Z_3 \quad \text{--- (5)}$$

$$\text{અને } E_2 = I_1'' Z_3 + I_2'' (Z_2 + Z_3) \quad \text{--- (6)}$$

હવે સમી. (3) અને (5) નો સરવાળો કરતાં,  $E_1 = (I_1' + I_1'')(Z_1 + Z_3) + (I_2' + I_2'')Z_3$

આ સમી. ને સમી. (1) સાથે સરખાવતાં  $I_1 = I_1' + I_1''$  તથા  $I_2 = I_2' + I_2''$

આ જ રીતે સમી. (4) અને (6) નો સરવાળો લેતાં,  $E_2 = (I_1' + I_1'')Z_3 + (I_2' + I_2'')(Z_2 + Z_3)$

આ સમી. ને સમી. (2) સાથે સરખાવતાં

$$\boxed{I_1 = I_1' + I_1''} \quad \text{અને} \quad \boxed{I_2 = I_2' + I_2''}$$

જે આદ્યારોપણ પ્રમેયને સાબિત કરે છે.

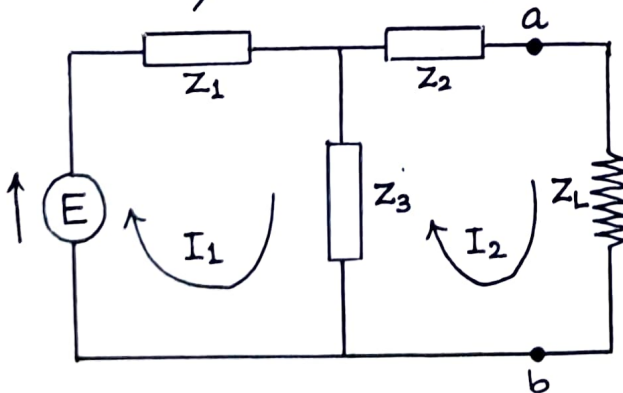
**Que. ૦૦ થેવેનિનનું પ્રમેય લખો અને યોગ્ય ઉદાહરણ આપી સમજાવો.**

"વોલ્ટેજ ઉદ્દામ અને ઈમ્પેડન્સ ધરાવતાં બે ટર્મિનલવાળાં કોઈપણ મુરોમ જાળાંત્રને સ્થાને સમતુલ્ય વોલ્ટેજ ઉદ્દામ  $E'$  અને ઈમ્પેડન્સ  $Z'$  ને શ્રેણીમાં ધરાવતું સાદું જાળાંત્ર મૂકી શકાય છે"

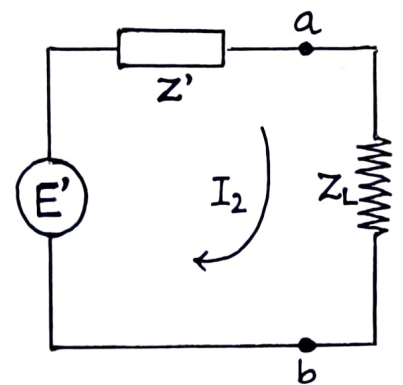
જ્યાં  $E'$  એ જાળાંત્રના બે છેડા વચ્ચેનો વોલ્ટેજ (Open circuit voltage) દર્શાવે છે.

વોલ્ટેજ ઉદ્દામને લઘુપથિત (short circuit) કરીને તેના સ્થાનેઆંતરિક ઈમ્પેડન્સ કોડીને જાળાંત્રના બે છેડા વચ્ચેનો પરિણામી ઈમ્પેડન્સ  $Z'$  મેળવવા માં આવે છે.

પ્રમેય સમજવા આકૃતિ (1) માં દર્શાવેલ પરિપથ ધ્યાનમાં લો.



આકૃતિ (1)



આકૃતિ (2)

(થેવેનિન સમતુલ્ય પરિપથ)

આકૃતિ ① ના સક્રિય અને નિષ્ક્રિય બંધ પરિપથને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લાગુ પાડતો,

$$(Z_1 + Z_3) I_1 - I_2 Z_3 = E \quad \text{-----} \textcircled{1}$$

$$\text{અને } (Z_2 + Z_3 + Z_L) I_2 - I_1 Z_3 = 0 \quad \text{-----} \textcircled{2}$$

સમી. ② પરથી,  $I_1 = \frac{(Z_2 + Z_3 + Z_L) I_2}{Z_3}$  કિંમત સમી. ① માં મૂકતો,

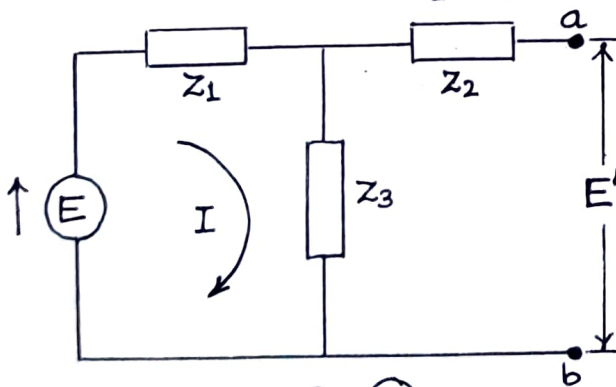
$$(Z_1 + Z_3) \frac{(Z_2 + Z_3 + Z_L) I_2}{Z_3} - I_2 Z_3 = E$$

$$\therefore (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3 + Z_L) I_2 - Z_3^2 I_2 = E Z_3 \quad (\because Z_3 \text{ વડે ગુણતાં})$$

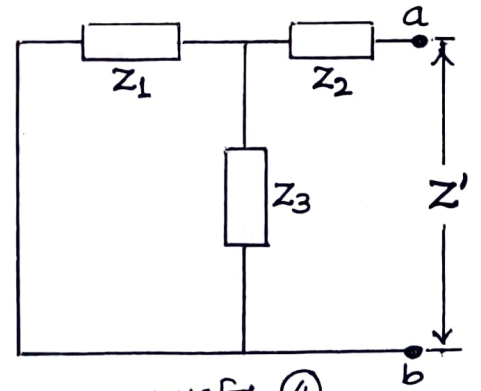
$$\therefore I_2 = \frac{E Z_3}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3 + Z_L) - Z_3^2}$$

$$\text{હવે } I_2 = \frac{E Z_3 / (Z_1 + Z_3)}{(Z_2 + Z_3 + Z_L) - \frac{Z_3^2}{(Z_1 + Z_3)}} \quad \left( \because \text{અંશ તથા છેદને } (Z_1 + Z_3) \text{ વડે લાગતાં} \right)$$

$$\therefore I_2 = \frac{E Z_3 / (Z_1 + Z_3)}{Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} + Z_L} \quad \text{-----} \textcircled{3}$$



આકૃતિ-③



આકૃતિ-④

આકૃતિ ① માં  $Z_L$  ને દૂર કરી ટર્મિનલ a અને b વચ્ચેનો ઓપન સર્કિટ વોલ્ટેજ  $E'$  આકૃતિ ③ માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે માપી શકાય છે. અહીં  $Z_2$  ને સમાંતર કોઈ વોલ્ટેજ નથી લેથી ઓપનના નિયમ મુજબ પ્રવાહ

$$I = \frac{E}{Z_1 + Z_3} \quad \text{અને આ પરથી ઓપન સર્કિટ વોલ્ટેજ}$$

$$E' = I Z_3$$

$$\therefore E' = \frac{E Z_3}{(Z_1 + Z_3)} \quad \text{-----} \textcircled{4}$$

આકૃતિ ① માં  $Z_L$  ને દૂર કરી તથા ઉદ્દામ  $E$  ને લઘુપથિત (short circuit) કરીને ટર્મિનલ  $a$  અને  $b$  વચ્ચેનો સમતુલ્ય ઇમ્પેડન્સ  $Z'$  મેળવવામાં આવે છે જે આકૃતિ ④ માં દર્શાવેલ છે. આ પરિપથમાં  $Z_1$  અને  $Z_3$  ના સમાંતર જોડાણ સાથે  $Z_2$  શ્રેણીમાં જોડાયેલ છે તેથી,

$$Z' = Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} \quad \text{⑤} \quad \left( \because \frac{1}{Z_1 \parallel Z_3} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3} \right)$$

સમી. ④ અને ⑤ પરથી સમી. ③ નીચે મુજબ લખી શકાય:

$$I_2 = \frac{E'}{Z' + Z_L} \quad \text{⑥}$$

હવે સમતુલ્ય પરિપથ (આકૃતિ ②) પરથી, પ્રવાહ

$$I_2 = \frac{E'}{Z' + Z_L} \quad \text{⑦}$$

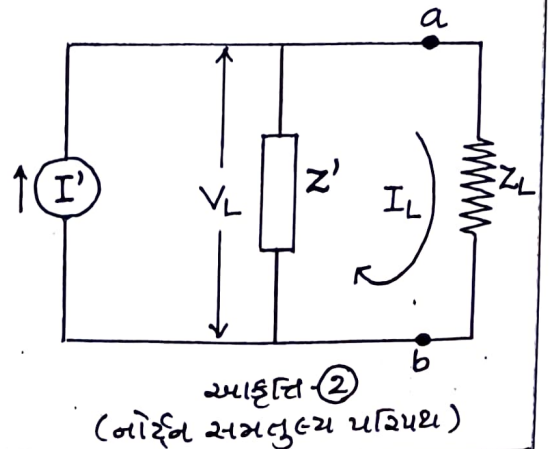
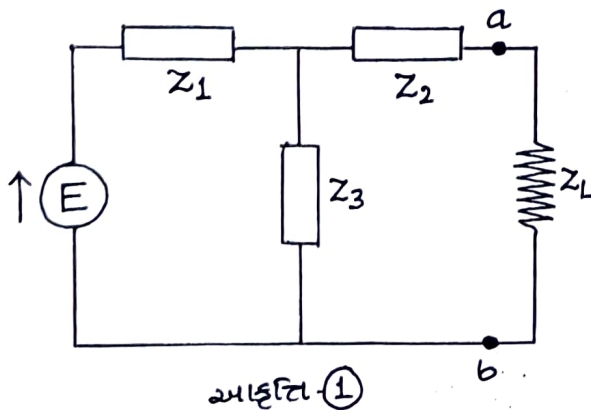
સમી. ⑥ અને ⑦ સમાન છે જે પ્રમેયને સાબિત કરે છે.

**Que. 80 નોર્ટનનું પ્રમેય લખો અને યોગ્ય ઉદાહરણ આપી સમજાવો.**

“વોલ્ટેજ ઉદ્દામો અને ઇમ્પેડન્સ ધરાવતાં બે ટર્મિનલવાળાં કોઈપણ સુરેખ કાળતંત્રને સ્થાને વિદ્યુતપ્રવાહ ઉદ્દામ  $I'$  અને ઇમ્પેડન્સ  $Z'$  ને સમાંતરમાં ધરાવતું સાદું કાળતંત્ર મૂકી શકાય છે.”

જ્યાં  $I'$  એ કાળતંત્રના ટર્મિનલો વચ્ચેનો લઘુપથિત વિદ્યુતપ્રવાહ (short circuit current) દર્શાવે છે

અને  $Z'$  એટલે ઉદ્દામને દૂર કરી તેના સ્થાને આંતરિક ઇમ્પેડન્સ જોડીને કાળતંત્રના બે છેડા વચ્ચેનો પરિણામી ઇમ્પેડન્સ.

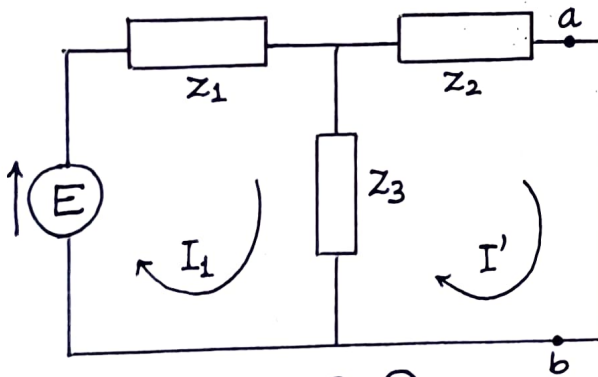


આ પ્રમેય સમજવા આકૃતિ ① માં દર્શાવેલ કાળતંત્ર દ્યાનમાં લો.  
નોર્ટનના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને આકૃતિ ② માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો  
સમતુલ્ય પરિપથ મેળવી શકાય છે આ સમતુલ્ય પરિપથમાં લોડ ઇમ્પેડન્સ  
 $Z_L$  માંથી પસાર થતો પ્રવાહ,  $I_L = \frac{V_L}{Z_L}$  ————— ①

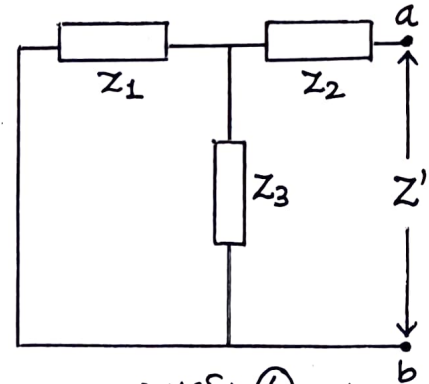
ઓહમના નિયમ પરથી લોડ ઇમ્પેડન્સને સમાંતર મળતો વોલ્ટેજ,  
 $V_L = I' Z$       જ્યાં  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z'} + \frac{1}{Z_L}$  અથવા  $Z = \frac{Z' Z_L}{Z' + Z_L}$

$$\therefore V_L = I' \frac{Z' Z_L}{Z' + Z_L} \quad \text{તેથી} \quad I_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{I' Z'}{Z' + Z_L} \quad (\because \text{સમ. ①})$$

$$\text{આથી, } I_L = \frac{I'}{1 + Z_L/Z'} \quad \text{————— ②}$$



આકૃતિ-③



આકૃતિ-④

કાળતંત્રના બે ટર્મિનલને લઘુપથિત કરી આકૃતિ-③ માં દર્શાવ્યા  
પ્રમાણે લઘુપથિત વિદ્યુતપ્રવાહ  $I'$  માપી શકાય છે. આકૃતિ-③ ના બંને  
બંધ પરિપથોને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લાગુ પાડતો,

$$I_1(Z_1 + Z_3) - I' Z_3 = E$$

$$\text{અને } I'(Z_2 + Z_3) - I_1 Z_3 = 0 \quad \therefore I_1 = \frac{(Z_2 + Z_3) I'}{Z_3} \quad \begin{matrix} \text{કિંતવ પ્રથમ} \\ \text{સમી.માં મૂકતો,} \end{matrix}$$

$$(Z_1 + Z_3) \frac{(Z_2 + Z_3) I'}{Z_3} - I' Z_3 = E$$

$$\therefore (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) I' - Z_3^2 I' = E Z_3$$

$$\therefore I' = \frac{E Z_3}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2}$$

$$\therefore I' = \frac{E Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \quad \text{————— ③}$$

આકૃતિ-① માં ઉદ્દગમનો લઘુપથિત કરી 2ર્મિનલ a અને b વચ્ચેનો સમતુલ્ય ઈમ્પેડન્સ  $Z'$  આકૃતિ-④ પરથી નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે:

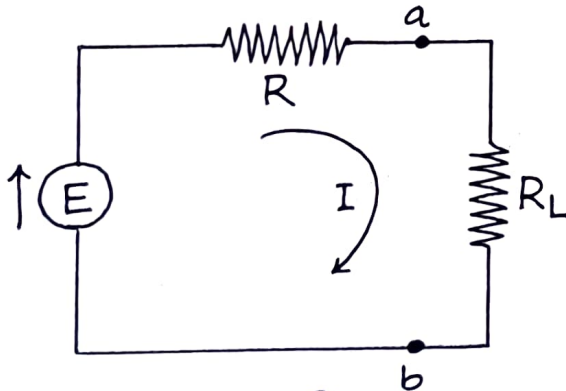
$$Z' = Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} \quad \text{----- ④}$$

તેથી  $I'$  અને  $Z'$  ની કિંમત જાણ્યા પછી સમી. ② પરથી લોડ ઈમ્પેડન્સ માંથી પસાર થતો પ્રવાહ  $I_L$  મેળવી શકાય છે.

### Que. 80 મહત્તમ ઉર્જા સંક્રમણ પ્રમેય લખો અને સમજાવો.

વિદ્યુતપરિપથમાં ઉદ્દગમમાં ઉર્જા ઉત્પન્ન થાય છે અને ઉદ્દભાર (load) આ ઉર્જાનું શોષણ કરે છે અહીં ઉદ્દભારમાં વધુમાં વધુ ઉર્જાનું શોષણ થાય તે જરૂરી છે આ માટેની શરત આ પ્રમેય વડે જાણી શકાય છે.

"જ્યારે લોડ અવરોધનું મૂલ્ય, ઉર્જા ઉદ્દગમના આંતરિક અવરોધને સમાન થાય ત્યારે જાળતંત્રમાંથી મહત્તમ ઉર્જાનું સંક્રમણ થાય છે."



આકૃતિ-①

આકૃતિ① માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું બે 2ર્મિનલવાળું નેટવર્ક વિચારો.

જૂલના નિયમ પ્રમાણે, લોડ અવરોધ પાસે મળતો પાવર (ઉર્જા)

$$P = I^2 R_L$$

$$P = \left( \frac{E}{R + R_L} \right)^2 R_L \quad \text{----- ①}$$

$$\therefore P = \frac{E^2 / R_L}{(1 + R/R_L)^2} \quad \text{----- ②}$$

જ્યારે ઉર્જા ઉદ્દગમનો આંતરિક અવરોધ શૂન્ય હશે ત્યારે લોડ અવરોધ પાસે મળતો પાવર મહત્તમ બનશે

આથી જ્યારે  $R = 0$  ત્યારે  $P = P_M = E^2 / R_L$  જ્યાં  $P_M$  મહત્તમ પાવર આ કિંમત સમી. ② માં મૂકતાં,

$$P = \frac{P_M}{(1 + R/R_L)^2} \quad \text{----- ③}$$

સમી. ③ દર્શાવે છે કે  $P < P_m$ . સમી. ① પરથી સ્પષ્ટ છે કે ક્યારે લોડ અવરોધ  $R_L$  ની કિંમત ઘણી નાની લઈએ ત્યારે પાવરનું મૂલ્ય ન્યૂનતમ (કેશૂન્ય) થશે તે જ રીતે લોડ અવરોધ  $R_L$  ની કિંમત ઘણી મોટી લઈએ તો પણ પાવર ન્યૂનતમ થશે. આથી  $R_L$  ની અમુક ચોક્કમ કિંમત એવી મળવી જોઈએ કે જેના માટે  $R_L$  માં મળતો પાવર મહત્તમ થાય.

મહત્તમ ઉર્જા સંક્રમણ માટે ( $R_L$  ની ચોક્કમ કિંમત શોધવા)  
 $\frac{dP}{dR_L} = 0$  થવું જોઈએ.

સમી. ① પરથી  $P = E^2 \frac{R_L}{(R+R_L)^2}$

$$\therefore \frac{dP}{dR_L} = \frac{E^2}{(R+R_L)^2} - \frac{2E^2 R_L}{(R+R_L)^3} = 0$$

$$\therefore \frac{E^2}{(R+R_L)^2} = \frac{2E^2 R_L}{(R+R_L)^3}$$

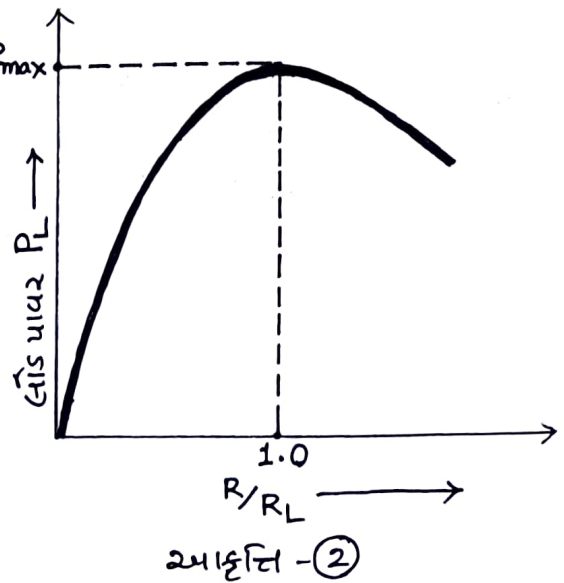
$$\therefore R + R_L = 2R_L$$

$$\therefore \boxed{R = R_L} \text{-----} \text{④}$$

સમી. ④ મહત્તમ ઉર્જા સંક્રમણની જરૂરી શરત દર્શાવે છે કે પ્રમેયને સાબિત કરે છે.

જો લોડ પાવર વિરુદ્ધ  $R/R_L$   $P_{max}$  નો આલેખ દોરવામાં આવે તો તે આકૃતિ ② માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે નો વફ મળશે.

સમી. ① માં  $R = R_L$  લેતાં,  
 $P_{max} = \frac{E^2}{4R_L}$  થશે.



પ્રો. કે. મી. મેવાડા