Schrodinger Equations:→

પ્રસ્તાવના:→

કોઈપણ કણને અનુલક્ષીને જો તરંગપેકેટ તૈયાર કરવું હોય તો તે તરંગ પેકેટમાં જુદા જુદા હાર્મોનિક ઘટકો કેટલા પ્રમાણમાં આવે છે તે જાણવું જોઈએ. ત્યાર પછી આવા ઘટકોના સતત સરવાળા વડે જ તરંગ પેકેટ બની શકે. એક પરિમાણમાં ગતિ કરતા કણને તરંગ પેકેટ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

જો કોઈ કણ સાથે ડી-બ્રોગ્લી તરંગ સંબંધિત હોય તો તરંગ તીવ્રતા કણ પાસેના મર્યાદિત વિસ્તાર પૂરતી જ હોવી જોઈએ. આ મર્યાદિત વિસ્તારમાં રહેલા અનેક હાર્મોનિક તરંગોના સંપાતીકરણ વડે બનેલા તરંગોને તરંગ પેકેટ (પડકાઓ) કહે છે.

જો કણ અવકાશમાં ગતિ કરતું હોય તો કણ સાથે સંયોજિત તરંગ પેકેટ પણ ગતિ કરતું હોય. આમ તેઓ અવકાશીય યામો અને સમય પર પણ આધાર રાખતા હોય. આવા તરંગ પેકેટ e^{ikx} હાર્મોનિક તરંગોને બદલે $e^{i(kx-\omega t)}$ પ્રકારના હાર્મોનિક તરંગના સંપાતીકરણ વડે મેળવી શકાય.

જ્યાં k = તરંગ સદિશ

ω = કોણીય આવૃત્તિ.

શ્રોડિંજરે તરંગ-કણના વિચાર ઉપરથી તરંગ સમીકરણો મેળવ્યા. આપણે પ્રથમ મુક્ત કણ માટે શ્રોડિંજરનું સમી. મેળવીશું.

એક પરિમાણમાં ગતિ કરતા મુક્ત કણ માટેનું શ્રોડિંજર સમીકરણ:→

એક પરિમાણમાં v જેટલા વેગથી ગતિ કરતો મુક્ત કણ વિચારો. જેનું વેગમાન p અને ઊર્જા E છે.

$$p = mv \qquad (1)$$

તથા

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \qquad (2)$$

દ્રવ્ય કણ મુક્ત હોવાથી તેના પર બળો લાગતા નથી. તેથી દ્રવ્યકણને સ્થિતિ ઊર્જા નથી. તેની સમગ્ર ઊર્જા ગતિઊર્જાના સ્વરૂપમાં છે.

ડી-બ્રોગ્લી અધિતર્ક મુજબ.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$p = \hbar k \qquad \left(\because \hbar = \frac{h}{2\pi},\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{તરંગસદિશ}\right) \qquad (3)$$

તથા

$$E = h\nu \qquad (\omega = 2\pi\nu = 2\pi f = \text{કોણીય આવૃત્તિ})$$

$$= \frac{h}{2\pi} \times 2\pi\nu$$

$$E = \hbar\omega \quad \text{---------} (4)$$

સમી (3) અને (4) ના મૂલ્યો સમી (2) માં મૂકતાં

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\frac{\omega}{k^2} = \frac{\hbar}{2m} \quad \text{---------} (5)$$

મુક્ત કણ સાથે સંકળાયેલ સરળ (આવર્ત) તરંગને તરંગવિધેય ψ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આવા હાર્મોનિક તરંગોનું સ્વરૂપ $\cos(kx-\omega t)$ અથવા $\sin(kx-\omega t)$ વડે અથવા વધારે વ્યાપક રીતે બંનેના રેખીય સંયોજન વડે દર્શાવી શકાય છે. ψ એ સ્થાન (x) અને સમય (t) નું વિધેય છે.

$$\therefore \psi(x,t) = a\cos(kx-\omega t) + b\sin(kx-\omega t) \quad \text{---------} (6)$$

જ્યાં a અને b (સ્થિરાંક) અચળાંકો છે.

સમી (6) નું x અને t ના સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -ak\sin(kx-\omega t) + bk\cos(kx-\omega t)$$

$$= k\left[-a\sin(kx-\omega t) + b\cos(kx-\omega t)\right] \quad \text{---------} (7)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = k\left[-ak\cos(kx-\omega t) - bk\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$= -k^2\left[a\cos(kx-\omega t) + b\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$= -k^2\psi \quad \text{---------} (8)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \omega a\sin(kx-\omega t) - \omega b\cos(kx-\omega t)$$

$$= -\omega\left[-a\sin(kx-\omega t) + b\cos(kx-\omega t)\right] \quad \text{---------} (9)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega\left[a\omega\cos(kx-\omega t) + b\omega\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$= -\omega^2\left[a\cos(kx-\omega t) + b\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$= -\omega^2\psi \quad \text{---------} (10)$$

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}}{\frac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{-\omega}{k} \quad \text{---------} (11)$$

તથા $\dfrac{\partial^2\phi/\partial t^2}{\partial^2\phi/\partial x^2} = \dfrac{\omega^2}{k^2}$

$$\therefore \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad \text{———} (12)$$

આ સમીકરણો દ્રવ્યતરંગોનું વર્ણન કરવા માટે સગવડ ભરેલા નથી કારણકે $E=\hbar\omega$ અને $p=\hbar k$.

$\therefore \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{E}{p} = \dfrac{p^2}{2m\times p} = \dfrac{p}{2m}$ જે વેગમાન પર આધાર રાખતો હોવાથી દ્રવ્યતરંગની જુદી જુદી સ્થિતિ માટે જુદો જુદો હોય છે. આપણે એવું સમીકરણ શોધવું છે કે જે વેગમાનની બધીજ કિંમતો માટે સંતોષાતું હોય.

ω/k વેગમાન પર આધાર રાખે છે પરંતુ ω/k^2 વેગમાન પર આધાર રાખતું નથી. (સમી. 5)

હવે આપણે એવું સમી. શોધવું જોઈએ જેમાં ω/k^2 અચળાંક છે. આ માટે $\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ ને $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ સાથે સરખાવવું જોઈએ. પરંતુ આ ત્યારેજ શક્ય બને કે જ્યારે આ સમી માં બ્રેકેટમાં રહેલા પદો અર્થાત્ $[-a\sin(kx-\omega t)+b\cos(kx-\omega t)]$ અને $[a\cos(kx-\omega t)+b\sin(kx-\omega t)]$ એકબીજાને સપ્રમાણમાં હોય. આ માટે બંનેમાં cosine પદોના સહગુણકોનો ગુણોત્તર અને sine પદોના ગુણકોનો ગુણોત્તર સમાન હોવો જોઈએ.

$$\frac{a}{b} = \frac{-b}{a} \qquad \left[\frac{b}{a} = \frac{-a}{b}\right]$$

$$b^2 = -a^2 \qquad b^2 = -a^2$$

$$\therefore b = \pm ia \qquad b = \pm ia$$

સમી. (6) માં $b = ia$ મૂકતાં

$$\phi(x,t) = a\cos(kx-\omega t) + ia\sin(kx-\omega t)$$

$$= a[\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)]$$

$$\phi(x,t) = a e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{———} (13)$$

આમ, p જેટલું વેગમાન ધરાવતા દ્રવ્યકણનાં દ્રવ્યતરંગો x અને t ના સંકર હાર્મોનિક વિધેયો વડે દર્શાવી શકાય છે. $b = -ia$ મૂકતાં ભૌતિક પરિણામમાં કોઈ ફેર પડતો નથી.

સમી. (13) નું વિકલન કરતાં

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -i\omega a e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{———} (14)$$

$$= -i\omega\phi$$

તથા $$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\,a\,e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i^2 k^2 a\,e^{i(kx-\omega t)}$$
$$= -k^2 \psi$$

હવે $$\frac{\omega}{k^2} = \frac{\hbar}{2m} \quad (\text{સમી. } 85)$$

$$\frac{k^2}{\omega} = \frac{2m}{\hbar}$$

$$k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$$ આ મૂલ્ય ઉપરના સમીકમાં મૂકતાં

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{2m\omega}{\hbar}\,\psi \quad \text{———} (15)$$

સમી. (14) અને (15) ઉપરથી

$$\frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} = \frac{-i\omega\psi}{-\dfrac{2m\omega}{\hbar}\,\psi}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

બંને બાજુ '$i\hbar$' વડે ગુણતાં

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i^2\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\therefore \boxed{i\hbar\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}} \quad \text{———} (16)$$

સમી. (16) એક પરિમાણમાં ગતિ કરતા દ્રવ્ય કણ માટેનું શ્રોડિંજર સમી છે.

શ્રોડિંજર સમીની વિશિષ્ટતાઓ :→

(1) ~~[illegible]~~ શ્રોડિંજર સમી. એ દ્વિતીય ક્રમનું રેખીય વિકલન સમી. છે.
$\psi(x,t) = \int a(k)\,e^{i(kx-\omega t)}\,dk$ તેનો (શ્રોડિંજર સમીનો) ઉકેલ છે. આથી માત્ર હાર્મોનિક તરંગો જ નહિ પરંતુ તેમના કોઈપણ રેખીય સંયોજનો પણ આ સમી.ના ઉકેલ છે.

(2) પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્રના વિકલ સમી કરતાં શ્રોડિંજર સમી જુદુ પડે છે. તેમાં કાલ્પનિક એકમ 'i' આવે છે. જે સૂચવે છે કે તરંગવિધેયો સંકર વિધેયો પણ હોઈ શકે છે.