UNIT I(b) CURVILINEAR CO-ORDINATES

PROF. K.C. MEVADA

QUE.:- વક્ર રેખીય યામો (Curvilinear Co-ordinates) સમજાવો.

Ans.: ⇒ ધારોકે આપેલા પ્રદેશમાં કાર્ટેઝિયન યામો x, y, z છે.

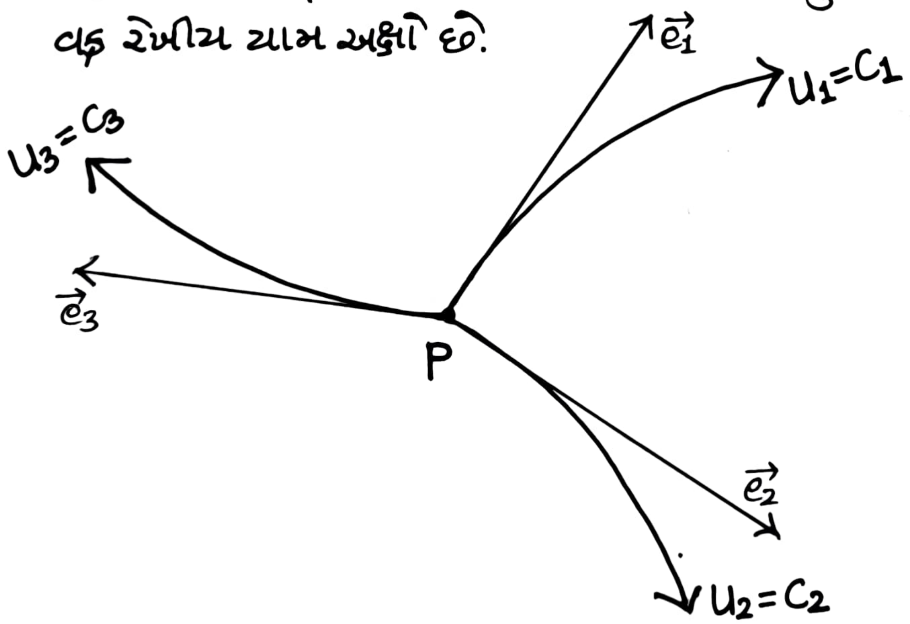
જો $u_1 = u_1(x,y,z)$, $u_2 = u_2(x,y,z)$, $u_3 = u_3(x,y,z)$ અને વ્યસ્ત રૂપાંતરો $x = x(u_1,u_2,u_3)$, $y = y(u_1,u_2,u_3)$, $z = z(u_1,u_2,u_3)$ હોય

તો આ પ્રદેશમાં દરેક બિંદુએ u_1, u_2, u_3 નો એક ગણ (set) અસ્તિત્વ ધરાવે છે અર્થાત (u_1, u_2, u_3) નો દરેક set આ પ્રદેશનું કોઈ એક બિંદુ તો દર્શાવતો હોય જ છે. આ u_1, u_2, u_3 ને વક્ર રેખીય યામો (curvilinear co-ordinates) કહે છે.

⇒ આ પ્રદેશના દરેક બિંદુમાંથી $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, $u_3 = c_3$ (c_1, c_2, c_3 અચળ)

ત્રણ પૃષ્ઠકુળોનું એક-એક પૃષ્ઠ પસાર થાય છે જે એકબીજાને ત્રણ વક્રોમાં છેદે છે આ દરેક વક્રને યામ વક્ર (coordinate curve) કહે છે.

⇒ $u_1 = c_1$ અને $u_2 = c_2$ નો છેદ u_3 વક્ર છે, જેના ઉપર માત્ર u_3 ચલ છે. યામવક્રોને તેમના સામાન્ય છેદન બિંદુએ દોરેલાં સ્પર્શકો વક્ર રેખીય યામ અક્ષો છે.



⇒ જેવી રીતે જુદાં-જુદાં સમતલોનાં છેદ વડે જુદાં-જુદાં અક્ષો મળે છે તેવી રીતે જુદી-જુદી બે વક્રસપાટીઓના છેદથી વક્ર રેખીય યામ મળે છે. આમ, વક્રસપાટીઓના છેદથી વક્ર રેખીય યામો પ્રાપ્ત થાય છે.

⇒ જ્યારે વક્ર રેખીય યામ પદ્ધતિની વાત કરતાં હોઈએ તો ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ કે યામિક સપાટીઓ u_1, u_2, u_3 સમતલોનથી પણ વક્રો હોય છે.

⇒ આપણે કાર્ટેઝિયન યામ પદ્ધતિ (x, y, z) માં સદિશ પૃથક્કરણ નાં સંબંધો જાણીએ છીએ પરંતુ ભૌતિકશાસ્ત્રના કેટલાક પ્રશ્નોનું નિરૂપણ અન્ય યામ પદ્ધતિમાં વધુ સરળ રીતે થઈ શકે છે તેથી આપણે એવી એક યામ પદ્ધતિ સંયોજવી જોઈએ કે જેના સદિશ સંબંધો વ્યાપક રૂપે મેળવી શકાય અને આ સદિશ સંબંધોનું રૂપાંતરણ પ્રશ્નને અનુરૂપ યામ પદ્ધતિથી કરી શકાય. આમ, જુદાજુદા કિસ્સાઓ માટે જુદી-જુદી યામ પદ્ધતિઓ અપનાવી શકાય.

⇒ બે પરિચિત યામ પદ્ધતિ કાર્ટેઝિયન (x, y, z) અને નળાકાર યામ પદ્ધતિ (r, θ, z) માં અંતર વર્ગના સૂત્રને નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{--- (1)}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad \text{--- (2)}$$

⇒ આપેલી યામ પદ્ધતિમાં ds^2 મેળવવા નીચેના રૂપાંતરિય સમીકરણો નો ઉપયોગ થાય છે :

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \text{--- (3)} \qquad \left.\begin{aligned} \therefore dx &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ \therefore dy &= \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \\ \therefore dz &= dz \end{aligned}\right\} \text{--- (4)}$$

⇒ ઉપરોક્ત સમીકરણ (4) નો વર્ગ કરી સમી. (1) માં મૂકતાં, સમી (2) મળે છે એટલે કે $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$

⇒ આ સમીકરણ મેળવવા માટે $dr\, d\theta$ જેવાં પદ નાબુદ થાય છે પરંતુ દરેક કિસ્સામાં આવું બનતું નથી. જે કિસ્સામાં ક્રોસ પ્રોડક્ટ નાબુદ થાય તેને લંબતંત્ર કહે છે. લંબતંત્રના યામ એકબીજાને પરસ્પર કાટખૂણે હોય છે આ પ્રકારના યામ તંત્રને લંબ વક્રરેખીય યામ તંત્ર કહે છે.

⇒ વક્ર રેખીય યામોને દોરવામાં આવેલાં સ્પર્શકો જો પરસ્પર લંબ હોય તો તે પ્રકારની વક્ર રેખીય યામ પદ્ધતિને લંબ વક્ર રેખીય યામ પદ્ધતિ કહે છે.

⇒ ધારોકે P બિંદુનો સ્થાન સદિશ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ છે. જ્યાં $\hat{i}, \hat{j}$ અને $\hat{k}$ એકમ સદિશો છે.

⇒ જો u_1 વક્રને સ્પર્શક દોરવામાં આવે તો તે $d\vec{r}/du_1$ થશે જે એક સદિશ છે બિંદુ P નું સ્થાન બદલાતાં તેની દિશા પણ બદલાઈ જાય છે આ દિશા માટે

એકમ સદિશ જો $\vec{e_1}$ હોય તો, $\vec{e_1} = \dfrac{d\vec{r}/du_1}{|d\vec{r}/du_1|}$ થાય.

$\therefore \dfrac{d\vec{r}}{du_1} = \vec{e_1}\left|\dfrac{d\vec{r}}{du_1}\right|$ હવે, $\left|\dfrac{d\vec{r}}{du_1}\right| = h_1$ લેવામાં આવે તો,

$\dfrac{d\vec{r}}{du_1} = \vec{e_1} h_1$ થાય.

⇒ તેજ રીતે $\dfrac{d\vec{r}}{du_2} = \vec{e_2} h_2$ અને $\dfrac{d\vec{r}}{du_3} = \vec{e_3} h_3$ થાય.

અહીં h_1, h_2, h_3 ને Scale Factors કહે છે.

⇒ જો $u_1 = c_1$ વક્રસપાટીને લંબ દિશામાં લીધેલો એકમ સદિશ $\vec{E_1}$ હોય તો,

$\vec{E_1} = \dfrac{\nabla u_1}{|\nabla u_1|}$ થાય

⇒ તેજ રીતે $u_2 = c_2$ અને $u_3 = c_3$ વક્રો માટે $\vec{E_2} = \dfrac{\nabla u_2}{|\nabla u_2|}$ અને $\vec{E_3} = \dfrac{\nabla u_3}{|\nabla u_3|}$ થાય

⇒ આમ, કોઈ P બિંદુ પાસે એકમ સદિશોના બે sets મેળવી શકાય જો તેઓ લંબચ્છેદી હોય તો આ બંને ગણો સમરૂપ હોય છે અને આ એકમ સદિશો ના sets ને $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ એકમ સદિશો સાથે સરખાવી શકાય છે. અહીં $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ એકમ સદિશોની દિશા બદલાતી નથી, જ્યારે એકમ સદિશો $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ ની દિશા બિંદુ P ના સ્થાન પર આધાર રાખે છે તેથી તેમના વિકલનોને શૂન્ય મૂકી શકતાં નથી.

QUE:- સ્કેલ ફેક્ટર્સ અને બેઝિસ વેક્ટર્સ (basis vectors) સમજાવો.

Ans.: ⇒ કાર્ટેઝિયન અને નળાકાર યામ પધ્ધતિમાં અંતર વર્ગના સૂત્રને નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

⇒ કાર્ટેઝિયન યામ પધ્ધતિ (x, y, z) માં જો y અને z અચળ રાખી x માં dx જેટલો ફેરફાર કરવામાં આવે તો સ્થાનાંતર $ds = dx$ થશે

⇒ પરંતુ નળાકાર યામ પધ્ધતિ (r, θ, z) માં જો r અને z ને અચળ રાખી θ માં $d\theta$ જેટલો સૂક્ષ્મ ફેરફાર કરવામાં આવે તો સ્થાનાંતર $ds = d\theta$ થતું નથી પરંતુ સ્થાનાંતર $ds = r\,d\theta$ જેટલું થાય છે અહીં r એ એવો અવયવ છે કે જેનો સ્થાનાંતર મેળવવા માટે ઉપયોગ થાય છે તેને સ્કેલ ફેક્ટર કહે છે.

⇒ યામ વિકલન સાથે ગુણાતાં પદને સ્કેલ ફેક્ટર કહે છે.

⇒ સામાન્ય રીતે, વક્રરેખીય યામ પદ્ધતિ(u_1, u_2, u_3) માં ds^2 નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય:

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i^2 \quad \text{(1)}$$

જ્યાં h_1, h_2, h_3 સ્કેલ ફેક્ટર્સ છે.

⇒ અહીં નોંધો કે ds^2 ના સમીકરણમાં સહગુણકો સ્કેલ ફેક્ટર્સના વર્ગ છે.

⇒ વક્રરેખીય યામોમાં સદિશ $\vec{ds}$ ને ધ્યાનમાં લેતો,

$$\vec{ds} = \vec{e_1} h_1 du_1 + \vec{e_2} h_2 du_2 + \vec{e_3} h_3 du_3 \quad \text{(2)}$$

જ્યાં $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ એ basis vectors તરીકે ઓળખાય છે.

⇒ ધારોકે $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ એ કોઈ બિંદુનો વક્રરેખીય યામ પદ્ધતિમાં સ્થાન સદિશ હોય તો આ બિંદુએ u_1 વક્રને દોરેલાં સ્પર્શક સદિશ $\vec{r_1}$ હોય તો,

$$\vec{r_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \quad (u_2, u_3 \text{ અચળ})$$

આ જ પ્રમાણે u_2 અને u_3 વક્રોને દોરેલાં સ્પર્શકો સદિશ $\vec{r_2}$ અને $\vec{r_3}$ હોય તો, $\vec{r_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}$ $(u_1, u_3 \text{ અચળ})$ $\quad$ $\vec{r_3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}$ $(u_1, u_2 \text{ અચળ})$

⇒ આમ, વ્યાપક રીતે લખતાં...

$$\vec{b_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad \text{(3)}$$

⇒ સમી. (3) માં $\vec{b_i}$ ને બેઇઝ વેક્ટર કહે છે.

⇒ હવે, બેઇઝ વેક્ટર $\vec{b_1}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ $\hat{e_1} = \dfrac{\partial \vec{r}/\partial u_1}{\left|\partial \vec{r}/\partial u_1\right|}$

$$\therefore \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \hat{e_1} \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| = \hat{e_1} h_1 \qquad \text{કારણકે } \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| = h_1 \text{ હોવાથી}$$

⇒ આ જ પ્રમાણે, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = \hat{e_2} h_2$ અને $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = \hat{e_3} h_3$

⇒ અહીં h_1, h_2, h_3 સ્કેલ ફેક્ટર્સ છે. તથા $\hat{e_1}, \hat{e_2}, \hat{e_3}$ બેઇઝ વેક્ટર્સની દિશામાંના એકમ સદિશો છે જે આપેલ બિંદુના સ્થાન પર આધાર રાખતાં હોવાથી તેમના વિકલનોને શૂન્ય મૂકી શકતો નથી.

⇒ કાર્ટેઝિયન યામ પદ્ધતિ (x, y, z) માટે સ્કેલ ફેક્ટર્સ $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ અને બેઝિસ વેક્ટર્સ $\vec{e_1} = \hat{i}, \vec{e_2} = \hat{j}, \vec{e_3} = \hat{k}$ છે.

⇒ નળાકાર યામ પધ્ધતિ (r, θ, z) માટે સ્કેલ ફેક્ટર્સ $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$ અને basis vectors $\vec{e_1} = \vec{e_r}$, $\vec{e_2} = \vec{e_\theta}$, $\vec{e_3} = \vec{e_z} = \hat{k}$ છે.

⇒ ગોલીય ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિ (r, θ, ϕ) માટે સ્કેલ ફેક્ટર્સ $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$ અને basis vectors $\vec{e_1} = \vec{e_r}$, $\vec{e_2} = \vec{e_\theta}$, $\vec{e_3} = \vec{e_\phi}$ છે.

QUE.: વક્રરેખીય લંબચ્છેદી (Orthogonal) યામોમાં સદિશ કારકો (Vector Operators) ટૂંકમાં સમજાવો.

Ans.: ⇒ મુખ્યત્વે કોયડાને અનુરૂપ યામ પધ્ધતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે જેમ કે, ગોલીય સંમિતિ ધરાવતા તંત્રો માટે ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. મોટા ભાગના પ્રશ્નોમાં કાર્ટેઝિયન યામ પધ્ધતિનો જ ઉપયોગ થાય છે. આ કાર્ટેઝિયન યામ પધ્ધતિનો કોઈ બીજી યામ પધ્ધતિમાં રૂપાંતર કરી શકાય છે. જેમ કે કાર્ટેઝિયન યામ પધ્ધતિમાં દર્શાવેલ grad ϕ $(\vec{\nabla}\phi)$, div $\vec{V}$ $(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})$ અને curl $\vec{V}$ $(\vec{\nabla}\times\vec{V})$ ના મૂલ્યોને વક્રરેખીય યામ પધ્ધતિમાં રૂપાંતર કરી શકાય.

⇒ વક્રરેખીય યામ પધ્ધતિમાં કોઈ બિંદુ P માટે ત્રણ યામોના સમૂહનો ગણ (set) મળે છે જેને $d\vec{r}/du_1$, $d\vec{r}/du_2$, $d\vec{r}/du_3$ તથા $\vec{\nabla}u_1$, $\vec{\nabla}u_2$, $\vec{\nabla}u_3$ વડે દર્શાવાય છે. જ્યાં $\vec{\nabla}u_1$, $\vec{\nabla}u_2$, $\vec{\nabla}u_3$ સમતલોને દોરેલાં લંબસદિશો છે. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ જે તે દિશામાં લીધેલા એકમ સદિશો છે. જો બંને યામ પધ્ધતિઓ લંબચ્છેદી હોય તો,

$$\vec{\nabla}u_1\cdot\vec{\nabla}u_2 = \vec{\nabla}u_2\cdot\vec{\nabla}u_3 = \vec{\nabla}u_3\cdot\vec{\nabla}u_1 = 0 \text{ થાય.}$$

⇒ આ સમતલોને દોરેલાં લંબસદિશો માટે $\frac{\vec{\nabla}u_1}{|\vec{\nabla}u_1|}$, $\frac{\vec{\nabla}u_2}{|\vec{\nabla}u_2|}$ અને $\frac{\vec{\nabla}u_3}{|\vec{\nabla}u_3|}$ એકમ સદિશો છે.

⇒ ધારો કે ds_1 એ u_1 વક્રસપાટીમાં લંબાઈનું વિકલન છે તો

$$|\vec{\nabla}u_1| = \frac{du_1}{ds_1} \text{ થાય.}$$

⇒ હવે, વક્ર $u_2 = c_2$ અને $u_3 = c_3$ ની દિશામાં રેખીય ખંડ ds_1 નું મૂલ્ય $ds_1^2 = h_1^2 du_1^2$ છે. તેથી $ds_1 = h_1 du_1$ ~~~ (1)

⇒ તેમજ લંબચ્છેદી (orthogonal) તંત્ર માટે $\frac{\vec{\nabla}u_1}{|\vec{\nabla}u_1|} = \vec{e_1}$, $\frac{\vec{\nabla}u_2}{|\vec{\nabla}u_2|} = \vec{e_2}$ અને $\frac{\vec{\nabla}u_3}{|\vec{\nabla}u_3|} = \vec{e_3}$ એકમ સદિશો છે.

$$\Rightarrow \frac{\vec{\nabla} u_1}{|\vec{\nabla} u_1|} = \frac{\vec{\nabla} u_1}{du_1/ds_1} = \vec{e_1}$$

$$\therefore \frac{\vec{\nabla} u_1}{du_1/h_1 du_1} = \vec{e_1} \quad (\because \text{સમી.} 1)$$

તેથી,

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e_1} &= h_1 \vec{\nabla} u_1 \\ \vec{e_2} &= h_2 \vec{\nabla} u_2 \\ \vec{e_3} &= h_3 \vec{\nabla} u_3 \end{aligned}}$$

તે જ રીતે,

⇒ લંબચ્છેદી તંત્ર (orthogonal system) માટે,

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e_1} &= \vec{e_2} \times \vec{e_3} = h_2 h_3 \vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3 \\ \vec{e_2} &= \vec{e_3} \times \vec{e_1} = h_3 h_1 \vec{\nabla} u_3 \times \vec{\nabla} u_1 \\ \vec{e_3} &= \vec{e_1} \times \vec{e_2} = h_1 h_2 \vec{\nabla} u_1 \times \vec{\nabla} u_2 \end{aligned}}$$

⇒ ઉપરોક્ત સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીને જ div $\vec{V}$ $(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ અને curl $\vec{V}$ $(\vec{\nabla} \times \vec{V})$ નાં સૂત્રો મેળવવામાં આવે છે.

QUE 80 વક્ર રેખીય લંબચ્છેદી યામ પધ્ધતિ માટે grad ϕ, div $\vec{V}$ અને curl $\vec{V}$ નાં સૂત્રો લખો તે પરથી તેને કાર્ટેઝિયન યામ પધ્ધતિ, નળાકાર યામ પધ્ધતિ અને ગોલીય ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિમાં દર્શાવો.

Ans.:- * વક્ર રેખીય યામ પધ્ધતિ માટે :

1 કોઈ અદિશ ક્ષેત્ર ϕ માટે, gradϕ $(\vec{\nabla}\phi)$

$$\Rightarrow \boxed{\text{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = \vec{e_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1} + \vec{e_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2} + \vec{e_3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}}$$

2 કોઈ સદિશક્ષેત્ર $\vec{V} = \vec{e_1}V_1 + \vec{e_2}V_2 + \vec{e_3}V_3$ માટે, div $\vec{V}$ $(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(V_3 h_1 h_2)\right\}}$$

③ સદિશક્ષેત્ર $\vec{V} = \vec{e_1}V_1 + \vec{e_2}V_2 + \vec{e_3}V_3$ માટે, curl $\vec{V} = (\vec{\nabla} \times \vec{V})$

$$\Rightarrow \text{curl}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} \vec{e_1}h_1 & \vec{e_2}h_2 & \vec{e_3}h_3 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ V_1h_1 & V_2h_2 & V_3h_3 \end{vmatrix}$$

* કાર્ટેઝિયન યામ પદ્ધતિ (x, y, z) માટે:

① $\text{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}$

② $\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

③ $\text{curl}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$

* નળાકાર યામ પદ્ધતિ (r, θ, z) માટે:

① $\text{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = \vec{e_r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \vec{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \vec{e_z}\frac{\partial \phi}{\partial z}$

② $\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(rV_z)\right\}$

③ $\text{curl}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e_r} & r\vec{e_\theta} & \vec{e_z} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial z \\ V_r & rV_\theta & V_z \end{vmatrix}$

* ગોલીય ધ્રુવીય યામ પદ્ધતિ (r, θ, ϕ) માટે:

① $\text{grad}\,\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \vec{e_r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \vec{e_\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$

② $\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\, V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\, V_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(rV_\phi)\right\}$

③ $\text{curl}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e_r} & r\vec{e_\theta} & r\sin\theta\,\vec{e_\phi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta\, V_\phi \end{vmatrix}$

QUE.: Prove that $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$ for cylindrical coordinate system.

Ans.: We know that $x = r\cos\theta$,
$y = r\sin\theta$,
and $z = z$.

Therefore,
$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$
$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$
$$dz = dz$$

Now,
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)^2 + dz^2$$
$$= \cos^2\theta\, dr^2 - 2r\cos\theta\sin\theta\, dr\, d\theta + r^2\sin^2\theta\, d\theta^2 + \sin^2\theta\, dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta + r^2\cos^2\theta\, d\theta^2 + dz^2$$
$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, dr^2 + r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta^2 + dz^2$$
$$\therefore \boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}$$

QUE.: Obtain the relation between $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ and $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$.

Ans.: For rectangular or cartesian coordinates,
$$\vec{ds} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \quad \text{——— (1)}$$

But, $x = r\cos\theta$ & $y = r\sin\theta$

Therefore, $dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$
& $dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$

Substitute these values in eq^n (1)
$$\vec{ds} = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)\,\hat{i} + (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$
$$= (\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})\, dr + r(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\, d\theta + (\hat{k})\, dz$$

Compare this eq^n with
$$\vec{ds} = \hat{e}_r\, dr + \hat{e}_\theta\, r\, d\theta + \hat{e}_z\, dz \quad \text{for cylindrical co-ord}^s.$$

We get,
$$\boxed{\begin{aligned} \hat{e}_r &= \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \\ \hat{e}_\theta &= -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \\ \hat{e}_z &= \hat{k} \end{aligned}}$$