Solution à l'équation Kadomtsev-Petviashvili en termes de fonctions thêta définies sur une surface de Riemann

Harshana Runjeet, Pre. Vasilisa Shramchenko

PHQ662, Initiation à la recherche
Sous la supervision de Pre. Vasilisa Shramchenko

Résumé

Le but de cette initiation à la recherche est de comprendre la riche structure mathématique sous-jacente aux équations différentielles de Kadomtsev-Petviashvili (KP) qui sont une généralisation de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV). Il s'avère qu'il existe une solution analytique à ces équations qui peut être exprimée à l'aide de fonctions thêta définies sur une surface de Riemann. Ce rapport vise à montrer comment l'application d'opérateurs spécifiques sur une fonction générale de type Baker-Akhiezer permet de dériver les équations différentielles KP, en plus d'y trouver une solution associée. On montre en premier lieu que la fonction proposée est unique et indépendante du chemin d'intégration en passant par les propriétés des chemins sur une surface de Riemann. Ensuite, on applique les opérateurs sur l'expansion de Taylor de la fonction pour retrouver l'équation KP et on montre comment la fonction originale vérifie les mêmes conditions. On en déduit donc qu'il est possible d'exprimer l'équation différentielle comme une équation aux valeurs propres sous des conditions de compatibilité de dérivées croisées qui assurent l'existence de la fonction Baker-Akhiezer.

1 Introduction

Les systèmes physiques sont modélisés par des équations qui nous décrivent et prédisent leur évolution. En résolvant ces équations, il est possible de déterminer le comportement d'un système à un instant donné, à partir de conditions initiales. Toutefois, trouver une solution analytique à ces équations ne relève pas d'une tâche simple, surtout quand il s'agit d'équations différentielles non linéaires. Il existe un cas intéressant où une solution analytique existe et il s'agit d'une équation qui régit la propagation dans la direction x d'une onde solitaire en eau peu profonde, soit l'équation Korteweg-de Vries (KdV) [2] :

$$u_t - \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx}) = 0. \tag{1}$$

L'équation de Kadomtsev–Petviashvili (KP) constitue une généralisation de l'équation KdV, prenant en compte une contribution transversale dans la direction y. Cette extension permet d'analyser la stabilité de la solution de KdV sous l'effet de faibles perturbations dans la direction transverse. Voici le système d'équations équivalent à l'équation KP :

$$\frac{3}{4}u_y = w_x, \tag{2}$$

$$w_y = u_t - \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}), \tag{3}$$

que l'on combine pour arriver à la forme suivante :

$$\frac{3}{4}u_{yy} = \partial_x\Big[u_t - \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx})\Big]. \tag{4}$$

Suite au travail de plusieurs mathématiciens, un lien a été fait entre cette équation et sa résolution via des surfaces de Riemann qui définissent une fonction thêta. Dans ce rapport, on étudie la théorie des surfaces de Riemann et son rôle dans la définition de la fonction thêta.La fonction de Baker–Akhiezer est introduite et on présente les propriétés et théorèmes nécessaires pour comprendre comment cette fonction permet de trouver une solution exacte à l'équation KP. Notre démarche suit de près les notes de cours de Dubrovin [1].

2 Théorie

Afin de comprendre la méthode de résolution de l'équation KP, il est essentiel de définir les concepts sur lesquels se construit le raisonnement : les surfaces de Riemann, les différentielles méromorphes, les classes de chemins d'intégration sur une surface de Riemann, la fonction thêta et la fonction de Baker-Akhiezer afin de pouvoir les lier ensemble pour retrouver l'équation KP et en déduire ses solutions exactes.

2.1 Surface de Riemann

Les objets mathématiques utilisés dans ce rapport se basent sur la notion de surface de Riemann qui est une variété différentielle possédant une structure complexe de dimension 1. Cette surface peut être décrite par un ensemble de cartes locales (U_α, z_α), où α est un indice parcourant un certain ensemble. Un Atlas désigne l'ensemble des cartes qui couvrent entièrement la surface. Ces cartes locales sont des homéomorphismes z_α entre des voisinages U_α sur la surface et des disques ouverts dans le plan complexe. Les fonctions de transition entre ces cartes sont holomorphes. Une surface de Riemann peut être représentée par un revêtement ramifié. Topologiquement, une surface de Riemann compacte est une sphère à anses ; elle possède un genre noté g qui donne le nombre de trous de la surface.

2.2 Fonctions et différentielles méromorphes

On peut définir des fonctions et des différentielles méromorphes sur une surface de Riemann X. Une fonction méromorphe sur X est $f : X \to \mathbb{CP}^1$ telle que dans chaque carte locale (U_α, z_α) on a $f(P) = f_\alpha(z_\alpha(P))$ où f_α est une fonction méromorphe, c'est-à-dire représentée par sa série de Laurent : $f_\alpha(z_\alpha) = \sum_{k=-K}^{\infty} c_k z_\alpha^k$. Pour un point P se trouvant dans les voisinages U_α et U_β, on a $f_\alpha(z_\alpha(P)) = f_\beta(z_\beta(P))$. De manière analogue, une différentielle méromorphe ω est un objet représenté dans chaque carte locale par $\omega(P) = w_\alpha(z_\alpha(P))dz_\alpha(P)$.

2.3 Chemins d'intégration sur une surface de Riemann et classes de chemins

Sur une surface de Riemann X, on peut définir un chemin comme une application continue de l'intervalle $[0, 1]$ dans X, soit $\gamma : [0, 1] \to X$. Il est donc possible d'intégrer une différentielle méromorphe sur un chemin quelconque. L'intégration des différentielles sur des chemins de la surface permet d'associer à chaque cycle (un chemin fermé, c'est-à-dire $\gamma(0) = \gamma(1)$) des valeurs complexes dites périodes. Sur une même surface, plusieurs chemins fermés peuvent être équivalents au sens d'homologie. On distingue les classes d'homologie (par déformation sans extrémités fixes) et celles d'homotopie (par déformation fixant les extrémités). Qui plus est, on peut définir une base canonique d'homologie a_i, b_i, pour $i = 1, ..., g$, qui permet de construire toutes les périodes possibles en prenant une combinaison linéaire de celles-ci. Une base canonique d'homologie est telle que pour des classes d'équivalence de cycles fermés non triviaux du groupe fondamental $a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g$, les indices d'intersection sont $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$ et $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$. Pour toute différentielle méromorphe ω sur une surface de Riemann X, les périodes sur les cycles $a_1, b_1, ...$ sont définies comme suit : $\oint_{a_i} \omega = A_i, \oint_{b_i} \omega = B_i,$. Pour une surface X de genre g, on peut construire g différentielles holomorphes linéairement indépendantes. On utilise plus loin des différentielles dites de deuxième espèce avec un pôle à un point Q de la surface d'ordre $n + 1$ et avec une partie principale de la série de Laurent suivante $\omega_Q^{(n)} = \frac{dz}{z^{n+1}}$.

2.4 Matrice de Riemann et fonction thêta

La matrice de Riemann $\mathbb{B}$ est définie par les périodes des différentielles holomorphes normalisées par les conditions $\oint_{a_i} \omega_j = 2\pi i \delta_{ij}$ où a_i, b_j forment la base canonique associée à une surface de Riemann. Elle est définie comme suit :

$$\mathbb{B}_{jk} = \oint_{b_k} \omega_j.$$

Une fonction thêta de Riemann est définie à partir d'une matrice $\mathbb{B}$ dont la partie réelle est définie négative, N, un vecteur d'entiers, et z un vecteur complexe. Ces objets sont de dimension g. La fonction est définie comme suit :

$$\theta(z|\mathbb{B}) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} e^{\{\langle \mathbb{B}N|N\rangle \frac{1}{2} + \langle N|z\rangle\}}$$

. La fonction thêta a les propriétés de quasi périodicité suivantes : pour e_k un vecteur de base de $\mathbb{C}^g$ et $z = (z_1, ..., z_g) \in \mathbb{C}^g$, on a

$$\theta(z + 2i\pi e_k) = \theta(z),$$

pour $f_k = \mathbb{B}e_k$, on a

$$\theta(z+f_k) = exp(-\frac{1}{2}\mathbb{B}_{kk} - z_k)\theta(z).$$

Tout vecteur de type $2i\pi N + BM$ où $N, M \in \mathbb{Z}^g$ est une quasi-période de la fonction thêta, c'est-à-dire,

$$\theta(z + 2i\pi N + \mathbb{B}M) = e^{-\frac{1}{2}\langle \mathbb{B}M, M\rangle - \langle M, z\rangle}\theta(z). \quad (5)$$

Cette fonction sera essentielle dans la construction d'une fonction de Baker-Akhiezer (BA).

2.5 Jacobien d'une surface de Riemann

Le jacobien d'une surface de Riemann X est défini comme le quotient de $\mathbb{C}^g$ par la relation d'équivalence suivante :

$$z_1 \sim z_2 \in \mathbb{C}^g \text{ ssi } \exists N, M \in \mathbb{Z}^g | (z_1 - z_2) = N + \mathbb{B}M.$$

Ainsi, Jac$(X) = \mathbb{C}^g/\sim$. Lorsque $g = 1$, on a une équivalence entre la surface et le jacobien (car le tore est égal au jacobien par $\mathbb{T} = \mathbb{C}/(\{n + m\tau | n, m \in \mathbb{Z}, Re(\tau) < 0\})$.

2.6 Théorème d'Abel

Soit P_0 un point de base fixé sur une surface de Riemann de genre g. On définit l'application d'Abel comme suit :

$$A(P) = \left(\int_{P_0}^{P} \omega_1, \ldots, \int_{P_0}^{P} \omega_g\right), \quad (6)$$

où $\omega_1, \ldots, \omega_g$ sont des différentielles holomorphes normalisées linéairement indépendantes. Cette application envoie un point de la surface de Riemann dans le tore jacobien défini à la Section 2.5.

Le théorème d'Abel affirme que les points $P_1, \ldots, P_n$ et $Q_1, \ldots, Q_n$ sont respectivement les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe sur la surface si et seulement si, l'égalité suivante est satisfaite dans le jacobien :

$$A(P_1) + \cdots + A(P_n) \equiv A(Q_1) + \cdots + A(Q_n).$$

2.7 Diviseurs

Un diviseur D sur une surface de Riemann X de genre g est défini comme une combinaison linéaire formelle des points sur X, soit :

$$D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i$$

pour $P_i \in X, n_i \in \mathbb{Z}$. Dans ce rapport, nous considérons uniquement les diviseurs dits non-spéciaux (Définition 2.10.3) [1], de la forme

$$D = P_1 + ... + P_g. \quad (7)$$

Il est possible de faire une application d'Abel sur le diviseur, on obtient :

$$A^{(g)}(D) = \sum_{\alpha} \int_{P_0}^{P_\alpha} (\omega_1, ..., \omega_g). \quad (8)$$

De plus, en vertu du corollaire 2.12.6 [1], on a que pour un vecteur de Riemann κ :

$$\kappa_j = \frac{2i\pi + \mathbb{B}_{jj}}{2} - \frac{1}{2i\pi} \sum_{l \neq j} \left(\oint_{a_l} \omega_l \int_{P_0}^{P} \omega_j \right) \quad (9)$$

pour $j = 1, ..., g$ et ω_l, ω_j des différentielles holomorphes normalisées et $\mathbb{B}$ la matrice de Riemann, la fonction $\theta(A(P) - A^{(g)}(D) - \kappa)$ a sur la surface X , g zéros à $P = P_1, ..., P_g$. Cette fonction est présente dans la définition de la fonction de Baker-Akhiezer qui suit.

2.8 Fonction de Baker-Akhiezer (BA)

La fonction de Baker-Akhiezer ou fonction BA est définie comme suit [1] : Soit $D = P_1 + ... + P_g$, un diviseur positif de degré g sur une surface de Riemann X excluant le point choisi Q. Une fonction BA sur la surface correspondant au point Q, où le paramètre local est $z = k^{-1}$, le polynôme $q(k)$ ainsi que le diviseur D est une fonction $\psi(P)$ telle que :

1. $\psi(P)$ est méromorphe sur la surface partout sauf en Q et possède sur $\Gamma \backslash Q$ des pôles uniquement aux points P_j de D.
2. $\psi(Q)\exp(-q(k(Q)))$ est analytique (sans singularité) dans un voisinage de Q, ou encore la fonction possède une singularité essentielle au point Q de la forme $\exp(q(k))$.

Il en résulte que pour un point Q, un diviseur D, un polynôme $q(k)$ et un paramètre local k^{-1} près de Q donnés, on a la fonction ψ. On en déduit [1] que la fonction est unique à une constante de normalisation près. Dans notre cas, la fonction utilisée est celle de Baker-Akhiezer à un facteur constant près :

$$\psi(P) = \frac{\theta\big(A(P) - A^{(g)}(D) + xU + yV + tW - \kappa\big)}{\theta\big(A(P) - A^{(g)}(D) - \kappa\big)} \times \exp\left(x\int_{P_0}^{P} \Omega_1 + y\int_{P_0}^{P} \Omega_2 + t\int_{P_0}^{P} \Omega_3\right). \quad (10)$$

— Ici, $\theta(z)$ est la fonction thetâ de Riemann,
— $A(P)$ est l'application d'Abel de P_0 à P, définie par l'équation (6),
— $A^{(g)}(D)$ est l'application d'Abel du diviseur D (8),
— κ, le vecteur de Riemann (9),
— $U = (U_1, ..., U_g)$ et $U_i = \oint_{b_i} \Omega_1$,
— $V = (V_1, ..., V_g)$ et $V_i = \oint_{b_i} \Omega_2$,
— $W = (W_1, ..., W_g)$ et $W_i = \oint_{b_i} \Omega_3$,
— Ω_j sont des différentielles normalisées méromorphes de résidu nul de 2ième espèce ayant pour seule singularité un pôle au point Q avec le comportement suivant

$$\Omega_j^{(Q)} \approx d(k^j) = d\Big(\frac{1}{z^j}\Big), \tag{11}$$

où k est un paramètre local choisi plus haut dans un voisinage de Q. On peut démontrer que le comportement au point Q de la fonction ψ est donnée par

$$\psi(P) = \left(1 + \frac{\xi_1}{k} + \frac{\xi_2}{k^2} + ...\right) e^{kx+k^2y+k^3t} \tag{12}$$

où $k = k(P)$, $P \to Q$ et ξ_j sont des fonctions de x, y, t.

3 Méthodologie et résultats

3.1 Unicité de la fonction Baker-Akhiezer

Nous allons démontrer les différentes étapes qui mènent à l'équation KP. Débutons par montrer que la fonction de Baker-Akhiezer sur laquelle on se base (10) est bien définie sur la surface. Pour ce faire, nous devons montrer que cette fonction est indépendante du chemin d'intégration de P_0 à P. Il est utile de remarquer que le chemin d'intégration de P_0 à P n'est pas spécifié dans (10), donc on veut montrer que $\psi(P)$ définie par (10) donne le même résultat pour un chemin quelconque. C'est-à-dire soit $\gamma = \sum_l n_l a_l + \sum_l m_l b_l$, un chemin fermé général exprimé comme une combinaison linéaire de la base canonique de la surface. On peut ajouter l'intégrale $\int_\gamma$ à $A(P)$, et aux intégrales des différentielles Ω_j.

Ce faisant, on obtient

$$\begin{aligned} A(P) + \oint_\gamma \omega &= \int_{P_0}^{P} \omega + \oint_\gamma \omega \\ &= A(P) + 2i\pi N + BM \end{aligned}$$

pour $N, M \in \mathbb{Z}^g$. En se référant aux propriétés des fonctions thêta soit l'équation (5), on ajoute à l'argument des fonctions thêta de l'équation $\psi(P)$ (10) une période, donc l'intégration de la fonction d'Abel sur un chemin quelconque modifie la fonction (10) de la manière suivante :

$$\hat{\psi}(P) = \exp\big(- \langle M, xU + yV + tW\rangle \big)\psi(P).$$

En ce qui concerne les arguments de l'exponentielle, on obtient :

$$\begin{aligned} x\left(\int_{P_0}^{P} \Omega_1 + \int_\gamma \Omega_1\right) &= x\int_{P_0}^{P} \Omega_1 + \langle M, xU\rangle \\ y\left(\int_{P_0}^{P} \Omega_2 + \int_\gamma \Omega_2\right) &= y\int_{P_0}^{P} \Omega_2 + \langle M, yV\rangle \\ t\left(\int_{P_0}^{P} \Omega_3 + \int_\gamma \Omega_2\right) &= t\int_{P_0}^{P} \Omega_3 + \langle M, tW\rangle \end{aligned}$$

ce qui revient à multiplier la fonction $\psi(P)$ par $\exp\big(\langle M, xU + yV + tW\rangle\big)$, qui compense exactement avec le facteur supplémentaire que multiplie la fonction lorsqu'on modifie $A(P)$ pour le même chemin quelconque. On a donc que la fonction $\psi(P)$ est indépendante du chemin d'intégration.

3.2 Constructions des opérateurs L et A

Dans un deuxième temps, nous allons définir deux opérateurs $A(u, w)$ et $L(u)$ dont l'action sur la fonction BA de $\psi(P)$ donne le produit de la série $O\Big(\frac{1}{k}\Big)$ et d'une exponentielle $e^{kx+k^2y+k^3t}$ pour une valeur de u, w spécifiques. Autrement dit, on souhaite obtenir

$$[-\partial_y + L(u)]\psi = O\left(\frac{1}{k}\right) e^{kx+k^2y+k^3t} \tag{13}$$

$$[-\partial_t + A(u, w)]\psi = O\left(\frac{1}{k}\right) e^{kx+k^2y+k^3t} \tag{14}$$

pour les opérateurs

$$A = \partial_x^3 + \frac{3}{4}(u\partial_x + \partial_x u) + w \tag{15}$$

$$L = \partial_x^2 + u. \tag{16}$$

Pour déterminer u et w, on applique les opérateurs et on impose que tous les termes d'ordre k^n où $n \geq 0$ s'annulent.

En appliquant $(-\partial_y + L)$ à $\psi(P)$, on obtient :

$$\Big(-\sum_{j=1} \frac{\frac{\partial}{\partial y}\xi_j}{k^j} + \sum_{j=1} \frac{\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\xi_j}{k^j} + 2\partial_x \xi_1 + 2k \sum_{j=2} \frac{\frac{\partial}{\partial x}\xi_j}{k^j} + u + u \sum_{j=1} \frac{\xi_j}{k^j} \Big) e^{kx+k^2y+k^3t} = \left(2\partial_x \xi_1 + u + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) e^{kx+k^2y+k^3t}.$$

Pour obtenir l'équation souhaitée (13), on impose :

$$u = -2\partial_x \xi_1. \tag{17}$$

En appliquant $(-\partial_t + A)$ à $\psi(P)$, on obtient :

$$\left(\frac{3}{2}uk + \frac{3}{2}u \sum_{j=1} \frac{\partial_x \xi_j}{k^j} + \frac{3}{2}ku \sum_{j=1} \frac{\xi_j}{k^j} + \frac{3}{4}u_x + \frac{3}{4}u_x \sum_{j=1} \frac{\xi_j}{k^j} - \sum_{j=1} \frac{\partial_t \xi_j}{k^j} + \sum_{j=1} \frac{\partial_x^3 \xi_j}{k^j} + 3k \sum_{j=1} \frac{\partial_x^2 \xi_j}{k^j} + 3k^2 \sum_{j=1} \frac{\partial_x \xi_j}{k^j} + w + w \sum_{j=1} \frac{\xi_j}{k_j} \right) e^{kx+k^2y+k^3t}$$
$$= \Big(3\partial_x^2 \xi_1 + 3\partial_x \xi_1 + 3\partial_x \xi_2 + \frac{3}{2}u + \frac{3}{2}u\xi_1 + \frac{3}{4}u_x + w + O(\frac{1}{k}) \Big) e^{kx+k^2y+k^3t}.$$

Pour obtenir l'équation souhaitée (14), et en remplaçant u par l'expression donnée en (17), on impose :

$$w = 3\xi_1 \partial_x \xi_1 - 3\partial_x \xi_2 - \frac{3}{2}\partial_x^2 \xi_1. \tag{18}$$

3.3 Conditions de compatibilité : de la fonction BA à l'équation KP

Par ailleurs, nous voulons montrer que ψ est une solution au système suivant :

$$\partial_y \psi = L\psi \tag{19}$$
$$\partial_t \psi = A\psi. \tag{20}$$

Plus tard, ce fait nous mène à montrer que le coefficient u de l'opérateur L vérifie l'équation KP. La preuve du système (19) et (20) se fait d'abord en montrant que le membre à droite des égalités (13) et (14) s'annule. Remarquons que les deux fonctions : $\varphi_1 = (-\partial_y + L)\,\psi = O\left(\frac{1}{k}\right) e^q$ et $\varphi_2 = (-\partial_y + L)\,\psi = O\left(\frac{1}{k}\right) e^q$,où $q = kx + k^2y + k^3t$, ainsi que la fonction ψ vérifient la définition de la fonction BA (2.8) avec le même diviseur D (7) et la même fonction polynomiale $q(k)$. Par conséquent, les fonctions φ_1/ψ et φ_2/ψ se comportent comme $O(\frac{1}{k})$ près du point Q où il s'avère que $k = \infty$ et $O(\frac{1}{k}) = 0$. Selon le Théorème 3.1.5 [1] , la fonction BA correspondant à un diviseur et un polynôme q est unique à un facteur constant près. Il en suit que les fonctions φ_1/ψ et φ_2/ψ sont des constantes. Comme ces fonctions constantes s'annulent au point Q, elles s'annulent partout. Cela démontre que les parties de droite dans (13) et (14) sont nulles, et on obtient le système (19) et (20) pour la fonction ψ :

$$(-\partial_y + L)\psi = 0 = (-\partial_t + A)\psi$$
$$\implies \partial_y \psi = L\psi$$
$$\implies \partial_t \psi = A\psi.$$

L'égalité des dérivées croisées qui est la condition de compatibilité pour le système (19), (20) implique $[-\partial_y + L, -\partial_t + A] = 0$. On peut le montrer de la manière suivante :

$$\partial_t(\partial_y \psi) = \partial_y(\partial_t \psi)$$
$$\partial_t(L\psi) = \partial_y(A\psi)$$
$$L_t\psi + L\partial_t\psi = A_y\psi + A\partial_y\psi.$$

On peut remplacer l'expression de L_t et A_y, sachant que $\partial_t L = L_t + L\partial_t$, $\partial_y A = A_y + A\partial_y$:

$$(\partial_t L - L\partial_t)\psi + L\partial_t\psi = (\partial_y A - A\partial_y)\psi + A\partial_y\psi$$
$$\implies \partial_t L - L\partial_t + [L, A] = \partial_y A - A\partial_y$$
$$\implies 0 = [-\partial_y + L, -\partial_t + A]$$

ce qui est bien le résultat souhaité. Il s'avère qu'un calcul direct du commutateur [1] mène aux équations (2) et (3) pour u et w. Ensuite, en exprimant w en termes de u, on obtient l'équation KP pour u soit l'équation (4).

3.4 Solution de l'équation KP en termes de la fonction thêta

Nous avons déjà obtenu (17) la fonction u, la solution de KP, en utilisant le coefficient ξ_1 du développement en série (12) de la fonction ψ (10) au point Q. Maintenant, on aime-

1. Le calcul a été omis ici, car il est long, mais la méthode utilisée a été de développer le commutateur en une somme de commutateurs à deux opérateurs et de les appliquer sur une fonction f quelconque. Ce faisant on obtient l'égalité $P_1\partial_x + P_2 = 0$, où $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ sont précisément les équations (2) et (3).

rait exprimer u en termes de la fonction thêta. D'une part, on procède en prenant le logarithme de la fonction ψ dans la forme (12). Ce faisant, on obtient :

$$\log \psi(P) = kx + k^2 y + k^3 t + \frac{\eta_1}{k} + \frac{\eta_2}{k^2} + ..., \tag{21}$$

pour $\eta_1 = \xi_1$ et $\eta_2 = \xi_2 - \frac{1}{2}\xi_1^2$. Il s'avère que $u = -2\partial_x \xi_1 = -2\partial_x \eta_1$. Ainsi, il suffit de trouver le terme en $\frac{1}{k}$ de la série au point Q pour la fonction ψ sous la forme (10) et on trouve u en termes de fonctions thêta définies sur une surface de Riemann, le but de ce rapport. Premièrement, il faut prendre le logarithme de $\psi(P)$:

$$\log \psi = \log \frac{\theta(F(x, y, t, D, P))}{\theta\big(A(P) - A^{(g)}(D) - \kappa\big)} + \left(x \int_{P_0}^{P} \Omega_1 + y \int_{P_0}^{P} \Omega_2 + t \int_{P_0}^{P} \Omega_3 \right),$$

,où $F(\mathbf{x}, D, P) := A(P) - A^{(g)}(D) + xU + yV + tW - \kappa$, pour $\mathbf{x}= x, y, t$. Le point de base P_0 n'étant pas spécifié dans la définition (10), on peut le choisir égal à Q, ce qui permet de poser $A(Q) = 0$. Ensuite, on peut développer le logarithme de l'équation précédente pour $P \simeq Q$ avec le paramètre local $\zeta = \frac{1}{k}$ (qui est d'ailleurs nul à Q) :

$$\log \theta(F(Q)) + \sum_{j=1}^{g} \frac{\partial_{z_j} \theta(F(Q))}{\theta(F(Q))} \cdot U_j \zeta(P) + \cdots . \tag{22}$$

Maintenant, au voisinage de Q, on a le développement suivant pour l'application d'Abel (équation 3.2.27)[1] :

$$A(P) = -\frac{1}{k}U - \frac{1}{2k^2}V + O\Big(\frac{1}{k^3}\Big).$$

D'autre part, on a :

$$\partial_x(\theta\big(A(P) - A^{(g)}(D) + xU + yV + tW - \kappa\big)) = \sum_{j=1}^{g} \partial_{z_j}(A(P) - A^{(g)}(D) + xU + yV + tW - \kappa) \cdot U_j$$

Cette dernière expression correspond au numérateur du deuxième terme dans le développement (22) quand $\zeta(P) = \frac{1}{k}$. De façon analogue, on retrouve la combinaison de dérivées $\partial_y - \partial_x^2$ de thêta dans le terme d'ordre $1/k^2$ du développement (22). En ce qui concerne la contribution des différentielles, nous avons le développement des intégrales abéliennes (équation 3.2.26) [1] :

$$\int_{P_0}^{P} \Omega_1 = k + c_0 + \frac{c}{k} + \frac{c_1}{k^2} + ...$$
$$\int_{P_0}^{P} \Omega_2 = k^2 + a_0 + \frac{a}{k} + \frac{a_1}{k^2} + ...$$
$$\int_{P_0}^{P} \Omega_3 = k^3 + b_0 + \frac{b}{k} + \frac{b_1}{k^2} + ...$$

Cela nous permet de relier les coefficients de la série de Laurent pour $\log \psi$ avec les dérivées par rapport à x et y de la fonction thêta et ainsi obtenir l'expression suivante pour u (équation 3.2.21) [1] :

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \log(\theta(xU + yV + tW + z_0)) + c \tag{23}$$

$$w(x, y, t) = \frac{3}{2}\partial_x \partial_y \log(\theta(xU + yV + tW + z_0)) + c_1. \tag{24}$$

Ce sont des solutions exactes à l'équation KP.

4 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons présenté une construction de solutions de l'équation de Kadomtsev–Petviashvili (KP) à l'aide de la fonction de Baker–Akhiezer définie sur une surface de Riemann. Nous avons construit un système dont les conditions de compatibilité mènent à l'équation KP. Nous avons ensuite étudié le développement en série de Laurent de la fonction de Baker-Akhiezer au voisinage d'un point de la surface Q, et montré comment les premiers coefficients de cette série permettent de reconstruire les fonctions u et w. Il s'agit de solutions exactes à l'équation KP en fonction des dérivées logarithmiques de la fonction thêta associée à la surface de Riemann. En réalité, les variables x, y, t sont quelconques ici, donc il serait possible de généraliser ce type d'équations pour autant de variables souhaitées et même étudier ce qu'on appelle la hiérarchie KP qui est un système d'une infinité d'équations différentielles.

Références

[1] Boris DUBROVIN. *Integrable Systems and Riemann Surfaces Lecture Notes (preliminary version)*. 2009.

[2] Belenkolos Bobenko Matveev ENOLSKII. *Algebro-Geometric Approach to Nonliear Integrable Equations*. Accessed : 2025-01-10. 2025.