

Příklad 1.

Dokažte kombinatorickou úvahou:

$$\text{a) } \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\text{c) } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Příklad 2.

Kolik zbude z čísel $1, \dots, n$ po vyškrtání všech násobků 2, 3 a 5?

Příklad 3.

Sečtěte $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

Příklad 4.

Kolik existuje možností, jak rozmístit n nerozlišitelných kuliček do p rozlišitelných přihrádek? Co když jsou kuličky rozlišitelné? A co když v každé přihrádce musí být alespoň jedna kulička?

Příklad 5.

Mějme zobrazení $w : A \rightarrow \mathbb{N}$, které každému prvku množiny A přiřadí *váhu*. Definujme $w(B) = \sum_{b \in B} w(b)$ jako váhu množiny $B \subseteq A$. Dokažte, že platí *vážená verze PIE* – pro konečné množiny $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ platí:

$$w\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{i \in \binom{[n]}{k}} w\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

Příklad 6.

Dokažte, že pro každé $k \leq n$ platí $\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Příklad 7.

Sečtěte:

$$\text{a) } \sum_{i=0}^n i^2$$

$$\text{b) } \sum_{i=0}^n i^2 + 3i$$

$$\text{c) } \sum_{i=0}^n 2i^2 - i$$

$$\text{*d) } \sum_{i=0}^n i^3 - 3i^2 + 2i$$

$$\text{**e) } \sum_{x=0}^n \sum_{i=0}^k a_i x^i \text{ (libovolný polynom v proměnné } x)$$

Příklad 8.

Řekněme, že číslo je *prvočíselně vypadající*, jestliže je složené, ale není dělitelné 2, 3 ani 5. Tři nejmenší prvočíselně vypadající čísla jsou 49, 77 a 91. Víme, že prvočísel menších než 1000 je 168. Kolik je prvočíselně vypadajících čísel menších než 1000?

Příklad 9.

Paul bydlí v Manhattanu a chce navštívit Paulu, která bydlí o m ulic na sever a n ulic na západ. V Manhattanu tyto ulice tvoří čtvercovou mřížku. Kolik existuje možných cest od Paula k Paule, pokud Paul nikdy nepojede po ulici na jih nebo na východ?