10. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 2. 12. 2022

Definice. Hranový graf grafu $G(V, E)$, který má alespoň jednu hranu, je graf $L(G)(E, E')$ takový, že $\{e_1, e_2\} \in E'$ právě když $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, tedy vrcholy jsou původní hrany a hrany spojují vrcholy reprezentující hrany, které měly společný vrchol.

Příklad 1.
Pro která $n \geq 0$ existuje graf s právě n kostrami?

Příklad 2.
Pro jaké grafy platí, že $L(G)$ je strom? A pro jaké grafy platí, že $L(G) \simeq G$?

Příklad 3.
Najděte dva různé souvislé grafy, jímž odpovídá tentýž hranový graf.

Příklad 4.
Nechť m, n, k jsou přirozená čísla taková, aby příslušná zadání dávala smysl. Určete počet koster následujících grafů:

a) Strom na n vrcholech
b) Úplný bipartitní graf $K_{n,2}$
c) Úplný bipartitní graf $K_{n,3}$
d) „Činka“, tedy dvě kružnice C_m, C_n, kde je jeden vrchol první kružnice spojen s vrcholem druhé kružnice cestou délky k

Příklad 5.
Ukažte, že je-li hrana v grafu most, pak ji každá kostra obsahuje.

Příklad 6.
Nechť G je orientovaný graf, jehož podkladový graf je strom. Může být G silně souvislý?

Příklad 7.
Ukažte, že každý strom na alespoň třech vrcholech, který neobsahuje vrchol stupně 2, má více listů, než vnitřních vrcholů.

Příklad 8.
Mějme strom T a $n \geq 2$ jeho souvislých podgrafů $T_1, T_2, \ldots, T_n$ s vrcholy $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Dokažte, že:

a) $\bigcap_{i=1}^{n} T_i$ je buď strom nebo prázdný graf
b) Jestliže pro každé $1 \leq k, l \leq n$ platí $V_k \cap V_l \neq \emptyset$, pak také $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \neq \emptyset$
c) Kdyby G nebyl strom, předchozí tvrzení nemusí platit.

Průnik n podgrafů je podgraf, který obsahuje právě ty vrcholy a hrany, které se vyskytují ve všech n podgrafech.

Příklad 9.
Nechť G je strom a $v \in V(G)$ je vrchol stupně k. Ukažte, že G obsahuje alespoň k listů.