4. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 21. 10. 2022

Příklad 1.

Uvažujme relaci $x \setminus y$ na množině $[n]$.

a) Dokažte, že je částečné uspořádání. Je lineární?
b) Nakreslete Hasseův diagram (třeba pro $n = 13$).
c) Jak vypadají maximální a minimální prvky?
d) Existuje nejmenší nebo největší prvek?
e) Jak vypadají řetězce a antiřetězce?

Příklad 2.

Jak se změní odpovědi předchozího příkladu, pokud z množiny odstraníme 1?

Příklad 3.

Rozhodněte, zda jsou následující relace $\sim$ na množině X ekvivalence. Pokud ano, popište třídy ekvivalence:

a) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a \sim b \Leftrightarrow a \setminus b \wedge b \setminus a$
b) $X = \mathbb{Z}$, $a \sim b \Leftrightarrow b = -a$
c) $X = \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow |b - a| \leq 1$
d) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
e) $X = 2^{\mathbb{N}}$, $A \sim B \Leftrightarrow$ existuje bijekce z A do B
f) $X =$ množina všech přímek v rovině, $p \sim q \Leftrightarrow p$ a q jsou rovnoběžné

Příklad 4.

Najděte částečné uspořádání na libovolné množině s danými vlastnostmi:

a) nemá minimální ani maximální prvek
b) nemá největší, ale má alespoň jeden maximální prvek
c) nemá největší, ale má právě jeden maximální prvek
d) má nekonečně mnoho minimálních prvků, ale nemá maximální prvek

Příklad 5.

Kolika způsoby lze rozestavit bílého a černého krále na šachovnici tak, aby nestáli na stejném políčku? A kolika způsoby tak, aby se navzájem neohrožovali?

Příklad 6.

Kolika způsoby umíme vybrat množiny $A, B \subseteq [n]$ takové, že:

a) $A \subseteq B$
b) $A = \{x\}$ a $x \in B$
c) $A \cup B = [n]$
d) $|A \cap B| = 0$
e) $|A \cap B| = 1$
f) $|A \setminus B| = 1$