7. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 11. 11. 2022

Definice. Doplněk grafu $G = (V, E)$ je $H = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$, tedy graf, který má přesně opačné hrany.

Příklad 1.
Na plese je n párů. Kolik je rozdělění do dvojic takových, že žádný pár netančí spolu?

Příklad 2.
Mějme zobrazení $w : A \to \mathbb{N}$, které každému prvku množiny A přiřadí *váhu*. Definujme $w(B) = \sum_{b \in B} w(b)$ jako váhu množiny $B \subseteq A$. Dokažte, že platí *vážená verze PIE* – pro konečné množiny $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ platí:

$$w\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i \in \binom{[n]}{k}} w\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

Příklad 3.
Dokažte, že jsou dva grafy izomorfní právě, když jsou izomorfní jejich doplňky.

Příklad 4.
Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Příklad 5.
Mějme n bílých kuliček v řadě. Kolika způsoby můžeme přebarvit k z nich na černo tak, aby nebyly vedle sebe dvě černé?

Příklad 6.
Sečtěte:

a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{2}$
b) $\sum_{i=0}^{n} i^2$
c) $\sum_{i=0}^{n} 2i^2 - i + 4$
*d) $\sum_{i=0}^{n} i^3$
**e) $\sum_{i=0}^{n} i^k$ pro libovolné $k \geq 0$

Příklad 7.
Paul bydlí v Manhattanu a chce navštívit Paulu, která bydlí o m ulic na sever a n ulic na západ. V Manhattanu tyto ulice tvoří čtvercovou mřížku. Kolik existuje možných cest od Paula k Paule, pokud Paul nikdy nepojede po ulici na jih nebo na východ?

Příklad 8.
Najděte nějaký graf, který je izomorfní svému doplňku. Co musí platit pro jeho počet vrcholů a hran?