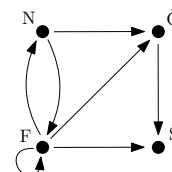


1 Výroky

V následujících příkladech uvažujeme množinu států:

$$M = \{\text{Francie, Německo, Česko, Slovensko}\}$$

a necht' $V(x, y)$ je zkratka pro výrok: „Stát x vyváží víno do státu y .“.
Vztah V je znázorněn na diagramu vpravo.



Příklad 1 (Překládání).

Vyjádřete výroky v přirozeném jazyce matematickými symboly a naopak:

- (a) Slovensko vyváží víno do Francie.
- (b) $\exists y \in M : V(\text{Německo}, y)$

Příklad 2 (Pořadí kvantifikátorů).

Vyjádřete následující výroky slovy a následně určete, zda jsou pravdivé či lživé:

- (a) $\forall x \in M \exists y \in M : V(x, y)$
- (b) $\forall x \in M \exists y \in M : V(y, x)$
- (c) $\exists x \in M \forall y \in M : V(x, y)$
- (d) $\exists x \in M \forall y \in M : V(y, x)$

Příklad 3 (Důkazy).

O jisté množině států E jsme zjistili, že splňují:

1. $\forall x \in E \forall y \in E : V(x, y) \Rightarrow \neg V(y, x)$
2. $\forall x \in E \forall y \in E \forall z \in E : V(x, y) \wedge V(y, z) \Rightarrow V(x, z)$

- (a) Zkuste formulovat podmínky vlastními slovy. Splňuje tyto podmínky i množina M výše?
- (b) Dokažte, že v E neexistuje stát, který vyváží víno sám sobě.
- (c) * Dokažte, že v E neexistuje posloupnost států x_0, \dots, x_n t.ž. $V(x_0, x_1) \wedge V(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge V(x_{n-1}, x_n)$ kde $x_0 = x_n$.

2 Množiny

Definice. Definujeme symetrický rozdíl množin A, B jako $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Příklad 4 (Symetrický rozdíl poprvé).

Vyhodnoťte následující výrazy:

- (a) $M \triangle \{\text{Francie, Španělsko}\}$
- (b) $A \triangle A$ pro libovolnou množinu A

Příklad 5 (Symetrický rozdíl podruhé).

Mějme libovolnou konečnou množinu K . Uvažme všechny její podmnožiny obsahující právě dva prvky. Jaké množiny jsme z nich schopni vytvořit pomocí operace \triangle ? Jsme takto schopni zkonstruovat libovolnou podmnožinu množiny K ?

Příklad 6 (Operace na množinách).

Určete maximální počet různých množin, které můžeme získat z množin A, B aplikováním operací \cup, \cap, \setminus . Operace můžete opakovat i kombinovat. Stejně tak můžete libovolnou z množin použít vícekrát.

3 Hádanky

Příklad 7 (Topinky).

Jakožto chudý student nemající dost peněz na topinkovač si smažíme topinky na pánvi. Opéci jednu stranu topinky trvá 2 minuty. Na pánev se vejdou současně nejvýš dva krajíce. Jak dlouho bude trvat opečení 3 krajíců chleba? Jak dlouho bude trvat opéct n krajíců chleba?

Příklad 8 (Rovnoramenná váha).

Máme k dispozici rovnoramennou váhu a 9 mincí. Jedna z mincí je ovšem falešná, což se pozná tak, že je lehčí než ostatní mince, které váží všechny stejně. Na kolik nejméně vážení dokážeme zjistit, která z mincí je falešná?

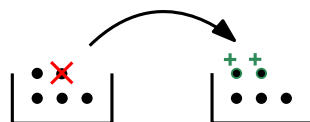
Příklad 9 (Hazard).

V casinu ti nabídli následující hru: Nejprve zaplatíš 1 euro za vstup do hry. Dále je před tebe položeno 6 přihrádek, kde v každé leží jeden cent. Můžeš ve kterémkoliv tahu vyjmout obsah všech přihrádek, takto získanou částku si ponechat a odejít ze hry. Dále můžeš zahodit jeden cent z nějaké přihrádky a vložit dva centy do přihrádky bezprostředně napravo od ní.

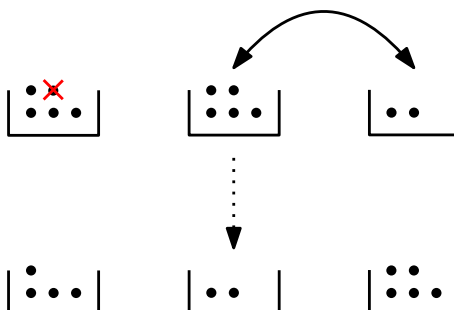
- (a) Vyplatí se ti přijmout nabídku a hrát?
- (b) Máš k dispozici navíc akci: Zahodit cent z nějaké přihrádky a prohodit obsah dvou přihrádek bezprostředně vpravo od této přihrádky. Kolik peněz zvládneš vydělat nyní?



Počáteční rozložení přihrádek



Základní pravidlo



Pravidlo navíc